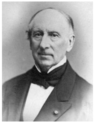
Λογισμός Ι Συνέχεια - Παράγωγοι

Κ. Δασκαλογιάννης
daskalo@math.auth.gr

2014

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ: Ορισμός Cauchy



Augustin-Louis Cauchy 1789-1857

Ορισμός σύγκλισης Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Η συνάρτηση } f(x) \\ \text{συγκλίνει για } x \to \xi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \lim_{x\to\xi} f(x) = \ell \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon, \xi) \; : \; |x - \xi| < \delta \rightsquigarrow |f(x) - \ell| < \epsilon \right\}$$

ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

$$\lim_{x\to\xi^-} f(x) = \ell_- \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_L(\epsilon, \xi) \; : \; \xi - \delta_L < x \leq \xi \rightsquigarrow \\ |f(x) - \ell| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x\to\xi^+} f(x) = \ell_+ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_R(\epsilon, \xi) \; : \; \xi \leq x < \xi + \delta_R \rightsquigarrow \\ |f(x) - \ell| < \epsilon \end{array} \right\}$$

Πρόταση

$$\left\{ \lim_{x\to\xi} f(x) = \ell \right\} \Leftrightarrow \left\{ \ell_+ = \ell_- = \ell \right\}$$

Παραδείγμα Αν $f(x)=\sqrt{x},\quad x\geq 0$ **τότε** $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) \;= f(\xi)$ **για** $\xi>0$

Πρόχειρο

$$|\sqrt{x}-\sqrt{\xi}| = \frac{|x-\xi|}{\sqrt{x}+\sqrt{\xi}} \leq \frac{\delta}{\sqrt{\xi}} \equiv \epsilon \;\rightsquigarrow\; \delta(\epsilon,\xi)=\epsilon\,\sqrt{\xi}$$

$$\forall\,\epsilon>0,\;\exists\,\delta(\epsilon,\xi)=\epsilon\,\sqrt{\xi}\;:\;|x-\xi|<\delta(\epsilon,\xi)\rightsquigarrow\;|\sqrt{x}-\sqrt{\xi}|<\epsilon$$

Παραδείγμα Αν $f(x)=x^5$ **τότε** $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) \;= f(\xi)$

Πρόχειρο

$$(x^5-\xi^5)=(x-\xi)\left(x^5+x^4\xi+x^3\xi^2+x^2\xi^3+x\xi^4+\xi^5\right)$$

$$\left|x^5-\xi^5\right| \leq |x-\xi|\cdot\left(|x|^5+|x|^4|\xi|+|x|^3|\xi|^2+|x|^2|\xi|^3+|x||\xi|^4+|\xi|^5\right)$$

$$\boxed{|x-\xi|<\delta}\;\rightsquigarrow\;|x|<|\xi|+\delta\;\rightsquigarrow$$

$$\left(|x|^5+|x|^4|\xi|+|x|^3|\xi|^2+|x|^2|\xi|^3+|x||\xi|^4+|\xi|^5\right)<$$

$$<\frac{(|\xi|+\delta)^5-|\xi|^5}{(|\xi|+\delta)-|\xi|}=\frac{(|\xi|+\delta)^5-|\xi|^5}{\delta}\;\rightsquigarrow$$

$$\left|x^5-\xi^5\right|\leq|x-\xi|\cdot\frac{(|\xi|+\delta)^5-|\xi|^5}{\delta}\;\rightsquigarrow$$

$$\left|x^5-\xi^5\right|<(|\xi|+\delta)^5-|\xi|^5=\epsilon\;\rightsquigarrow$$

$$\delta(\epsilon,\xi)=\sqrt[5]{\epsilon+|\xi|^5}-|\xi|$$

$$\forall\,\epsilon>0,\;\exists\,\delta(\epsilon,\xi)=\sqrt[5]{\epsilon+|\xi|^5}-|\xi|\;:\;|x-\xi|<\delta(\epsilon,\xi)\rightsquigarrow\;|\sqrt{x}-\sqrt{\xi}|<\epsilon$$

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ: Ορισμός Heine

Heinrich
Eduard
Heine
1821-81

Ορισμός σύγκλισης Heine

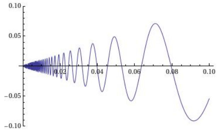
$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Η συνάρτηση } f(x) \\ \text{συγκλίνει} \\ \text{για } x \to \xi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \exists \lim_{x \to \xi} f(x) \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \forall\, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \rightsquigarrow f(x_n) \ \text{ συγκλίνει} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Η συνάρτηση } f(x) \\ \text{ΔΕΝ συγκλίνει} \\ \text{για } x \to \xi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Αν } \exists\, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \\ \text{τότε } f(x_n) \ \text{ ΔΕΝ συγκλίνει} \end{array} \right\}$$

πχ. Η $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ συγκλίνει για $x \to 0$.

