ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ: Ορισμός Cauchy

Augustin-Louis Cauchy 1789-1857

Ορισμός σύγκλισης Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Η συνάρτηση } f(x) \\ \text{συγκλίνει για } x \to \xi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \lim_{x \to \xi} f(x) = \ell \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon, \xi) \ : \ |x - \xi| < \delta \ \rightsquigarrow \ |f(x) - \ell| < \epsilon \right\}$$

ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

$$\lim_{x \to \xi^-} f(x) = \ell_- \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_L(\epsilon, \xi) \ : \ \xi - \delta_L < x \leq \xi \ \rightsquigarrow \\ |f(x) - \ell| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \to \xi^+} f(x) = \ell_+ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_R(\epsilon, \xi) \ : \ \xi \leq x < \xi + \delta_R \ \rightsquigarrow \\ |f(x) - \ell| < \epsilon \end{array} \right\}$$

Πρόταση

$$\left\{ \lim_{x \to \xi} f(x) = \ell \right\} \Leftrightarrow \left\{ \ell_+ = \ell_- = \ell \right\}$$

Παραδείγμα Αν $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$ τότε $\lim_{x \to \xi} f(x) \; = f(\xi)$ για $\xi > 0$

Πρόχειρο

$$|\sqrt{x} - \sqrt{\xi}| = \frac{|x - \xi|}{\sqrt{x} + \sqrt{\xi}} \leq \frac{\delta}{\sqrt{\xi}} \equiv \epsilon \rightsquigarrow \boxed{\delta(\epsilon, \xi) = \epsilon \sqrt{\xi}}$$

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists \, \delta(\epsilon, \xi) = \epsilon \sqrt{\xi} \; : \; |x - \xi| < \delta(\epsilon, \xi) \rightsquigarrow |\sqrt{x} - \sqrt{\xi}| < \epsilon$$

Παραδείγμα Αν $f(x) = x^5$ τότε $\lim_{x \to \xi} f(x) \; = f(\xi)$

Πρόχειρο

$$(x^5 - \xi^5) = (x - \xi)\left(x^5 + x^4\xi + x^3\xi^2 + x^2\xi^3 + x\xi^4 + \xi^5\right)$$

$$\left|x^5 - \xi^5\right| \leq |x - \xi| \cdot \left(|x|^5 + |x|^4|\xi| + |x|^3|\xi|^2 + |x|^2|\xi|^3 + |x||\xi|^4 + |\xi|^5\right)$$

$$\boxed{|x - \xi| < \delta} \rightsquigarrow |x| < |\xi| + \delta \rightsquigarrow$$

$$\left(|x|^5 + |x|^4|\xi| + |x|^3|\xi|^2 + |x|^2|\xi|^3 + |x||\xi|^4 + |\xi|^5\right) <$$

$$< \frac{(|\xi| + \delta)^5 - |\xi|^5}{(|\xi| + \delta) - |\xi|} = \frac{(|\xi| + \delta)^5 - |\xi|^5}{\delta} \rightsquigarrow$$

$$\left|x^5 - \xi^5\right| \leq |x - \xi| \cdot \frac{(|\xi| + \delta)^5 - |\xi|^5}{\delta} \rightsquigarrow$$

$$\left|x^5 - \xi^5\right| < (|\xi| + \delta)^5 - |\xi|^5 = \epsilon \rightsquigarrow$$

$$\boxed{\delta(\epsilon, \xi) = \sqrt[5]{\epsilon + |\xi|^5} - |\xi|}$$

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists \, \delta(\epsilon, \xi) = \sqrt[5]{\epsilon + |\xi|^5} - |\xi| \; : \; |x - \xi| < \delta(\epsilon, \xi) \rightsquigarrow |\sqrt{x} - \sqrt{\xi}| < \epsilon$$

