ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

x_n είναι $\boxed{\text{αύξουσα ακολουθία}}$ $\Leftrightarrow x_n \leq x_{n+1}$

x_n είναι $\boxed{\text{φθίνουσα ακολουθία}}$ $\Leftrightarrow x_n \geq x_{n+1}$

x_n είναι x_n είναι $\boxed{\text{μονότονη ακολουθία}}$ $\Leftrightarrow$ φθίνουσα ή αύξουσα ακολουθία

Μον. 1α

x_n είναι αύξουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

□ *Απόδ*: Εχουμε $x_n \leq x_{n+1} \leq K$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις,
είτε υπάρχει κάποιος δείκτης ℓ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq \ell \rightsquigarrow x_n = L \in \mathbb{R}$, στην περίπτωση αυτή

$$L = \lim_{k\to\infty} x_k = \max\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$$

είτε η ακολουθία έχει απειρους διαφορετικούς όρους. Εστω $\mathbb{R} \ni M = \sup\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (υπάρχει το M λόγω του αξιώματος III του συνόλου $\mathbb{R}$!) τότε από τον ορισμό του sup

$$\forall \epsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} : m - \epsilon < x_k \leq m$$

$$x_n \ \text{ αύξουσα } \ \Rightarrow \forall n > k \rightsquigarrow x_k \leq x_n \leq m < m + \epsilon \Rightarrow$$

Επομένως

$$\forall \epsilon > 0, \exists k = N(\epsilon) \ : \ n > N(\epsilon) \rightsquigarrow m - \epsilon < x_n < m + \epsilon$$

άρα $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} m$ □

Μον. 1β

x_n είναι φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$

Μον. 2

x_n είναι μονότονη ακολουθία και έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \Rightarrow$ η ακολουθία x_n συγκλίνει στο ίδιο όριο δηλ $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$

Απόδειξη.

Η υπακολουθία x_{n_k} είναι μια μονότονη (πχ αύξουσα) ακολουθία, επομένως $x = \sup_{k\in\mathbb{N}}\{x_{n_k}\}$. Το x είναι επίσης supremum της υπαακολουθίας x_{n_k} (βλ. Μον. 1α). Θέτουμε $A = \{x_{n_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ και $B = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, $\forall z \in A \rightsquigarrow z \in B$ επομένως $z \leq \sup\ B$ δηλαδή $x = \sup\ A \leq \sup\ B$. Αν $\sup\ A < \sup\ B \rightsquigarrow \exists \ell : x_\ell > x$ αλλά τότε υπάρχει κάποιο m έτσι ώστε $x_{n_m} \geq x_\ell > x$ πράγμα άτοπο. Οπότε $\sup\ A = \sup\ B$. □

ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

x_n είναι **αύξουσα ακολουθία** $\Leftrightarrow x_n \leq x_{n+1}$

x_n είναι **φθίνουσα ακολουθία** $\Leftrightarrow x_n \geq x_{n+1}$

x_n είναι **μονότονη ακολουθία** $\Leftrightarrow$ φθίνουσα ή αύξουσα ακολουθία

Μον. 1α: x_n είναι αύξουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow$ $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

Μον. 1β: x_n είναι φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow$ $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$

Μον. 2: x_n είναι μονότονη ακολουθία και έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \Rightarrow$ η ακολουθία x_n συγκλίνει στο ίδιο όριο δηλ $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$

- Ορ. $\boxed{x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \frac{1}{n^\ell} = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n}$$
$$= \sum_{\ell=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\ell+1)}{\ell!\, n^\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\ell-1}{n}\right)$$

- $x_{n+1} > x_n \rightsquigarrow$ αύξουσα ακολουθία

$$x_{n+1} = \sum_{\ell=0}^{n+1} \frac{1}{\ell!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{\ell-1}{n+1}\right)$$
$$= \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{\ell-1}{n+1}\right) +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$
$$\left(1-\frac{k}{n+1}\right) > \left(1-\frac{k}{n}\right) \rightsquigarrow x_{n+1} > x_n$$

- Ορ. $\boxed{y_n = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!}}$
- $y_{n+1} > y_n \rightsquigarrow$ αύξουσα ακολουθία