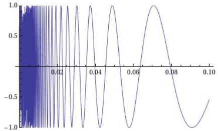
$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \rightsquigarrow f(x_n) = \underbrace{x_n}_{\text{μηδενική}} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)}_{\text{φραγμένη}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$



πχ. Η $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ **ΔΕΝ** συγκλίνει για $x \to 0$.

$$\exists\, x_n = \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \rightsquigarrow f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi = (-1)^n$$

$f(x_n)$ δεν συγκλίνει $\rightsquigarrow$ $f(x)$ δεν συγκλίνει για $x \to 0$



Ορισμός σύγκλισης $\mathfrak{Heine}$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Η συνάρτηση } f(x)\\ \text{συγκλίνει}\\ \text{για } x\to\xi\end{array}\right\} \Leftrightarrow \{\exists \lim_{x\to\xi} f(x)\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\forall\, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi\\ \rightsquigarrow f(x_n) \text{ συγκλίνει}\end{array}\right\}$$

Μοναδικότητα ορίου

Το όριο μιας συνάρτησης είναι μοναδικό

Απόδειξη.

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \rightsquigarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_1$$

$$y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \rightsquigarrow f(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_2$$

$$z_n \leftrightarrow (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_k, y_k, \ldots)$$

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \rightsquigarrow f(z_n) \text{ συγκλίνει}$$

Οι δύο υπακολουθίες $f(z_{2k-1}) = f(x_k)$ και $f(z_{2k}) = f(y_k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ έχουν το ίδιο όριο $\rightsquigarrow \ell_1 = \ell_2$ $\square$

Ισοδυναμία ορισμών $\mathfrak{Heine}$ $\Leftrightarrow$ Cauchy (Αρχή μεταφοράς)

$$\left\{ \text{ Η συνάρτηση } f(x) \text{ συγκλίνει για } x \to \xi \right\} \Leftrightarrow \lim_{x \to \xi} f(x) = \ell$$

Ορισμός $\mathfrak{Heine}$	Ορισμός Cauchy
	
γιά κάθε $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$ $\Downarrow$ $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$	$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon, \xi) \ :$ $\lvert x - \xi \rvert < \delta(\epsilon, \xi)$ $\rightsquigarrow \ \lvert f(x) - \ell \rvert < \epsilon$

Ακολουθίες	Συναρτήσεις
$\lim\limits_{n\to\infty} \lvert a_n\rvert = \lvert \lim\limits_{n\to\infty} a \rvert$	$\lim\limits_{x\to\xi} \lvert f(x)\rvert = \lvert \lim\limits_{x\to\xi} f(x) \rvert$
$\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda\, a_n) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$\lim\limits_{x\to\xi} (\lambda\, f(x)) = \lambda \lim\limits_{x\to\xi} (f(x))$
$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{x\to\xi} (f(x) + g(x)) =$ $= \lim\limits_{x\to\xi} f(x) + \lim\limits_{x\to\xi} g(x)$
$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{x\to\xi} (f(x) \cdot g(x)) =$ $= \lim\limits_{x\to\xi} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\xi} g(x)$
$0 \le a_n \Rightarrow 0 \le \lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$0 \le f(x) \Rightarrow 0 \le \lim\limits_{x\to\xi} f(x)$
$a_n \le b_n \Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$f(x) \le g(x) \Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) \le \lim\limits_{x\to\xi} g(x)$
$a_n \le b_n \le c_n$ και $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$	$f(x) \le g(x) \le h(x)$ και $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \ell$ $\lim\limits_{x\to\xi} h(x) = \ell \Rightarrow \lim\limits_{x\to\xi} g(x) = \ell$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0,$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$	$\lim\limits_{x\to\xi} g(x) \neq 0,$ $\lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\xi} f(x)}{\lim\limits_{x\to\xi} g(x)}$

$$\boxed{\boxed{\text{Cauchy} \Rightarrow \mathfrak{Heine}}}$$

$$\text{Cauchy} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta\,(\epsilon, \xi)\ : \\ |x - \xi| < \delta\,(\epsilon, \xi)\,; \rightsquigarrow\ |f(x) - \ell| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$$x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \xi \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \exists\, N\,(\widetilde{\epsilon})\ : \\ n > N\,(\widetilde{\epsilon}) \rightsquigarrow |x_n - \xi| < \widetilde{\epsilon} \end{array} \right\}$$

$$\text{Αν } \widetilde{\epsilon} = \delta\,(\epsilon, \xi) \text{ Cauchy} \rightsquigarrow$$

$$|x_n - \xi| < \delta(\epsilon, \xi) \rightsquigarrow |f(x_n) - \ell| < \epsilon$$

Αρα

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N'(\epsilon) = N\,(\delta\,(\epsilon, \xi))\ : \\ n > N'(\epsilon) \rightsquigarrow |f(x_n) - \ell| < \epsilon \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \ell$$

$$\boxed{\boxed{\mathfrak{Heine} \Rightarrow \text{Cauchy}}}$$

$\boxed{\textbf{Υπόθεση}}$ Cauchy $\boxed{\textbf{μη}}$ **αληθινή**

$$\exists\ \epsilon, \quad \forall\, \delta\ \exists x : \left\{ \begin{array}{c} \xi - \delta < x < \xi + \delta \rightsquigarrow \\ |f(x) - \ell| \geq \epsilon \end{array} \right\}$$

Επομένως μπορούμε να διαλέξουμε μια ακολουθία

$$\xi - \frac{1}{n} < x_n < \xi + \frac{1}{n} \rightsquigarrow x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \xi$$

"**ΟΧΙ**" Cauchy $\rightsquigarrow |f(x_n) - \ell)| \geq \epsilon$ **άρα η ακολουθία** $f(x_n)$ **δεν συγκλίνει στο** ℓ, **πράγμα** $\boxed{\textbf{άτοπο}}$, **για τί από υπόθεση η ακολουθία** $f(x_n)$ **συγκλίνει**.

