Infimum

Ορισμός κάτω φράγματος συνόλου A

Το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι $\boxed{\text{κάτω φραγμένο}}$ αν

$$\boxed{\exists\, k \in \mathbb{R} : \forall\, x \in A \;\rightsquigarrow\; k \leq x}$$

$k = \boxed{\text{κάτω φράγμα}}$

Ορισμός infimum του συνόλου A

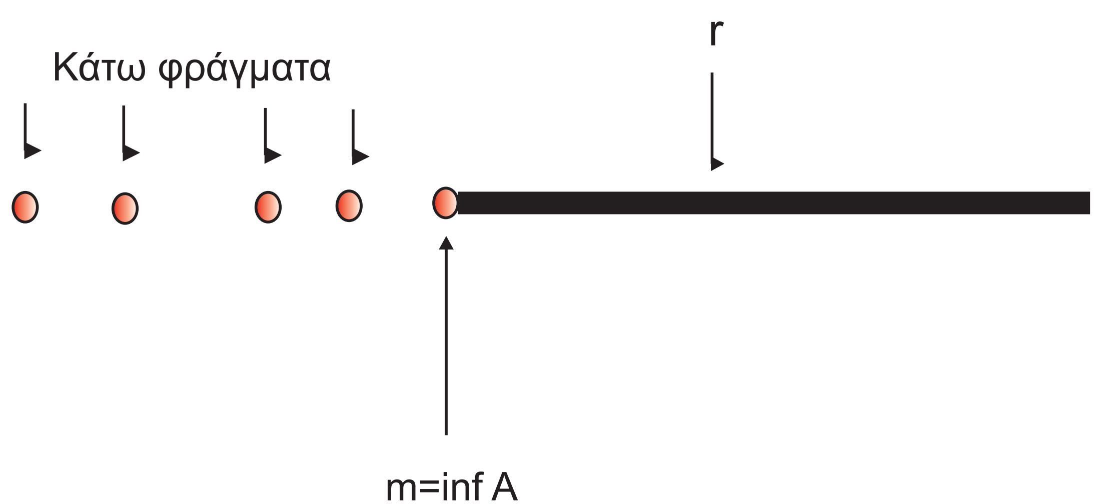
$\boxed{\inf\ A}$ = infimum του συνόλου $A \equiv$ Το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματα

$$m = \inf\ A \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (i) & \forall\, x \in A \;\rightsquigarrow\; m \leq x \\ (ii) & \forall\, r > m,\ \exists\, y \in A :\ y < r \end{cases}$$

Ορισμός infimum του συνόλου A

$\boxed{\inf\ A}$ = infimum του συνόλου A $\equiv$ Το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματα

$$m = \inf\ A \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & \forall\, x \in A \ \rightsquigarrow\ m \leq x \\ (ii) & \forall\, r > m,\ \exists\, y \in A\ :\ y < r \end{cases}$$



Ορισμός άνω φράγματος συνόλου A

Το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι $\boxed{\text{άνω φραγμένο}}$ αν $\boxed{\exists \ell \in \mathbb{R} : \forall x \in A \rightsquigarrow x \leq \ell}$ όπου $\ell = \boxed{\text{άνω φράγμα}}$

Ορισμός supremum του συνόλου A

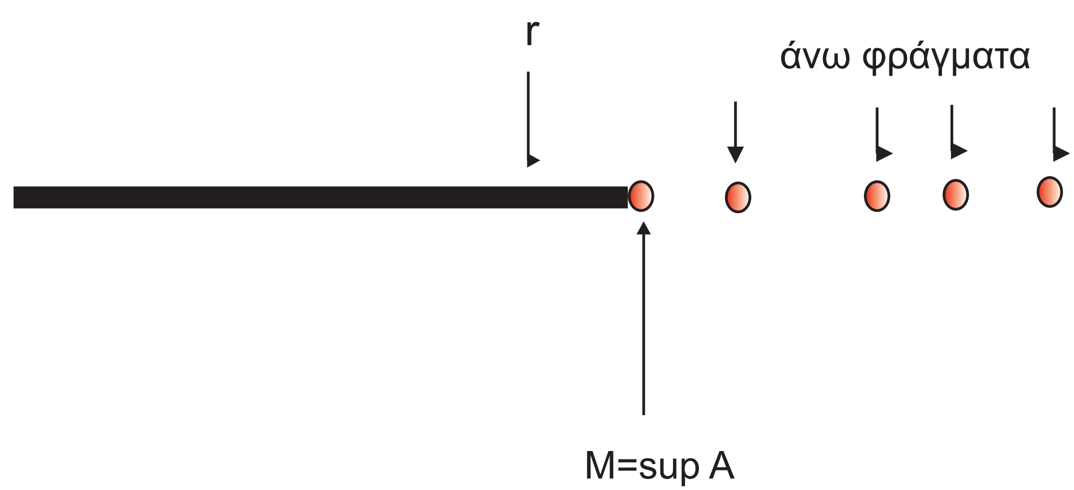
$\boxed{\sup A}$ = supremum του συνόλου $A \equiv$ Το μικρότερο από τα άνω φράγματα