- $x_n \leq y_n$
- y_n φραγμένη ακολουθία $\rightsquigarrow$ x_n φραγμένη ακολουθία

$$\frac{1}{\ell!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots \ell} \leq \frac{1}{2^{\ell-1}}$$

$$\begin{aligned} x_n < y_n = & \quad 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \\ = & \quad 1 + \left(1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < \\ < & \quad 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

- $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}$ και $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^*$ $\rightsquigarrow$ $\mathrm{e} \leq \mathrm{e}^*$
- $\gamma_{n,k} = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{\ell!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{\ell-1}{n}\right)$
- $\gamma_{n,k} \leq x_n \leq \mathrm{e}$ $\rightsquigarrow$ $\gamma_{n,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} y_k$ $\rightsquigarrow$
- $y_k \leq \mathrm{e}$ $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\lim_{k\to\infty} y_k = \mathrm{e}^* \leq \mathrm{e}$
- $\mathrm{e} = \mathrm{e}^*$ $\leftrightsquigarrow$ $\boxed{\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=}^{\infty} \frac{1}{k!}}}$

- $1 \geq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - n\frac{1}{n^2} \rightsquigarrow \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$
- $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \dfrac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$
- $k \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^k$
- $\left(1 + \frac{k}{\ell\, n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{k/\ell}$
- $\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = \mathrm{e}^\alpha = \sup\{e^q,\ q \in \mathbb{Q},\ q \leq \alpha\},\ \alpha > 0$

- Ορ. $\boxed{x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, $x_{n+1} > x_n \rightsquigarrow$ αύξουσα ακολουθία
- Ορ. $\boxed{y_n = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!}}$, $y_{n+1} > y_n \rightsquigarrow$ αύξουσα ακολουθία,
- $x_n \leq y_n$
- y_n φραγμένη ακολουθία $\rightsquigarrow$ x_n φραγμένη ακολουθία
- $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}$ και $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^* \rightsquigarrow \mathrm{e} \leq \mathrm{e}^*$
- $\gamma_{n,k} = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{\ell!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\ell-1}{n}\right)$
- $\gamma_{n,k} \leq x_n \leq \mathrm{e} \rightsquigarrow \gamma_{n,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} y_k \rightsquigarrow$
- $y_k \leq \mathrm{e} \rightsquigarrow \lim_{k\to\infty} y_k = \mathrm{e}^* \leq \mathrm{e}$
- $\mathrm{e} = \mathrm{e}^* \leftrightsquigarrow \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}}$

- $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1}$
- $\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{k}$
- $\left(1 + \dfrac{k}{\ell\, n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{k/\ell}$
- $\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\alpha} = \sup\{e^q,\ q \in \mathbb{Q},\ q \leq \alpha\},\ \alpha > 0$

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ CAUCHY

Ορισμός

$$\left\{x_n \quad \text{Cauchy}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\,\epsilon > 0 \;\exists\, N(\epsilon) \;\; : \\ \\ \forall\, n > m > N(\epsilon) \rightsquigarrow |x_n - x_m| < \epsilon \end{array}\right\}$$

$$\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\} \Rightarrow \left\{x_n \quad \text{Cauchy}\right\}$$

$$\left\{x_n \quad \text{Cauchy}\right\} \text{ KAI } \left\{x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x\right\} \Rightarrow \Rightarrow \left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\}$$

$$\left\{x_n \quad \text{Cauchy}\right\} \Rightarrow \left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\}$$

Θεώρημα πληρότητας

$$\left\{x_n \quad \text{Cauchy}\right\} \Leftrightarrow \left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\}$$

Θεώρημα πληρότητας

Θεώρημα πληρότητας

$$\left\{ x_n \ \text{Cauchy} \right\} \Leftrightarrow \left\{ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \right\}$$

$$\left\{ x_n \ \boxed{\textbf{δεν}} \ \text{συγκλίνει} \right\} \Leftrightarrow \left\{ x_n \ \boxed{\textbf{όχι}} \ \text{Cauchy} \right\}$$

$$\exists\, \epsilon, \quad \forall N > 0 : \exists\, n > m > N \ \rightsquigarrow \ |x_n - x_m| > \epsilon$$

πχ.

