

Διάφορες ιδιότητες ακολουθιών

$$\text{Ιδ. 1 : } a > 0, \sqrt[n]{a} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\text{Ιδ. 2 : } \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\text{Ιδ. 3 : } x_n > 0, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \rightsquigarrow \sqrt[k]{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{x}$$

$$\text{Ιδ. 4 : } P(n) = a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_{p-1} n + a_p, \\ Q(n) = b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + a_{q-1} n + a_q$$

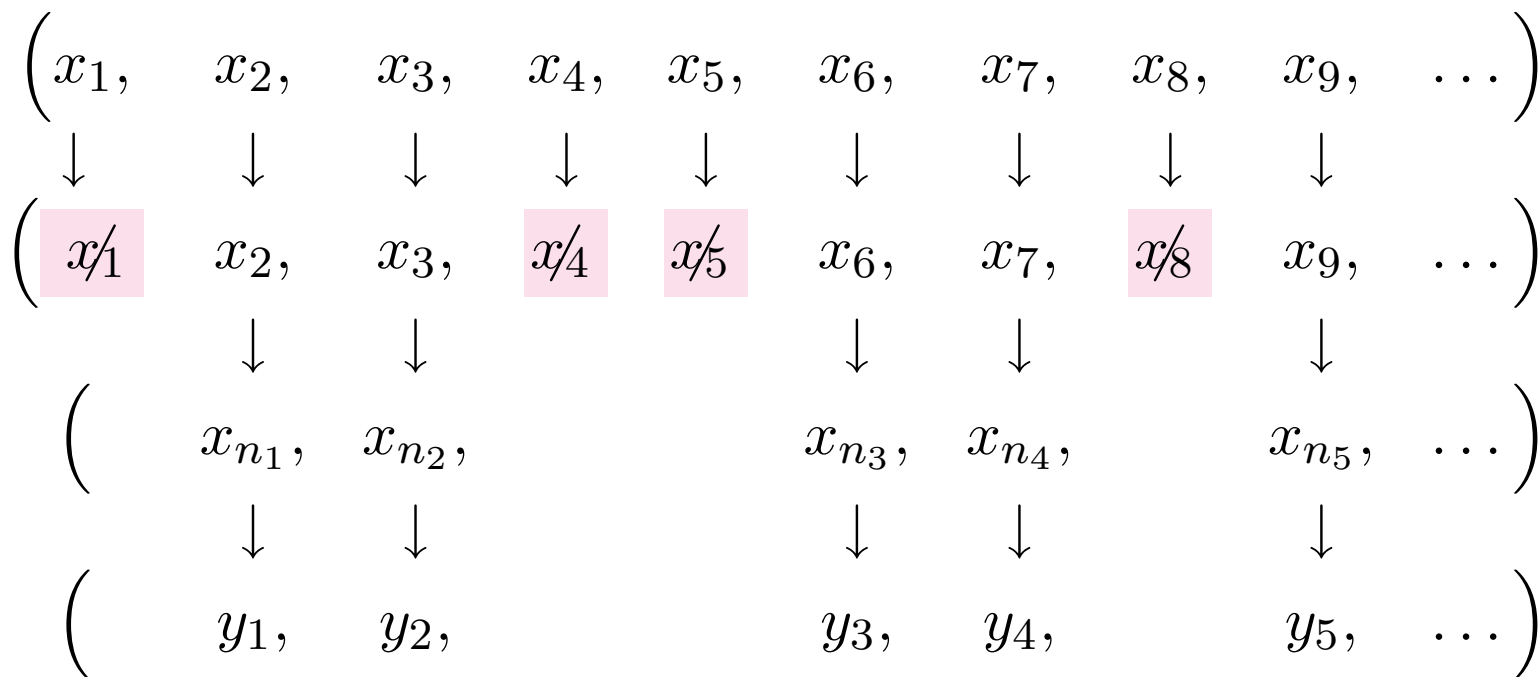
$$\text{Αν } p = q \text{ τότε } \frac{P(n)}{Q(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a_0}{b_0}$$

$$\text{Αν } p < q \text{ τότε } \frac{P(n)}{Q(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

