- Το $\mathbb{Q}$ είναι **γνήσιο** υποσύνολο του $\mathbb{R}$, διότι $\exists x \notin \mathbb{Q} : x \in \mathbb{R}$, **πχ** $x = \sqrt{2}$
- Το $A = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0 \text{ και } q^2 \leq 2\}$ συνεπάγεται ότι $\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- Μπορεί να υπάρχει $A \subset \mathbb{Q}$ αλλά $\sup A \notin \mathbb{Q}$

Ιδιότητα που διαχωρίζει το $\mathbb{Q}$ από το $\mathbb{R}$

Αξίωμα III, Αξίωμα συνεχούς

Για κάθε φραγμένο προς τα άνω σύνολο $\mathbf{A} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \sup \mathbf{A} \in \mathbb{R}$

- Αν $\sup A \in A \rightsquigarrow \sup A = \max A$
- ΠΡΟΣΟΧΗ $A \subset \mathbb{R} \Rightarrow$ **υπάρχει πάντα** το $\sup A \in \mathbb{R}$, αλλά το $\max A$ **μπορεί να μην ορίζεται** πχ

$$A = \{q \in \mathbb{R} : q > 0 \text{ και } q^2 < 5\} \rightsquigarrow$$

$\sup A = \sqrt{5}$ αλλά $\nexists \max A$

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ $\mathbb{R}$

κοινές ιδιότητες των συνόλων $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$

Αξίωμα I

Το $\mathbb{R}$ είναι πεδίο με χαρακτηριστική $\mathbf{0}$

Αξίωμα II

Το $\mathbb{R}$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο πεδίο

ιδιότητα μόνο του συνόλου $\mathbb{R}$

Αξίωμα III

Για κάθε άνω φραγμένο σύνολο $A \subset \mathbb{R} \Rightarrow \sup A \in \mathbb{R}$

Δομή μαθηματικής θεωρίας:

$\boxed{\text{Ορισμοί}} \rightsquigarrow \boxed{\text{Αξιώματα}} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \boxed{\text{Προτάσεις (θεωρήματα)}} \rightsquigarrow \boxed{\text{Προτάσεις}} \rightsquigarrow \cdots$

Δεν υπάρχει το sup $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο

$x \in \mathbb{R} \;\rightsquigarrow\; \exists n \in \mathbb{N} \;:\; x < n$

ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

$a > 0$ και $b \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n\,a > b$

$x > 0 \;\rightsquigarrow\; \exists n \in \mathbb{N} \;:\; n \leq x < n+1 \rightsquigarrow n = [x]$

Αν $\alpha < \beta \;\rightsquigarrow\; \exists \rho \in \mathbb{Q} \;:\; \alpha < \rho < \beta$

Συμπ.: Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός
$\rightsquigarrow$ Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχουν άπειροι ρητοί

Αν $\alpha < \beta \;\rightsquigarrow\; \exists r \notin \mathbb{Q} \;:\; \alpha < r < \beta$

Συμπ.: Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχει τουλάχιστον ένας άρρητος
$\rightsquigarrow$ Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχουν άπειροι άρρητοι

Πρόταση

Δεν υπάρχει το $\sup \mathbb{N}$ στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο

Απόδειξη

Υπόθεση: $\exists\, z = \sup, \mathbb{N} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ για $r = z - 1 < z$ μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow n > r = z - 1 \rightsquigarrow n + 1 > z$, αλλά $n + 1 \in \mathbb{N} \rightsquigarrow z$ δεν είναι ανω φράγμα, δηλ. z **δεν** είναι supremum του $\mathbb{N} \rightsquigarrow$ *Ατοπο*

Πρόταση

$x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \exists n \in \mathbb{N} : x < n$

Απόδειξη

$\boxed{\textit{Υπόθεση}: \forall n \in \mathbb{N} : n \leq x}$ $\Rightarrow x$ άνω φράγμα του $\mathbb{N} \rightsquigarrow$ Το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο $\rightsquigarrow$ *Ατοπο*

ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

$a > 0$ και $b \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\exists n \in \mathbb{N} : n\,a > b$

Απόδειξη

$x = \frac{b}{a} \rightsquigarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > x = \frac{b}{a} \rightsquigarrow n \cdot a > b$

Πρόταση

$x > 0 \rightsquigarrow \exists n \in \mathbb{N} : n \leq x < n+1 \rightsquigarrow n = [x]$

Απόδειξη

$S = \{m \in \mathbb{N} : x < m\} \subset \mathbb{N} \rightsquigarrow x \leq \min S$ Αν

$x = \min S \rightsquigarrow [x] = n = \min S$

$\rightsquigarrow n = x < n+1$

Αν $x < \min S \rightsquigarrow [x] = n = \min S - 1$

$\rightsquigarrow n < x < n+1$

Πρόταση

Αν $\alpha < \beta \rightsquigarrow \exists \rho \in \mathbb{Q} : \alpha < \rho < \beta$

Απόδειξη

Απόδ: $\alpha < \beta \rightsquigarrow 0 < \beta - \alpha$

Αρχιμήδης $\rightsquigarrow \exists n \in \mathbb{N} : n(\beta - \alpha) > 1 \rightsquigarrow$

$n\alpha + 1 < n\beta$ Θέτουμε $[n\alpha] = m \rightsquigarrow$

$$n\alpha < m + 1 \leq n\alpha + 1 < n\beta \rightsquigarrow \boxed{\alpha < \frac{m+1}{n} < \beta}$$

Συμπέρασμα: Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός $\rightsquigarrow$ Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχουν άπειροι ρητοί

Πρόταση

Αν $\alpha < \beta \rightsquigarrow \exists r \notin \mathbb{Q} : \alpha < r < \beta$

Απόδειξη

$\square$ *Απόδ*: $\alpha < \beta \rightsquigarrow \exists \rho \in \mathbb{Q} : \alpha < \rho < \beta$

$\rho < \beta \rightsquigarrow \exists n \in \mathbb{N} : n(\beta - \rho) > \sqrt{2} \rightsquigarrow$

$$n\alpha < n\rho + \sqrt{2} < n\beta \rightsquigarrow \boxed{\alpha < \rho + \frac{\sqrt{2}}{n} < \beta}$$

Αλλη απόδειξη

$$\exists \rho \in \mathbb{Q} : \frac{\alpha}{\sqrt{2}} < \rho < \frac{\beta}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \alpha < \sqrt{2}\rho < \beta$$

$$r = \sqrt{2}\rho \notin \mathbb{Q}$$

Συμπέρασμα: Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχει τουλάχιστον ένας άρρητος $\rightsquigarrow$ Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχουν άπειροι άρρητοι

ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, px = q,\ p \text{ και } \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathbb{Q}_+ = \Big\{ \quad \frac{1}{1},$$

$$\frac{2}{1}, \frac{1}{2},$$

$$\frac{3}{1}, \boxed{\frac{2}{2}}, \frac{1}{3},$$

$$\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4},$$

$$\frac{5}{1}, \boxed{\frac{4}{2}}, \boxed{\frac{3}{3}}, \boxed{\frac{2}{4}}, \frac{1}{5},$$

$$\frac{6}{1}, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6},$$

$$\frac{7}{1}, \boxed{\frac{6}{2}}, \frac{5}{3}, \boxed{\frac{4}{4}}, \frac{3}{5}, \boxed{\frac{2}{6}}, \frac{1}{7}, \ldots \Big\}$$

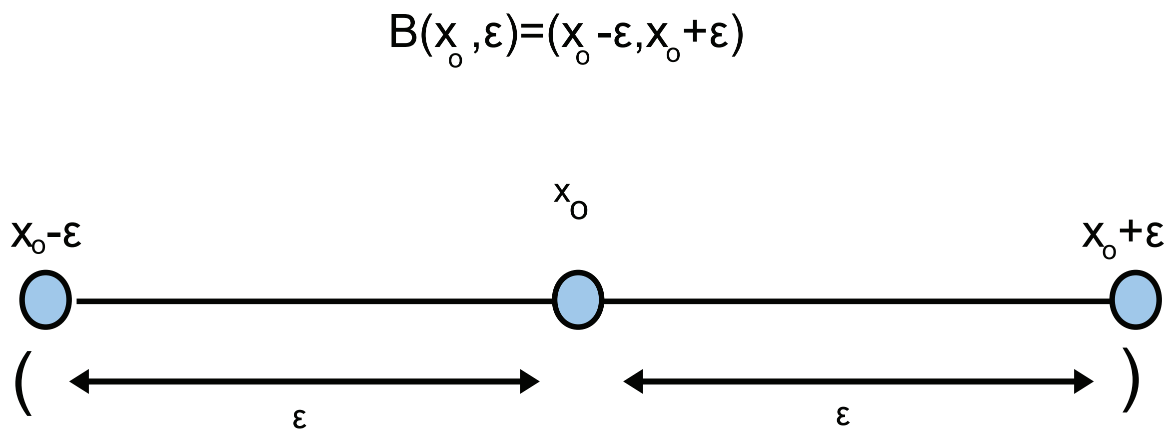
Διαγράφουμε τους αριθμούς που είναι στα κουτάκια

$$\mathbb{Q}_+ = \left\{1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, 5, \ldots\right\} \longleftrightarrow \mathbb{N}$$

Ανοικτό διάστημα $\equiv (a,\, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$

Ορισμός ανοικτής περιοχής ή "σφαίρας" ή "μπάλας"

$(x_0 - \epsilon,\, x_0 + \epsilon) \equiv B(x_0, \epsilon) \equiv$ (ανοικτή) περιοχή του x_0 ακτίνας ϵ



Σημεία συσσώρευσης και απομονωμένα σημεία

Σημείο συσσώρευσης

x_0 σημείο συσσώρευσης του A

$$\forall \epsilon > 0 \quad (B(x_0, \epsilon) - \{x_0\}) \bigcap A \neq \emptyset \quad \text{ή}$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in A \text{ και } x \neq x_0 \rightsquigarrow |x - x_0| < \epsilon$$

Παράδειγμα: $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, το $0 \notin A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Απομονωμένο ή μεμονωμένο σημείο

x_0 απομονωμένο ή μεμονωμένο σημείο του $A \Leftrightarrow$ το x_0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης

$$\exists \epsilon > 0 \quad B(x_0, \epsilon) \bigcap A = \{x_0\} \quad \text{ή}$$

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall x \in A \text{ και } x \neq x_0 \rightsquigarrow |x - x_0| \geq \epsilon$$

Παράδειγμα: $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, το $\frac{1}{5} \in A$ είναι απομονωμένο σημείο του A.

Θεώρημα Bolzano Weierstrass

Πρόταση

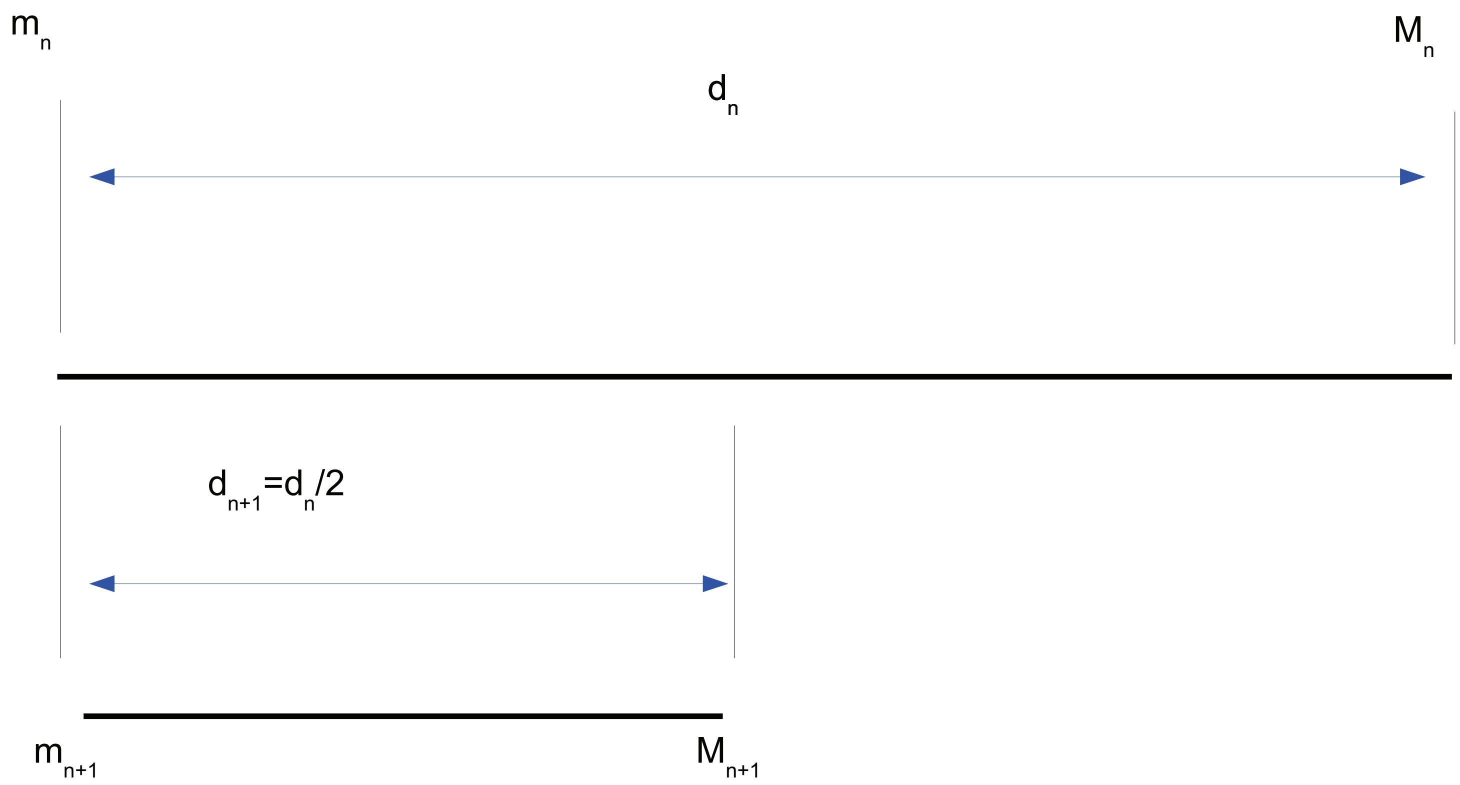
Αν a είναι σημείο συσσώρευσης του $A \Rightarrow$ Το A έχει άπειρο αριθμό στοιχείων.

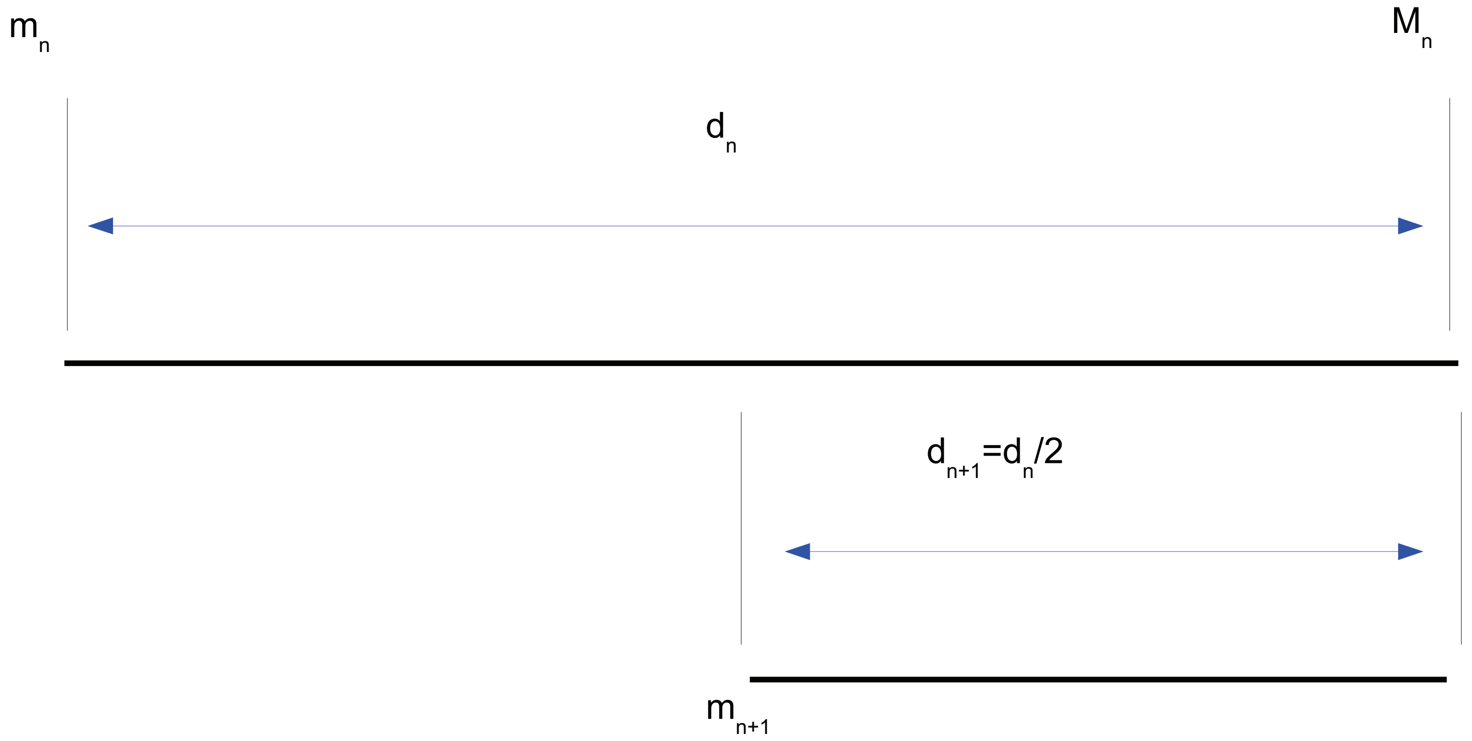
Θεώρημα Bolzano Weierstrass

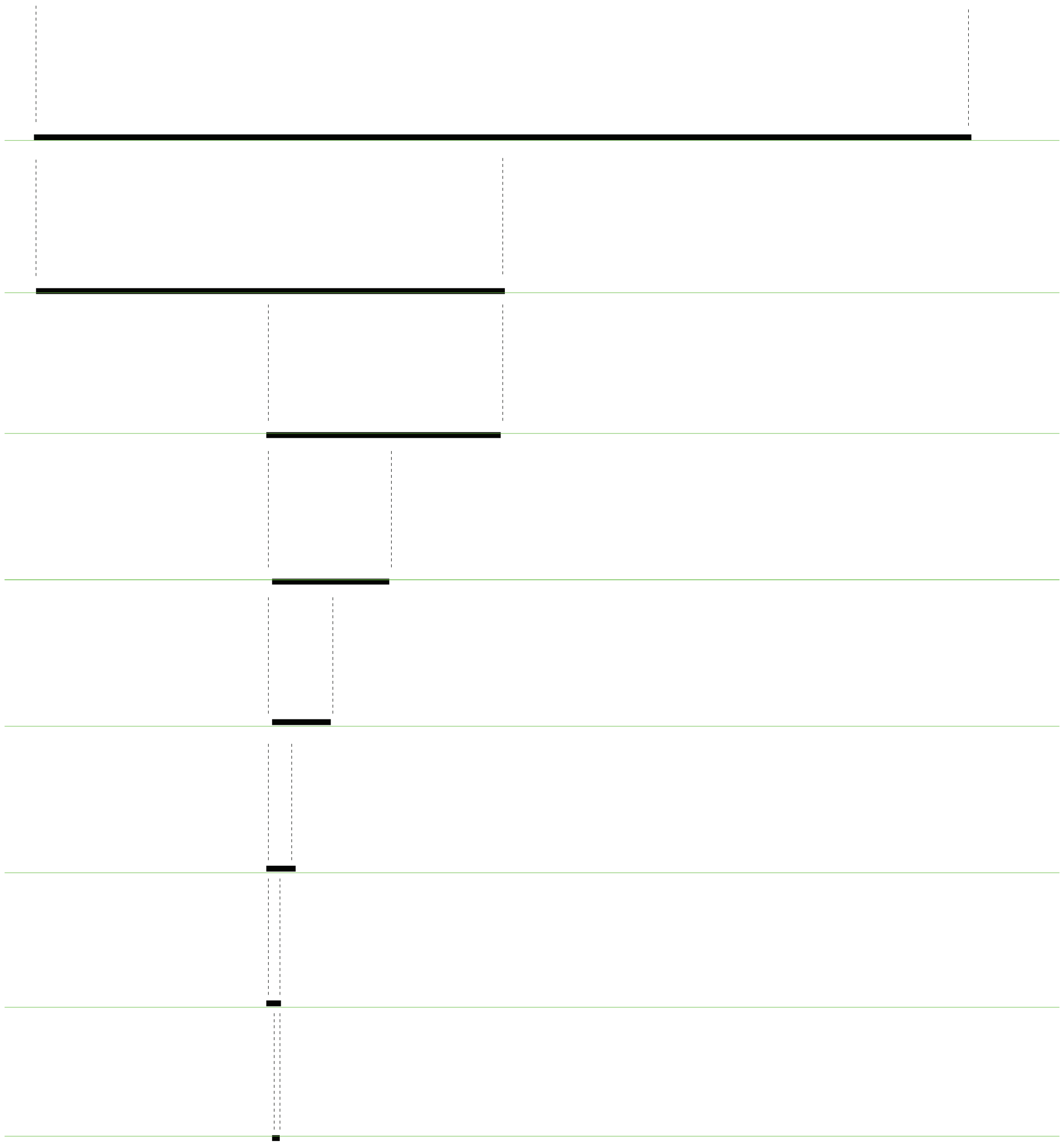
Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένο απειροσύνολο A έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης

Συμπέρασμα

A φραγμένο απειροσύνολο $\Rightarrow \exists$ σημείο συσσώρευσης


m_n
M_n
d_n
$d_{n+1}=d_n/2$
m_{n+1}
M_{n+1}


m_n
M_n
d_n
$d_{n+1}=d_n/2$
m_{n+1}



Πρόταση

Αν a είναι σημείο συσσώρευσης του $A \Rightarrow$ Το A έχει άπειρο αριθμό στοιχείων.

Απόδειξη

Εστω $\boxed{A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}}$ έχει n στοιχεία και $\boxed{\text{σημείο συσσώρευσης το } a}$ θέτουμε

$$\epsilon = \min\left\{\frac{1}{2}|a_k - a|, k = 1, 2, \dots, n\right\}$$

$$\forall\, x \in A \rightsquigarrow |a - x| > \epsilon \;\rightsquigarrow\; \boxed{a \text{ όχι σημ. συσσώρευσης}}$$

$\rightsquigarrow$ Ατοπο

Θεώρημα Bolzano Weierstrass

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένο απειροσύνολο A έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης

Απόδειξη

$$\forall x \in A \ \rightsquigarrow \ \inf\ A = m_0 \leq x \leq M_0 = \sup\ A$$

$$d_0 = M_0 - m_0 \ \rightsquigarrow \ d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{M_0 - m_0}{2}$$

ή
Χωρίζουμε το διάστημα $[m_0,\, M_0]$ σε δύο ίσα μέρη, σε κάποιο από αυτά υπάρχουν άπειρα στοιχεία του A αυτό το διάστημα το ονομάζουμε $[m_1,\, M_1] \rightsquigarrow d_2 = \frac{d_1}{2} = \frac{d_0}{2^2}$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία n φορές.

$$m_0 \leq m_1 \leq \cdots \leq m_n \leq M_n \leq \cdots \leq M_1 \leq M_0$$

$$d_n = \frac{M_{n-1} - m_{n-1}}{2} = \frac{d_0}{2^n}$$

$$\sup\{m_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \xi \leq \eta = \inf\{M_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

$$\text{Υποθ } \boxed{\xi < \eta} \ \rightsquigarrow \ \exists k \in \mathbb{N} : \frac{d_0}{2^k} < \eta - \xi < M_k - m_k = \frac{d_0}{2^k} \ \rightsquigarrow \ \boxed{\text{άτοπο}}$$

Αρα $\xi = \eta$

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \rightsquigarrow \ \xi - m_k \leq \frac{d_0}{2^k} \quad \text{και} \quad M_k - \xi \leq \frac{d_0}{2^k} \ \rightsquigarrow \ [m_k, M_k] \subset B(\xi, \frac{d_0}{2^k})$$

$$\forall \epsilon > 0\, \exists k \in \mathbb{N} : \epsilon > \frac{d_0}{k} > \frac{d_0}{2^k} \ \rightsquigarrow \ [m_k, M_k] \subset B(\xi, \frac{d_0}{2^k}) \subset B(\xi, \epsilon)$$

$$[m_k, M_k] \bigcap A \neq \emptyset \ \rightsquigarrow \ B(\xi, \epsilon) \bigcap A \neq \emptyset$$

Το $B(\xi, \epsilon) \bigcap A$ έχει άπειρα στοιχεία του A επομένως το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A

Ορισμός

Ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \equiv$ λίστα στοιχείων $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$.
$x_n \equiv$ είναι ο γενικός όρος

Ισοδύναμος ορισμός

Ακολουθία είναι μια απεικόνιση του $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N} \ni n \xrightarrow{f} f(n) = x_n \in \mathbb{R}$$

- Παράδειγμα: Δίδεται ο γενικός όρος

$$x_n = \frac{1}{n(n+1)} \equiv \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \dots\right)$$

- Παράδειγμα: Αναδρομική σχέση

$$x_1 = 1,\ x_n = \frac{n}{2} x_{n-1} \rightsquigarrow x_n = \frac{n!}{2^{n-1}}$$

- Παράδειγμα: Αναδρομική σχέση Fibonacci

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$$

▷ Παράδειγμα: Εναλλασσομένη ακολουθία

$$x_n = \begin{cases} -1 & \text{γιά } n = 2k \\ \\ 1 & \text{γιά } n = 2k+1 \end{cases} \quad \rightsquigarrow$$

$$x_n = (-1)^{n+1} = -\cos n\pi$$

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$$

▷ Παράδειγμα:

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{γιά } n = 2k \\ \\ \frac{n-1}{n} & \text{γιά } n = 2k+1 \end{cases}$$

$$x_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1+(-1)^n}{2} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1-(-1)^n}{2}$$

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{1}{2k}, \frac{2k}{2k+1}, \ldots\right)$$

Οριακό Σημείο Ακολουθίας

Οριακό Σημείο

$x = \boxed{\textbf{οριακό}}$ **σημείο** της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \equiv$ Το x είναι σημείο συσσώρευσης της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
ή Υπάρχουν άπειροι όροι $= x$

▷ Παράδειγμα: Ακολουθία με γενικό όρο

$$x_n = \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} + \frac{(n+1)\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{4}, \frac{1}{5}, \frac{7}{6}, \frac{1}{7}, \dots\right)$$

οριακά σημεία 0 και 1

▷ Παράδειγμα: Ακολουθία με γενικό όρο

$$x_n = 1 + \frac{(n+1)\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\left(1, \frac{5}{2}, 1, \frac{9}{4}, 1, \frac{13}{6}, 1, \dots\right)$$

οριακά σημεία 2 και 1

Σύγκλιση ακολουθιών

Ορισμός: ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ

Η ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ή $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ αν για κάθε περιοχή του x "τελικά" όλοι οι όροι της ακολουθίας περιέχονται σε αυτή

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = x} \equiv \boxed{\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N(\epsilon) > 0 \,:\, \forall\, n > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; x_n \in B(x,\epsilon)}$$

Εψιλοντικός ορισμός

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = x} \equiv \boxed{\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N(\epsilon) > 0 \,:\, \forall\, n > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; |x_n - x| < \epsilon}$$

Μιά συγλίνουσα ακολουθία έχει **μόνο** ένα όριο

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = x\} \equiv \{\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N(\epsilon) > 0 \,:\, \forall\, n > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; |x_n - x| < \epsilon\}$$

Παράδειγμα:

$$x_n = \frac{1}{n} \;\rightsquigarrow\; \lim_{n\to n} x_n = 0$$

ΠΡΟΧΕΙΡΟ !

$$n > N \;\rightsquigarrow\; |x_n - x| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \boxed{\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{φθίνουσα;}}} < \boxed{\frac{1}{N} = \epsilon}$$

$$\frac{1}{N} = \epsilon, \quad N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$$

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \,:\, \forall\, n > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; |x_n| < \epsilon$$

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = x\} \equiv \{\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N(\epsilon) > 0 \,:\, \forall\, n > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; |x_n - x| < \epsilon\}$$

Παράδειγμα:

$$x_n = \tfrac{1}{n^2+\mathrm{e}^n} \;\rightsquigarrow\; \lim_{n\to n} x_n = 0$$

ΠΡΟΧΕΙΡΟ !

$$n > N \;\rightsquigarrow\; |x_n - x| = \frac{1}{n^2+\mathrm{e}^n} \leq \boxed{\underbrace{\frac{1}{\mathrm{e}^n}}_{\text{φθίνουσα;}}} < \boxed{\frac{1}{\mathrm{e}^N} = \epsilon}$$

$$\frac{1}{\mathrm{e}^N} = \epsilon \;\rightsquigarrow\; N(\epsilon) = \ln\tfrac{1}{\epsilon}$$

$$\forall\, \epsilon > 0\; \exists\, N(\epsilon) = \ln\frac{1}{\epsilon} \,:\, n > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; |x_n| < \epsilon$$

$$a > 1, \rightsquigarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1}$$

$$1 + x > 0 \rightsquigarrow (1+x)^n \geq 1 + nx \text{ (Bernoulli)} \rightsquigarrow$$

$$a > 1 \rightsquigarrow a = \left(\underbrace{\sqrt[n]{a} - 1}_{x} + 1\right)^n \geq 1 + n\left(\underbrace{\sqrt[n]{a} - 1}_{x}\right) \rightsquigarrow$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}}$$

Πρόχειρο

$$n > N \rightsquigarrow \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n} < \frac{a-1}{N} = \epsilon \rightsquigarrow \boxed{N(\epsilon) = \frac{a-1}{\epsilon}}$$

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N(\epsilon) = \frac{a-1}{\epsilon} :$$

$$n > N(\epsilon) \rightsquigarrow |\sqrt[n]{a} - 1| \leq \frac{|a-1|}{n} < \frac{|a-1|}{N} = \epsilon$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0}$$

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{n^n} &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{n^n} \\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot(1-\frac{2}{n})\cdot(1-\frac{1}{n}) \\
&= \frac{1}{n}\cdot\prod_{k=1}^{n-2}\underbrace{\left(1-\frac{k}{n}\right)}_{<1} < \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Πρόχειρο

$$\frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \epsilon \ \rightsquigarrow\ N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$$

$$\forall\,\epsilon > 0\ \exists\, N(\epsilon) = \tfrac{1}{\epsilon}\ :$$

$$n > N(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ \left|\frac{n!}{n^n}\right| \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{N(\epsilon)} = \epsilon$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0}$$

$$2^n = \quad (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \cdots + \binom{n}{4} + \cdots =$$

$$= \cdots + \tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} + \cdots$$

$$2^n > \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

$$n > 6 \;\rightsquigarrow\; n-k > \frac{n}{2} \;\text{ για } k = 1,2,3$$

$$2^n > \frac{n^4}{2^3\,4!} \;\rightsquigarrow\; \frac{2^3\cdot 4!}{n} > \frac{n^3}{2^n}$$

Πρόχειρο

$$\frac{n^3}{2^n} < \frac{2^3\cdot 4!}{n} < \frac{2^3\cdot 4!}{N} = \epsilon \;\rightsquigarrow\; N(\epsilon) = \frac{2^3\cdot 4!}{\epsilon}$$

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N(\epsilon) = \tfrac{2^3\cdot 4!}{\epsilon} :$$

$$n > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; \left|\tfrac{n^3}{2^n}\right| < \tfrac{2^3\cdot 4!}{n} < \tfrac{2^3\cdot 4!}{N(\epsilon)} = \epsilon$$