Ορισμός:ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ σε ένα σημείο

$$\left\{ f(x) \ \text{ συνεχής στο } \ \xi \right\} \Leftrightarrow \left\{ \lim_{x \to \xi} f(x) \ = f(\xi) \right\}$$

$$\mathfrak{Heine} : \forall\, x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \xi \ \Rightarrow \ f(x_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(\xi)$$

$$\text{Cauchy} : \forall\, \epsilon > 0 \ \exists\, \delta \ : \ |x - \xi| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(\xi)| < \epsilon$$

Πλευρικά Ορια

$$\lim_{x \to \xi^-} f(x) \ \equiv f(\xi^-) \qquad \lim_{x \to \xi^+} f(x) \ \equiv f(\xi^+)$$

Πρόταση

$$\left\{ f(x) \ \text{ συνεχής στο } \ \xi \right\} \Leftrightarrow \left\{ f(\xi^-) = f(\xi^+) \right\}$$

ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΕ ΕΝΑ ΣΥΝΟΛΟ

Ορισμός

$$\left\{ f(x) \ \text{ συνεχής στο σύνολο } \mathbb{A} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \lim_{\substack{x \to \xi \\ x, \xi \in \mathbb{A}}} f(x) = f(\xi) \right\}$$

$$\left\{ f(x) \ \text{ συνεχής στο κλειστό διάστημα } \mathbb{I} = [a,\, b] \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \xi \in (a,\, b) \ \rightsquigarrow & \displaystyle\lim_{\mathbb{I} \ni x \to \xi} f(x) & = f(\xi) \\ \xi = a \ \rightsquigarrow & \displaystyle\lim_{x \to a^+} f(x) & = f(a) \\ \xi = b \ \rightsquigarrow & \displaystyle\lim_{x \to b^-} f(x) & = f(b) \end{array} \right\}$$

Ορισμός

$f(x)$ **φραγμένη** $\Leftrightarrow m < f(x) < M$

Πρόταση

$$\left\{f(x)\ \text{συνεχής στο ανοικτό } A \ \text{ και } \ \xi \in A\right\} \Rightarrow$$
$$\left\{f(x)\ \text{φραγμένη γύρω από το } \ \xi\right\}$$

Πρόταση

$$\left\{ f(x) \text{ συνεχής στο ανοικτό } A \text{ και } \xi \in A \right\} \Rightarrow$$
$$\left\{ f(x) \text{ φραγμένη γύρω από το } \xi \right\}$$

Απόδειξη.

Περίπτωση 1: $f(\xi) = 0$

$\left\{ f(x) \text{ συνεχής στο } \xi \right\} \Rightarrow$

$$\epsilon = M \, \exists \delta \; : \; |x - \xi| < \delta \rightsquigarrow |f(x)| < M$$

Περίπτωση 2: $f(\xi) \neq 0$

$\left\{ f(x) \text{ συνεχής στο } \xi \right\} \Rightarrow$

$$\epsilon = \frac{|f(\xi)|}{2} \, \exists \delta \; : \; |x - \xi| \rightsquigarrow |f(x) - f(\xi)| < \frac{|f(\xi)|}{2}$$

$$\Big| |f(x)| - |f(\xi)| \Big| \leq |f(x) - f(\xi)| < \frac{|f(\xi)|}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{|f(\xi)|}{2} \leq |f(x)| \leq \frac{3\,|f(\xi)|}{2}$$

$\square$

Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

Αν

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "h"'] & y \arrow[d, "g"] \\ & z \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} &[a,\, b] \ni x \xrightarrow{f} f(x) = y \in [m,\, M] \\ &[m,\, M] \ni y \xrightarrow{g} g(y) = z \in [n,\, N] \end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(y)$ είναι συνεχείς $\rightsquigarrow$ η σύνθεση των συναρτήσεων $h(x) = (g \circ f)(x) = g\left(f\left(x\right)\right)$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων (Απόδειξη)

Αν

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "h"'] & y \arrow[d, "g"] \\ & z \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} [a,\, b] \ni x \xrightarrow{f} f(x) = y \in [m,\, M] \\ [m,\, M] \ni y \xrightarrow{g} g(y) = z \in [n,\, N] \end{array}$$

Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(y)$ είναι συνεχείς $\rightsquigarrow$ η σύνθεση των συναρτήσεων $h(x) = (g \circ f)(x) = g\left(f\left(x\right)\right)$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη.

