

# ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ / ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

## ΤΜΗΜΑ 26

1 Ιουνίου 2005

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>** (0.5+0.75+0.75=2 β.)

**α)** Ποιός είναι ο ορισμός μιας σειράς συναρτήσεων  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα σε ένα διάστημα  $[a, b]$ ;

**β)** Απόδειξτε το κριτήριο *Weierstrass* (*M-test*), ότι δηλαδή αν  $|f_n(x)| \leq M_n$  και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  συγκλίνει τότε και η σειρά συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα.

**γ)** Αποδείξτε ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1+n^2x^2}\right)^2$  συγκλίνει ομοιόμορφα για  $x \geq 0$

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>** (0.5+0.75+0.75=2 β.) Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

**(α)**  $\int_0^1 \frac{(\arctan x)^n}{1+x^2} dx = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{n+1}$

**(β)**  $\int_0^{\pi} \frac{dx}{5+4 \cos x} = \frac{\pi}{3}$ ,

**(γ)**  $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{(3-x)(x-2)}} dx = \frac{5\pi}{2}$

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>** (2 β.) Να βρεθεί το όριο:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{4}$

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>** (2 β.) Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας, που δημιουργείται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα  $Ox$  του τμήματος της κυκλοειδούς που δίνεται από την παραμετρική εξίσωση:

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Σημ.  $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$

**ΘΕΜΑ 5<sup>ο</sup>** (2 β.) Μελετήστε αν υπάρχουν τα ολοκληρώματα

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^{1/2}} dx, \quad (b) \int_0^1 \frac{x(1-x)}{\ln x} dx$$

---

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !**

---