Τύπος TAYLOR

$$\boxed{\begin{array}{c} f:\ [a,\ b]\ \rightarrow\ \mathbb{R} \\ f^{(n-1)}(x)\quad \textbf{συνεχής}\quad \forall\, x \in [a,\ b] \\ \exists\, f^{(n)}(x)\quad \forall\, x \in (a,\ b) \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists\, \xi \quad \textbf{μεταξύ} \quad x \quad \textbf{και} \quad x_0$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!}\, f^{(k)}(x_0)\ +\ R_n(x)}$$

$$\boxed{R_n(x)\ =\ \frac{(x-\xi)^{n-p}\ (x-x_0)^p}{p(n-1)!}\, f^{(n)}(\xi)}$$

υπόλοιπο Sclömlich-Roche

$p = 1$ υπόλοιπο Cauchy

$$R_n(x)\ =\ \frac{(x-\xi)^{n-1}\ (x-x_0)}{(n-1)!}\, f^{(n)}(\xi)$$

$p = n$ υπόλοιπο Lagrange

$$R_n(x)\ =\ \frac{(x-x_0)^n}{n!}\, f^{(n)}(\xi)$$

Απόδειξη.

Θεωρούμε ότι $x < x_0$ (αν $x > x_0$ η απόδειξη είναι η ίδια)

$$
\begin{aligned}
x \le t \le x_0 \\
\phi(t) &\overset{\text{ορ.}}{=} f(t) + \frac{x-t}{1!} f'(t) + \\
&+ \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) + \frac{(x-t)^3}{3!} f^{(3)}(t) + \\
&+ \cdots + \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t) + A\,(x-t)^p = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) + A\,(x-t)^p
\end{aligned}
$$

Το A είναι διαλεγμένο έτσι ώστε $\phi(x) = \phi(x_0)$. Εχουμε:

$$
\begin{aligned}
\phi(x_0) =& f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \\
&+ \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-t)^3}{3!} f^{(3)}(x_0) + \\
&+ \cdots + \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + A\,(x-x_0)^p = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + A\,(x-x_0)^p \\
\phi(x) =& f(x)
\end{aligned}
$$

Η συνάρτηση $\phi(t)$ είναι συνεχής για $t \in [x,\, x_0]$ και υπάρχει $\phi'(t)$ για $t \in (x,\, x_0)$ και $\phi(x) = \phi(x_0)$ άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (x,\, x_0)$ τέτοιο ώστε $\phi'(\xi) = 0$.

$$
\begin{aligned}
\phi'(t) =& \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) - k\frac{(x-t)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(t) \right) - \\
&- pA\,(x-t)^{p-1} = \\
&= f'(t) + \left(\frac{(x-t)}{1!} f^{(2)}(t) - f'(t) \right) + \\
&+ \left(\frac{(x-t)^2}{2!} f^{(3)}(t) - \frac{(x-t)}{1!} f^{(2)}(t) \right) + \\
&+ \left(\frac{(x-t)^3}{3!} f^{(4)}(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f^{(3)}(t) \right) + \\
&+ \cdots\cdots + \\
&+ \left(\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(t) \right) + \\
&- pA\,(x-t)^{p-1} = \\
&= \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) - pA\,(x-t)^{p-1}
\end{aligned}
$$

$$
\phi'(\xi) = 0 \rightsquigarrow A = \frac{(x-\xi)^{n-p}}{p(n-1)!} f^{(n)}(\xi)
$$