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \ \text{δεν συγκλίνει}$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \ \text{συγκλίνει}$$

Συστολή ακολουθίας

Αν $|x_{n+1} - x_n| < k|x_n - x_{n-1}|$ και $k < 1$ $\leftrightsquigarrow$ Η x_n είναι συστολή $\Rightarrow$ η x_n είναι Cauchy

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ CAUCHY

Ορισμός

$$\boxed{\left\{x_n \quad \text{Cauchy}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall \epsilon > 0 \, \exists N(\epsilon) \ : \\ \\ \forall n > m > N(\epsilon) \rightsquigarrow |x_n - x_m| < \epsilon \end{array}\right\}}$$

Πρόταση

$$\boxed{\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\} \Rightarrow \left\{x_n \quad \text{Cauchy}\right\}}$$

Απόδειξη.

$$\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) > 0 \ : \\ m > N(\epsilon) \rightsquigarrow |x - x_m| < \epsilon \end{array}\right\} \rightsquigarrow$$

$$n > m \rightsquigarrow |x_n - x| < \epsilon$$

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < 2\epsilon = \epsilon' \rightsquigarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} \forall \epsilon' > 0 \, \exists N'(\epsilon') = N\left(\frac{\epsilon'}{2}\right) \ : \\ \\ \forall n > m > N'(\epsilon') \rightsquigarrow |x_n - x_m| < \epsilon' \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{x_n \quad \text{Cauchy}\right\} \qquad \square$$

Λήμμα

$\left\{x_n \text{ Cauchy}\right\}$ ΚΑΙ $\left\{x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\}$

Απόδειξη.

$$\{x_n \text{ Cauchy }\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\,\epsilon > 0\,\exists\,N_1(\epsilon)\ : \\ \\ \forall\,n > m > N_1(\epsilon) \rightsquigarrow |x_n - x_m| < \epsilon \end{array}\right\}$$

$$\left\{x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\,\epsilon > 0\,\exists\,N_2(\epsilon)\ : \\ \\ \forall\,k > N_2(\epsilon) \rightsquigarrow |x_{n_k} - x| < \epsilon \end{array}\right\}$$

Αν $\epsilon' = 2\epsilon$ και $N'(\epsilon') = \max\left\{N_1(\epsilon),\, N_2(\epsilon)\right\}$ τότε $n > n_k > N'(\epsilon') \rightsquigarrow$

$$|x_n - x| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < 2\epsilon = \epsilon'$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\,\epsilon' > 0 \quad \exists\,N'(\epsilon') > 0\ : \\ n > N'(\epsilon') \rightsquigarrow |x - x_n| < \epsilon' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\}$$

□

Πρόταση

$$\boxed{\left\{x_n \text{ Cauchy }\right\} \Rightarrow \left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\}}$$

Απόδειξη.

$\left\{x_n \text{ Cauchy }\right\} \Rightarrow$

$$\epsilon = 1\,\exists\,n_0 > N(1)\ :\ n > n_0 \rightsquigarrow$$

$$|x_n| \le |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}| \rightsquigarrow$$

x_n τελικά φραγμένη $\underset{\text{Bolzano}}{\rightsquigarrow}$ $\exists$ υπακολουθία που συγκλίνει $\underset{\text{Λήμμα}}{\rightsquigarrow}$ x_n συγκλίνει.

□

ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ

$$\boxed{\left\{x_n \ \text{ Cauchy }\right\} \Leftrightarrow \left\{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x\right\}}$$

$$\left\{\ x_n \ \boxed{\textbf{δεν}} \ \text{συγκλίνει}\ \right\} \Leftrightarrow \left\{x_n \ \boxed{\textbf{όχι}} \ \text{Cauchy}\ \right\}$$

$$\boxed{\exists\, \epsilon, \quad \forall\, N > 0 : \ \exists\, n > m > N \ \rightsquigarrow \ |x_n - x_m| > \epsilon}$$

πχ.

