Διάφορες ιδιότητες ακολουθιών

Ιδ. 1 : $a > 0, \ \sqrt[n]{a} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Ιδ. 2 : $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Ιδ. 3 : $x_n > 0, \ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \rightsquigarrow \sqrt[k]{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt[k]{x}$

Ιδ. 4 : $P(n) = a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_{p-1} n + a_p,$

$Q(n) = b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + a_{q-1} n + a_q$

Αν $p = q$ τότε $\dfrac{P(n)}{Q(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{a_0}{b_0}$

Αν $p < q$ τότε $\dfrac{P(n)}{Q(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ορισμός

Μια επιλογή $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ από $\boxed{\text{άπειρους}}$ όρους της ακολουθίας, με $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ ονομάζεται $\boxed{\text{υπακολουθία}}$ της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{array}{cccccccccc}
\big(x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_9, & \ldots\big) \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\big(\cancel{x_1} & x_2, & x_3, & \cancel{x_4} & \cancel{x_5} & x_6, & x_7, & \cancel{x_8} & x_9, & \ldots\big) \\
 & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
\big(& x_{n_1}, & x_{n_2}, & & & x_{n_3}, & x_{n_4}, & & x_{n_5}, & \ldots\big) \\
 & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
\big(& y_1, & y_2, & & & y_3, & y_4, & & y_5, & \ldots\big)
\end{array}$$

Σημείωση για τους δείκτες: $\boxed{k \leq n_k}$

Υπακ.1:

$\boxed{x_n \text{ συγκλίνει στο } x} \Leftrightarrow \boxed{\text{κάθε υπακολουθία } y_k = x_{n_k} \text{ συγκλίνει στο } x}$

Παράδειγμα: $\{\sqrt[n]{n} \to 1\} \rightsquigarrow \left\{\sqrt[n^2]{n^2} \to 1\right\}$

Θεώρημα Bolzano Weierstrass

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένο απειροσύνολο A έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης

Υπακ. 2:

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία

ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ορισμός

Μια επιλογή $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ από $\boxed{\text{άπειρους}}$ όρους της ακολουθίας, με $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ ονομάζεται $\boxed{\text{υπακολουθία}}$ της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\big(x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_9, & \ldots\big) \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\big(\boxed{\cancel{x_1}} & x_2, & x_3, & \boxed{\cancel{x_4}} & \boxed{\cancel{x_5}} & x_6, & x_7, & \boxed{\cancel{x_8}} & x_9, & \ldots\big) \\
 & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
\big(& x_{n_1}, & x_{n_2}, & & & x_{n_3}, & x_{n_4}, & & x_{n_5}, & \ldots\big) \\
 & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
\big(& y_1, & y_2, & & & y_3, & y_4, & & y_5, & \ldots\big)
\end{array}
$$

Σημείωση για τους δείκτες: $\boxed{k \le n_k}$

$$
\forall\, k \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \exists\, m \in \mathbb{N} \;:\; \{k \le m\} \bigwedge \{n_k \le m\}
$$

$$
\forall\, m \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \exists\, k \in \mathbb{N} \;: \{m \le n_k\}
$$

$$
\boxed{k \ge m \;\Rightarrow\; n_k \ge m}
$$

Υπακ.1:

$\boxed{x_n \text{ συγκλίνει στο } x} \Leftrightarrow \boxed{\text{κάθε υπακολουθία } y_k = x_{n_k} \text{ συγκλίνει στο } x}$

Παράδειγμα: $\{\sqrt[n]{n} \to 1\} \rightsquigarrow \left\{\sqrt[n^2]{n^2} \to 1\right\}$

$\square$ *Απόδ*:

$$\left\{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\,\epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) > 0\ : \\ k > N(\epsilon) \rightsquigarrow |x_k - x| < \epsilon \end{array}\right\}$$

Επειδή $n_k \geq k > N(\epsilon)$ τότε $|x_{n_k} - x| < \epsilon$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\,\epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) > 0\ : \\ n_k > N(\epsilon) \rightsquigarrow |x_{n_k} - x| < \epsilon \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\square$

Θεώρημα Bolzano Weierstrass

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένο απειροσύνολο A έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης

$\Downarrow$

Υπ. 2

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία

□ *Απόδ*:

► Αν η ακολουθία έχει μια απειρία από σταθερούς όρους τότε διαλέγουμε την υπακολουθία από τους σταθερούς όρους και είναι συκλίνουσα

► αν η ακολουθία έχει άπειρους μη ίσους όρους τότε έχουμε ένα φραγμένο απειροσύνολο $\Rightarrow$ υπάρχει ένα σημείο συσσώρευσης $x \Rightarrow$

$$\exists\, n \in \mathbb{N}, \exists x_{k_n} \,:\, x - \frac{1}{n} < x_{k_n} < x + \frac{1}{n}$$

Αρα $x_{k_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. □