Το υπόλοιπο Sclömlich-Roche δίνεται από τον τύπο

$$
R_n(x) = A\,(x-x_0)^p
$$

□

Ανάπτυγμα Taylor

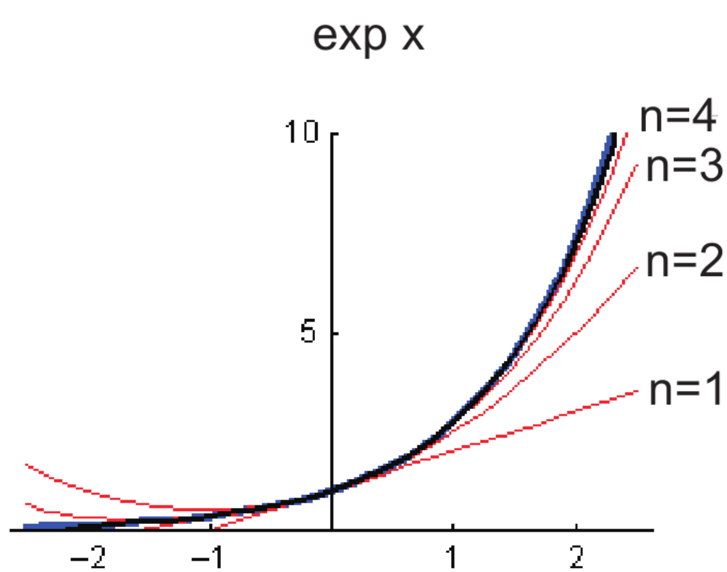
Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει $\boxed{\text{φραγμένη παράγωγο κάθε τάξης}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(x)$ για $x \in (a,\, b)$ και $\left|f^{(n)}(x)\right| < M \Rightarrow$

$$x,\, x_0 \in (a,\, b) \;\rightsquigarrow\; f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

Ανάπτυγμα Maclaurin

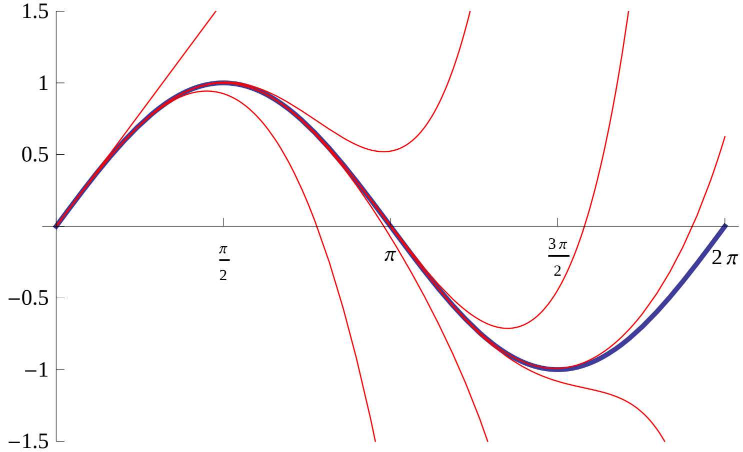
Ανάπτυγμα Maclaurin $\equiv$ Ανάπτυγμα Taylor για $x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$$



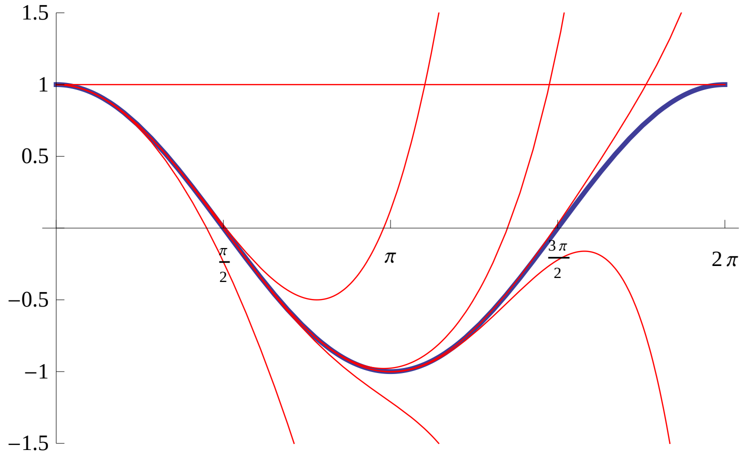
$$\exp x = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad |x| < \infty$$

sin x



$$\sin\, x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \;=\; \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}$$

cos x



$$\cos\, x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{x^{2n}}{(2n)!} \;=\; \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}$$

