

Παράγωγος Συνάρτησης

Ορισμός Παραγώγου σε ένα σημείο

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ σε ένα σημείο ξ είναι το όριο (αν υπάρχει!)

$$f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} g(x, \xi), \quad g(x, \xi) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

- Ορισμός *Cauchy*:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon, \xi) > 0 \forall x |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f'(\xi) - g(x, \xi)| < \epsilon$$

- Ορισμός *Heine*:

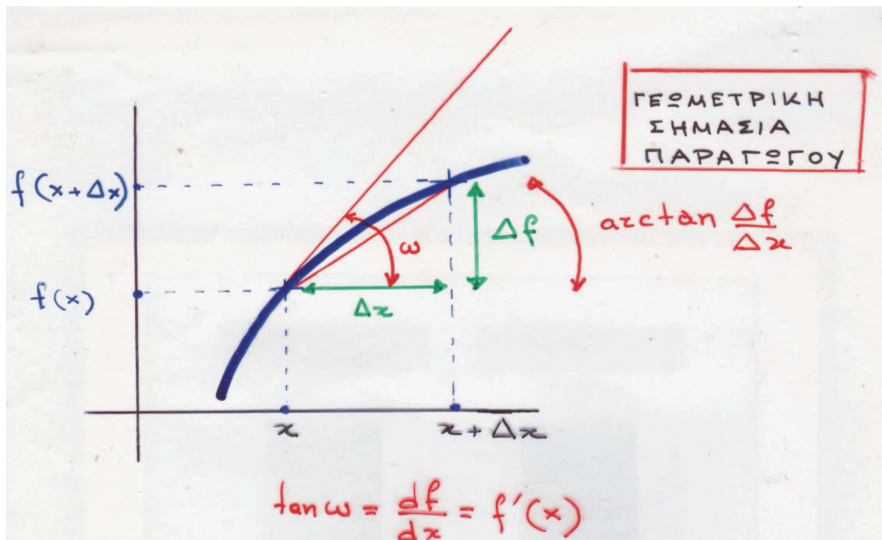
$$\forall x_n \rightarrow \xi \Rightarrow g(x_n, \xi) \rightarrow f'(\xi)$$

$$\exists f'(x) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Παράγωγος από αριστερά} = \\ = \text{Παράγωγος από δεξιά} \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} g(x, \xi) \equiv f'_-(\xi) = f'_+(\xi) \equiv \lim_{x \rightarrow \xi^+} g(x, \xi)$$

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΙ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \left(\begin{array}{l} \text{όπου } \Delta f(x) = \\ = f(x+\Delta x) - f(x) \end{array} \right) = \frac{df}{dx}$$



$$\frac{df}{dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) = \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

Πρόταση

Αν υπάρχει το $f'(\xi)$ τότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο ξ

- Προσοχή: Το αντίστροφο δεν ισχύει. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής σε κάθε περιοχή γύρω από το $x = 0$ αλλά δεν έχει παράγωγο στο $x = 0$
- Υπάρχουν συναρτήσεις παντού συνεχείς αλλά δεν έχουν πουθενά παράγωγο ! πχ η συνάρτηση Weierstrass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(3^n x)}{2^n}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

- 1 $(\mu f)'(x) = \mu f'(x)$ για $\mu \in \mathbb{R}$
- 2 $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- 3 $(f g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ Leibnitz rule
- 4 $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- 5 $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ Chain rule
ή $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$
- 6 $f(x)$ γνήσια μονότονη συνάρτηση, $f'(x) \neq 0$
 $\left. \begin{array}{l} f(\xi) = \eta \\ \xi = f^{-1}(\eta) \end{array} \right\} \Rightarrow (f^{-1})'(\eta) = 1/f'(\xi)$
ή $\frac{df^{-1}(\eta)}{d\eta} = \frac{d\xi}{d\eta} = \frac{1}{d\eta/d\xi} = \frac{1}{df(\xi)/d\xi}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ- Αποδείξεις

- 1 $(\mu f)'(x) = \mu f'(x)$ για $\mu \in \mathbb{R}$
- 2 $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- 3 $(f g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ Leibnitz rule

□ Απόδ (ζηϊνε):

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_n)g(x_n)}{x - x_n} = f(x)\frac{g(x) - g(x_n)}{x - x_n} + g(x_n)\frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n}$$

Παίρνουμε το όριο $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$

□

- 4 $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- 5 $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ Chain rule

$$\text{ή } \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$$

□ Απόδ (ζηϊνε):

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_n))}{x - x_n} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_n))}{g(x) - g(x_n)} \cdot \frac{g(x) - g(x_n)}{x - x_n} = \frac{f(g) - f(g)}{g - g_n} \cdot \frac{g(x) - g(x_n)}{x - x_n}$$

Παίρνουμε το όριο $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \rightsquigarrow g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$

□

- 6 $f(x)$ γνήσια μονότονη συνάρτηση, $f'(x) \neq 0$

$$\left. \begin{array}{l} f(\xi) = \eta \\ \xi = f^{-1}(\eta) \end{array} \right\} \Rightarrow (f^{-1})'(\eta) = 1/f'(\xi)$$

$$\text{ή } \frac{df^{-1}(\eta)}{d\eta} = \frac{d\xi}{d\eta} = \frac{1}{d\eta/d\xi} = \frac{1}{df(\xi)/d\xi}$$

□ Απόδ (ζηϊνε):

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi \iff f(x_n) = y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \eta = f(\xi)$$

$$y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \eta \iff f^{-1}(y_n) = x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi = f^{-1}(\eta)$$

$$\frac{f^{-1}(\eta) - f^{-1}(y_n)}{\eta - y_n} = \frac{\xi - x_n}{f(\xi) - f(x_n)} = \frac{1}{\frac{f(\xi) - f(x_n)}{\xi - x_n}}$$

Παίρνουμε το όριο $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi \rightsquigarrow y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \eta$

□

Παραγωγίσεις Παραμετρικών μορφών συναρτήσεων

Μια καμπύλη περιγράφεται είναι με μια συνάρτηση $y = f(x)$ είτε με μια παραμετρική συνάρτηση των συντεταγμένων πχ.

$$x = X(t), \quad y = Y(t)$$

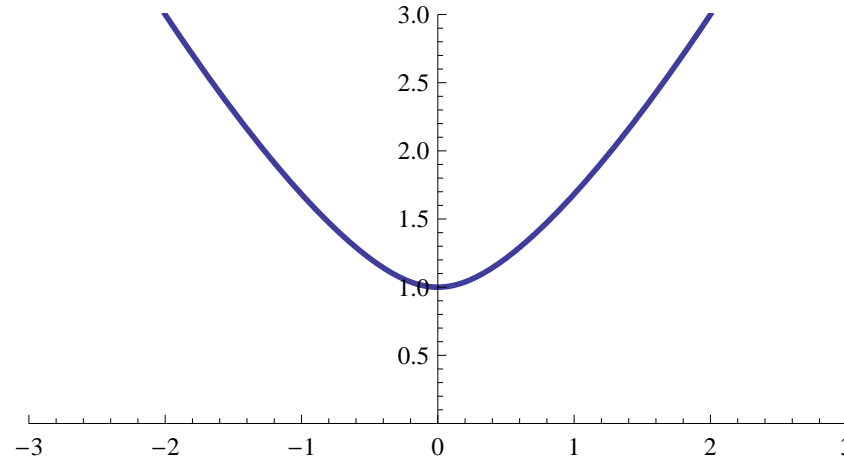
Θέτουμε $y = f(x)$ και $y' = f'(x')$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x' \rightarrow x} \frac{y' - y}{x' - x} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\frac{y' - y}{t' - t}}{\frac{x' - x}{t' - t}} = \frac{\lim_{t' \rightarrow t} \frac{y' - y}{t' - t}}{\lim_{t' \rightarrow t} \frac{x' - x}{t' - t}} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

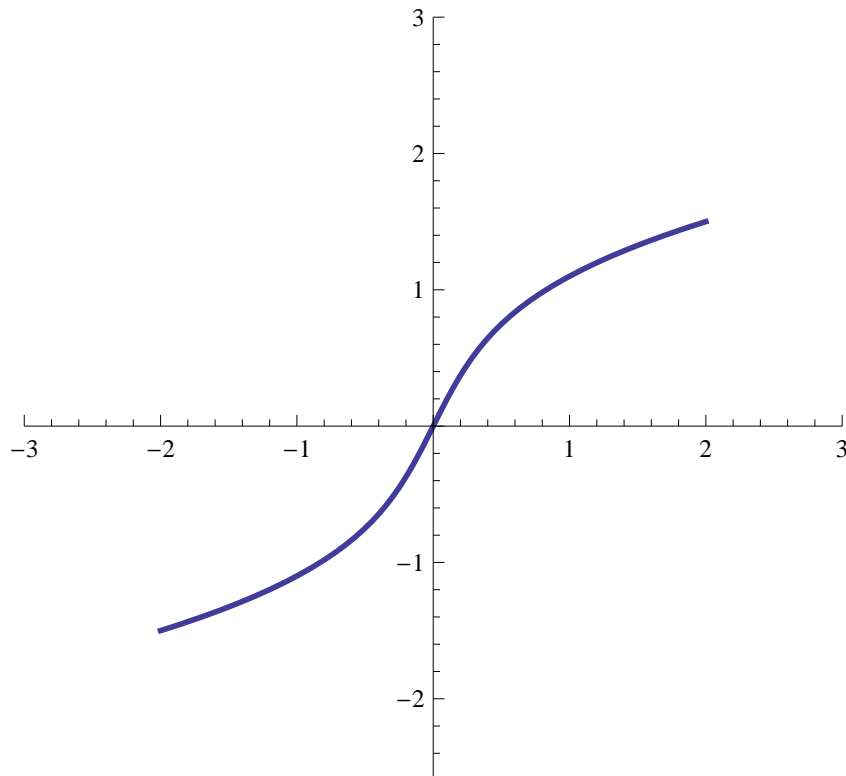
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy/dt}{dx/dt} \right)}{\frac{dx}{dt}}$$

Παράδειγμα

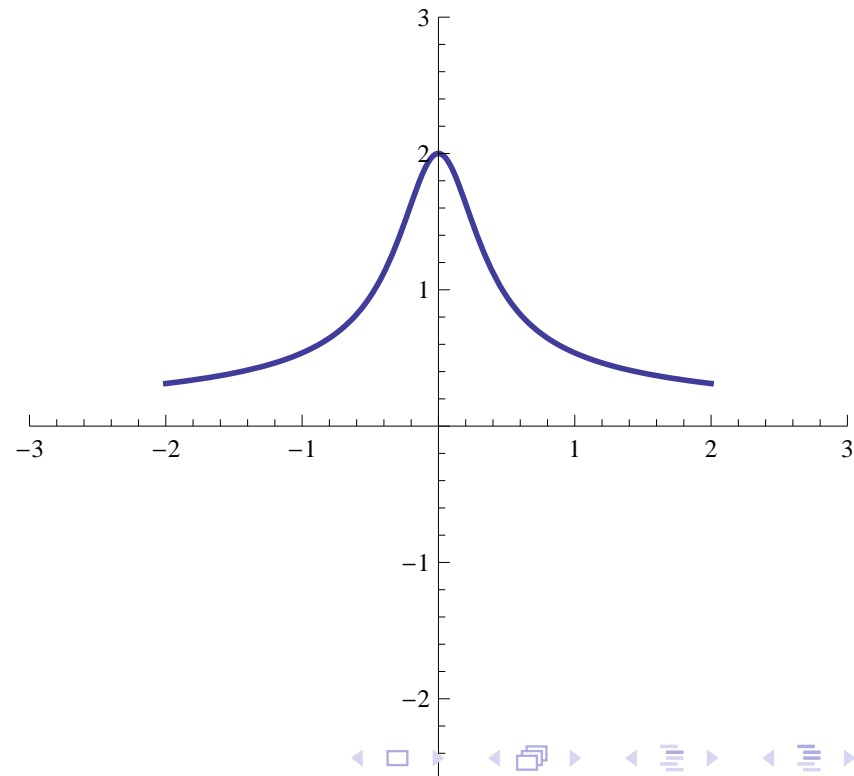
$$\{x = t^3 + t, \quad y = t^4 + t^2 + 1, \quad -1 < t < 1\}$$



$$\left\{x = t^3 + t, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4t^3 + 2t}{3t^2 + 1}, \quad -1 < t < 1\right\}$$

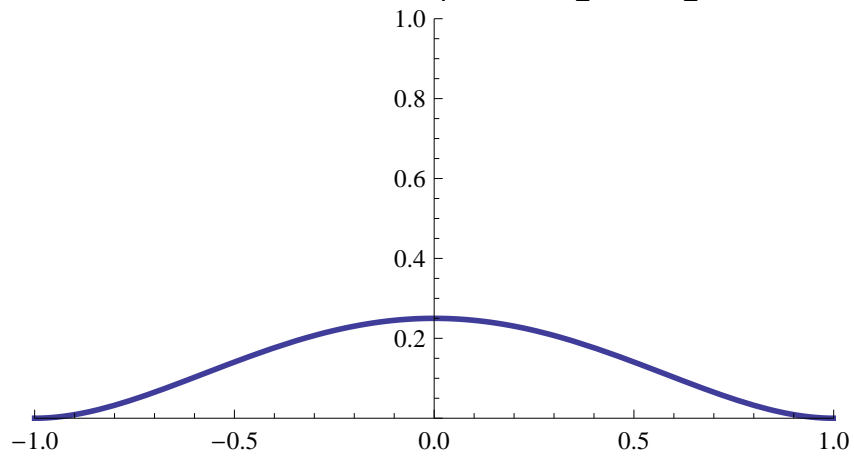


$$\left\{x = t^3 + t, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{12t^2 + 2}{3t^2 + 1} - \frac{6t(4t^3 + 2t)}{(3t^2 + 1)^2}}{3t^2 + 1}, \quad -1 < t < 1\right\}$$

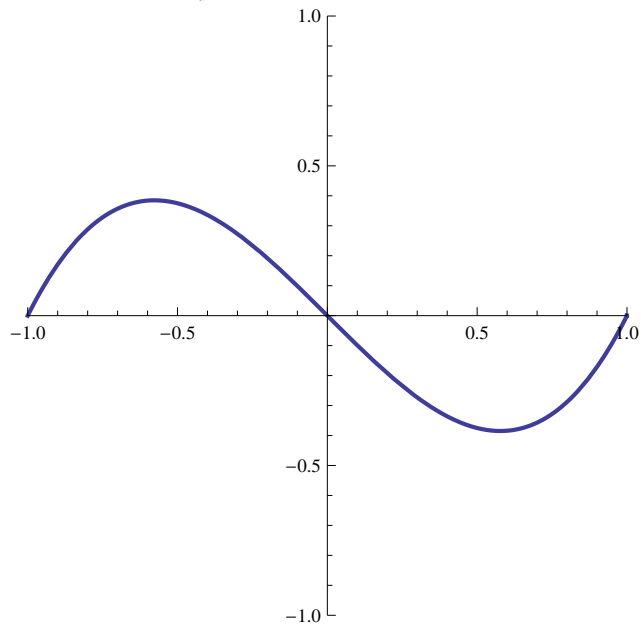


Παράδειγμα

$$\left\{ x = \sin(t), \quad y = \frac{\cos^4(t)}{4}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right\}$$



$$\left\{ x = \sin(t), \quad \frac{dy}{dx} = \sin(t)(-\cos^2(t)), \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right\}$$



$$\left\{ x = \sin(t), \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 2 \sin^2(t) - \cos^2(t), \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right\}$$