Πρόταση

$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει

Απόδειξη.

$$x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$$

□

Πρόταση

$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
x_n - x_m = {} & \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq \\
& \leq \tfrac{1}{m(m+1)} + \tfrac{1}{(m+1)(m+2)} + \cdots + \tfrac{1}{n(n-1)} = \\
= {} & \tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{m+1} + \tfrac{1}{m+1} - \tfrac{1}{m+2} + \cdots + \tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n} \\
= {} & \tfrac{1}{m} \cancel{\tfrac{1}{m+1}} \cancel{\tfrac{1}{m+1}} \cancel{\tfrac{1}{m+2}} + \cdots + \cancel{\tfrac{1}{n-1}} - \tfrac{1}{n} \\
= {} & \tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{n} < \tfrac{1}{m}
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{c}
\forall\, \epsilon > 0 \ \exists\, N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \ : \\[2ex]
\forall\, n > m > N(\epsilon) \ \rightsquigarrow \ |x_n - x_m| < \frac{1}{m} < \epsilon
\end{array}\right\}$$

□

Πλήρης χώρος $\Leftrightarrow$ **κάθε** ακολουθία Cauchy συγκλίνει

- Το $\mathbb{R}$ είναι πλήρης χώρος
- Το $\mathbb{Q}$ **δεν** είναι πλήρης χώρος

πχ. Η ακολουθία $x_1 = 2,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$

$$x_n \in \mathbb{Q} \ \ \text{αλλά} \ \ x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Αν γνωρίζουμε μόνο το $\mathbb{Q}$ μπορούμε να πάρουμε το σύνολο ακολουθιών Cauchy και το σύνολο αυτό είναι ένα ολικά διατεταγμένο πεδίο/σώμα που κάθε ταυτίζεται με το $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$= Cauchy- πλήρωση του $\mathbb{Q}$

Constructive	Axiomatic
Αξιώματα Peano $\Updownarrow$ $\mathbb{N}$ $\Downarrow$ προσθετική ομάδα $\Downarrow$ $\mathbb{Z}$ $\Downarrow$ πολλαπλασιαστική ομάδα $\Downarrow$ $\mathbb{Q}$ $\Downarrow$ Cauchy- πλήρωση $\Downarrow$ $\mathbb{R}$	Αξιώματα I, II, III $\Updownarrow$ $\mathbb{R}$ $\Downarrow$ μέγιστο 1-hereditary σύνολο $\Updownarrow$ $\mathbb{N}$ $\Downarrow$ προσθετική ομάδα $\Downarrow$ $\mathbb{Z}$ $\Downarrow$ πολλαπλασιαστική ομάδα $\Downarrow$ $\mathbb{Q}$

Πρ. (Stolz)

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \\[2em] b_k > 0 \quad \textbf{και} \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$

πχ $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \rightsquigarrow \dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

$$\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots\sqrt[n]{n}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} n$$

$$k \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \frac{1+2^k+3^k+\cdots n^k}{n^{k+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{k+1}$$

Πρόταση

$$\boxed{\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \Rightarrow \sqrt[n]{|x_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell}$$

π.χ. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5-3n^3+8} = 1$

Πρ (Stolz):

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} \dfrac{a_n}{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \\[2ex] b_k > 0 \quad \text{και} \quad \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell}$$

□ *Απόδ*:

$$\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N_1(\epsilon) > 0 : \\ k > m > N_1(\epsilon) \rightsquigarrow \ell - \epsilon < \dfrac{a_k}{b_k} < \ell + \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\rightsquigarrow (\ell - \epsilon)\, b_k < a_k < (\ell + \epsilon)\, b_k$$

$$\rightsquigarrow (\ell-\epsilon) \sum_{k=m+1}^{n} b_k < \sum_{k=m+1}^{n} a_k < (\ell+\epsilon) \sum_{k=m+1}^{n} b_k$$

$$\rightsquigarrow \sum_{k=1}^{m} a_k + (\ell-\epsilon) \sum_{k=m+1}^{n} b_k < \sum_{k=1}^{n} a_k < \sum_{k=1}^{m} a_k + (\ell+\epsilon) \sum_{k=m+1}^{n} b_k$$

$$\rightsquigarrow \left\{ \sum_{k=1}^{m} a_k - (\ell-\epsilon) \sum_{k=1}^{m} b_k \right\} + (\ell-\epsilon) \sum_{k=1}^{n} b_k < \sum_{k=1}^{n} a_k <$$

$$< \left\{ \sum_{k=1}^{m} a_k - (\ell+\epsilon) \sum_{k=1}^{m} b_k \right\} + (\ell+\epsilon) \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$\rightsquigarrow \frac{\left\{ \sum_{k=1}^{m} a_k - (\ell-\epsilon) \sum_{k=1}^{m} b_k \right\}}{\sum_{k=1}^{n} b_k} + (\ell-\epsilon) < \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} <$$

$$< \frac{\left\{ \sum_{k=1}^{m} a_k - (\ell+\epsilon) \sum_{k=1}^{m} b_k \right\}}{\sum_{k=1}^{n} b_k} + (\ell+\epsilon)$$