ΣΕΙΡΕΣ MACLAURIN

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad |x| < 1$$

$$\exp x = \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad |x| < \infty$$

$$\cosh x \equiv \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh x \equiv \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}$$

Ανάπτυγμα Taylor

Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει $\boxed{\text{φραγμένη παράγωγο κάθε τάξης}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(x)$ για $x \in (a,\, b)$ και $\left|f^{(n)}(x)\right| < M \Rightarrow$

$$x,\, x_0 \in (a,\, b) \;\rightsquigarrow\; f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

☐ *Απόδ*: Χρησιμοποιούμε το υπόλοιπο Lagrange, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} R_n(x) =& \frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) = \\ =& f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \end{aligned}$$

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x-\xi|^n}{n!}$$

$$a_n = \frac{|x-\xi|^n}{n!} \;\rightsquigarrow\; \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x-\xi|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Επομένως $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \rightsquigarrow R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \rightsquigarrow$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

☐

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Ορ. Δυναμοσειρά: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n}$

Ακτίνα σύγκλισης

$$\boxed{R = \sup\{|x - x_0| \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ συγκλίνει}\}}$$

$$\forall\, x \ : \ |x - x_0| < R \ \rightsquigarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ συγκλίνει}$$

Σημείωση Συνήθως (ΟΧΙ ΠΑΝΤΑ!!!) η ακτίνα σύγκλισης R βρίσκεται εφαρμόζοντας

- **είτε** το **κριτήριο του λόγου**

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x - x_0| < 1 \ \rightsquigarrow \ |x - x_0| < R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

- **είτε** το **κριτήριο της ρίζας**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\ |x - x_0| < 1 \ \rightsquigarrow \ |x - x_0| < R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $R = 1$ και $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$, $R = \infty$

Πρ:

Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει $\boxed{\text{φραγμένη παράγωγο κάθε τάξης}}$ $f^{(n)}(x)$ για $x \in (a,\, b)$ και $\left|f^{(n)}(x)\right| < M \Rightarrow$

$$x,\, x_0 \in (a,\, b) \;\rightsquigarrow\; \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!}\, f^{(k)}(x_0)}$$

☐ *Απόδ*: Χρησιμοποιούμε το υπόλοιπο Lagrange, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} R_n(x) =& \frac{(x-\xi)^n}{n!}\, f^{(n)}(\xi) = \\ =& f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!}\, f^{(k)}(x_0) \end{aligned}$$

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x-\xi|^n}{n!}$$

$$a_n = \frac{|x-\xi|^n}{n!} \;\rightsquigarrow\; \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x-\xi|}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Επομένως $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \rightsquigarrow R_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \rightsquigarrow$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

□

x_0 Τοπικό Ακρότατο
(Local Extremum)
$\exists\,\delta\ :\ |x - x_0| < \delta\ \rightsquigarrow$
$f(x) - f(x_0)$ έχει σταθερό πρόσημο

$\swarrow$ $\searrow$

Τοπικό Μέγιστο
(Local Maximum)

$$\boxed{\exists\,\delta : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \le f(x_0)}$$

Τοπικό Ελάχιστο
(Local Minimum)

$$\boxed{\begin{array}{c}\exists\,\delta : |x - x_0| < \delta \\ \Downarrow \\ f(x) \ge f(x_0)\end{array}}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

- ▷ $f(x)$ συνεχής γύρω από το x_0
- ▷ Υπάρχει το $f'(x_0)$ $\quad\Rightarrow f'(x_0) = 0$
- ▷ Το x_0 είναι τοπικό ακρότατο

ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT, απόδειξη

- $f(x)$ συνεχής γύρω από το x_0
- Υπάρχει το $f'(x_0)$ $\quad\Rightarrow f'(x_0) = 0$
- Το x_0 είναι τοπικό ακρότατο

Απόδειξη.

