ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΑΣ

Ορισμός

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ "μερικό" άθροισμα,

Αν $S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S$ τότε " συγκλίνει απλά η σειρά " $S \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Leftrightarrow$ η ακολουθία S_N είναι Cauchy

$$\Leftrightarrow \boxed{\forall\, \epsilon > 0 \,\exists\, N(\epsilon) \;:\; \forall\, n > m > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon}$$

Παράδειγμα: Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

Η σειρά συγκλίνει $\Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \; N(\epsilon) \; : \; \forall n > m > N(\epsilon) \;\; \rightsquigarrow \;\; \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon$$

Η σειρά ΔΕΝ συγκλίνει $\Leftrightarrow$

$$\exists \epsilon > 0 \; \forall \; N \; : \; \exists n > m > N \;\; \rightsquigarrow \;\; \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \geq \epsilon$$

Παράδειγμα: Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ΔΕΝ συγκλίνει.

Πρόταση

συγκλίνει απλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Αν $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ τότε **ΔΕΝ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ ΠΑΝΤΑ** η σειρά $\sum_n a_n$

πχ. $a_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ αλλά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Ορισμός

"συγκλίνει απόλυτα η σειρά" $\Leftrightarrow$ συγκλίνει η σειρά των απόλυτων τιμών $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Πρόταση

Απόλυτη σύγκλιση σειράς $\Rightarrow$ Απλή σύγκλιση σειράς

Κριτήριο Σύγκρισης (Comparison test)

$|b_n| \leq a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει

Πρόταση

$0 \leq a_n \leq b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ αποκλίνει $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ αποκλίνει

Η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} t^k$ συγκλίνει **μόνο** για $|t| < 1$ και τότε

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}}$$

Η απόδειξη στηρίζεται στο γεγονός ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$$

Κριτήριο των λόγων (Ratio test)

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

1. συγκλίνει απόλυτα αν $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$
2. αποκλίνει αν $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$
3. δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$

Κριτήριο των ριζών (Root test)

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

1. συγκλίνει απόλυτα αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$
2. αποκλίνει αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$
3. δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

Λόγος ακολουθιών

a_n και b_n θετικές ακολουθίες. Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{υπάρχει} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{υπάρχει}$$

Μηδενικός Λόγος ακολουθιών

a_n και b_n θετικές ακολουθίες. Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{υπάρχει} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{υπάρχει}$$

Κριτήριο συμπύκνωσης (Condensation test)

Αν $0 < a_{n+1} < a_n$ φθίνουσα θετική ακολουθία τότε:

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ υπάρχει} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ υπάρχει} \right\}$$

Παραδείγματα:

$$p > 1 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty$$

$$p > 1 \rightsquigarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln\, n)^p} < \infty$$

Κριτήριο σύγκλισης εναλλασσομένης σειράς (Alternating Series Test)

Αν $0 < a_{n+1} < a_n$ φθίνουσα θετική ακολουθία και $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ τότε:

$$\Rightarrow \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ υπάρχει} \right\}$$

Αναδιάταξη των Φυσικών αριθμών

$$(1, 2, \ldots, k, \ldots) \xrightarrow{\sigma} (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \ldots)$$

$$\forall\, \sigma_k\, \exists\, n_k \in \mathbb{N} \;:\; \max\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_k\} < n_k$$

Αναδιάταξη ακολουθίας $b_m = a_{\sigma_m}$

Αν η σειρά $\sum_n a_n$ συγκλίνει απόλυτα τότε κάθε αναδιάταξη της σειράς $\sum_n b_n$ συγκλίνει απόλυτα στο ίδιο όριο.

ΔΙΠΛΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

$$
\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{14} & \cdots \\
 & \diagup & & \diagup & & \diagup & & \cdots \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & \cdots \\
 & \diagup & & \diagup & & \diagup & & \cdots \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & \cdots \\
 & \diagup & & \diagup & & \diagup & & \cdots \\
a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & \cdots \\
 & \diagup & & \diagup & & \diagup & & \cdots
\end{array}
$$

Ορισμός

$$
\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} = \ell \ \text{ συγκλίνει απόλυτα } \ \Leftrightarrow
$$

$$
\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \right) = \ell \ \text{ συγκλίνει απόλυτα}
$$

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΑΣ

Ορισμός

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ "μερικό" άθροισμα,

Αν $S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S$ τότε "συγκλίνει απλά η σειρά" $S \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Leftrightarrow$ η ακολουθία S_N είναι Cauchy

$$\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \; \exists \, N(\epsilon) \; : \; \forall n > m > N(\epsilon) \; \rightsquigarrow \; |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon$$

Παράδειγμα: Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

Πρόταση

συγκλίνει απλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Απόδειξη.