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi \underset{\text{συνεχής}}{\overset{f}{\Longrightarrow}} y_n = f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\xi) = \eta$$

$$y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta \underset{\text{συνεχής}}{\overset{g}{\Longrightarrow}} z_n = g(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(\eta) = \theta$$

Αν $h = g \circ f$ν δηλ. $h(x) = g\left(f(x)\right)$

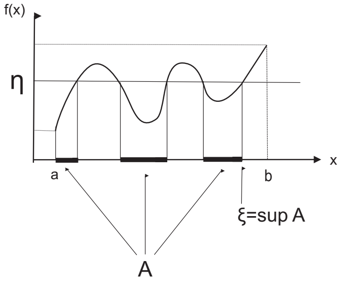
$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi \underset{\text{συνεχής}}{\overset{h}{\Longrightarrow}} z_n = h(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} h(\xi) = \theta$$

□

Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών

Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών

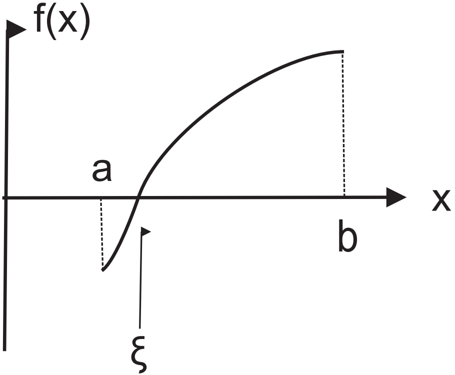
$$\left\{ \begin{array}{c} f(x) \ \text{συνεχής στο} \ [a,\, b] \\ f(a) \neq f(b) \ \big(\text{πχ} \ \ f(a) < f(b) \big) \\ \forall\, \eta,\ f(a) < \eta < f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \exists\, \xi \in [a,\, b] \ \rightsquigarrow \ f(\xi) = \eta \right\}$$



Θεώρημα Bolzano

Θεώρημα Bolzano

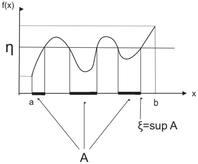
$$\left\{ \begin{array}{c} f(x) \ \text{συνεχής στο} \ [a,\,b] \\ f(a)\cdot f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \exists\, \xi \in (a,\,b) \ \rightsquigarrow \ f(\xi) = 0 \right\}$$



Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών (Απόδειξη)

Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών

$$\left\{\begin{array}{c} f(x) \ \text{συνεχής στο} \ [a,\, b] \\ f(a) \neq f(b) \ \big(\text{πχ} \ f(a) < f(b)\big) \\ \forall\, \eta,\ f(a) < \eta < f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \Big\{ \exists\, \xi \in [a,\, b] \ \rightsquigarrow \ f(\xi) = \eta \Big\}$$



Απόδειξη.

$\mathbb{A} = \{x \in [a,\, b] \ : \ f(x) \leq \eta\} \subset [a,\, b] \rightsquigarrow \exists\, \xi = \sup \mathbb{A} \ \rightsquigarrow$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_n \in \mathbb{A} \ : \ \xi - \frac{1}{n} < x_n \leq \xi \ \rightsquigarrow \ \lim_{n \to \infty} x_n = \xi$$

$$f(x) \ \text{συνεχής} \ \Rightarrow \ \lim_{n \to \infty} f(x_n) \ = \ \lim_{x \to \xi^-} f(x) \ = f(\xi) \leq \eta$$

$\xi < b$ διότι $f(\xi) \leq \eta < f(b)$

$$x \geq \xi \ \rightsquigarrow \ f(x) \geq \eta \ \rightsquigarrow \ \lim_{x \to \xi^+} f(x) \ = f(\xi) \geq \eta$$

Αρα $f(\xi) = \eta$ □

Ομοιόμορφη συνέχεια

Ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση σε ένα σύνολο A

$$\{\text{ Ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο σύνολο } A\} \Leftrightarrow$$
$$\{\forall\, \epsilon > 0 \;\exists\, \delta(\epsilon) > 0 \;\forall\, x,\, y \in A \;:\; |x-y| < \delta(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; |f(x) - f(y)| < \epsilon\}$$

πχ. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ για $x \in (-\infty, \infty)$

Συμπέρασμα

$$\{\text{ Ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο σύνολο } A\} \Rightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \forall\; \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;\text{ είναι ακολουθία Cauchy} \\ \rightsquigarrow\; \{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \;\text{ είναι ακολουθία Cauchy} \end{array} \right\}$$

ΜΗ Ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση σε ένα σύνολο A

$$\{\text{ΜΗ Ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο σύνολο } A\} \Leftrightarrow$$
$$\{\exists\, \epsilon > 0 \;\forall\, \delta > 0 \;\exists\, x,\, y \in A \;:\; |x-y| < \delta \;\rightsquigarrow\; |f(x) - f(y)| \geq \epsilon\} \Leftrightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \exists\; \text{ συγκλίνουσα (δηλ. Cauchy) ακολουθία } \; \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \\ \rightsquigarrow\; \{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \;\text{ ΜΗ συγκλίνουσα (δηλ. ΟΧΙ Cauchy) ακολουθία} \end{array} \right\}$$