$$\exists\, f'(x_0) \;\Leftrightarrow\; g(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$$

$$\boxed{\left\{\text{Αν } \; f'(x_0) > 0\right\}} \;\Rightarrow\; \epsilon = \frac{f'(x_0)}{2} \;\exists\, \delta \;:$$

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \;\rightsquigarrow\; 0 < \frac{f'(x_0)}{2} < g(x, x_0)$$

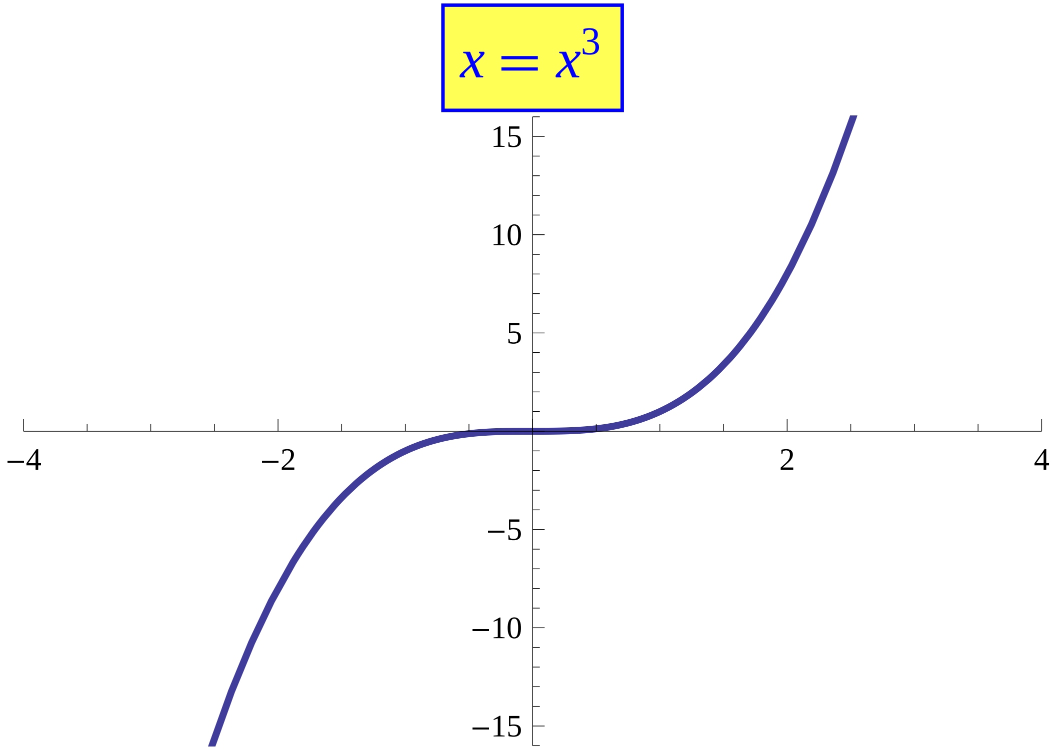
$$\left.\begin{array}{r} 0 < g(x, x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ x < x_0 \end{array}\right\} \rightsquigarrow\; f(x) - f(x_0) < 0$$

$$\left.\begin{array}{r} 0 < g(x, x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ x > x_0 \end{array}\right\} \rightsquigarrow\; f(x) - f(x_0) > 0$$

