Λογισμός Ι - Τμήμα 1Β

Κ. Δασκαλογιάννης
Γραφείο 18, 3ος όροφος ΣΘΕ
τηλ: 2310-998074
mail: daskalo@math.auth.gr
ιστοσελίδα: users.auth.gr/daskalo

2014

ΛΟΓΙΣΜΟΣ $\leftrightsquigarrow$ CALCULUS

(Διαφορικός Λογισμός, Απειροστικός Λογισμός)

1670 $\sim$ 1740 Ουράνια Μηχανική

Isaac Newton
1648-1727

Gottfried Wilhelm Leibniz
1646-1716

- απειροστά(=πολύ μικρά) μεγέθη,
- άπειρο(=πάρα πολύ μεγάλο),
- όριο συνάρτησης $\lim_{x \to a} f(x)$, παράγωγος , ...
- υπολογισμός ταχυτήτων, ροπών, ορμών...

ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΓΛΩΣΣΑ

Περιγραφή $\rightsquigarrow$ Γλώσσα $\rightsquigarrow$ Θεσπιση αυστηρών κανόνων

ΑΝΑΛΥΣΗ $\leftrightsquigarrow$ ANALYSIS

$\sim$ 1820–σήμερα

- Συστηματική μελέτη: Πως ορίζεται ο αριθμός; Αξιώματα που θεμελιώνουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών
- Ορισμός σύγκλισης, όριου ...
- ακολουθίες, σειρές...
- Ορισμός συνέχειας...

Δημιουργία **ΑΥΤΟΣΥΝΕΠΟΥΣ ΓΛΩΣΣΑΣ**

ΛΟΓΙΣΜΟΣ $\prec$ Μάθημα $\prec$ Ανάλυση

Advanced Calculus ή Elementary Analysis

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- *Απειροστικός Λογισμός*-Τόμος Α' Σ.Κ. Ντούγιας, LEADER BOOKS, 2003
- *Διαφορικός Ολοκληρωτικός Λογισμός*, M. Spivak, Παν. Εκδ. Κρήτης,
- *Απειροστικός Λογισμός*, THOMAS-FINLEY, Παν. Εκδ. Κρήτης
- Μαθήματα στο δίκτυο: Μαθήματα Μ. Παπαδημητράκη (Παν. Κρήτης) http://www.math.uoc.gr/~papadim/Apeirostikos1.pdf
- Μαθήματα στο δίκτυο: Μαθήματα Α. Γιαννόπολου (Παν. Αθηνών) http://users.uoa.gr/~apgiannop
- Διαφάνειες: http://users.auth.gr/~daskalo

Generic Construction

Αρχαιότητα	$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3, \ldots\}$	Αξιώματα Peano
	$\Downarrow$	$\downarrow$
	(Λύσεις $x + n = 0$)	
	$\Downarrow$	$\downarrow$
(Ινδοί)	$\mathbb{Z} = \{0,\ \pm1,\ \pm2, \ldots\}$	Προσθετική Ομάδα
	$\Downarrow$	$\downarrow$
Αρχαιότητα	(Λύσεις $qx - p = 0$)	
	$\Downarrow$	$\downarrow$
	$\mathbb{Q} = \{p/q,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$	Πυκνό πεδίο (field) / σώμα
	$\Downarrow$	$\downarrow$
Αναγέννηση	Λύσεις $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ $\Delta = \beta^2 \geq 4\alpha\gamma$	Τομές Dedekind
	$\Downarrow$	$\downarrow$
Νέοι Χρόνοι	$\mathbb{R}$	Πυκνό πεδίο με διάταξη "συνεχές"

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

Φυσικοί αριθμοί, ΣΥΣΤΗΜΑ Peano

ΑΞΙΩΜΑΤΑ Peano

Ορισμός συνόλου φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$

i) $1 \in \mathbb{N}$
ii) $\forall n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow n+1 \in \mathbb{N}$
iii) $\forall n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow n+1 > 1$
iv) $n = m \rightsquigarrow n+1 = m+1$
v) Αρχή επαγωγής

Αν ένα υποσύνολο $M \subseteq \mathbb{N}$ κατασκευάζεται ως εξής:

$$\left.\begin{array}{c} 1 \in M \\ m \in M \rightsquigarrow m+1 \in M \end{array}\right\} \Rightarrow M = \mathbb{N}$$