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & \forall x \in A \rightsquigarrow x \leq M \\ (ii) & \forall r < M, \exists y \in A : r < y \end{cases}$$

Ορισμός supremum του συνόλου A

$\boxed{\sup\ A}$ = supremum του συνόλου $A \equiv$ Το μικρότερο από τα άνω φράγματα

$$M = \sup\ A \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & \forall x \in A \rightsquigarrow x \leq M \\ (ii) & \forall r < M, \exists y \in A : r < y \end{cases}$$



Αν $\inf A \in A \rightsquigarrow \inf A = \min A$.
Γενικά το $\inf A \notin A$ δηλ. το $\min A$ δεν υπάρχει π.χ.

$$A = \left\{1 + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4}, \ldots\right\}$$

$$\inf A = 1 \notin A$$

Αν $\sup A \in A \rightsquigarrow \sup A = \max A$.
Γενικά το $\sup A \notin A$ δηλ. το $\max A$ δεν υπάρχει π.χ.

$$A = \left\{1 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4}, \ldots\right\}$$

$$\sup A = 1 \notin A$$

(Αποδείξεις δια της απαγωγής σε άτοπο)

Ασκ.(1) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$

Ασκ.(2) $\inf A > 0$ **και** $\inf B > 0 \rightsquigarrow \inf(A \cdot B) = (\inf A) \cdot (\inf B)$

Ασκ.(3) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

Ασκ.(4) $A > 0$ **και** $B > 0 \rightsquigarrow \sup(A \cdot B) = (\sup A) \cdot (\sup B)$

Ασκ.(5) $-\inf A = \sup(-A)$

Ασκ.(6) $\inf A > 0 \rightsquigarrow (\inf A)^{-1} = \sup\left(A^{-1}\right)$

- Το $\mathbb{Q}$ είναι **γνήσιο** υποσύνολο του $\mathbb{R}$, διότι $\exists x \notin \mathbb{Q} \ : x \in \mathbb{R}$, πχ $x = \sqrt{2}$
- Το $A = \{q \in \mathbb{Q} \ : \ q > 0$ και $q^2 \leq 2\}$ συνεπάγεται ότι $\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- Μπορεί να υπάρχει $A \subset \mathbb{Q}$ αλλά $\sup A \notin \mathbb{Q}$

Ιδιότητα που διαχωρίζει το $\mathbb{Q}$ από το $\mathbb{R}$

Αξίωμα III, Αξίωμα συνεχούς

Για κάθε φραγμένο προς τα άνω σύνολο $\mathbf{A} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \sup \mathbf{A} \in \mathbb{R}$

- Αν $\sup A \in A \rightsquigarrow \sup A = \max A$
- ΠΡΟΣΟΧΗ $A \subset \mathbb{R} \Rightarrow$ **υπάρχει πάντα** το $\sup A \in \mathbb{R}$, αλλά το $\max A$ **μπορεί να μην ορίζεται** πχ

$$A = \{q \in \mathbb{R} \ : \ q > 0 \ \text{ και } q^2 < 5\} \rightsquigarrow$$

$\sup A = \sqrt{5}$ αλλά $\nexists \max A$

κοινές ιδιότητες των συνόλων $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$

Αξίωμα I

Το $\mathbb{R}$ είναι πεδίο με χαρακτηριστική $\mathbf{0}$

Αξίωμα II

Το $\mathbb{R}$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο πεδίο

ιδιότητα μόνο του συνόλου $\mathbb{R}$

Αξίωμα III

Για κάθε άνω φραγμένο σύνολο $A \subset \mathbb{R} \Rightarrow \sup A \in \mathbb{R}$

Δομή μαθηματικής θεωρίας:

$\boxed{\text{Ορισμοί}} \rightsquigarrow \boxed{\text{Αξιώματα}} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \boxed{\text{Προτάσεις (θεωρήματα)}} \rightsquigarrow \boxed{\text{Προτάσεις}} \rightsquigarrow \cdots$

Δεν υπάρχει το $\sup \mathbb{N}$ στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο

$x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \exists n \in \mathbb{N} : x < n$

ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

$a > 0$ και $b \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n\,a > b$

$x > 0 \rightsquigarrow \exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : n \leq x < n + 1 \rightsquigarrow n = [x]$

Αν $\alpha < \beta \rightsquigarrow \exists \rho \in \mathbb{Q} : \alpha < \rho < \beta$

Συμπ.: Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός $\rightsquigarrow$ Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχουν άπειροι ρητοί

Αν $\alpha < \beta \rightsquigarrow \exists r \notin \mathbb{Q} : \alpha < r < \beta$

Συμπ.: Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχει τουλάχιστον ένας άρρητος $\rightsquigarrow$ Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχουν άπειροι άρρητοι

Πρόταση

Δεν υπάρχει το $\sup \mathbb{N}$ στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο

Απόδειξη

Υπόθεση: $\exists\, z = \sup, \mathbb{N} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ για $r = z - 1 < z$ μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow n > r = z - 1 \rightsquigarrow n + 1 > z$, αλλά $n + 1 \in \mathbb{N} \rightsquigarrow z$ δεν είναι ανω φράγμα, δηλ. z **δεν** είναι supremum του $\mathbb{N} \rightsquigarrow$ *Ατοπο*

Πρόταση

$x \in \mathbb{R} \ \rightsquigarrow \ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ x < n$

Απόδειξη

$\boxed{\textit{Υπόθεση}\text{: } \forall n \in \mathbb{N} \ : \ n \leq x}$ $\Rightarrow x$ άνω φράγμα του $\mathbb{N} \rightsquigarrow$ Το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο $\rightsquigarrow$ *Ατοπο*

ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

$a > 0$ και $b \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\exists n \in \mathbb{N} \ : n\, a > b$

Απόδειξη

$x = \frac{b}{a} \rightsquigarrow \exists n \in \mathbb{N} \ : n > x = \frac{b}{a} \rightsquigarrow n \cdot a > b$

Πρόταση

$x > 0 \rightsquigarrow \exists n \in \mathbb{N} : n \leq x < n+1 \rightsquigarrow n = [x]$

Απόδειξη

$S = \{m \in \mathbb{N} : x < m\} \subset \mathbb{N} \rightsquigarrow x \leq \min S$ Αν
$x = \min S \rightsquigarrow [x] = n = \min S$
$\rightsquigarrow n = x < n+1$
Αν $x < \min S \rightsquigarrow [x] = n = \min S - 1$
$\rightsquigarrow n < x < n+1$

Πρόταση

Αν $\alpha < \beta \rightsquigarrow \exists \rho \in \mathbb{Q} : \alpha < \rho < \beta$

Απόδειξη

Απόδ: $\alpha < \beta \rightsquigarrow 0 < \beta - \alpha$

Αρχιμήδης $\rightsquigarrow \exists n \in \mathbb{N} : n(\beta - \alpha) > 1 \rightsquigarrow$

$n\alpha + 1 < n\beta$ **Θέτουμε** $[n\alpha] = m \rightsquigarrow$

$$n\alpha < m + 1 \leq n\alpha + 1 < n\beta \rightsquigarrow \boxed{\alpha < \frac{m+1}{n} < \beta}$$

Συμπέρασμα: Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός $\rightsquigarrow$ Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχουν άπειροι ρητοί

Πρόταση

Αν $\alpha < \beta \rightsquigarrow \exists r \notin \mathbb{Q} : \alpha < r < \beta$

Απόδειξη

$\square$ *Απόδ*: $\alpha < \beta \rightsquigarrow \exists \rho \in \mathbb{Q} : \alpha < \rho < \beta$

$\rho < \beta \rightsquigarrow \exists n \in \mathbb{N} : n(\beta - \rho) > \sqrt{2} \rightsquigarrow$

$$n\alpha < n\rho + \sqrt{2} < n\beta \rightsquigarrow \boxed{\alpha < \rho + \frac{\sqrt{2}}{n} < \beta}$$