πχ. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ για $x \in (0, 1]$

$$\left\{ f(x) \;\; \text{ομοιόμορφα συνεχής στο } \mathbb{I} \right\} \Leftrightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \forall \, \epsilon > 0, \\ \exists \, \delta\,(\epsilon) > 0 \;\; : \;\; \forall \, x, \xi \in \mathbb{I}, \; |x - \xi| < \delta\,(\epsilon, \xi) \rightsquigarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\left\{ f(x) \;\; \boxed{\text{MH}} \text{ ομοιόμορφα συνεχής } \right\} \Leftrightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \exists \, \epsilon > 0, \; \forall \, \delta > 0 \;\; : \\ \exists \, x, \xi \in \mathbb{I}, \; |x - \xi| < \delta \;\; \rightsquigarrow |f(x) - f(\xi)| \geq \epsilon \end{array} \right\}$$

Πρόταση

$$\left\{ f(x) \;\; \text{συνεχής στο } \;\; [a, \, b] \right\} \Rightarrow$$
$$\left\{ f(x) \;\; \text{ομοιόμορφα συνεχής στο } \;\; [a, \, b] \right\}$$

Πρόταση

$$\left\{ f(x) \ \text{ συνεχής στο } \ [a,\, b] \right\} \Rightarrow$$
$$\left\{ f(x) \ \text{ ομοιόμορφα συνεχής στο } \ [a,\, b] \right\}$$

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι η $f(x)$ ΔΕΝ είναι ομοιόμορφα συνεχής αλλά είναι ΜΟΝΟ απλά συνεχής στο $[a,\, b]$.
όχι ομοιόμορφα συνεχής $\Rightarrow$

$$\exists\, \epsilon_0 \ : \ \forall\, \delta_0 \ \exists\, x_0,\, y_0 \ : \ |x_0 - y_0| < \delta_0 \ \Rightarrow \ |f(x_0) - f(y_0)| \geq \epsilon_0$$

$f(x)$ συνεχής $\Rightarrow$

$$\forall\, \epsilon > 0 \ \exists \delta(\epsilon, y_0) \ : \ \forall\, x, \ |x - y_0| < \delta(\epsilon, y_0) \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y_0)| < \epsilon$$

Διαλέγουμε $\epsilon = \epsilon_0/2$ και $\delta_0 = \delta(\epsilon_0/2, y_0)$ οπότε θα πρέπει
$|f(x_0) - f(y_0)| < \epsilon_0/2$ οπότε έχουμε άτοπο □

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Ορισμός συνέχειας Cauchy σε ένα υποσύνολο $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$
πχ $\mathbb{I} = [a,\, b]$ ή $[a,\, \infty)$ ή $(-\infty,\, b]$ κλπ

$$\left\{ \lim_{x \to \xi} f(x) \; = f(\xi) \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, x, \xi \in \mathbb{I},\; \forall\, \epsilon > 0 \;\exists\; \delta\,(\epsilon, \xi) > 0 \;\; : \\ |x - \xi| < \delta\,(\epsilon, \xi) \rightsquigarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\rightsquigarrow\; \inf_{\xi \in \mathbb{I}} \delta(\epsilon, \xi) > 0 \;\; \Rightarrow$$ Ομοιόμορφη συνέχεια

πχ $f(x) = \sqrt{x},\; x > 1,\; f(x) = \mathrm{e}^{x},\; x \in [0, 1],\; f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1},\; x \in \mathbb{R}$

Ορισμός

$f(x)$ συνάρτηση Lipschitz $\Leftrightarrow$ $\boxed{|f(x) - f(y)| < K\,|x - y|}$

Πρόταση

$f(x)$ συνάρτηση Lipschitz σε ένα διάστημα $\rightsquigarrow$ $f(x)$ ομοιόμορφα συνεχής

πχ Η $f(x) = \mathrm{e}^x$ είναι Lipschitz σε ένα διάστημα $[a,\, b]$ $\rightsquigarrow$ $f(x)$ συνεχής
Η $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ είναι Lipschitz στο $\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $f(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Λήμμα

$$\left\{\begin{array}{c} f(x) \text{ συνεχής στο ανοικτό} \\ \text{διάστημα } \ (a,\,b) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow$$
$$\text{και } \left\{\begin{array}{c} \text{για } \ \xi \in (a,\,b) \\ f(\xi) > 0 \end{array}\right\}$$

$$\{\exists\, \delta > 0 \ : \ a < \xi - \delta < x < \xi + \delta < b \ \rightsquigarrow \ f(x) > 0\}$$

Απόδειξη.