Αρχή Επαγωγής

Απόδειξη με επαγωγή/ Proof by induction

Αν $P(m)$ είναι μια πρόταση η οποία εξαρτάται από το $m \in \mathbb{N}$

(i) $P(1)$ αληθεύει

(ii) για ένα $n \in \mathbb{N}$ η πρόταση $P(n)$ αληθεύει $\rightsquigarrow$ $P(n+1)$ αληθεύει

συνεπάγεται ότι **η πρόταση $P(n)$ είναι αληθινή για κάθε $n \in \mathbb{N}$**

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Γεωμετρικό Αθροισμα

$$1 + t + t^2 + \cdots + t^n = \boxed{\sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{n}} \mathbf{t^k} = \frac{\mathbf{1-t^{n+1}}}{\mathbf{1-t}}}$$

Τύποι "Gauss"

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

Πρόβλημα: Να βρεθούν οι σταθερές A, B, C, D, E

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn + E$$

Τύπος "Bernoulli"

$$\mathbf{x \geq -1 \;\rightsquigarrow\; (1+x)^n \geq 1 + nx}$$

Πρόβλημα: Για $a > 0$, να αποδειχθεί η ανισότητα

$$\frac{a-1}{n} \geq \sqrt[n]{a} - 1$$

Τύπος Newton

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \;\rightsquigarrow\; \mathbf{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

Τύπος Newton

παραγοντικό/factorial
$$0! = 1$$
$$n! = n \cdot (n-1)! \rightsquigarrow \boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n}$$

Συνδιασμός n πραγμάτων ανά k $\quad \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$$\binom{n}{0} = 1, \ \binom{n}{1} = n, \ \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \ \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!},$$
$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^n =& b^n + nab^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2} + \cdots + \\ & + \binom{n}{m}a^mb^{n-m} + \cdots + na^{n-1}b + a^n\end{aligned}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \rightsquigarrow \boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

Το $(\mathbb{Z}, +)$ είναι αβελιανή ομάδα

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ είναι το μικρότερο σύνολο, που περιέχει το $\mathbb{N}$ και έχει δομή αβελιανής ομάδας

ή

είναι το μικρότερο σύνολο το οποίο περιέχει το $\mathbb{N}$ και τις λύσεις της εξίσωσης $x + p = 0$ όπου το $p \in \mathbb{Z}$.

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ είναι ένα σύνολο στοιχείων όπου έχουμε ορίσει την πράξη της πρόσθεσης

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ni (\alpha, \beta) \longrightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{Z}$$

με τις ιδιότητες

$$\left.\begin{array}{lll} A_1: & \alpha + \beta = \beta + \alpha & \text{αβελιανή ιδιότητα} \\ A_2: & \alpha + 0 = \alpha & \exists\,\text{ουδέτερο στοιχείο} \\ A_3: & \alpha + (-\alpha) = 0 & \exists\,\text{αντίθετο στοιχείο} \\ A_4: & \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma & \text{προσεταιριστική ιδιότητα} \end{array}\right\} \boxed{\text{Ιδιότητες αβελιανής ομάδας}}$$

Αλλα σύνολα που έχουν την δομή μιας αβελιανής ομάδας: $\mathbb{Q}$ (ρητοί αριθμοί), $\mathbb{R}$ (πραγματικοί αριθμοί), $\mathbb{C}$ (μιγαδικοί αριθμοί), το σύνολο $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$, τα διανύσματα στο χώρο,

Το σύνολο $\mathbb{Z}_2$ είναι αβελιανή ομάδα

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{0,\ 2,\ 4,\ 6\ \ldots\} = \text{ άρτιοι αριθμοί} \\ \overline{1} &= \{1,\ 3,\ 5,\ 7\ \ldots\} = \text{ περιττοί αριθμοί} \end{aligned}$$

Το σύνολο $\mathbb{Z}_2 \equiv \{\overline{0},\ \overline{1}\}$ είναι αβελιανή ομάδα.

$$\begin{aligned} &\overline{0} + \overline{0} = \overline{0} \\ &\overline{0} + \overline{1} = \overline{1} + \overline{0} = \overline{1} \\ &\overline{1} + \overline{1} = \overline{0} \end{aligned}$$

