ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ - 1

Ασκηση 1: $0 < a < 1, \ \rightsquigarrow \ a^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

ΛΥΣΗ:

$$0 < a < 1, \ \rightsquigarrow \ a = \frac{1}{1+x}, \ x = \frac{1}{a} - 1 > 0$$
$$(1+x)^n \geq nx \ \rightsquigarrow \ \frac{1}{nx} \geq \frac{1}{(1+x)^n}$$
$$a^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{nx} < \frac{1}{Nx} = \epsilon \rightsquigarrow N(\epsilon) = \frac{1}{x\epsilon}$$
$$\forall\, \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) = \frac{1}{x\epsilon} \ : \ a^n < \epsilon \Rightarrow a^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ασκηση 2: $0 < a < 1, \ \rightsquigarrow \ na^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ **ΛΥΣΗ**:

$$\text{Newton} \rightsquigarrow \ x > 0, \ (1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}x^2 \rightsquigarrow \frac{2}{(n-1)x^2} \geq \frac{n}{(1+x)^n}$$
$$0 < a < 1 \ \rightsquigarrow \ a = \frac{1}{1+x} \rightsquigarrow na_n = \frac{n}{(1+x)^n} \leq \frac{2}{(n-1)x^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ασκηση 3: $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ και $a_n > 0, \beta > 0 \rightsquigarrow (a_n)^\beta \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

(Εφαρμογή: $\frac{1}{n^\beta} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$)

ΛΥΣΗ:

$$\left\{a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\} \Leftrightarrow \{\forall\epsilon, \ \exists N(\epsilon): \ n > N(\epsilon) \rightsquigarrow a_n < \epsilon\}$$
$$a_n < \epsilon \rightsquigarrow (a_n)^\beta < (\epsilon)^\beta = \widetilde{\epsilon} \rightsquigarrow \epsilon = \widetilde{\epsilon}^{\frac{1}{\beta}}$$
$$\left\{\forall\widetilde{\epsilon}, \ \exists\widetilde{N}(\widetilde{\epsilon}) \equiv N(\widetilde{\epsilon}^{1/\beta}): \ n > \widetilde{N}(\widetilde{\epsilon}) \rightsquigarrow (a_n)^\beta < \widetilde{\epsilon}(=\epsilon^\beta)\right\} \Leftrightarrow \left\{(a_n)^\beta \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\}$$

Ασκηση 4: $0 < a < 1, \ \beta > 0 \ \rightsquigarrow \ n^\beta a^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Ασκηση 5: Εστω $a > 0$, τότε $\sqrt[n]{a} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

Ασκηση 6: $\sqrt[n]{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

ΛΥΣΗ:

$$\text{Newton} \rightsquigarrow \ x > 0, \ (1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}x^2 \rightsquigarrow x^2 \leq \frac{2(1+x)^n}{n(n-1)}$$
$$x = \sqrt[n]{n} - 1 \rightsquigarrow (\sqrt[n]{n} - 1)^2 \leq \frac{2(1+\sqrt[n]{n}-1)^n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ασκηση 7: $a > 1, \, x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \rightsquigarrow a^{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

Ασκηση 8: Αποδείξτε ότι αν $x_n \to 0$ τότε και $\ln(1+x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Ασκηση 9: Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι μηδενικές:

$$\frac{n}{n^2-5}, \quad \frac{n^2}{n^3-2n^2-5}, \quad \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \frac{3}{\sqrt{n^2+1}},$$
$$\frac{1-\sqrt{n}}{n^3}, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} - 1, \quad \frac{\sin\, n^3}{n}, \quad \frac{\sin\, n^2 + \cos\, n}{n^2+2},$$
$$\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}, \quad n\left(\sqrt{n^4+16} - n^2\right), \quad \left(\sqrt[8]{n^2+2} - \sqrt[4]{n+1}\right), \quad \frac{n^m}{2^n}$$