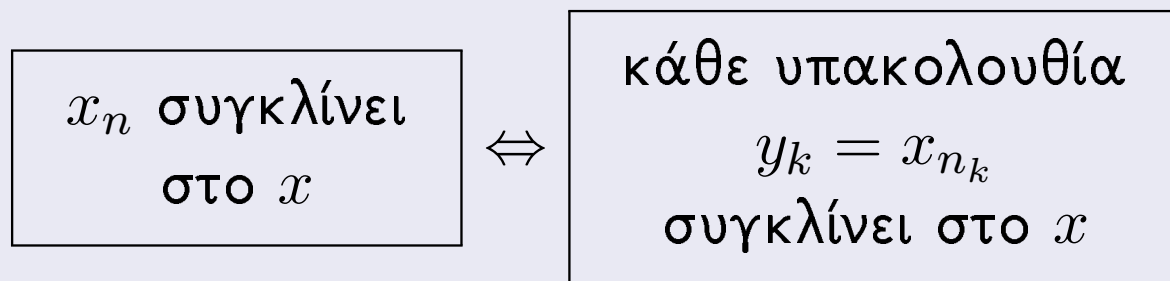
Ορισμός

Μια επιλογή $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ από **άπειρους** όρους της ακολουθίας, με $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ ονομάζεται **υπακολουθία** της $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$



Σημείωση για τους δείκτες: $k \leq n_k$

Υπακ.1:



Παράδειγμα: $\{ \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \} \rightsquigarrow \{ \sqrt[n^2]{n^2} \rightarrow 1 \}$

Θεώρημα Bolzano Weierstrass

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένο απειροσύνολο A έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης

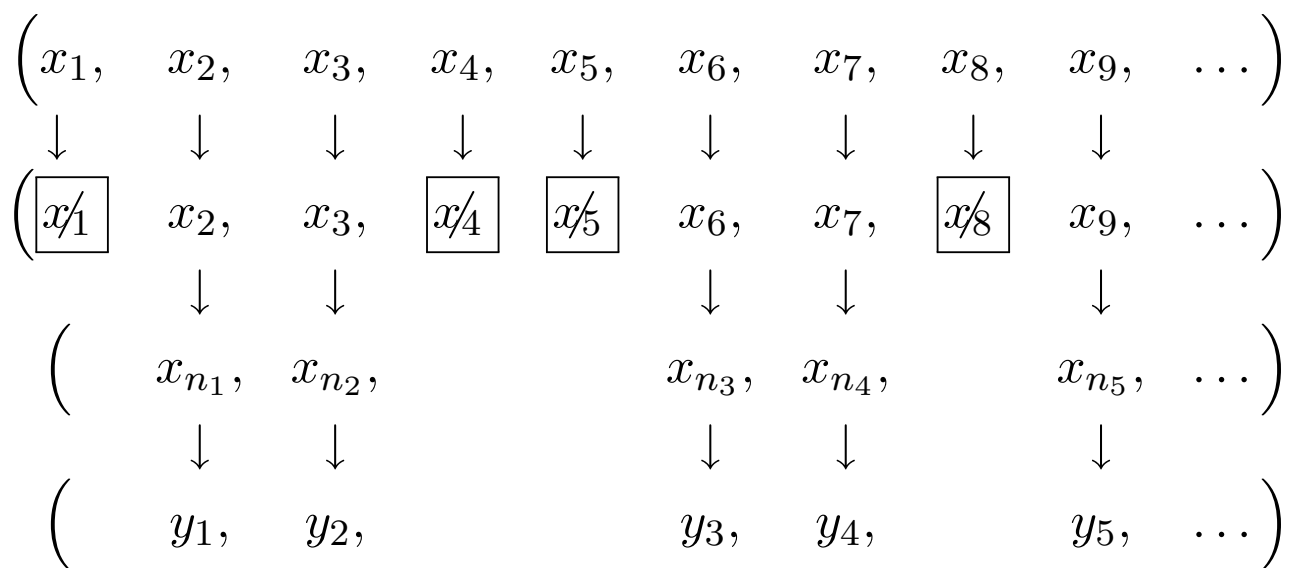
Υπακ. 2:

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία

ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ορισμός

Μια επιλογή $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ από **άπειρους** όρους της ακολουθίας, με $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ ονομάζεται **υπακολουθία** της $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$



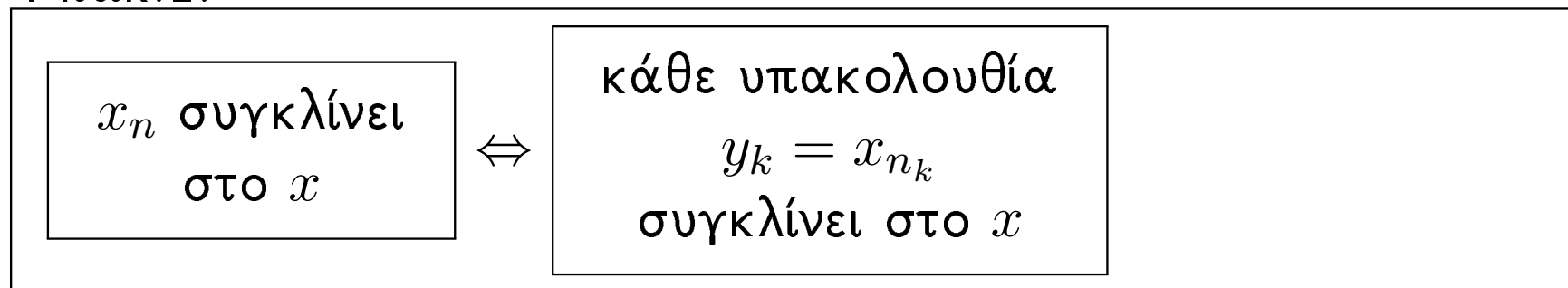
Σημείωση για τους δείκτες: $k \leq n_k$

$$\forall k \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \exists m \in \mathbb{N} : \{k \leq m\} \wedge \{n_k \leq m\}$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \exists k \in \mathbb{N} : \{m \leq n_k\}$$

$$k \geq m \Rightarrow n_k \geq m$$

Υπακ.1:



Παράδειγμα: $\{ \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \} \rightsquigarrow \{ \sqrt[n^2]{n^2} \rightarrow 1 \}$

□ Απόδ:

$$\left\{ x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) > 0 : \\ k > N(\epsilon) \rightsquigarrow |x_k - x| < \epsilon \end{array} \right\}$$

Επειδή $n_k \geq k > N(\epsilon)$ τότε $|x_{n_k} - x| < \epsilon$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) > 0 : \\ n_k > N(\epsilon) \rightsquigarrow |x_{n_k} - x| < \epsilon \end{array} \right\} \Rightarrow$$

□

Θεώρημα
Bolzano
Weierstrass

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένο απειροσύνολο A έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης



Υπ. 2

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία

□ Απόδ:

- ▶ Αν η ακολουθία έχει μια απειρία από σταθερούς όρους τότε διαλέγουμε την υπακολουθία από τους σταθερούς όρους και είναι συγκλίνουσα
- ▶ αν η ακολουθία έχει άπειρους μη ίσους όρους τότε έχουμε ένα φραγμένο απειροσύνολο \Rightarrow υπάρχει ένα σημείο συσσώρευσης $x \Rightarrow$

$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists x_{k_n} : x - \frac{1}{n} < x_{k_n} < x + \frac{1}{n}$$

Αρα $x_{k_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

□