Αλλη απόδειξη

$$\exists \rho \in \mathbb{Q} : \frac{\alpha}{\sqrt{2}} < \rho < \frac{\beta}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \alpha < \sqrt{2}\rho < \beta$$

$$r = \sqrt{2}\rho \notin \mathbb{Q}$$

Συμπέρασμα: Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχει τουλάχιστον ένας άρρητος
$\rightsquigarrow$
Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχουν άπειροι άρρητοι

ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, px = q,\ p \ \textbf{και} \ \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_+ = \Big\{ \quad & \frac{1}{1}, \\
& \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \\
& \frac{3}{1}, \boxed{\frac{2}{2}}, \frac{1}{3}, \\
& \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \\
& \frac{5}{1}, \boxed{\frac{4}{2}}, \boxed{\frac{3}{3}}, \boxed{\frac{2}{4}}, \frac{1}{5}, \\
& \frac{6}{1}, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}, \\
& \frac{7}{1}, \boxed{\frac{6}{2}}, \frac{5}{3}, \boxed{\frac{4}{4}}, \frac{3}{5}, \boxed{\frac{2}{6}}, \frac{1}{7}, \dots \Big\}
\end{aligned}$$

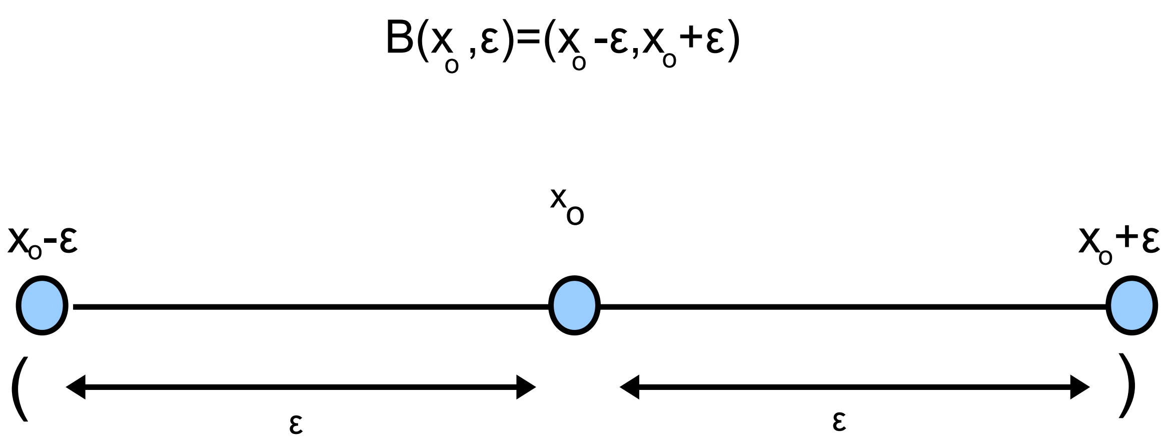
Διαγράφουμε τους αριθμούς που είναι στα κουτάκια

$$\mathbb{Q}_+ = \left\{1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, 5, \dots\right\} \longleftrightarrow \mathbb{N}$$

Ανοικτό διάστημα $\equiv (a,\, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$

Ορισμός ανοικτής περιοχής ή “σφαίρας” ή “μπάλας”

$(x_0 - \epsilon,\, x_0 + \epsilon) \equiv B(x_0, \epsilon) \equiv$ (ανοικτή) περιοχή του x_0 ακτίνας ϵ



Σημεία συσσώρευσης και απομονωμένα σημεία

Σημείο συσσώρευσης

x_0 σημείο συσσώρευσης του A

$$\forall \epsilon > 0 \quad (B(x_0, \epsilon) - \{x_0\}) \bigcap A \neq \emptyset \quad \text{ή}$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in A \ \text{ και } \ x \neq x_0 \rightsquigarrow |x - x_0| < \epsilon$$

Παράδειγμα: $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, το $0 \notin A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Απομονωμένο ή μεμονωμένο σημείο

x_0 απομονωμένο ή μεμονωμένο σημείο του $A \Leftrightarrow$ το x_0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης

$$\exists \epsilon > 0 \quad B(x_0, \epsilon) \bigcap A = \{x_0\} \quad \text{ή}$$

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall x \in A \ \text{ και } \ x \neq x_0 \rightsquigarrow |x - x_0| \geq \epsilon$$

Παράδειγμα: $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, το $\frac{1}{5} \in A$ είναι απομονωμένο σημείο του A.

Θεώρημα Bolzano Weierstrass

Πρόταση

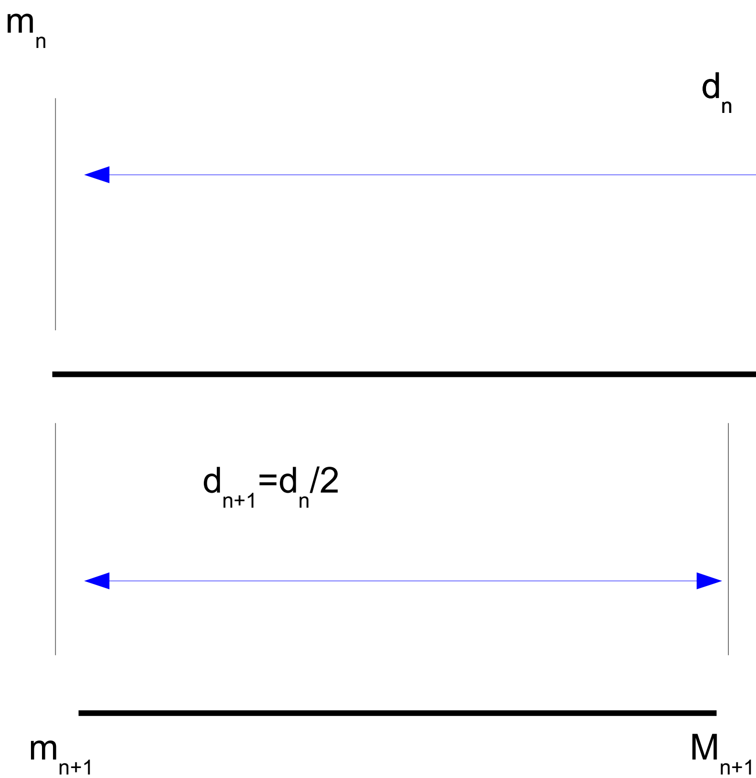
Αν a είναι σημείο συσσώρευσης του $A \Rightarrow$ Το A έχει άπειρο αριθμό στοιχείων.

Θεώρημα Bolzano Weierstrass

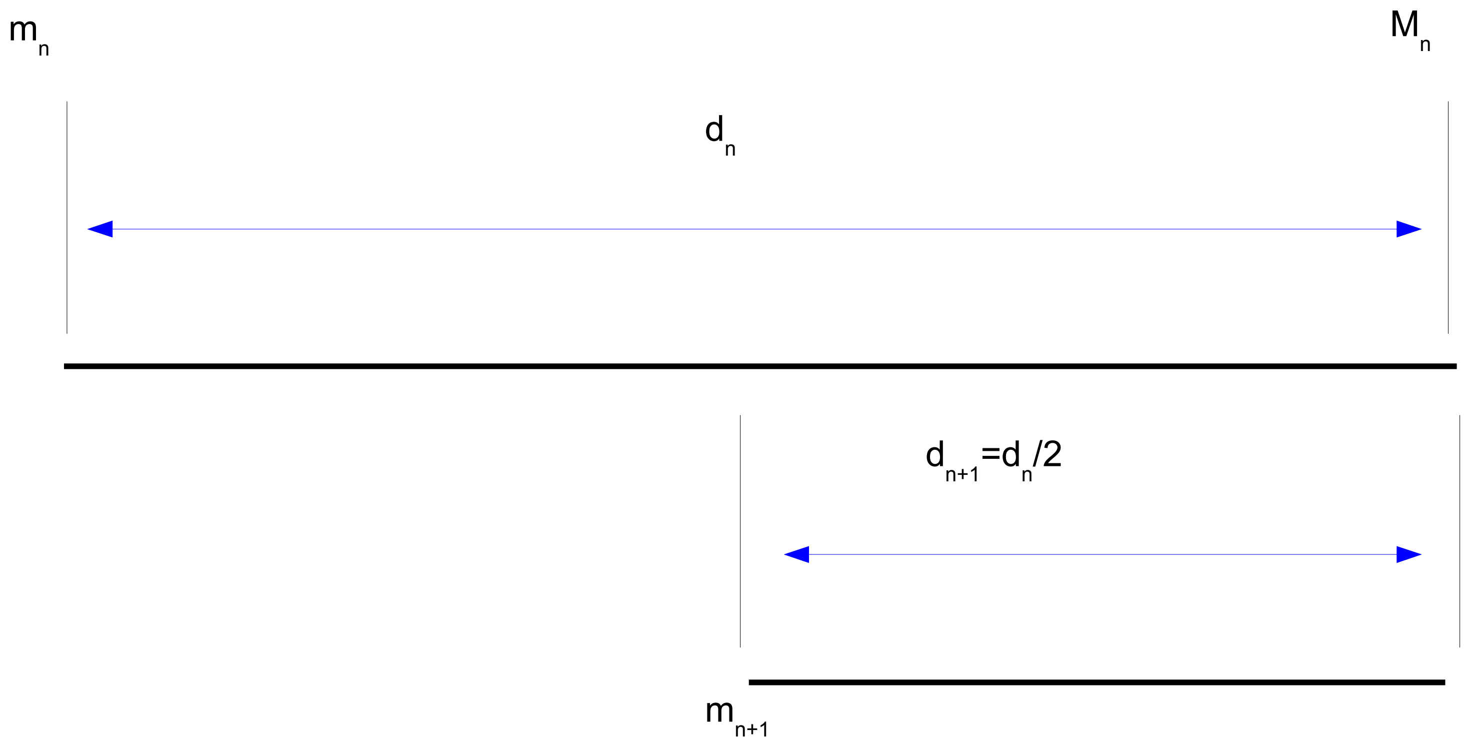
Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένο απειροσύνολο A έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης

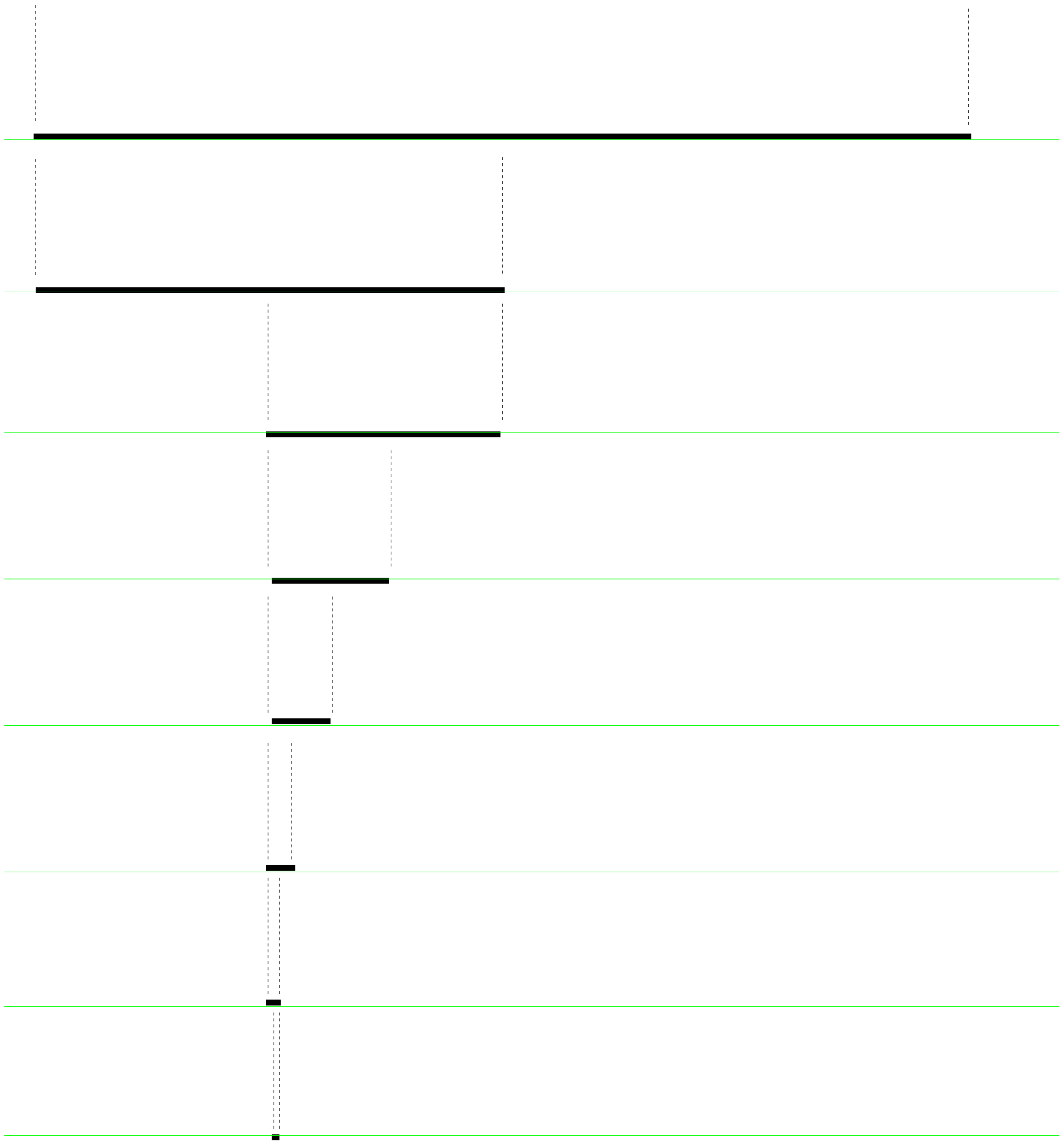
Συμπέρασμα

A φραγμένο απειροσύνολο $\Rightarrow \exists$ σημείο συσσώρευσης



m_n
M_n
d_n
$d_{n+1}=d_n/2$
m_{n+1}
M_{n+1}


m_n
M_n
d_n
$d_{n+1}=d_n/2$
m_{n+1}



Πρόταση

Αν a είναι σημείο συσσώρευσης του $A \Rightarrow$ Το A έχει άπειρο αριθμό στοιχείων.

Απόδειξη

Εστω $\boxed{A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}}$ έχει n στοιχεία και $\boxed{\text{σημείο συσσώρευσης το } a}$ θέτουμε

$$\epsilon = \min\left\{\frac{1}{2}|a_k - a|, k = 1, 2, \ldots, n\right\}$$

$$\forall\, x \in A \rightsquigarrow |a - x| > \epsilon \ \rightsquigarrow \boxed{a \text{ όχι σημ. συσσώρευσης}}$$

$\rightsquigarrow$ Ατοπο

Θεώρημα Bolzano Weierstrass

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένο απειροσύνολο A έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης

Απόδειξη

$$\forall\, x \in A \;\rightsquigarrow\; \inf\, A = m_0 \leq x \leq M_0 = \sup\, A$$

$$d_0 = M_0 - m_0 \;\rightsquigarrow\; d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{M_0 - m_0}{2}$$

ή
Χωρίζουμε το διάστημα $[m_0,\, M_0]$ σε δύο ίσα μέρη, σε κάποιο από αυτά υπάρχουν άπειρα στοιχεία του A αυτό το διάστημα το ονομάζουμε $[m_1,\, M_1] \rightsquigarrow d_2 = \frac{d_1}{2} = \frac{d_0}{2^2}$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία n φορές.

$$m_0 \leq m_1 \leq \cdots \leq m_n \leq M_n \leq \cdots \leq M_1 \leq M_0$$

$$d_n = \frac{M_{n-1} - m_{n-1}}{2} = \frac{d_0}{2^n}$$

$$\sup\, \{m_n,\; n \in \mathbb{N}\} = \xi \leq \eta = \inf\, \{M_n,\; n \in \mathbb{N}\}$$

$$\text{Υποθ } \boxed{\xi < \eta} \;\rightsquigarrow\; \exists\, k \in \mathbb{N} \,:\, \frac{d_0}{2^k} < \eta - \xi < M_k - m_k = \frac{d_0}{2^k} \;\rightsquigarrow\; \boxed{\text{άτοπο}}$$

Αρα $\xi = \eta$

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \;\rightsquigarrow\; \xi - m_k \leq \frac{d_0}{2^k} \quad \text{και} \quad M_k - \xi \leq \frac{d_0}{2^k} \;\rightsquigarrow\; [m_k, M_k] \subset B(\xi, \frac{d_0}{2^k})$$

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, k \in \mathbb{N} \,:\, \epsilon > \frac{d_0}{k} > \frac{d_0}{2^k} \;\rightsquigarrow\; [m_k, M_k] \subset B(\xi, \frac{d_0}{2^k}) \subset B(\xi, \epsilon)$$

$$[m_k, M_k] \bigcap A \neq \emptyset \;\rightsquigarrow\; B(\xi, \epsilon) \bigcap A \neq \emptyset$$

Το $B(\xi, \epsilon) \bigcap A$ έχει άπειρα στοιχεία του A επομένως το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A