Ασκηση 10: Να μελετηθεί η σύγκλιση της ακολουθίας $a_n = \frac{n!}{n^n}$ για $n \to \infty$

ΛΥΣΗ: Εχουμε

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} \frac{1}{e} < 1$$

οπότε η ακολουθία συγκλίνει στο μηδέν (η άσκηση είναι το λυμένο παράδειγμα σελ. 53 του βιβλίου Κυβεντίδη)

Εναλλακτικός τρόπος λύσης:

$$a_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(n-1)\cdot n}{\underbrace{n\cdots n\cdot n}_{n \text{ φορές}}} = \frac{1}{n}\cdot\underbrace{\frac{2}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}}_{n-1 \text{ φορές}} \leq \frac{1}{n} \to 0 \implies a_n \to 0$$

Ασκηση 11: (*Δύσκολη*) Αποδείξτε ότι αν $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ και $a_n > 0$ και $a > 0$ τότε $\lim_{n\to\infty} {a_n}^r = a^r$, $r \in \mathbb{R}$

Ασκηση 12: Εστω $a_1 > a_2 > \cdots > a_m > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots a_m^n} = a_1$$

Ασκηση 13: Χρησιμοποιώντας τον εψιλοντικό ορισμό του ορίου αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση:
Αν $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ και $a_n > 0$ και $a > 0$ τότε $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$

ΛΥΣΗ:

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;\Leftrightarrow\; \forall\,\epsilon > 0\; \exists\, N(\epsilon) > 0\, :\, n > N(\epsilon) \;\Rightarrow\; |a_n - a| < \epsilon$

Επειδή

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} < \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\epsilon}{\sqrt{a}} = \epsilon'$$

οπότε

$\forall\,\epsilon' > 0\; \exists\, N'(\epsilon') = N(\epsilon'\sqrt{a}) > 0\, :\, n > N'(\epsilon') \;\Rightarrow\; |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| < \epsilon'$

Αλλη λύση

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| < |\sqrt{a_n} + \sqrt{a}| \;\rightsquigarrow\; \left(|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}|\right)^2 < |a_n - a| < \epsilon^2 = \epsilon' \;\Rightarrow$$

οπότε

$\forall\,\epsilon' > 0\; \exists\, N'(\epsilon') = N(\sqrt{\epsilon'}) > 0\, :\, n > N'(\epsilon') \;\Rightarrow\; |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| < \epsilon'$

Ασκηση 14: Αποδείξτε ότι αν $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ και $a_n > 0$ και $a > 0$ τότε $\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a}$, $m \in \mathbb{N}$

ΛΥΣΗ:

$$\sqrt[m]{a_n} - \sqrt[m]{a} = \frac{a_n - a}{(\sqrt[m]{a_n})^{m-1} + (\sqrt[m]{a_n})^{m-2}(\sqrt[m]{a}) + (\sqrt[m]{a_n})^{m-3}(\sqrt[m]{a})^2 + \cdots + (\sqrt[m]{a_n})(\sqrt[m]{a})^{m-2} + (\sqrt[m]{a})^{m-1}}$$

$$a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \rightsquigarrow \text{τελικά } \tfrac{a}{2} < a_n < \tfrac{3a}{2} \rightsquigarrow$$

$$|\sqrt[m]{a_n} - \sqrt[m]{a}| \le \frac{|a_n - a|}{(m+1)a^{m-1}/2}$$

Ασκηση 15: Δώστε τον εψιλοντικό ορισμό μιας ακολουθίας x_n, η οποία **δεν** συγκλίνει στο όριο x.

Ασκηση 16: Αν το όριο μια ακολουθίας x_n υπάρχει, αποδείξτε ότι είναι μοναδικό.

Ασκηση 17: Αν $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ τότε αν ορίσουμε την ακολουθία

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

αποδείξτε ότι $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Ισχύει το αντίστροφο;