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ: Ορισμός Heine

Heinrich Eduard Heine 1821-81

Ορισμός σύγκλισης Heine

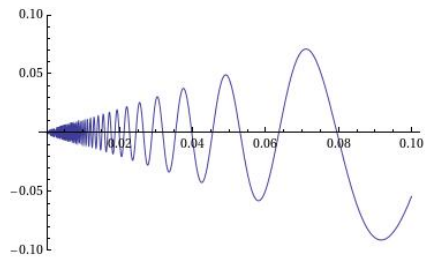
$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Η συνάρτηση } f(x) \\ \text{συγκλίνει} \\ \text{για } x \to \xi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \exists \lim_{x \to \xi} f(x) \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \forall\, x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi \rightsquigarrow f(x_n) \ \text{συγκλίνει} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Η συνάρτηση } f(x) \\ \text{ΔΕΝ συγκλίνει} \\ \text{για } x \to \xi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Αν } \exists\, x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi \\ \text{τότε } f(x_n) \ \text{ΔΕΝ συγκλίνει} \end{array} \right\}$$

πχ. Η $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ συγκλίνει για $x \to 0$.

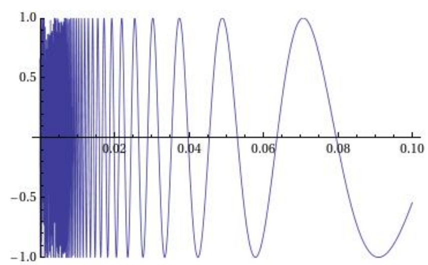
$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \rightsquigarrow f(x_n) = \underbrace{x_n}_{\text{μηδενική}} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)}_{\text{φραγμένη}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$



πχ. Η $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ **ΔΕΝ** συγκλίνει για $x \to 0$.

$$\exists\ x_n = \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \rightsquigarrow f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi = (-1)^n$$

$f(x_n)$ δεν συγκλίνει $\rightsquigarrow$ $f(x)$ δεν συγκλίνει για $x \to 0$



Ορισμός σύγκλισης Heine

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Η συνάρτηση } f(x) \\ \text{συγκλίνει} \\ \text{για } x \to \xi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \{\exists \lim_{x \to \xi} f(x)\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \\ \rightsquigarrow f(x_n) \text{ συγκλίνει} \end{array} \right\}$$

Μοναδικότητα ορίου

Το όριο μιας συνάρτησης είναι μοναδικό

Απόδειξη.

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \rightsquigarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_1$$

$$y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \rightsquigarrow f(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_2$$

$$z_n \leftrightarrow (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_k, y_k, \ldots)$$

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \rightsquigarrow f(z_n) \text{ συγκλίνει}$$

Οι δύο υπακολουθίες $f(z_{2k-1}) = f(x_k)$ και $f(z_{2k}) = f(y_k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ έχουν το ίδιο όριο $\rightsquigarrow \ell_1 = \ell_2$ □

Ισοδυναμία ορισμών Heine $\Leftrightarrow$ Cauchy (Αρχή μεταφοράς)

$$\left\{ \text{ Η συνάρτηση } f(x) \text{ συγκλίνει για } x \to \xi \right\} \Leftrightarrow \lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$$

Ορισμός Heine	Ορισμός Cauchy
	
γιά κάθε $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi$ $\Downarrow$ $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$	$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\epsilon, \xi) \ :$ $\lvert x - \xi \rvert < \delta(\epsilon, \xi)$ $\rightsquigarrow \ \lvert f(x) - \ell \rvert < \epsilon$

Ακολουθίες	Συναρτήσεις
$\lim\limits_{n\to\infty} \lvert a_n\rvert = \lvert \lim\limits_{n\to\infty} a \rvert$	$\lim\limits_{x\to\xi} \lvert f(x)\rvert = \lvert \lim\limits_{x\to\xi} f(x) \rvert$
$\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda\, a_n) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$\lim\limits_{x\to\xi} (\lambda\, f(x)) = \lambda \lim\limits_{x\to\xi} (f(x))$
$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{x\to\xi} (f(x)+g(x)) =$ $= \lim\limits_{x\to\xi} f(x) + \lim\limits_{x\to\xi} g(x)$
$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{x\to\xi} (f(x)\cdot g(x)) =$ $= \lim\limits_{x\to\xi} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\xi} g(x)$
$0 \le a_n \Rightarrow 0 \le \lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$0 \le f(x) \Rightarrow 0 \le \lim\limits_{x\to\xi} f(x)$
$a_n \le b_n \Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$f(x) \le g(x) \Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) \le \lim\limits_{x\to\xi} g(x)$
$a_n \le b_n \le c_n$ και $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$	$f(x) \le g(x) \le h(x)$ και $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \ell$ $\lim\limits_{x\to\xi} h(x) = \ell \Rightarrow \lim\limits_{x\to\xi} g(x) = \ell$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0,$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$	$\lim\limits_{x\to\xi} g(x) \neq 0,$ $\lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\xi} f(x)}{\lim\limits_{x\to\xi} g(x)}$