☐ *Απόδ*: Για $\epsilon = \dfrac{f(\xi)}{2}$ $\exists\, \delta > 0 \ :$

$$a < \xi - \delta < x < x + \delta < b \ \rightsquigarrow \ 0 < \frac{f(\xi)}{2} < f(x) < \frac{3f(\xi)}{2}$$

☐

ΟΡΙΑ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$$

Cauchy : $\forall R > 0, \quad \exists \delta : |x-\xi| < \delta \rightsquigarrow f(x) > R$

$\mathfrak{Heine}$: $\forall x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \rightsquigarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$$

Cauchy : $\forall R > 0\,, \quad \exists \delta : |x-\xi| < \delta \rightsquigarrow f(x) < -R$

$\mathfrak{Heine}$: $\forall x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \rightsquigarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow$$

Cauchy : $\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists r : x > r \rightsquigarrow |f(x)-\ell| < \epsilon$

$\mathfrak{Heine}$: $\forall x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \rightsquigarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow$$

Cauchy : $\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists r : x < r \rightsquigarrow |f(x)-\ell| < \epsilon$

$\mathfrak{Heine}$: $\forall x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty \rightsquigarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Πλάγια ασύμπτωτη:

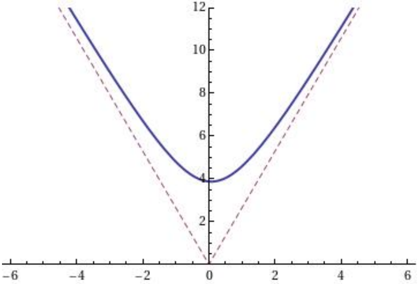
$$\exists \boxed{\alpha \neq 0} \text{ και } \beta : \lim_{x\to\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$$

ή

$$\exists \boxed{\alpha \neq 0} \text{ και } \beta : \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$$

$$\boxed{\alpha = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}} \quad \boxed{\beta = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - \alpha x)}$$

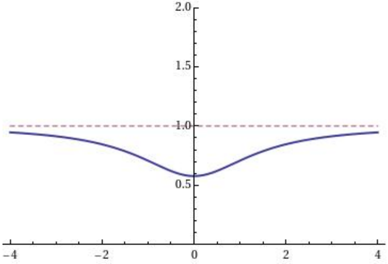
πχ $f(x) = \sqrt{7x^2 - x + 15}$



Οριζόντια ασύμπτωτη:

$$\exists \ \beta_+ \ \text{ ή/και } \ \beta_+ \ : \ \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - \beta_\pm\right) = 0$$

πχ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$



$$\left\{\mathbb{A}\ \text{φραγμένο σύνολο}\right\} \Leftrightarrow \left\{\exists\, m,\ M\ :\ x \in \mathbb{A}\ \rightsquigarrow\ m \le x \le M\right\}$$
$$\Leftrightarrow \left\{\exists\, K\ :\ \forall\, x \in \mathbb{A}\ \rightsquigarrow\ |x| \le K\right\}$$

$$\left\{\mathbb{A}\ \text{ΜΗ φραγμένο σύνολο}\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\, K\ :\ \exists\, x \in \mathbb{A}\ \rightsquigarrow\ |x| > K\right\}$$

Θεώρημα Bolzano - Weierstrass

$$\left\{\mathbb{A}\ \text{φραγμένο απειροσύνολο}\right\} \overset{\text{Bolzano}}{\Longrightarrow} \forall\ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{A}\ \Rightarrow$$
$$\left\{\begin{array}{c} \exists\ \ \text{συγκλίνουσα} \\ \text{υπακολουθία}\ \ \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \end{array}\right\}$$

Μη φραγμένα σύνολα

$$\left\{\exists\ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{A}\ \text{μονότονη ΜΗ συγκλίνουσα}\right\} \Longleftrightarrow$$
$$\left\{\mathbb{A}\ \underline{\text{ΜΗ}}\ \text{φραγμένο σύνολο}\right\}$$

Συνεχής εικόνα κλειστού διαστήματος

Πρόταση

$$\{f(x) \text{ συνεχής στο κλειστό διάστημα } \mathbb{I} = [a,\, b]\} \Rightarrow$$
$$\left\{f(\mathbb{I}) \text{ φραγμένο σύνολο}\right\} \Rightarrow \left\{\exists\, m \leq M \ :\ x \in \mathbb{I} \rightsquigarrow m \leq f(x) \leq M\right\}$$

Πρόταση

$$\left\{\begin{array}{c} f(x) \text{ συνεχής στο κλειστό} \\ \text{διάστημα } \mathbb{I} = [a,\, b] \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\left\{\begin{array}{c} \exists\, \xi \in [a,\, b] \ :\ f(\xi) = \min f\left([a,\, b]\right) = m \\ \exists\, \eta \in [a,\, b] \ :\ f(\eta) = \max f\left([a,\, b]\right) = M \end{array}\right\}$$

Συμπέρασμα

Αν $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση τότε η εικόνα ενός κλειστού διαστήματος είναι ένα κλειστό διάστημα

$$[a,\, b] \xrightarrow[\text{επί}]{f} [m,\, M]$$

Αποδείξεις

Πρόταση

$$\{f(x) \text{ συνεχής στο κλειστό διάστημα } \mathbb{I}=[a,\,b]\} \Rightarrow$$
$$\left\{f(\mathbb{I}) \text{ φραγμένο σύνολο}\right\} \Rightarrow \left\{\exists\, m \le M \;:\; x \in \mathbb{I} \rightsquigarrow m \le f(x) \le M\right\}$$

Απόδειξη.