συγκλίνει $\boxed{\text{απλά}}$ η σειρά $\Leftrightarrow$ η ακολουθία μερικών αθροισμάτων είναι Cauchy $\Rightarrow$

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists \, N(\epsilon) \; : \; \forall n > N(\epsilon) \; \rightsquigarrow \; |S_n - S_{n-1}| = |a_n| < \epsilon$$

Επομένως $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ □

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Αν $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ τότε **ΔΕΝ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ ΠΑΝΤΑ** η σειρά $\sum_n a_n$

πχ. $a_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ αλλά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Ορισμός

"συγκλίνει απόλυτα η σειρά" $\Leftrightarrow$ συγκλίνει η σειρά των απόλυτων τιμών $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Πρόταση

Απόλυτη σύγκλιση σειράς $\Rightarrow$ Απλή σύγκλιση σειράς

Απόδειξη.

$\{$συγκλίνει $\boxed{\text{απόλυτα}}$ η σειρά $\}\Leftrightarrow$

$$\left\{\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, N(\epsilon) \,:\, \forall\, n > m > N(\epsilon) \,\rightsquigarrow\, \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \epsilon\right\}$$

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \epsilon \,\rightsquigarrow$$

$$\left\{\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, N(\epsilon) \,:\, \forall\, n > m > N(\epsilon) \,\rightsquigarrow\, \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \epsilon\right\}$$

$\square$

Κριτήριο Σύγκρισης (Comparison test)

$|b_n| \leq a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει

Απόδειξη.

$$\underset{\text{συγκλίνει}}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon > 0, \quad \exists N(\epsilon) : \\ \forall n > m > N(\epsilon) \rightsquigarrow \left| \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} |b_k| \leq \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \rightsquigarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon > 0, \quad \exists N(\epsilon) : \\ \forall n > m > N(\epsilon) \rightsquigarrow \sum\limits_{k=m+1}^{n} |b_k| < \epsilon \end{array} \right\} \rightsquigarrow \underset{\text{απόλυτα}}{\underset{\text{συγκλίνει}}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}}$$

□

Πρόταση

$0 \leq a_n \leq b_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ αποκλίνει $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ αποκλίνει

Απόδειξη.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \rightsquigarrow \left\{ \forall R > 0, \exists N(R) > 0 : n > N(R) \rightsquigarrow \sum_{k=1}^{n} a_k > R \right\}$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \geq \sum_{k=1}^{n} a_k > R \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$$

□

Κριτήριο των λόγων (Ratio test)

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(i) συγκλίνει απόλυτα αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

(ii) αποκλίνει αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$

(iii) δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

□ *Απόδ* (i) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \mathfrak{c} < 1$ για $\epsilon = \frac{1-\mathfrak{c}}{2}$, $\exists\, n_0$:

$$n > n_0 \ \rightsquigarrow\ |a_{n+1}| < (\mathfrak{c} + \frac{1-\mathfrak{c}}{2})\,|a_n|$$

$$\rightsquigarrow\ |a_n| < \left(\frac{\mathfrak{c}+1}{2}\right)^n \frac{|a_{n_0}|}{\left(\frac{\mathfrak{c}+1}{2}\right)^{n_0}}$$

Επειδή $\frac{\mathfrak{c}+1}{2} < 1 \rightsquigarrow$ (κριτήριο σύγκρισης) η σειρά $\sum_n |a_n|$ συγκλίνει απόλυτα.

□ *Απόδ* (ii) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \mathfrak{f} > 1$ για $\epsilon = \frac{\mathfrak{f}-1}{2}$, $\exists\, n_0$:

$$n > n_0 \ \rightsquigarrow\ |a_{n+1}| > (\mathfrak{f} - \frac{\mathfrak{f}-1}{2})\,|a_n|$$

$$\rightsquigarrow\ |a_n| > \left(\frac{\mathfrak{f}+1}{2}\right)^n \frac{|a_{n_0}|}{\left(\frac{\mathfrak{f}+1}{2}\right)^{n_0}}$$

Επειδή $\frac{\mathfrak{f}+1}{2} > 1 \rightsquigarrow$ η ακολουθία a_n δεν είναι μηδενική $\rightsquigarrow$ δεν συγκλίνει η σειρά $\sum_n a_n$

Κριτήριο των ριζών (Root test)

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(i) συγκλίνει απόλυτα αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$

(ii) αποκλίνει αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$

(iii) δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

Κριτήριο συμπύκνωσης (Condensation test)

Αν $0 < a_{n+1} < a_n$ φθίνουσα θετική ακολουθία τότε:

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right\} \text{ υπάρχει} \Leftrightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ υπάρχει} \right\}$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
& S_{2^{k+1}-1} = a_1 + \underbrace{(a_2 + a_3)}_{2 \text{ όροι}} + \underbrace{(a_4 + a_5 + a_6 + a_7)}_{4 \text{ όροι}} + \\
& + \underbrace{(a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15})}_{8 \text{ όροι}} \\
& + \cdots + \\
& + \underbrace{(a_{2^k} + a_{2^k+1} + a_{10} + a_{2^k+2} + \cdots + a_{2^{k+1}-1})}_{2^k \text{ όροι}} \leq \\
& \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots + 2^k a_{2^k} = T_k
\end{aligned}$$