$$\boxed{\boxed{\text{Cauchy} \Rightarrow \mathfrak{Heine}}}$$

$$\text{Cauchy} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta\,(\epsilon, \xi)\ : \\ |x - \xi| < \delta\,(\epsilon, \xi)\,; \rightsquigarrow\ |f(x) - \ell| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \exists\, N\,(\widetilde{\epsilon})\ : \\ n > N\,(\widetilde{\epsilon}) \rightsquigarrow |x_n - \xi| < \widetilde{\epsilon} \end{array} \right\}$$

$$\text{Αν } \widetilde{\epsilon} = \delta\,(\epsilon, \xi) \text{ Cauchy } \rightsquigarrow$$

$$|x_n - \xi| < \delta(\epsilon, \xi) \rightsquigarrow |f(x_n) - \ell| < \epsilon$$

Αρα

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N'(\epsilon) = N\,(\delta\,(\epsilon, \xi))\ : \\ n > N'(\epsilon) \rightsquigarrow |f(x_n) - \ell| < \epsilon \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$$

$$\boxed{\boxed{\mathfrak{Heine} \Rightarrow \text{Cauchy}}}$$

$\boxed{\text{Υπόθεση}}$ Cauchy $\boxed{\text{μη}}$ αληθινή

$$\exists\ \epsilon, \quad \forall\, \delta\ \exists x : \left\{ \begin{array}{c} \xi - \delta < x < \xi + \delta \rightsquigarrow \\ |f(x) - \ell| \geq \epsilon \end{array} \right\}$$

Επομένως μπορούμε να διαλέξουμε μια ακολουθία

$$\xi - \frac{1}{n} < x_n < \xi + \frac{1}{n} \rightsquigarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi$$

"ΟΧΙ" Cauchy $\rightsquigarrow |f(x_n) - \ell)| \geq \epsilon$ άρα η ακολουθία $f(x_n)$ δεν συγκλίνει στο ℓ, πράγμα $\boxed{\text{άτοπο}}$, για τί από υπόθεση η ακολουθία $f(x_n)$ συγκλίνει.

Ορισμός:ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ σε ένα σημείο

$$\left\{ f(x) \ \text{συνεχής στο} \ \xi \right\} \Leftrightarrow \left\{ \lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi) \right\}$$

$$\mathfrak{Heine} : \forall\, x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \xi \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(\xi)$$

$$\text{Cauchy} : \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta \ : \ |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon$$

Πλευρικά Ορια

$$\lim_{x \to \xi^-} f(x) \equiv f(\xi^-) \qquad \lim_{x \to \xi^+} f(x) \equiv f(\xi^+)$$

Πρόταση

$$\left\{ f(x) \ \text{συνεχής στο} \ \xi \right\} \Leftrightarrow \left\{ f(\xi^-) = f(\xi^+) \right\}$$

Ορισμός

$f(x)$ φραγμένη $\Leftrightarrow m < f(x) < M$

Πρόταση

$$\left\{ f(x) \text{ συνεχής στο } \xi \right\} \Rightarrow \left\{ f(x) \text{ φραγμένη γύρω από το } \xi \right\}$$

Πρόταση

$$\left\{ f(x) \ \text{ συνεχής στο } \ \xi \right\} \ \Rightarrow \ \left\{ f(x) \text{ φραγμένη γύρω από το } \ \xi \right\}$$

Απόδειξη.