Αν $a \in \mathbb{Z}_2$ τότε $a \neq 0 \Rightarrow a = -a$

Το σύνολο $\mathbb{Z}_5$ είναι αβελιανή ομάδα

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \{0,\ 5,\ 10,\ 15,\ \ldots\} = \{5k\ :\ k \in 0 \cup \mathbb{N}\} \\
\overline{1} &= \{1,\ 6,\ 11,\ 16,\ \ldots\} = \{5k+1\ :\ k \in 0 \cup \mathbb{N}\} \\
\overline{2} &= \{2,\ 7,\ 12,\ 17,\ \ldots\} = \{5k+2\ :\ k \in 0 \cup \mathbb{N}\} \\
\overline{3} &= \{3,\ 8,\ 13,\ 18,\ \ldots\} = \{5k+3\ :\ k \in 0 \cup \mathbb{N}\} \\
\overline{4} &= \{4,\ 9,\ 14,\ 19,\ \ldots\} = \{5k+4\ :\ k \in 0 \cup \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

Το σύνολο $\mathbb{Z}_5 \equiv \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\right\}$ είναι αβελιανή ομάδα.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

Αν $a \in \mathbb{Z}_2$ τότε $a \neq 0 \Rightarrow a + a + a + a + a = 0,\ -\overline{3} = \overline{2}$
$\overline{4} + \overline{4} + \overline{3} = \overline{1},\ x + \overline{2} = \overline{1} \Rightarrow x = \overline{4}$

Εις άτοπον απαγωγή

Ορισμός ρητών αριθμών

Το $\mathbb{Q}$ είναι ένα σύνολο που είναι ¨κλειστό' ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό και περιέχει το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $qx + p = 0$, όπου p και q στοιχεία του $\mathbb{Z}$

ή

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \ : \ m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Απόδειξη "διά τῆς εἰς ἄτοπον απαγωγῆς"/ proof by contradiction

Για να αποδείξουμε την συνεπαγωγή των προτάσεων $P \Rightarrow Q$ αρκεί να αποδείξουμε ότι η υπόθεση { P αληθής και Q αναληθής } συνεπάγεται μια αντίφαση ("ἄτοπον")

Παράδειγμα:
Ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός αριθμός
Δεν υπάρχει φυσικός $p < 1$

Πεδίο/Σώμα - Field

Το $(\mathbb{F}, +)$ είναι αβελιανή ομάδα

A_1	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	αβελιανή ιδιότητα
A_2	$\alpha + 0 = \alpha$	$\exists$ ουδέτερο
A_3	$\alpha + (-\alpha) = 0$	$\exists$ αντίθετο
A_4	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	προσεταιριστικότητα

Το $(\mathbb{F}\backslash\{0\}, \cdot)$ είναι αβελιανή ομάδα

A_5	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$	αβελιανή ιδιότητα
A_6	$\alpha \cdot 1 = \alpha$	$\exists$ ουδέτερο
A_7	$\alpha \cdot (\alpha^{-1}) = 1$	$\exists$ αντίθετο
A_8	$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$	προσεταιριστικότητα

Η επιμεριστικότητα - distributivity συνδέει πρόσθεση και πολλαπλασιασμό

$$A_9 \quad (\alpha + \beta) \cdot \gamma = (\alpha \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma)$$

Το πεδίο $\mathbb{F}$ είναι χαρακτηριστικής n αν

$$\forall \alpha \in \mathbb{F},\ \alpha \neq 0; \rightsquigarrow\ \alpha^n = 1$$

Ορισμός ρητών αριθμών

Το $\mathbb{Q}$ είναι το μικρότερο πεδίο/σώμα χαρακτηριστικής 0, που περιέχει $\mathbb{Z}$

ή

Το $\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $qx + p = 0$, όπου p και q στοιχεία του $\mathbb{Z}$

ή

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \ : \ m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