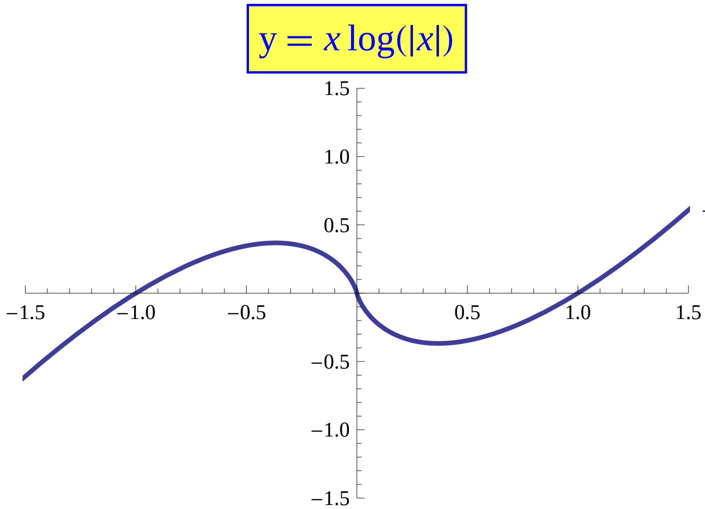
$\boxed{\text{Το } f(x_0) \text{ δεν είναι ακρότατο}}$.

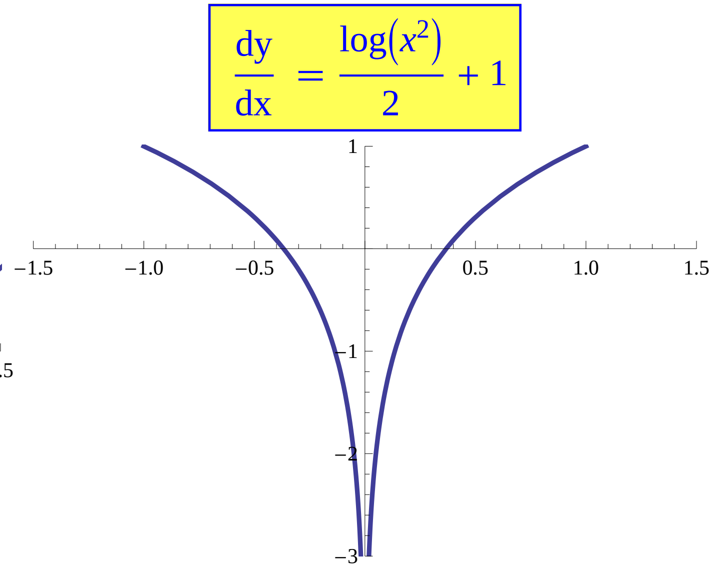
Το ίδιο συμβαίνει αν $f'(x_0) <$). Αρα $f'(x_0) = 0$. $\square$

