ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ-2

Ασκηση 1: Αν οι υπακολουθίες x_{2k} και x_{2k-1}, $k \in \mathbb{N}$ συγκλίνουν στο ίδιο όριο x τότε $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Ασκηση 2: Η ακολουθία x_n ορίζεται με τις αναδρομικές σχέσεις

$$x_1 = \sqrt{k},\ x_{n+1} = \sqrt{x_n + k}$$

Αποδείξτε ότι

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}$$

Ασκηση 3: Η ακολουθία x_n ορίζεται με τις αναδρομικές σχέσεις

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{3x_n + 4}{2x_n + 3}$$

Αποδείξτε ότι

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}$$

Ασκηση 4: Η ακολουθία x_n ορίζεται με τις αναδρομικές σχέσεις

$$x_1 = 2,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

Αποδείξτε ότι

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}$$

Λύση:

► Η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη, διότι η $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ έχει mimimum στο $x = \sqrt{2}$ ($f'(\sqrt{2}) = 0$), δηλ. $\sqrt{2} < f(x) \rightsquigarrow x_{n+1} = f(x_n) > \sqrt{2}$

► Η ακολουθία είναι φθίνουσα διότι για μεγάλα n

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x_n} - x_n\right) = g(x_n) \ \rightsquigarrow\ g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} - x\right) < 0 \ \text{ για } \ x > \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ η σειρά είναι κάτω φραγμένη και φθίνουσα άρα συγκλίνει $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \ \rightsquigarrow\ x = \sqrt{2}$$

$$x_n \ \mapsto\ \left(2, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832}, \frac{886731088897}{627013566048}, \ldots\right)$$

Ασκηση 5: Η ακολουθία x_n ορίζεται με τις αναδρομικές σχέσεις

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{x_n^2}{2}}$$

Αποδείξτε ότι

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}$$

Ασκηση 6: Η ακολουθία x_n ορίζεται με τις αναδρομικές σχέσεις

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{1+x_n}}$$

Αποδείξτε ότι

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}$$

Ασκηση 7: Δίνεται η ακολουθία $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$. Να αποδειχθεί ότι η x_n είναι μια φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει.

Λύση:

► Για $0 < x < 1 \rightsquigarrow \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$

Θέτουμε $f(x) = x - \ln(1+x)$, $f(0) = 0$ και $f'(x) = \frac{1}{1+x} > 0 \rightsquigarrow f(x) > 0$.

Θέτουμε $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$, $f(0) = 0$ και $f'(x) = \frac{x}{(1+x)^2} > 0 \rightsquigarrow f(x) > 0$.

Οπότε, θέτοντας $x = \frac{1}{n}$

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned}
&\ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{1}\\
&\ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}\\
&\ln 4 - \ln 3 < \frac{1}{3}\\
&\quad\cdots\\
&\ln n - \ln(n-1) < \frac{1}{n}\\
&\qquad\Downarrow\\
&\ln n - \ln 1 < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\\
&\qquad\Downarrow\\
&0 < x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n
\end{aligned}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n < 0$$

Η x_n είναι κάτω φραγμένη και φθίνουσα άρα συγκλίνει $x_n \to \gamma$= σταθερά Euler

---