- $\sqrt{2} \notin Q$ (απαγωγή σε άτοπο)
- Το σύνολο $\{a + b\sqrt{2} \ : \ a \ \text{ και } \ b \ \in \mathbb{Q}\}$ ($\Rightarrow \ a^2 - 2b^2 \neq 0$) είναι πεδίο χαρακτηριστικής 0 (ευθεία απόδειξη)

$$(\alpha + \sqrt{2}\beta) + (\alpha' + \sqrt{2}\beta') = (\alpha + \alpha') + \sqrt{2}\,(\beta + \beta')$$
$$(\alpha + \sqrt{2}\beta) \cdot (\alpha' + \sqrt{2}\beta') = (\alpha\alpha' + 2\beta\beta') + \sqrt{2}\,(\alpha\beta' + \alpha'\beta)$$
$$\left(\alpha + \sqrt{2}\beta\right)^{-1} = \frac{\alpha}{\alpha^2 - 2\beta^2} - \frac{\sqrt{2}\beta}{\alpha^2 - 2\beta^2}$$

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)^n = 1 \ \rightsquigarrow \ n = 0$$

- Το σύνολο $\mathbb{Z}_2 \equiv \left\{\overline{0},\, \overline{1}\right\}$ είναι πεδίο. Με χαρακτηριστική 1.

$\overline{0}+\overline{0}=\overline{0}$	$\overline{0}\cdot\overline{0}=\overline{0}$
$\overline{0}+\overline{1}=\overline{1}+\overline{0}=\overline{1}$	$\overline{0}\cdot\overline{1}=\overline{1}\cdot\overline{0}=\overline{0}$
$\overline{1}+\overline{1}=\overline{0}$	$\overline{1}\cdot\overline{1}=\overline{1}$

$$\rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{ll} a \neq 0 & \Rightarrow a = -a \\ & \Rightarrow a^1 = \overline{1} \end{array} \right\}$$

- Το σύνολο $\mathbb{Z}_3 \equiv \left\{\overline{0},\, \overline{1},\, \overline{2}\right\}$ είναι πεδίο. Με χαρακτηριστική 2.

$\overline{0}+\overline{0}=\overline{0}$	$\overline{0}\cdot\overline{0}=\overline{0}$
$\overline{0}+\overline{1}=\overline{1}+\overline{0}=\overline{1}$	$\overline{0}\cdot\overline{1}=\overline{1}\cdot\overline{0}=\overline{0}$
$\overline{1}+\overline{1}=\overline{2}$	$\overline{1}\cdot\overline{1}=\overline{1}$
$\overline{0}+\overline{2}=\overline{2}+\overline{0}=\overline{2}$	$\overline{0}\cdot\overline{2}=\overline{2}\cdot 0=\overline{0}$
$\overline{1}+\overline{2}=\overline{2}+\overline{1}=\overline{0}$	$\overline{1}\cdot\overline{2}=\overline{2}\cdot\overline{1}=\overline{2}$
$\overline{2}+\overline{2}=\overline{1}$	$\overline{2}\cdot\overline{2}=\overline{1}$

$$\rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} a \neq 0 \Rightarrow a^2 = \overline{1} \\ -\overline{1} = \overline{2},\ -\overline{2} = \overline{1},\ \overline{2}^{-1} = \overline{2} \end{array} \right\}$$

$$\overline{2} + \overline{2}\cdot\overline{2}^{-1} - \overline{1} = \overline{2}$$

- Το σύνολο $\mathbb{Z}_4$ δεν είναι πεδίο. $(\overline{2}\cdot\overline{2} = \overline{0})$

Παράδειγμα $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \{0, 5, 10, 15, 20, \ldots\} \\
\overline{1} &= \{1, 6, 11, 16, 21, \ldots\} \\
\overline{2} &= \{2, 7, 12, 17, 22, \ldots\} \\
\overline{3} &= \{3, 8, 13, 18, 23, \ldots\} \\
\overline{4} &= \{4, 9, 14, 19, 24, \ldots\}
\end{aligned}$$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Το $\mathbb{Z}_5$ είναι πεδίο/σώμα χαρακτηριστικής 4

$$\left(\overline{2} + \overline{4}\right) + \overline{3} = \overline{2} + \left(\overline{4} + \overline{3}\right),\; -\overline{3} = \overline{2},\; \left(\overline{3}\right)^{-1} = \overline{2}$$

Ορισμός:

Το σύνολο $\mathbb{X}$ είναι $\boxed{\text{ολικά διατεταγμένο}}$ αν $\exists$ μια $\boxed{\text{σχέση διάταξης}}$ $\leq$

A_{10} $\forall x \;\; y \;\in: \mathbb{X} \;\Rightarrow\; x \leq y$ ή $y \leq x$

A_{11} $\forall x \;\rightsquigarrow\; x \leq x$ $\boxed{\text{αυτοπαθής}}$ ιδιότητα

A_{12} $x \leq y$ και $y \leq x \;\rightsquigarrow\; x = y$ $\boxed{\text{(αντι)συμμετρική}}$ ιδιότητα

A_{13} $x \leq y$ και $y \leq z; \rightsquigarrow\; x \leq z$ $\boxed{\text{μεταβατική}}$ ιδιότητα

Παραδείγματα:

- Τα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Z}$ είναι ολικά διατεταγμένα σύνολα
- $\mathbb{X} =$ Ελληνικές λέξεις στο λεξικό, είναι ολικά διατεταγμένο σύνολο.
- Το $\mathbb{X} = \{(m, n) \;:\; m, n \in \mathbb{N}\}$ με την σχέση διάταξης

$$(m, n) \preceq (m', n') \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} m < m' \\ \text{ή} \\ m = m' \text{ και } n \leq n' \end{cases}$$

είναι ολικά διατεταγμένο.

Ορισμός:
Το πεδίο $\mathbb{F}$, που είναι ολικά διατεταγμένο ονομάζεται διατεταγμένο πεδίο αν

A_{14} $x \leq y \rightsquigarrow x + z \leq y + z$

A_{15} $0 \leq x$ και $0 \leq y \rightsquigarrow 0 \leq x \cdot y$

Παραδείγματα:

- Το $\mathbb{Q}$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο πεδίο.
- Το $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ είναι μη διατεταγμένο.
  (τα πεπερασμένα πεδία $\boxed{\text{δεν}}$ είναι ολικά διατεταγμένα !)

ΑΞΙΩΜΑΤΑ $\mathbb{R}$

(A_1)	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	αβελιανή ιδιότητα
(A_2)	$\alpha + 0 = \alpha$	$\exists$ ουδέτερο στοιχείο
(A_3)	$\alpha + (-\alpha) = 0$	$\exists$ αντίθετο στοιχείο
(A_4)	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	προσεταιριστικότητα

(A_5)	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$	αβελιανή ιδιότητα
(A_6)	$\alpha \cdot 1 = \alpha$	$\exists$ ουδέτερο στοιχείο
(A_7)	$\alpha \cdot (\alpha^{-1}) = 1$	$\exists$ αντίθετο(αντίστροφο) στοιχείο
(A_8)	$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$	προσεταιριστικότητα

(A_9)	$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = (\alpha \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma)$	επιμεριστικότητα

(A_{10})	$\forall x,\, y \in: \mathbb{R} \;\Rightarrow\; x \leq y$ ή $y \leq x$	
(A_{11})	$\forall x \;\rightsquigarrow\; x \leq x$	αυτοπαθής ιδιότητα
(A_{12})	$x \leq y$ και $y \leq x; \rightsquigarrow\; x = y$	αντισυμμετρική ιδιότητα
(A_{13})	$x \leq y$ και $y \leq z; \rightsquigarrow\; x \leq z$	μεταβατική ιδιότητα

(A_{14})	$x \leq y \;\rightsquigarrow\; x + z \leq y + z$
(A_{15})	$0 \leq x$ και $0 \leq y \;\rightsquigarrow\; 0 \leq x \cdot y$

Παρατήρηση

Ολες αυτές οι ιδιότητες είναι κοινές και για το $\mathbb{Q}$ και για το $\mathbb{R}$

Infimum

Ορισμός κάτω φράγματος συνόλου A

Το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι **κάτω φραγμένο** αν

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{R} : \forall x \in A \rightsquigarrow k \leq x}$$