Εστω $\left\{f(\mathbb{I}) \text{ ΜΗ φραγμένο σύνολο}\right\} \Rightarrow \exists\, y_n \in f(\mathbb{I})$ μονότονη ΜΗ φραγμένη και $y_n = f(x_n)$, $x_n \in \mathbb{A}$, η y_n δεν συγκλίνει

$$\left\{\mathbb{I} \text{ φραγμένο σύνολο}\right\} \overset{\text{Bolzano}}{\Longrightarrow} \forall\, x_n \in \mathbb{I} \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{c}\exists \text{ συγκλίνουσα} \\ \text{υπακολουθία } x_{n_k}\end{array}\right\}$$

$$\text{Επειδή } \mathbb{I}=[a,\,b] \text{ φραγμένο σύνολο} \rightsquigarrow \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi \in \mathbb{I}$$

$$\overset{f \text{ συνεχής}}{\Longrightarrow} \boxed{\exists \lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)}$$

Αρα η υπακολουθία $y_{n_k} = f\left(x_{n_k}\right)$ μιας μονότονης ακολουθίας συγκλίνει $\Rightarrow$ $\exists \lim_{n\to\infty} y_n$ πράγμα άτοπο, δηλαδή $f(\mathbb{I})$ είναι φραγμένο σύνολο.

$$m = \inf\, f\left([a,\,b]\right), \quad M = \sup\, f\left([a,\,b]\right)$$

□

Πρόταση

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x) \ \text{συνεχής στο κλειστό} \\ \text{διάστημα} \ \mathbb{I} = [a,\, b] \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \exists\, \xi \in [a,\, b] \ : \ f(\xi) = \min\, f\left([a,\, b]\right) \\ \exists\, \eta \in [a,\, b] \ : \ f(\eta) = \max\, f\left([a,\, b]\right) \end{array} \right\}$$

Απόδειξη.

Εστω $M = \sup\, f\left([a,\, b]\right)$, τότε

$$\forall\, x \in [a,\, b] \ \rightsquigarrow \ f(x) \leq M \ \Rightarrow$$

$$\rightsquigarrow \{\exists\, x_n \in [a, b] \ : \ M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M\} \ \rightsquigarrow \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$$

$$\text{Weierstrass} \ \rightsquigarrow \ \exists\, x_{n_k} \ : \ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$$

συνέχεια $\rightsquigarrow \ \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi)$
κάθε υπακολουθία $f(x_{n_k})$ της συγκλίνουσας ακολουθίας $f(x_n)$ έχει το ίδιο όριο, δηλαδή $\rightsquigarrow f(\xi) = M$. Αρα $M = \max f(\mathbb{I})$ □

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΜΟΝΟΤΟΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Πρόταση

$$\left\{\ f(x)\ \text{ συνεχής στο }\ [a,\, b]\ \boxed{\text{KAI}}\ f(x)\ \text{ γνήσια αύξουσα/φθίνουσα }\right\}$$
$$\Rightarrow \left\{\ \exists\ f^{-1}\ \text{ γνήσια αύξουσα/φθίνουσα και συνεχής }\right\}$$

Πρόταση

$$\left\{\ f(x)\ \text{ συνεχής στο }\ [a,\, b]\ \boxed{\text{KAI}}\ f(x)\ \text{ αμφιμονότιμη δηλ. } \exists\, f^{-1}\ \right\}$$
$$\Rightarrow \left\{ f(x)\ \text{ γνήσια αύξουσα/φθίνουσα }\right\}$$

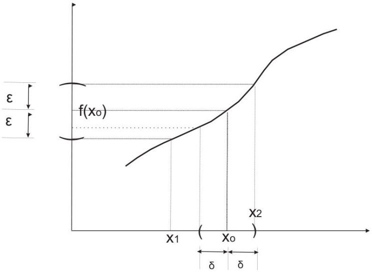
Πρόταση

$$\left\{\ f(x)\ \text{ γνήσια αύξουσα/φθίνουσα }\ \boxed{\text{KAI}}\ \exists\, f^{-1}\ \right\}$$
$$\Rightarrow \left\{ f(x)\ \text{ συνεχής στο }\ [a,\, b]\right\}$$

Πρόταση

$$\left\{\begin{array}{c} f(x) \;\; \text{γνήσια αύξουσα/φθίνουσα} \\ f(x) \;\; \text{αμφιμονότιμη δηλ. } \exists\, f^{-1} \\ \text{και} \;\; [a,\, b] \xrightarrow[\text{επί}]{f} [m,\, M] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ f(x) \;\; \text{συνεχής στο} \;\; [a,\, b] \right\}$$



ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΜΟΝΟΤΟΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ- Αποδείξεις

Πρόταση

$$\left\{\begin{array}{c} f(x) \text{ συνεχής στο } [a,\, b] \\ f(x) \text{ γνήσια αύξουσα/φθίνουσα} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \exists\, f^{-1} \\ \text{γνήσια αύξουσα/φθίνουσα} \\ \text{και συνεχής} \end{array}\right\}$$

Απόδειξη.

