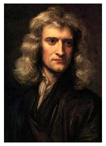
ΛΟΓΙΣΜΟΣ ⇝ CALCULUS

(Διαφορικός Λογισμός, Απειροστικός Λογισμός)

1670 ∼ 1740 Ουράνια Μηχανική



Isaac Newton
1648-1727

Gottfried Wilhelm Leibniz
1646-1716

- ▶ απειροστά(=πολύ μικρά) μεγέθη,
- ▶ άπειρο(=πάρα πολύ μεγάλο),
- ▶ όριο συνάρτησης $\lim_{x \to a} f(x)$, παράγωγος , ...
- ▶υπολογισμός ταχυτήτων, ροπών, ορμών...

ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΓΛΩΣΣΑ

Περιγραφή ⇝ Γλώσσα ⇝ Θεσπιση αυστηρών κανόνων

ΑΝΑΛΥΣΗ ⇝ ANALYSIS

∼ 1820–σήμερα

- Συστηματική μελέτη: Πως ορίζεται ο αριθμός; Αξιώματα που θεμελιώνουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών
- Ορισμός σύγκλισης, όριου ...
- ακολουθίες, σειρές...
- Ορισμός συνέχειας...

Δημιουργία **ΑΥΤΟΣΥΝΕΠΟΥΣ ΓΛΩΣΣΑΣ**

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ≺ Μάθημα ≺ Ανάλυση

Advanced Calculus ή Elementary Analysis

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- *Απειροστικός Λογισμός*-Τόμος Α′ Σ.Κ. Ντούγιας, LEADER BOOKS, 2003
- *Διαφορικός Ολοκληρωτικός Λογισμός*, M. Spivak , Παν. Εκδ. Κρήτης,
- *ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ*, Θ. Κυβεντίδη, εκδ.ΖΗΤΗ
- *Απειροστικός Λογισμός*, THOMAS-FINLEY, Παν. Εκδ. Κρήτης
- Μαθήματα στο δίκτυο: Μαθήματα Μ. Παπαδημητράκη (Παν. Κρήτης)
  http://www.math.uoc.gr/~papadim/Apeirostikos1.pdf
- Διαφάνειες: **http://users.auth.gr/~daskalo**

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Generic Construction

Αρχαιότητα	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	Αξιώματα Peano
	$\Downarrow$	$\downarrow$
	(Λύσεις $x + n = 0$)	
	$\Downarrow$	$\downarrow$
(Ινδοί)	$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$	Προσθετική Ομάδα
	$\Downarrow$	$\downarrow$
Αρχαιότητα	(Λύσεις $qx - p = 0$)	
	$\Downarrow$	$\downarrow$
	$\mathbb{Q} = \{p/q,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$	Πυκνό πεδίο (field) / σώμα
	$\Downarrow$	$\downarrow$
Αναγέννηση	Λύσεις $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ $\Delta = \beta^2 \geq 4\alpha\gamma$	Τομές Dedekind
	$\Downarrow$	$\downarrow$
Νέοι Χρόνοι	$\mathbb{R}$	Πυκνό πεδίο με διάταξη "συνεχές"

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Φυσικοί αριθμοί

ΣΥΣΤΗΜΑ Peano ΑΞΙΩΜΑΤΑ Peano

Ορισμός συνόλου φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$

i) $1 \in \mathbb{N}$
ii) $\forall n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow n+1 \in \mathbb{N}$
iii) $\forall n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow n+1 > 1$
iv) $n = m \rightsquigarrow n+1 = m+1$
v) Αν ένα υποσύνολο $M \subseteq \mathbb{N}$ κατασκευάζεται ως εξής:

$$\left.\begin{array}{r} 1 \in M \\ m \in M \rightsquigarrow m+1 \in M \end{array}\right\} \Rightarrow M = \mathbb{N}$$

Αρχή Επαγωγής

Απόδειξη με επαγωγή/ Proof by induction

Αν $P(m)$ είναι μια πρόταση η οποία εξαρτάται από το $m \in \mathbb{N}$

(i) $P(1)$ αληθεύει
(ii) για ένα $n \in \mathbb{N}$ η πρόταση $P(n)$ αληθεύει $\rightsquigarrow P(n+1)$ αληθεύει

συνεπάγεται ότι **η πρόταση $P(n)$ είναι αληθινή για κάθε $n \in \mathbb{N}$**

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Γεωμετρικό Αθροισμα

$$1 + t + t^2 + \cdots + t^n = \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$$

Τύπος Newton

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \rightsquigarrow (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Τύποι "Gauss"

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

Τύπος "Bernoulli"

$$x \geq -1 \rightsquigarrow (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Τύπος Newton

παραγοντικό/factorial $\quad 0! = 1$, $\quad n! = n \cdot (n-1)! \rightsquigarrow n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$

Συνδιασμός n πραγμάτων ανά k $\quad \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$$\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{1} = n,\ \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},\ \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!},$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}$$

$$(a+b)^n = b^n + nab^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{m}a^m b^{n-m} + \cdots + na^{n-1}b + a^n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \rightsquigarrow (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Εις άτοπον απαγωγή

Απόδειξη "διά τῆς εἰς ἄτοπον απαγωγῆς"/ proof by contradiction

Για να αποδείξουμε την συνεπαγωγή των προτάσεων $P \Rightarrow Q$ αρκεί να αποδείξουμε ότι η υπόθεση { P αληθής και Q αναληθής } συνεπάγεται μια αντίφαση ("ἄτοπον")

Παραδείγματα

{ Αν $n \in \mathbb{N}$ και $n > 2$ } $\Rightarrow n - 1 \in \mathbb{N}$

{ Μεταξύ των φυσικών αριθμών n και $n+1$ δεν υπάρχει άλλος φυσικός αριθμός} $\leftrightsquigarrow$ {Το σύνολο $\mathbb{N}$ **δεν** είναι πυκνό}

Το $(\mathbb{Z}, +)$ είναι αβελιανή ομάδα

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ είναι το μικρότερο σύνολο, που περιέχει το $\mathbb{N}$ και έχει δομή αβελιανής ομάδας ή είναι το μικρότερο σύνολο το οποίο περιέχει το $\mathbb{N}$ και τις λύσεις της εξίσωσης $x + p = 0$ όπου το $p \in \mathbb{Z}$.

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ είναι ένα σύνολο στοιχείων όπου έχουμε ορίσει την πράξη της πρόσθεσης

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ni (\alpha, \beta) \longrightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{Z}$$

με τις ιδιότητες

$$\left.\begin{array}{lll} A_1 & \alpha+\beta=\beta+\alpha & \text{αβελιανή ιδιότητα} \\ A_2 & \alpha+0=\alpha & \exists\,\text{ουδέτερο στοιχείο} \\ A_3 & \alpha+(-\alpha)=0 & \exists\,\text{αντίθετο στοιχείο} \\ A_4 & \alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma & \text{προσεταιριστική ιδιότητα} \end{array}\right\} \text{Ιδιότητες αβελιανής ομάδας}$$

Αλλα σύνολα που έχουν την δομή μιας αβελιανής ομάδας:
$\mathbb{Q}$ (ρητοί αριθμοί), $\mathbb{R}$ (πραγματικοί αριθμοί), $\mathbb{C}$ (μιγαδικοί αριθμοί), διανύσματα στο χώρο

Πεδίο/Σώμα - Field

Το $(\mathbb{F}, +)$ είναι αβελιανή ομάδα

$$\begin{array}{lll} A_1 & \alpha+\beta=\beta+\alpha & \text{αβελιανή ιδιότητα} \\ A_2 & \alpha+0=\alpha & \exists\,\text{ουδέτερο} \\ A_3 & \alpha+(-\alpha)=0 & \exists\,\text{αντίθετο} \\ A_4 & \alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma & \text{προσεταιριστικότητα} \end{array}$$

Το $(\mathbb{F}\backslash\{0\}, \cdot)$ είναι αβελιανή ομάδα

$$\begin{array}{lll} A_5 & \alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha & \text{αβελιανή ιδιότητα} \\ A_6 & \alpha\cdot 1=\alpha & \exists\,\text{ουδέτερο} \\ A_7 & \alpha\cdot(\alpha^{-1})=1 & \exists\,\text{αντίθετο} \\ A_8 & \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma & \text{προσεταιριστικότητα} \end{array}$$

Η $\boxed{\text{επιμεριστικότητα}}$ - distributivity συνδέει πρόσθεση και πολλαπλασιασμό

$$A_9 \quad (\alpha+\beta)\cdot\gamma = (\alpha\cdot\gamma) + (\beta\cdot\gamma)$$

Το πεδίο $\mathbb{F}$ είναι χαρακτηριστικής n αν

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{F},\ \alpha \neq 0; \rightsquigarrow\ \alpha^n = 1$$

Ορισμός ρητών αριθμών

Το $\mathbb{Q}$ είναι το μικρότερο πεδίο/σώμα χαρακτηριστικής 0, που περιέχει $\mathbb{Z}$

ή

Το $\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $qx + p = 0$, όπου p και q στοιχεία του $\mathbb{Z}$

ή

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}\ :\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

- $\sqrt{2} \notin Q$ (απαγωγή σε άτοπο)
- Το σύνολο $\{a + b\sqrt{2}\ :\ a\ \text{ και }\ b\ \in \mathbb{Q}\}$
  ($\Rightarrow\ a^2 - 2b^2 \neq 0$) είναι πεδίο χαρακτηριστικής 0 (ευθεία απόδειξη)

$$(\alpha + \sqrt{2}\beta) + (\alpha' + \sqrt{2}\beta') = (\alpha + \alpha') + \sqrt{2}\,(\beta + \beta')$$
$$(\alpha + \sqrt{2}\beta) \cdot (\alpha' + \sqrt{2}\beta') = (\alpha\alpha' + 2\beta\beta') + \sqrt{2}\,(\alpha\beta' + \alpha'\beta)$$
$$\left(\alpha + \sqrt{2}\beta\right)^{-1} = \frac{\alpha}{\alpha^2 - 2\beta^2} - \frac{\sqrt{2}\beta}{\alpha^2 - 2\beta^2}$$
$$\left(a + b\sqrt{2}\right)^n = 1 \ \rightsquigarrow\ n = 0$$

- Το σύνολο $\mathbb{Z}_2 \equiv \{\bar{0},\ \bar{1}\}$ είναι πεδίο. Με χαρακτηριστική 1.

$\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}$	$\bar{0}\cdot\bar{0}=\bar{0}$
$\bar{0}+\bar{1}=\bar{1}+\bar{0}=\bar{1}$	$\bar{0}\cdot\bar{1}=\bar{1}\cdot\bar{0}=\bar{0}$
$\bar{1}+\bar{1}=\bar{0}$	$\bar{1}\cdot\bar{1}=\bar{1}$

$$\rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{ll} a \neq 0 & \Rightarrow a = -a \\ & \Rightarrow a^{1} = \bar{1} \end{array} \right\}$$

- Το σύνολο $\mathbb{Z}_3 \equiv \{\bar{0},\ \bar{1},\ \bar{2}\}$ είναι πεδίο. Με χαρακτηριστική 2.

$\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}$	$\bar{0}\cdot\bar{0}=\bar{0}$
$\bar{0}+\bar{1}=\bar{1}+\bar{0}=\bar{1}$	$\bar{0}\cdot\bar{1}=\bar{1}\cdot\bar{0}=\bar{0}$
$\bar{1}+\bar{1}=\bar{2}$	$\bar{1}\cdot\bar{1}=\bar{1}$
$\bar{0}+\bar{2}=\bar{2}+\bar{0}=\bar{2}$	$\bar{0}\cdot\bar{2}=\bar{2}\cdot\bar{0}=\bar{0}$
$\bar{1}+\bar{2}=\bar{2}+\bar{1}=\bar{0}$	$\bar{1}\cdot\bar{2}=\bar{2}\cdot\bar{1}=\bar{2}$
$\bar{2}+\bar{2}=\bar{1}$	$\bar{2}\cdot\bar{2}=\bar{1}$

$$\rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} a \neq 0 \Rightarrow a^2 = \bar{1} \\ -\bar{1} = \bar{2},\ -\bar{2} = \bar{1},\ \bar{2}^{-1} = \bar{2} \end{array} \right\}$$

$$\bar{2} + \bar{2}\cdot\bar{2}^{-1} - \bar{1} = \bar{2}$$

- Το σύνολο $\mathbb{Z}_4$ δεν είναι πεδίο. $(\bar{2}\cdot\bar{2} = \bar{0})$

Παράδειγμα $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

$$\begin{array}{lcl} \bar{0} & = & \{0, 5, 10, 15, 20, \ldots\} \\ \bar{1} & = & \{1, 6, 11, 16, 21, \ldots\} \\ \bar{2} & = & \{2, 7, 12, 17, 22, \ldots\} \\ \bar{3} & = & \{3, 8, 13, 18, 23, \ldots\} \\ \bar{4} & = & \{4, 9, 14, 19, 24, \ldots\} \end{array}$$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Το $\mathbb{Z}_5$ είναι πεδίο/σώμα χαρακτηριστικής 4

$$\left(\bar{2}+\bar{4}\right)+\bar{3} = \bar{2} + \left(\bar{4}+\bar{3}\right),\ -\bar{3} = \bar{2},\ \left(\bar{3}\right)^{-1} = \bar{2}$$

Ορισμός:

Το σύνολο $\mathbb{X}$ είναι $\boxed{\text{ολικά διατεταγμένο}}$ αν $\exists$ μια $\boxed{\text{σχέση διάταξης}}$ $\leq$

A_{10} $\forall x\ y \in : \mathbb{X} \Rightarrow x \leq y$ ή $y \leq x$

A_{11} $\forall x \rightsquigarrow x \leq x$ $\boxed{\text{αυτοπαθής}}$ ιδιότητα

A_{12} $x \leq y$ και $y \leq x \rightsquigarrow x = y$ $\boxed{\text{(αντι)συμμετρική}}$ ιδιότητα

A_{13} $x \leq y$ και $y \leq z; \rightsquigarrow x \leq z$ $\boxed{\text{μεταβατική}}$ ιδιότητα

Παραδείγματα:

- Τα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Z}$ είναι ολικά διατεταγμένα σύνολα
- Το $\mathbb{X} = \{(m,\ n)\ :\ m,\ n \in \mathbb{N}\}$ με την σχέση διάταξης

$$(m,\ n) \preceq (m',\ n') \Leftrightarrow m \leq m' \ \text{ και } \ n \leq n'$$

  δεν είναι ολικά διατεταγμένο.
- $\mathbb{X} =$ Ελληνικές λέξεις στο λεξικό, είναι ολικά διατεταγμένο σύνολο.

Ορισμός:

Το πεδίο $\mathbb{F}$, που είναι ολικά διατεταγμένο ονομάζεται διατεταγμένο πεδίο αν

A_{14} $x \leq y \rightsquigarrow x + z \leq y + z$

A_{15} $0 \leq x$ και $0 \leq y \rightsquigarrow 0 \leq x \cdot y$

Παραδείγματα:

- Το $\mathbb{Q}$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο πεδίο.
- Το $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0},\ \bar{1}\}$ είναι μη διατεταγμένο.

  (τα πεπερασμένα πεδία $\boxed{\text{δεν}}$ είναι ολικά διατεταγμένα !)

ΑΞΙΩΜΑΤΑ $\mathbb{R}$

(A_1)	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	αβελιανή ιδιότ.
(A_2)	$\alpha+0=\alpha$	$\exists$ ουδέτερο
(A_3)	$\alpha+(-\alpha)=0$	$\exists$ αντίθετο
(A_4)	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	προσεταιριστ.
(A_5)	$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$	αβελιανή ιδιότ.
(A_6)	$\alpha\cdot 1=\alpha$	$\exists$ ουδέτερο
(A_7)	$\alpha\cdot(\alpha^{-1})=1$	$\exists$ αντίθετο
(A_8)	$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$	προσεταιριστ.
(A_9)	$(\alpha+\beta)\cdot\gamma=(\alpha\cdot\gamma)+(\beta\cdot\gamma)$	επιμεριστικότ.
(A_{10})	$\forall\, x,\, y\ \in:\mathbb{R}\ \Rightarrow\ x\le y$ ή $y\le x$	
(A_{11})	$\forall\, x\ \rightsquigarrow\ x\le x$	αυτοπαθής ιδ.
(A_{12})	$x\le y$ και $y\le x; \rightsquigarrow\ x=y$	αντισυμμετρική
(A_{13})	$x\le y$ και $y\le z; \rightsquigarrow\ x\le z$	μεταβατική ιδ.
(A_{14})	$x\le y\ \rightsquigarrow\ x+z\le y+z$	
(A_{15})	$0\le x$ και $0\le y\ \rightsquigarrow\ 0\le x\cdot y$	

Παρατήρηση όλες αυτές οι ιδιότητες είναι κοινές και για το $\mathbb{Q}$ και για το $\mathbb{R}$

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ $\mathbb{R}$

κοινές ιδιότητες των συνόλων $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$

Αξίωμα I

Το $\mathbb{R}$ είναι πεδίο με χαρακτηριστική $\mathbf{0}$

Αξίωμα II

Το $\mathbb{R}$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο πεδίο

ιδιότητα μόνο του συνόλου $\mathbb{R}$

Αξίωμα III

Για κάθε άνω φραγμένο σύνολο $A\subset\mathbb{R}\Rightarrow \sup\ A\ \in\mathbb{R}$

Δομή μαθηματικής θεωρίας:

$\boxed{\text{Ορισμοί}}\ \rightsquigarrow\ \boxed{\text{Αξιώματα}}\ \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow\ \boxed{\text{Προτάσεις (θεωρήματα)}}\ \rightsquigarrow\ \boxed{\text{Προτάσεις}}\ \rightsquigarrow\ \cdots$

Infimum

Ορισμός κάτω φράγματος συνόλου A

Το σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}$ είναι $\boxed{\text{κάτω φραγμένο}}$ αν

$$\boxed{\exists k\in\mathbb{R}:\forall x\in A\ \rightsquigarrow\ k\le x}$$

$k=\boxed{\text{κάτω φράγμα}}$

Ορισμός infimum του συνόλου A

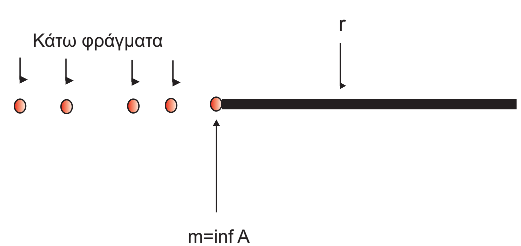
$\boxed{\inf\ A}$ = infimum του συνόλου $A\equiv$ Το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματα

$$m=\inf\ A\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}(i) & \forall x\in A\ \rightsquigarrow\ m\le x\\ (ii) & \forall r>m,\ \exists y\in A:\ y<r\end{cases}$$

Ορισμός infimum του συνόλου A

$\boxed{\inf\ A}$ = infimum του συνόλου $A\equiv$ Το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματα

$$m=\inf\ A\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}(i) & \forall x\in A\ \rightsquigarrow\ m\le x\\ (ii) & \forall r>m,\ \exists y\in A:\ y<r\end{cases}$$



Ορισμός άνω φράγματος συνόλου A

Το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι $\boxed{\text{άνω φραγμένο}}$ αν
$\boxed{\exists \ell \in \mathbb{R} \, : \, \forall x \in A \ \rightsquigarrow \ x \leq \ell}$ όπου $\ell = \boxed{\text{άνω φράγμα}}$

Ορισμός supremum του συνόλου A

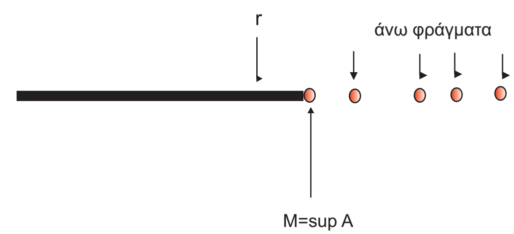
$\boxed{\sup \ A}$ $=$ supremum του συνόλου $A \equiv$ Το μικρότερο από τα άνω φράγματα

$$M = \sup \ A \ \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & \forall x \in A \ \rightsquigarrow \ x \leq M \\ (ii) & \forall r < M, \ \exists y \in A \, : \, r < y \end{cases}$$

Ορισμός supremum του συνόλου A

$\boxed{\sup \ A}$ $=$ supremum του συνόλου $A \equiv$ Το μικρότερο από τα άνω φράγματα

$$M = \sup \ A \ \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & \forall x \in A \ \rightsquigarrow \ x \leq M \\ (ii) & \forall r < M, \ \exists y \in A \, : \, r < y \end{cases}$$



Αν $\inf \ A \in A \ \rightsquigarrow \ \inf \ A = \min \ A$.
Γενικά το $\inf \ A \notin \ A$ δηλ. το $\min \ A$ δεν υπάρχει π.χ.

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 2, \ \frac{3}{2}, \ \frac{4}{3}, \ \frac{5}{4}, \dots \right\}$$

$$\inf \ A = 1 \notin A$$

Αν $\sup \ A \in A \ \rightsquigarrow \ \sup \ A = \max \ A$.
Γενικά το $\sup \ A \notin \ A$ δηλ. το $\max \ A$ δεν υπάρχει π.χ.

$$A = \left\{ 1 - \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 0, \ \frac{1}{2}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{3}{4}, \dots \right\}$$

$$\sup \ A = 1 \notin A$$

(Αποδείξεις δια της απαγωγής σε άτοπο)

Ασκ.(1) $\inf \, (A + B) = \inf \ A + \inf \ B$

Ασκ.(2) $\inf \ A > 0$ και $\inf \ B > 0 \ \rightsquigarrow \ \inf \, (A \cdot B) = (\inf \ A) \cdot (\inf \ B)$

Ασκ.(3) $\sup \, (A + B) = \sup \ A + \sup \ B$

Ασκ.(4) $A > 0$ και $B > 0 \ \rightsquigarrow \ \sup \, (A \cdot B) = (\sup \ A) \cdot (\sup \ B)$

Ασκ.(5) $-\inf \ A = \sup(-A)$

Ασκ.(6) $\inf \ A > 0 \ \rightsquigarrow \ (\inf \ A)^{-1} = \sup \left(A^{-1} \right)$