$f'(0) = 0$ αλλά το $x_0 = 0$ δεν είναι extremum

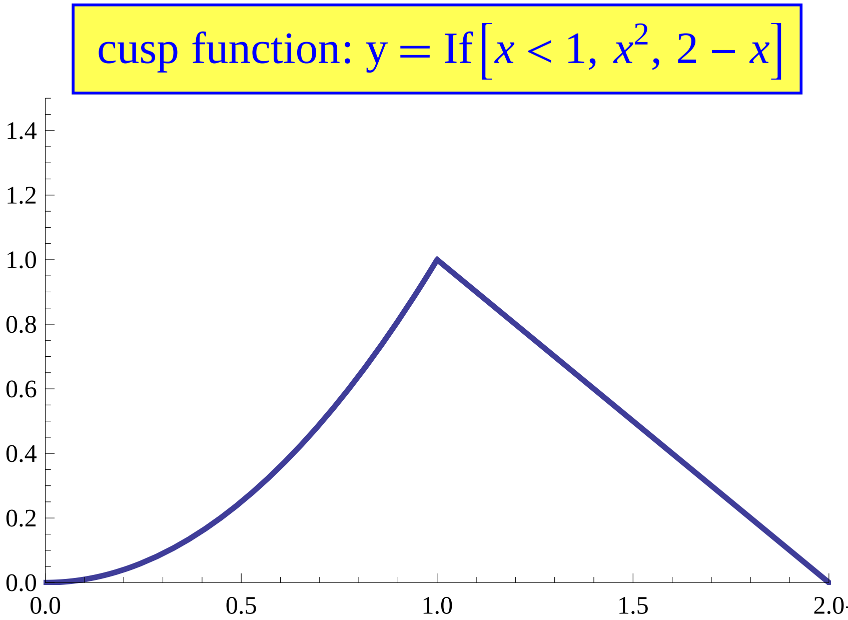


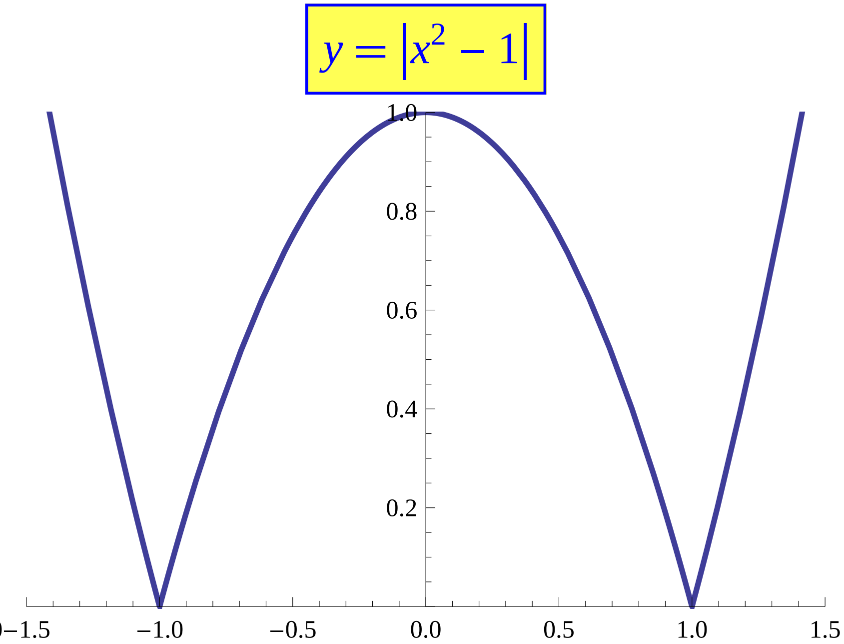
$f'(x_0)$ δεν ορίζεται, όχι extremum





$f'(x_0)$ δεν ορίζεται, υπάρχει extremum





x_0 κρίσιμο σημείο (critical point)