η ακολουθία T_k συγκλίνει $\Rightarrow$ η υπακολουθία $S_{2^{k+1}-1}$ συγκλίνει και η ακολουθία S_n είναι αύξουσα $\rightsquigarrow$ η S_n συγκλίνει.

$$\begin{aligned}
& \frac{T_k}{2} = \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} \leq \\
& \leq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \\
& + \cdots + \\
& + (a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k}) = S_{2^k}
\end{aligned}$$

η ακολουθίαS_n συγκλίνει και είναι αύξουσα $\Rightarrow$ η υπακολουθία S_{2^k} συγκλίνει $\Rightarrow$ η ακολουθία T_k συγκλίνει. $\square$

πχ $\sum\limits_{n=2} \dfrac{1}{n \ln n}$ δεν συγκλίνει

$\sum\limits_{n=2} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ συγκλίνει

$\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{n^r}$ συγκλίνει για $r > 1$,

δεν συγκλίνει για $r \leq 1$

Κριτήριο σύγκλισης εναλλασσομένης σειράς (Alternating Series Test)

Αν $0 < a_{n+1} < a_n$ φθίνουσα θετική ακολουθία και $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ τότε:

$\Rightarrow \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ υπάρχει} \right\}$

Απόδειξη.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$$
$$S_{m+2} - S_m = (-1)^{m+3} a_{m+2} - (-1)^{m+2} a_{m+1} = (-1)^{m+2}(a_{m+1} - a_{m+2}) \rightsquigarrow$$
$$|S_{m+2} - S_m| = a_{m+1} - a_{m+2} \geq 0$$
$$|S_{m+4} - S_{m+2}| = a_{m+3} - a_{m+4}$$
$$|S_{m+6} - S_{m+4}| = a_{m+5} - a_{m+6}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$|S_{m+2p} - S_{m+2(p-1)}| = a_{m+2p-1} - a_{m+2p}$$
$$|S_{m+2p} - S_m| \leq$$
$$\leq |S_{m+2p} - S_{m+2p-2}| + |S_{m+2p-2} - S_{m+2p-4}| + \dots + |S_{m+2} - S_m|$$
$$|S_{m+2p} - S_m| \leq$$
$$\leq a_{m+2p-1} - a_{m+2p} + a_{m+2p-3} - a_{m+2p-2} + \dots + a_{m+3} - a_{m+4} + a_{m+1} - a_{m+2}$$
$$|S_{m+2p} - S_m| \leq a_{m+1} - a_{m+2p} < a_{m+1}$$
$$|S_{m+2p+1} - S_m| \leq |S_{m+2p+1} - S_{m+2p}| + |S_{m+2p} - S_m| \leq a_{m+2p+1} + a_{m+1} - a_{m+2p} < a_{m+1}$$
$$n > m \rightsquigarrow |S_n - S_m| < a_{m+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \rightsquigarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N(\epsilon) \; : \; m > N(\epsilon) \rightsquigarrow a_{m+1} < a_m < \epsilon$$

$$\rightsquigarrow |S_n - S_m| < \epsilon \rightsquigarrow S_n \text{ Cauchy}$$

□

πχ $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει

$\sum_n \frac{(-1)^n}{\ln n}$ συγκλίνει

$\sum_n (-1)^n \sin\frac{\pi}{n}$ συγκλίνει

Σύγκλιση αναδιατεταγμένης σειράς

Αν η σειρά $\sum\limits_n a_n$ συγκλίνει απόλυτα τότε κάθε αναδιάταξη της σειράς $\sum\limits_n b_n$ συγκλίνει απόλυτα στο ίδιο όριο.

Απόδειξη.

Θεωρούμε την αναδιάταξη των Φυσικών αριθμών:

$$(1, 2, \ldots, k, \ldots) \xrightarrow{\sigma} (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \ldots)$$

$$\forall \sigma_k \,\exists n_k \in \mathbb{N} \;:\; \max\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_k\} < n_k$$

Εστω τα μερικά αθροίσματα:

$$S_\ell = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_\ell|\,, \quad T_k = |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_k|$$

όπου $b_m = a_{\sigma_m}$ επομένως $T_k \leq S_{n_k}$. Η υπακολουθία S_{n_k} συγκλινει δηλαδή είναι μια ακολουθία Cauchy $\rightsquigarrow$ η ακολουθία T_k είναι μια ακολουθία Cauchy, δηλαδή συγκλίνει. Επειδή έχουν αύξουσες ακολουθίες που συγκλίνουν, τότε το όριο της υπακολουθίας είναι και το όριο της ακολουθίας. Αρα

$$T_k \leq S_{n_k} \;\rightsquigarrow\; \lim_{k\to\infty} T_k \leq \lim_{k\to\infty} S_{n_k} \;\rightsquigarrow \sum_n b_n \leq \sum_n a_n$$

Η ακολουθία a_n μια αναδιάταξη της ακολουθίας b_n, επομένως

$$\sum_n a_n \leq \sum_n b_n$$

Αρα οι δύο σειρές συγκλίνουν στο ίδιο όριο. $\square$