ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΩΝ

[1] x_n συγκλίνει $\Leftrightarrow$ x_n είναι ακολουθία Cauchy

[2] $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \;\Rightarrow\; \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη $\;\Leftrightarrow\; \exists C>0 : \forall n \rightsquigarrow |x_n| < C$

[3] $|a|<1 \;\Rightarrow\; a^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

[4] (Συστολή) $x_n \neq 0,\ |\frac{x_{n+1}}{x_n}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} k<1 \rightsquigarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

[5] $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \Rightarrow$ Καθε υπακολουθία x_{n_k} συγκλίνει στο x

[6] (Bolzano-Weierstrass): Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία

[7] x_n είναι αύξουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

[8] x_n είναι μονότονη ακολουθία και έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \Rightarrow$ η ακολουθία x_n συγκλίνει στο ίδιο όριο δηλ $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$

[9] $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x = \sum\limits_{\ell=0}^{\infty} \dfrac{x^\ell}{\ell!}$

[10] (Stolz): $\left\{\begin{array}{c} \dfrac{a_n}{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \\ b_k>0 \quad \text{και} \quad \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$

[11] $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{|x_n|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$