<u>Περίπτωση 1: $f(\xi) = 0$</u>

$\left\{ f(x) \ \text{ συνεχής στο } \ \xi \right\} \Rightarrow$

$$\epsilon = M \ \exists \delta \ : \ |x - \xi| \ \rightsquigarrow \ |f(x)| < M$$

<u>Περίπτωση 2: $f(\xi) \neq 0$</u>

$\left\{ f(x) \ \text{ συνεχής στο } \ \xi \right\} \Rightarrow$

$$\epsilon = \frac{|f(\xi)|}{2} \ \exists \delta \ : \ |x - \xi| \ \rightsquigarrow \ |f(x) - f(\xi)| < \frac{|f(\xi)|}{2}$$

$$\Big| |f(x)| - |f(\xi)| \Big| \leq |f(x) - f(\xi)| < \frac{|f(\xi)|}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{|f(\xi)|}{2} \leq |f(x)| \leq \frac{3\,|f(\xi)|}{2}$$

$\square$

ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΕ ΕΝΑ ΣΥΝΟΛΟ

Ορισμός

$$\left\{ f(x) \ \text{ συνεχής στο σύνολο } \mathbb{A} \ \right\} \Leftrightarrow \left\{ \lim_{\substack{x \to \xi \\ x, \xi \in \mathbb{A}}} f(x) = f(\xi) \right\}$$

$$\left\{ f(x) \ \text{ συνεχής στο κλειστό διάστημα } \mathbb{I} = [a,\, b] \ \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{llll} \xi \in (a,\, b) & \rightsquigarrow & \displaystyle\lim_{\mathbb{I} \ni x \to \xi} f(x) & = f(\xi) \\ \xi = a & \rightsquigarrow & \displaystyle\lim_{x \to a^+} f(x) & = f(a) \\ \xi = b & \rightsquigarrow & \displaystyle\lim_{x \to b^-} f(x) & = f(b) \end{array} \right\}$$

Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

Αν

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "h"'] & y \arrow[d, "g"] \\
& z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{l}
[a,\, b] \ni x \xrightarrow{f} f(x) = y \in [m,\, M] \\
[m,\, M] \ni y \xrightarrow{g} g(y) = z \in [n,\, N]
\end{array}
$$

Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(y)$ είναι συνεχείς $\rightsquigarrow$ η σύνθεση των συναρτήσεων $h(x) = (g \circ f)(x) = g\left(f\left(x\right)\right)$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων (Απόδειξη)

Αν

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "h"'] & y \arrow[d, "g"] \\ & z \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} [a,\, b] \ni x \xrightarrow{f} f(x) = y \in [m,\, M] \\ [m,\, M] \ni y \xrightarrow{g} g(y) = z \in [n,\, N] \end{array}$$

Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(y)$ είναι συνεχείς $\rightsquigarrow$ η σύνθεση των συναρτήσεων $h(x) = (g \circ f)(x) = g\left(f\left(x\right)\right)$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη.

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi \underset{\text{συνεχής}}{\overset{f}{\Longrightarrow}} y_n = f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\xi) = \eta$$

$$y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta \underset{\text{συνεχής}}{\overset{g}{\Longrightarrow}} z_n = g(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(\eta) = \theta$$

Αν $h = g \circ f$ν δηλ. $h(x) = g\left(f(x)\right)$

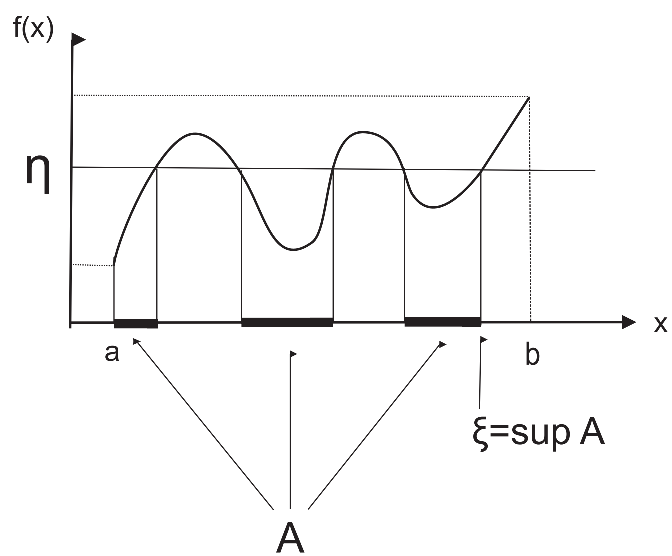
$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi \underset{\text{συνεχής}}{\overset{h}{\Longrightarrow}} z_n = h(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} h(\xi) = \theta$$

□

Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών

Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών

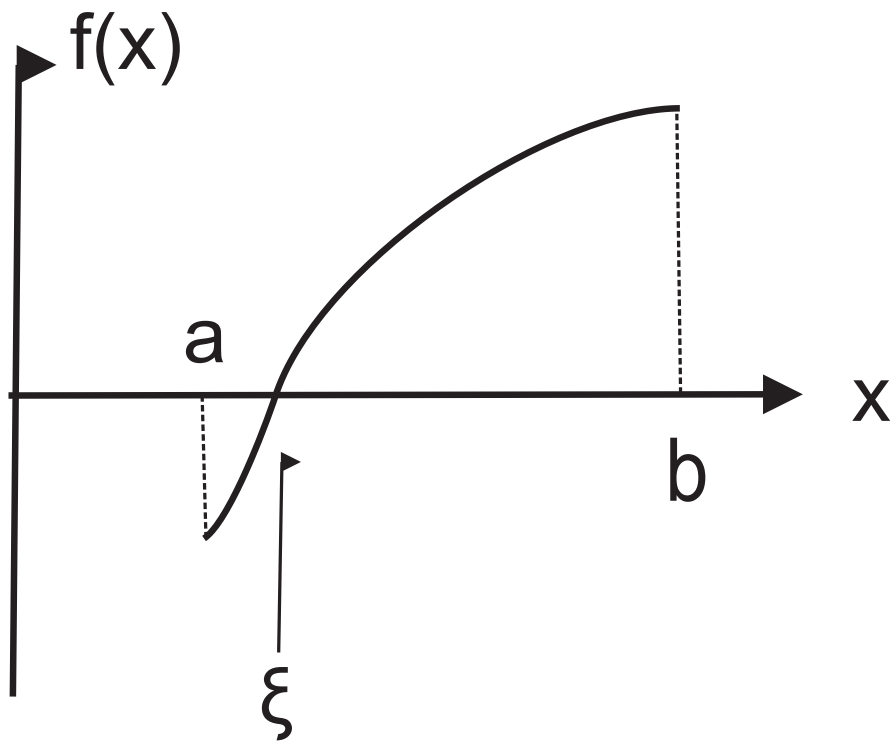
$$\left\{\begin{array}{c} f(x)\ \text{συνεχής στο}\ [a,\,b] \\ f(a)\neq f(b)\ \big(\ \text{πχ}\ \ f(a)<f(b)\big) \\ \forall\,\eta,\ f(a)<\eta<f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \Big\{\exists\,\xi\in[a,\,b]\ \rightsquigarrow\ f(\xi)=\eta\Big\}$$



Θεώρημα Bolzano

Θεώρημα Bolzano

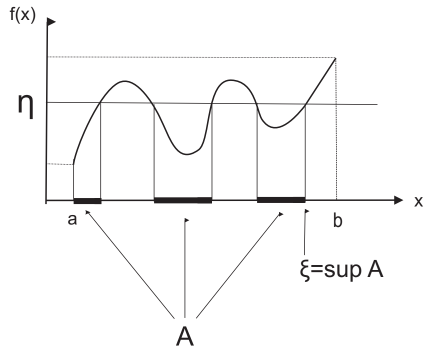
$$\left\{ \begin{array}{c} f(x)\ \ \text{συνεχής στο}\ \ [a,\,b] \\ f(a)\cdot f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \exists\, \xi \in (a,\,b)\ \rightsquigarrow\ f(\xi) = 0 \right\}$$



Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών (Απόδειξη)

Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών

$$\left\{\begin{array}{c} f(x)\ \text{συνεχής στο}\ [a,\,b] \\ f(a)\neq f(b)\ \big(\text{πχ}\ \ f(a)<f(b)\big) \\ \forall\,\eta,\ f(a)<\eta<f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \Big\{\exists\,\xi\in[a,\,b]\ \rightsquigarrow\ f(\xi)=\eta\Big\}$$



Απόδειξη.

$\mathbb{A}=\{x\in[a,\,b]\ :\ f(x)\le\eta\}\subset[a,\,b]\rightsquigarrow\ \exists\,\xi=\sup\,\mathbb{A}\ \rightsquigarrow$

$$\forall\,n\in\mathbb{N}\quad\exists\,x_n\in\mathbb{A}\ :\ \xi-\frac{1}{n}<x_n\le\xi\ \rightsquigarrow\ \lim_{n\to\infty}x_{\,n}=\xi$$

$$f(x)\ \text{συνεχής}\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}f(x_n)\ =\ \lim_{x\to\xi^-}f(x)\ =f(\xi)\le\eta$$

$$x\ge\xi\ \rightsquigarrow\ f(x)\ge\eta\ \rightsquigarrow\ \lim_{x\to\xi^+}f(x)\ =f(\xi)\ge\eta$$

Αρα $f(\xi)=\eta$ □

Ομοιόμορφη συνέχεια

Ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση σε ένα σύνολο A

$$\{\text{ Ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο σύνολο } A\} \Leftrightarrow$$
$$\{\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta(\epsilon) > 0\, \forall\, x,\, y \in A\ :\ |x-y| < \delta(\epsilon) \ \rightsquigarrow\ |f(x) - f(y)| < \epsilon\}$$

πχ. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ για $x \in (-\infty, \infty)$

Συμπέρασμα

$$\{\text{ Ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο σύνολο } A\} \Rightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \forall\ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ είναι ακολουθία Cauchy} \\ \rightsquigarrow\ \{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ είναι ακολουθία Cauchy} \end{array} \right\}$$

ΜΗ Ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση σε ένα σύνολο A

$$\{\text{ΜΗ Ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο σύνολο } A\} \Leftrightarrow$$
$$\{\exists\, \epsilon > 0\, \forall\, \delta > 0\, \exists\, x,\, y \in A\ :\ |x-y| < \delta\ \rightsquigarrow\ |f(x) - f(y)| \geq \epsilon\} \Leftrightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \exists\ \text{ συγκλίνουσα (δηλ. Cauchy) ακολουθία } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \\ \rightsquigarrow\ \{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ΜΗ συγκλίνουσα (δηλ. ΟΧΙ Cauchy) ακολουθία} \end{array} \right\}$$

πχ. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ για $x \in (0, 1]$

$$\left\{ f(x) \ \text{ομοιόμορφα συνεχής στο } \mathbb{I} \right\} \Leftrightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0, \\ \exists\, \delta\,(\epsilon) > 0 \ : \ \forall\, x, \xi \in \mathbb{I}, \ |x - \xi| < \delta\,(\epsilon, \xi) \rightsquigarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\left\{ f(x) \ \boxed{\text{ΜΗ}} \ \text{ομοιόμορφα συνεχής} \right\} \Leftrightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \exists\, \epsilon > 0, \ \forall\, \delta > 0 \ : \\ \exists\, x, \xi \in \mathbb{I}, \ |x - \xi| < \delta \ \rightsquigarrow |f(x) - f(\xi)| \geq \epsilon \end{array} \right\}$$

Πρόταση

$$\left\{ f(x) \ \text{ συνεχής στο } \ [a, \, b] \right\} \Rightarrow$$
$$\left\{ f(x) \ \text{ ομοιόμορφα συνεχής στο } \ [a, \, b] \right\}$$

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Ορισμός συνέχειας Cauchy σε ένα υποσύνολο $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$
πχ $\mathbb{I} = [a,\, b]$ ή $[a,\, \infty)$ ή $(-\infty,\, b]$ κλπ

$$\left\{ \lim_{x \to \xi} f(x) \;=\; f(\xi) \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, x, \xi \in \mathbb{I},\; \forall\, \epsilon > 0\; \exists\; \delta\,(\epsilon, \xi) > 0 \;\; : \\ |x - \xi| < \delta\,(\epsilon, \xi) \rightsquigarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon \end{array} \right\}$$

Περίπτωση Ι

$\boxed{\text{Απλή συνέχεια}} \Rightarrow \boxed{\inf_{\xi \in \mathbb{I}} \delta(\epsilon, \xi) = 0}$

πχ $f(x) = x^2,\; x \geq 0,$

Περίπτωση ΙΙ

$\boxed{\text{Ομοιόμορφη συνέχεια}} \Leftrightarrow \boxed{\forall\, \epsilon > 0 \;\rightsquigarrow\; \inf_{\xi \in \mathbb{I}} \delta(\epsilon, \xi) > 0}$

πχ $f(x) = \sqrt{x},\; x > 1,\; f(x) = \mathrm{e}^{x},\; x \in [0, 1],\; f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1},\; x \in \mathbb{R}$