$k =$ **κάτω φράγμα**

Ορισμός infimum του συνόλου A

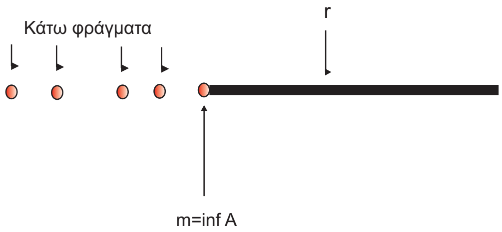
$\boxed{\inf A}$ $=$ infimum του συνόλου $A \equiv$ Το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματα

$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & \forall x \in A \rightsquigarrow m \leq x \\ (ii) & \forall r > m, \exists y \in A : y < r \end{cases}$$

Ορισμός infimum του συνόλου A

$\boxed{\inf\ A}$ = infimum του συνόλου A ≡ Το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματα

$$m = \inf\ A \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & \forall\, x \in A \leadsto m \le x \\ (ii) & \forall\, r > m,\ \exists\, y \in A : y < r \end{cases}$$



Ορισμός άνω φράγματος συνόλου A

Το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι $\boxed{\text{άνω φραγμένο}}$ αν $\boxed{\exists \ell \in \mathbb{R} : \forall x \in A \rightsquigarrow x \leq \ell}$ όπου $\ell =$ $\boxed{\text{άνω φράγμα}}$

Ορισμός supremum του συνόλου A

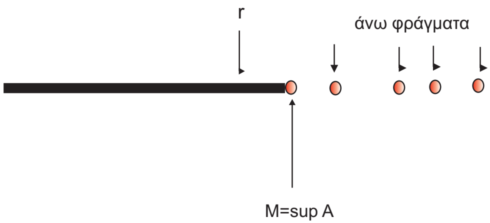
$\boxed{\sup A}$ = supremum του συνόλου $A \equiv$ Το μικρότερο από τα άνω φράγματα

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & \forall x \in A \rightsquigarrow x \leq M \\ (ii) & \forall r < M, \exists y \in A : r < y \end{cases}$$

Ορισμός supremum του συνόλου A

$\boxed{\sup\ A}$ = supremum του συνόλου $A \equiv$ Το μικρότερο από τα άνω φράγματα

$$M = \sup\ A \ \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & \forall\, x \in A \ \rightsquigarrow \ x \leq M \\ (ii) & \forall\, r < M,\ \exists\, y \in A\ :\ r < y \end{cases}$$



Αν $\inf A \in A \rightsquigarrow \inf A = \min A$.
Γενικά το $\inf A \notin A$ δηλ. το $\min A$ δεν υπάρχει π.χ.

$$A = \left\{1 + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4}, \ldots\right\}$$

$$\inf A = 1 \notin A$$

Αν $\sup A \in A \rightsquigarrow \sup A = \max A$.
Γενικά το $\sup A \notin A$ δηλ. το $\max A$ δεν υπάρχει π.χ.

$$A = \left\{1 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4}, \ldots\right\}$$

$$\sup A = 1 \notin A$$

(Αποδείξεις δια της απαγωγής σε άτοπο)

Ασκ.(1) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$

Ασκ.(2) $\inf A > 0$ **και** $\inf B > 0 \rightsquigarrow \inf(A \cdot B) = (\inf A) \cdot (\inf B)$

Ασκ.(3) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

Ασκ.(4) $A > 0$ **και** $B > 0 \rightsquigarrow \sup(A \cdot B) = (\sup A) \cdot (\sup B)$

Ασκ.(5) $-\inf A = \sup(-A)$

Ασκ.(6) $\inf A > 0 \rightsquigarrow (\inf A)^{-1} = \sup\left(A^{-1}\right)$

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ $\mathbb{R}$

κοινές ιδιότητες των συνόλων $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$

Αξίωμα I

Το $\mathbb{R}$ είναι πεδίο με χαρακτηριστική $\mathbf{0}$

Αξίωμα II

Το $\mathbb{R}$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο πεδίο

ιδιότητα μόνο του συνόλου $\mathbb{R}$

Αξίωμα III

Για κάθε άνω φραγμένο σύνολο $A \subset \mathbb{R} \Rightarrow \sup A \in \mathbb{R}$

Δομή μαθηματικής θεωρίας:

$\boxed{\text{Ορισμοί}} \rightsquigarrow \boxed{\text{Αξιώματα}} \rightsquigarrow \boxed{\text{Προτάσεις (θεωρήματα)}} \rightsquigarrow \boxed{\text{Προτάσεις}} \rightsquigarrow \cdots$