Για ένα σταθερό $\epsilon > 0$, διαλέγουμε ένα $m = [N_1(\epsilon)] + 1 > N_1(\epsilon)$, που είναι σταθερό (και εξαρτάται από το ϵ). Τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left\{ \sum\limits_{k=1}^{m} a_k - (\ell-\epsilon) \sum\limits_{k=1}^{m} b_k \right\}}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} + (\ell-\epsilon) \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \frac{\left\{ \sum\limits_{k=1}^{m} a_k - (\ell+\epsilon) \sum\limits_{k=1}^{m} b_k \right\}}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} + (\ell+\epsilon)$$

Οι παραστάσεις μεταξύ $\left\{ \cdots \right\}$ δεν εξαρτώνται από το n τότε επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = +\infty$ θά έχουμε ότι για το συγκεκριμένο ϵ

$$(\ell-\epsilon) \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} \le (\ell+\epsilon)$$

Επομένως $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ □

Πρ:

$$\boxed{\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{|x_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell}$$

□ *Απόδ*:

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N_1(\epsilon) > 0 \ : \\ m > N_1(\epsilon) \ \rightsquigarrow \ \ell - \epsilon < \dfrac{|x_{m+1}|}{|x_m|} < \ell + \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} &\rightsquigarrow \ (\ell-\epsilon)\,|x_m| < |x_{m+1}| < (\ell+\epsilon)\,|x_m| \\ &\rightsquigarrow \ (\ell-\epsilon)^k\,|x_m| < |x_{m+k}| < (\ell+\epsilon)^k\,|x_m| \\ &\rightsquigarrow \ (\ell-\epsilon)^{m+k}\,\tfrac{|x_m|}{(\ell-\epsilon)^m} < |x_{m+k}| < (\ell+\epsilon)^{m+k}\,\tfrac{|x_m|}{(\ell+\epsilon)^m} \end{aligned}$$

Για $n = m + k > m$ έχουμε

$$\begin{aligned} &\rightsquigarrow \ (\ell-\epsilon)^n\,\tfrac{|x_m|}{(\ell-\epsilon)^m} < |x_n| < (\ell+\epsilon)^n\,\tfrac{|x_m|}{(\ell+\epsilon)^m} \\ &\rightsquigarrow \ (\ell-\epsilon)\,\sqrt[n]{\tfrac{|x_m|}{(\ell-\epsilon)^m}} < \sqrt[n]{|x_n|} < (\ell+\epsilon)\,\sqrt[n]{\tfrac{|x_m|}{(\ell+\epsilon)^m}} \\ &\rightsquigarrow \ (\ell-\epsilon)\,\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\tfrac{|x_m|}{(\ell-\epsilon)^m}} \le \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|} \le (\ell+\epsilon)\,\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\tfrac{|x_m|}{(\ell+\epsilon)^m}} \\ &\rightsquigarrow \ (\ell-\epsilon) \le \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|} \le (\ell+\epsilon) \end{aligned}$$

Επομένως $\sqrt[n]{|x_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ □

ΑΠΟΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ορισμός

$$\left\{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall\, R > 0,\ \exists\, N(R) > 0\ : \\ \\ n > N(R)\ \rightsquigarrow\ x_n > R \end{array}\right\}$$

Κάθε αύξουσα μη φραγμένη ακολουθία αποκλίνει

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \ \rightsquigarrow\ \frac{1}{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ορισμός

$$\left\{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall\, R > 0,\ \exists\, N(R) > 0\ : \\ \\ n > N(R)\ \rightsquigarrow\ x_n < -R \end{array}\right\}$$

Κάθε φθίνουσα μη φραγμένη ακολουθία αποκλίνει