(Απόδειξη με Heine)

Βήμα i: $f(x)$ γνήσια αύξουσα στο $[a,\, b] \Rightarrow$

$$a \le x < x' \le b \rightsquigarrow$$
$$m = f(a) \le f(x) < f(x') < f(b) = M$$

αν $f(a) < y < f(b)$ Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών $\rightsquigarrow \exists x \in [a,\, b]$ $y = f(x)$

$\rightsquigarrow$ το x ορίζεται μονοσήμαντα από το $y \Rightarrow \boxed{\exists\, f^{-1}}$ και είναι αύξουσα

Βήμα ii: Εστω ότι $y_n \in f([a,\, b])$ είναι μια αύξουσα ακολουθία και $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta$ τότε $x_n = f^{-1}(y_n)$ είναι αύξουσα ακολουθία και φραγμένη ($x_n \in [a,\, b]$) οπότε $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi$. Επειδή η $f(x)$ είναι συνεχής θα έχουμε $f(\xi) = \eta$ και επειδή υπάρχει η f^{-1} τότε $\xi = f^{-1}(\eta)$. Δηλαδή $f^{-1}(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f^{-1}(\eta)$. Οπότε $\lim\limits_{y\to\eta-} f^{-1}(y) = f^{-1}(\eta)$.

Βήμα iii: Με τον ίδιο τρόπο, διαλέγουμε μια φθίνουσα ακολουθία $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta$ και βρίσκουμε ότι $f^{-1}(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f^{-1}(\eta)$. Οπότε $\lim\limits_{y\to\eta+} f^{-1}(y) = f^{-1}(\eta)$.

$\Rightarrow \boxed{f^{-1} \text{ είναι συνεχής}}$ $\square$

Πρόταση

$$\left\{\begin{array}{c} f(x)\ \text{συνεχής στο}\ [a,\, b] \\ f(x)\ \text{αμφιμονότιμη δηλ.}\ \exists\, f^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ f(x)\ \text{γνήσια αύξουσα/φθίνουσα} \right\}$$

Απόδειξη.

Εστω $f(a) < f(b)$ και $a < x_1 < x_2 < b$

Περ. (i) $f(x_1)\big(\text{ ή } f(x_2)\big) < f(a) < f(b)$
Θεώρημα ενδιαμέσου σημείου $\rightsquigarrow$
$\exists\, x_0 \in [x_1,\, b]\ :\ f(x_0) = f(a)$
$x_0 \neq a \rightsquigarrow$ Ατοπο

Περ. (ii) $f(a) < f(b) < f(x_1)\big(\text{ ή } f(x_2)\big)$
Θεώρημα ενδιαμέσου σημείου $\rightsquigarrow$
$\exists\, x_0 \in [a,\, x_1]\ :\ f(x_0) = f(b)$
$x_0 \neq b \rightsquigarrow$ Ατοπο

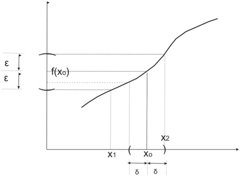
Περ. (iii) $f(a) < f(x_2) < f(x_1) < f(b)$
Θεώρημα ενδιαμέσου σημείου $\rightsquigarrow$
$\exists\, x_0 \in [a,\, x_1]\ :\ f(x_0) = f(x_2)$
$x_0 \neq x_2 \rightsquigarrow$ Ατοπο

Η μόνη περίπτωση που μένει είναι:
$f(a) < f(x_1) < f(x_2) < f(b)$ $\square$

Πρόταση

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x) \text{ γνήσια αύξουσα/φθίνουσα} \\ f(x) \text{ αμφιμονότιμη δηλ. } \exists\, f^{-1} \\ \text{και } [a,\, b] \xrightarrow[\text{επί}]{f} [m,\, M] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ f(x) \text{ συνεχής στο } [a,\, b] \right\}$$



Απόδειξη.

Εστω $f(x)$ γνήσια αύξουσα, $m = f(a)$ και $M = f(b)$
Εστω $\epsilon > 0$

$$y_0 - \epsilon < y_0 < y_0 + \epsilon \;\rightsquigarrow$$
$$x_1 = f^{-1}(y_0 - \epsilon) < x_0 = f^{-1}(y_0) < x_2 = f^{-1}(y_0 + \epsilon)$$
$$\rightsquigarrow\; \delta(\epsilon) = \min\{x_0 - x_1,\, x_2 - x_0\}$$

$$x_1 \leq x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \leq x_2$$
$$y_0 - \epsilon = f(x_1) \leq f(x_0 - \delta) < f(x) < f(x_0 + \delta) \leq f(x_2) = y_0 + \epsilon$$

$f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση □