ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΑΣ

Ορισμός

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ "μερικό" άθροισμα,

Αν $S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S$ τότε "συγκλίνει απλά η σειρά" $S \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Leftrightarrow$ η ακολουθία S_N είναι Cauchy

$$\Leftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0 \ \exists\, N(\epsilon) \ : \ \forall\, n > m > N(\epsilon) \ \rightsquigarrow \ |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon$$

Πρόταση

συγκλίνει απλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Αν $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ τότε **ΔΕΝ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ ΠΑΝΤΑ** η σειρά $\sum_n a_n$

πχ. $a_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ αλλά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Ορισμός

“συγκλίνει απόλυτα η σειρά” $\Leftrightarrow$ συγκλίνει η σειρά των απόλυτων τιμών $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Πρόταση

Απόλυτη σύγκλιση σειράς $\Rightarrow$ Απλή σύγκλιση σειράς

Κριτήριο Σύγκρισης (Comparison test)

$|b_n| \leq a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει

Πρόταση

$0 \leq a_n \leq b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ αποκλίνει $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ αποκλίνει

Κριτήριο των λόγων (Ratio test)

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

1. συγκλίνει απόλυτα αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$
2. αποκλίνει αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$
3. δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

Κριτήριο των ριζών (Root test)

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

1. συγκλίνει απόλυτα αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$
2. αποκλίνει αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$
3. δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

Λόγος ακολουθιών

a_n και b_n θετικές ακολουθίες. Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{υπάρχει} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{υπάρχει}$$

Μηδενικός Λόγος ακολουθιών

a_n και b_n θετικές ακολουθίες. Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{υπάρχει} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{υπάρχει}$$

Κριτήριο συμπύκνωσης (Condensation test)

Αν $0 < a_{n+1} < a_n$ φθίνουσα θετική ακολουθία τότε:

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ υπάρχει} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ υπάρχει} \right\}$$

Παραδείγματα:

$$p > 1 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty$$

$$p > 1 \rightsquigarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln\, n)^p} < \infty$$

Κριτήριο σύγκλισης εναλλασσομένης σειράς (Alternating Series Test)

Αν $0 < a_{n+1} < a_n$ φθίνουσα θετική ακολουθία και $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ τότε:

$$\Rightarrow \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ υπάρχει} \right\}$$

Αναδιάταξη των Φυσικών αριθμών

$$(1, 2, \ldots, k, \ldots) \xrightarrow{\sigma} (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \ldots)$$

$$\forall\, \sigma_k \;\exists\, n_k \in \mathbb{N} \;:\; \max\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_k\} < n_k$$

Αναδιάταξη ακολουθίας $b_m = a_{\sigma_m}$

Αν η σειρά $\sum\limits_n a_n$ συγκλίνει απόλυτα τότε κάθε αναδιάταξη της σειράς $\sum\limits_n b_n$ συγκλίνει απόλυτα στο ίδιο όριο.

ΔΙΠΛΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

$$
\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{14} & \cdots \\
& \diagup & & \diagup & & \diagup & & \cdots \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & \cdots \\
& \diagup & & \diagup & & \diagup & & \cdots \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & \cdots \\
& \diagup & & \diagup & & \diagup & & \cdots \\
a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & \cdots \\
& \diagup & & \diagup & & \diagup & & \cdots
\end{array}
$$

Ορισμός

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} = \ell \ \text{ συγκλίνει απόλυτα } \Leftrightarrow$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \right) = \ell \ \text{ συγκλίνει απόλυτα}$$

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΑΣ

Ορισμός

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ "μερικό" άθροισμα,

Αν $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$ τότε "συγκλίνει απλά η σειρά" $S \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Leftrightarrow$ η ακολουθία S_N είναι Cauchy

$$\Leftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0 \; \exists\, N(\epsilon) \; : \; \forall\, n > m > N(\epsilon) \; \rightsquigarrow \; |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon$$

Πρόταση

συγκλίνει απλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Απόδειξη.

συγκλίνει $\boxed{\text{απλά}}$ η σειρά $\Leftrightarrow$ η ακολουθία μερικών αθροισμάτων είναι Cauchy $\Rightarrow$

$$\forall\, \epsilon > 0, \; \exists\, N(\epsilon) \; : \; \forall\, n > N(\epsilon) \; \rightsquigarrow \; |S_n - S_{n-1}| = |a_n| < \epsilon$$

Επομένως $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ □

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Αν $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ τότε **ΔΕΝ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ ΠΑΝΤΑ** η σειρά $\sum_n a_n$

πχ. $a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ αλλά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Ορισμός

"συγκλίνει απόλυτα η σειρά" $\Leftrightarrow$ συγκλίνει η σειρά των απόλυτων τιμών $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Πρόταση

Απόλυτη σύγκλιση σειράς $\Rightarrow$ Απλή σύγκλιση σειράς

Απόδειξη.

{συγκλίνει $\boxed{\text{απόλυτα}}$ η σειρά }$\Leftrightarrow$

$$\left\{\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, N(\epsilon) \,:\, \forall\, n > m > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \epsilon \right\}$$

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \epsilon \;\rightsquigarrow$$

$$\left\{\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, N(\epsilon) \,:\, \forall\, n > m > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon \right\}$$

$\square$

Κριτήριο Σύγκρισης (Comparison test)

$|b_n| \leq a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει

Απόδειξη.

$$\begin{array}{c}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \\ \text{συγκλίνει}\end{array} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon > 0, \quad \exists\, N(\epsilon)\ : \\ \forall n > m > N(\epsilon) \rightsquigarrow \left| \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} |b_k| \leq \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \rightsquigarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon > 0, \quad \exists\, N(\epsilon)\ : \\ \forall n > m > N(\epsilon) \rightsquigarrow \sum\limits_{k=m+1}^{n} |b_k| < \epsilon \end{array} \right\} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \\ \text{συγκλίνει} \\ \text{απόλυτα}\end{array}$$

□

Πρόταση

$0 \leq a_n \leq b_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ αποκλίνει $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ αποκλίνει

Απόδειξη.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \rightsquigarrow \left\{ \forall R > 0,\ \exists N(R) > 0\ :\ n > N(R) \rightsquigarrow \sum_{k=1}^{n} a_k > R \right\}$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \geq \sum_{k=1}^{n} a_k > R \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$$

□

Κριτήριο των λόγων (Ratio test)

Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

(i) συγκλίνει απόλυτα αν $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

(ii) αποκλίνει αν $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$

(iii) δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

☐ *Απόδ* (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \mathfrak{c} < 1$ για $\epsilon = \frac{1-\mathfrak{c}}{2}$, $\exists\, n_0$:

$$n > n_0 \leadsto |a_{n+1}| < (\mathfrak{c} + \frac{1-\mathfrak{c}}{2})\,|a_n|$$

$$\leadsto |a_n| < \left(\frac{\mathfrak{c}+1}{2}\right)^n \frac{|a_{n_0}|}{\left(\frac{\mathfrak{c}+1}{2}\right)^{n_0}}$$

Επειδή $\frac{\mathfrak{c}+1}{2} < 1 \leadsto$ (κριτήριο σύγκρισης) η σειρά $\sum\limits_n |a_n|$ συγκλίνει απόλυτα.

☐ *Απόδ* (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \mathfrak{f} > 1$ για $\epsilon = \frac{\mathfrak{f}-1}{2}$, $\exists\, n_0$:

$$n > n_0 \leadsto |a_{n+1}| > (\mathfrak{f} - \frac{\mathfrak{f}-1}{2})\,|a_n|$$

$$\leadsto |a_n| > \left(\frac{\mathfrak{f}+1}{2}\right)^n \frac{|a_{n_0}|}{\left(\frac{\mathfrak{f}+1}{2}\right)^{n_0}}$$

Επειδή $\frac{\mathfrak{f}+1}{2} > 1 \leadsto$ η ακολουθία a_n δεν είναι μηδενική $\leadsto$ δεν συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_n a_n$

Κριτήριο των ριζών (Root test)

Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

(i) συγκλίνει απόλυτα αν $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$

(ii) αποκλίνει αν $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$

(iii) δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

Κριτήριο συμπύκνωσης (Condensation test)

Αν $0 < a_{n+1} < a_n$ φθίνουσα θετική ακολουθία τότε:
$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right\}$ υπάρχει $\Leftrightarrow$ $\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ υπάρχει} \right\}$

Απόδειξη.

$$
\begin{aligned}
S_{2^{k+1}-1} &= a_1 + \underbrace{(a_2+a_3)}_{2\text{ όροι}} + \underbrace{(a_4+a_5+a_6+a_7)}_{4\text{ όροι}} + \\
&+ \underbrace{(a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15})}_{8\text{ όροι}} \\
&+ \cdots + \\
&+ \underbrace{(a_{2^k}+a_{2^k+1}+a_{10}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}-1})}_{2^k\text{ όροι}} \le \\
&\le a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots + 2^k a_{2^k} = T_k
\end{aligned}
$$

η ακολουθία T_k συγκλίνει $\Rightarrow$ η υπακολουθία $S_{2^{k+1}-1}$ συγκλίνει και η ακολουθία S_n είναι αύξουσα $\rightsquigarrow$ η S_n συγκλίνει.

$$
\begin{aligned}
\frac{T_k}{2} &= \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} \le \\
&\le a_1 + a_2 + (a_3+a_4) + (a_5+a_6+a_7+a_8) + \\
&+ \cdots + \\
&+ \left(a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k}\right) = S_{2^k}
\end{aligned}
$$

η ακολουθίαS_n συγκλίνει και είναι αύξουσα $\Rightarrow$ η υπακολουθία S_{2^k} συγκλίνει $\Rightarrow$ η ακολουθία T_k συγκλίνει. $\square$

πχ $\sum_{n=2} \frac{1}{n \ln n}$ δεν συγκλίνει

$\sum_{n=2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ συγκλίνει

$\sum_{n=1} \frac{1}{n^r}$ συγκλίνει για $r > 1$,
δεν συγκλίνει για $r \le 1$

Κριτήριο σύγκλισης εναλλασσομένης σειράς (Alternating Series Test)

Αν $0 < a_{n+1} < a_n$ φθίνουσα θετική ακολουθία και $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ τότε:

$\Rightarrow \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ υπάρχει} \right\}$

Απόδειξη.

$$
\begin{aligned}
&S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k \\
&S_{m+1} - S_m = (-1)^{m+2} a_{m+1} - (-1)^{m+1} a_m \rightsquigarrow \\
&|S_{m+1} - S_m| = a_m - a_{m+1} \geq 0 \\
&|S_{m+2} - S_{m+1}| = a_{m+1} - a_{m+2} \\
&|S_{m+3} - S_{m+2}| = a_{m+2} - a_{m+3} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&|S_{m+p} - S_{m+p-1}| = a_{m+p-1} - a_{m+p} \\
&|S_{m+p} - S_m| \leq |S_{m+p} - S_{m+p-1}| + |S_{m+p-1} - S_{m+p-2}| + \cdots + |S_{m+1} - S_m| \\
&|S_{m+p} - S_m| \leq a_{m+p-1} - a_{m+p} + \cdots + a_{m+1} - a_{m+2} + a_m - a_{m+1} \\
&|S_{m+p} - S_m| \leq a_m - a_{m+p} \rightsquigarrow |S_n - S_m| \leq a_m - a_n
\end{aligned}
$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \rightsquigarrow a_n$ Cauchy

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N(\epsilon) \; : \; n > m > N(\epsilon) \rightsquigarrow a_m - a_n < \epsilon$$

$$\rightsquigarrow |S_n - S_m| < \epsilon$$

$$\rightsquigarrow S_n \ \text{Cauchy}$$

□

πχ $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει

$\sum_n \frac{(-1)^n}{\ln n}$ συγκλίνει

$\sum_n (-1)^n \sin\frac{\pi}{n}$ συγκλίνει