- Το $\mathbb{Q}$ είναι **γνήσιο** υποσύνολο του $\mathbb{R}$, διότι $\exists\, x \notin \mathbb{Q} \,:\, x \in \mathbb{R}$, πχ $x = \sqrt{2}$
- Το $A = \{q \in \mathbb{Q} \,:\, q > 0 \text{ και } q^2 \leq 2\}$ συνεπάγεται ότι $\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- Μπορεί να υπάρχει $A \subset \mathbb{Q}$ αλλά $\sup A \notin \mathbb{Q}$

Ιδιότητα που διαχωρίζει το $\mathbb{Q}$ από το $\mathbb{R}$

Αξίωμα III, Αξίωμα συνεχούς

Για κάθε φραγμένο προς τα άνω σύνολο $\mathbf{A} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \sup \mathbf{A} \in \mathbb{R}$

- Αν $\sup A \in A \rightsquigarrow \sup A = \max A$
- ΠΡΟΣΟΧΗ $A \subset \mathbb{R} \Rightarrow$ **υπάρχει πάντα** το $\sup A \in \mathbb{R}$, αλλά το $\max A$ **μπορεί να μην ορίζεται** πχ

$$A = \{q \in \mathbb{R} \,:\, q > 0 \text{ και } q^2 < 5\} \rightsquigarrow$$

$\sup A = \sqrt{5}$ αλλά $\nexists \max A$

Δεν υπάρχει το $\sup \mathbb{N}$ στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο

$$x \in \mathbb{R} \ \rightsquigarrow \ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ x < n$$

ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

$a > 0$ **και** $b \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n\, a > b$

$$x > 0 \ \rightsquigarrow \ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ n \leq x < n + 1 \rightsquigarrow n = [x]$$

Δεν υπάρχει το $\sup \mathbb{N}$ στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο

$x \in \mathbb{R} \ \rightsquigarrow \ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ x < n$

ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

$a > 0$ **και** $b \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n\,a > b$

$x > 0 \ \rightsquigarrow \ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ n \leq x < n+1 \rightsquigarrow n = [x]$

Αν $\alpha < \beta \ \rightsquigarrow \ \exists \rho \in \mathbb{Q} \ : \ \alpha < \rho < \beta$

Συμπ.: Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός $\rightsquigarrow$ Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχουν άπειροι ρητοί

Αν $\alpha < \beta \ \rightsquigarrow \ \exists r \notin \mathbb{Q} \ : \ \alpha < r < \beta$

Συμπ.: Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχει τουλάχιστον ένας άρρητος $\rightsquigarrow$ Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχουν άπειροι άρρητοι

ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, px = q,\, p \text{ και } q \in \mathbb{Z}\}\,, \qquad \mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,:\, mx = n,\, m \text{ και } n \in \mathbb{N}\}$

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_+ = \Big\{\; & \frac{1}{1}, \\ & \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \\ & \frac{3}{1}, \boxed{\frac{2}{2}}, \frac{1}{3}, \\ & \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \\ & \frac{5}{1}, \boxed{\frac{4}{2}}, \boxed{\frac{3}{3}}, \boxed{\frac{2}{4}}, \frac{1}{5}, \\ & \frac{6}{1}, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}, \\ & \frac{7}{1}, \boxed{\frac{6}{2}}, \frac{5}{3}, \boxed{\frac{4}{4}}, \frac{3}{5}, \boxed{\frac{2}{6}}, \frac{1}{7}, \dots \Big\}\end{aligned}$$

Διαγράφουμε τους αριθμούς που είναι στα κουτάκια

$$= \left\{1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, 5, \dots\right\} \underset{1:1}{\overset{\text{επί}}{\longleftrightarrow}} \mathbb{N}$$

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο

$$\mathbb{Q} \underset{1:1}{\overset{\text{επί}}{\longleftrightarrow}} \mathbb{N}$$

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο, έχει πληθάριθμο $\aleph_0$ (aleph 0)

Το σύνολο $\mathbb{R}$ ΔΕΝ είναι αριθμήσιμο,
έχει πληθάριθμο $\aleph$ (aleph) και $\aleph_0 < \aleph$