$$\Updownarrow$$

$f'(x_0) = 0$ $\boxed{\text{ή}}$ $f'(x_0)$ δεν υπάρχει

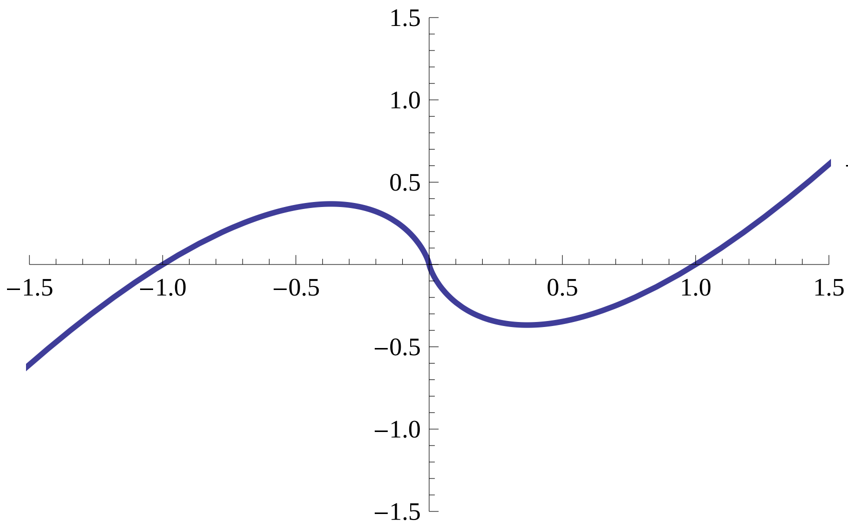
x_0 τοπικό μέγιστο

$$\Downarrow$$

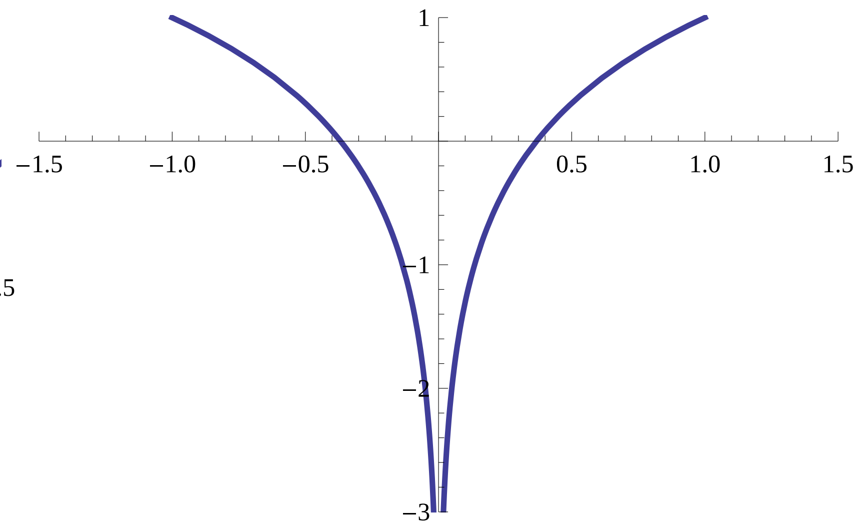
x_0 κρίσιμο σημείο

$\Rightarrow$ SOS Τα κρίσιμα σημεία $\boxed{\boxed{\text{δεν}}}$ ειναι πάντα τοπικά ακρότατα

$y = x \log(|x|)$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log(x^2)}{2} + 1$$



ΠΡΟΤΑΣΗ

$f(x)$ συνεχής στο $[a, b]$
$\forall x \in (a, x_0) \bigcup (x_0, b) \rightsquigarrow \exists f'(x)$

$$\exists \delta > 0 \ : x \in (x_0 - \delta, x_0) \rightsquigarrow f'(x) \geq 0$$
$$x \in (x_0, x_0 + \delta) \rightsquigarrow f'(x) \leq 0$$

$$\Downarrow$$

Το x_0 είναι τοπικό μέγιστο

ΠΡΟΤΑΣΗ "νιοστής παραγώγου"

$f(x)$ συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $[a, b]$
$x \in [a, b] \rightsquigarrow \exists f^{n-1}(x)$ και είναι συνεχής
$x \in (a, b) \rightsquigarrow \exists f^n(x)$
$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ $f^{(n)}(x)$ συνεχής γύρω από το x_0

$$\Downarrow$$

Αν n $\boxed{\text{άρτιος}}$ το x_0 είναι τοπικό μέγιστο
Αν $f^{(n)}(x_0) > 0$ τοπικό ελάχιστο
Αν $f^{(n)}(x_0) < 0$ τοπικό μέγιστο

ΠΡΟΤΑΣΗ "νιοστής παραγώγου"

$f(x)$ συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $[a,\, b]$
$x \in [a,\, b] \ \rightsquigarrow\ \exists\, f^{n-1}(x)$ και είναι συνεχής
$x \in (a,\, b) \ \rightsquigarrow\ \exists\, f^{n}(x)$
$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ $f^{(n)}(x)$ συνεχής γύρω από το x_0

$$\Downarrow$$

Αν n $\boxed{\text{άρτιος}}$ το x_0 είναι τοπικό μέγιστο
Αν $f^{(n)}(x_0) > 0$ τοπικό ελάχιστο
Αν $f^{(n)}(x_0) < 0$ τοπικό μέγιστο

Απόδειξη.

☐ *Απόδ*: Με τις προυποθέσεις ισχύει το ανάπτυγμα Taylor με υπόλοιπο Lagrange

$$\begin{aligned} f(x) = &\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + R_n(x) = \\ = &\ f(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad \xi \in (a,\, b) \end{aligned}$$

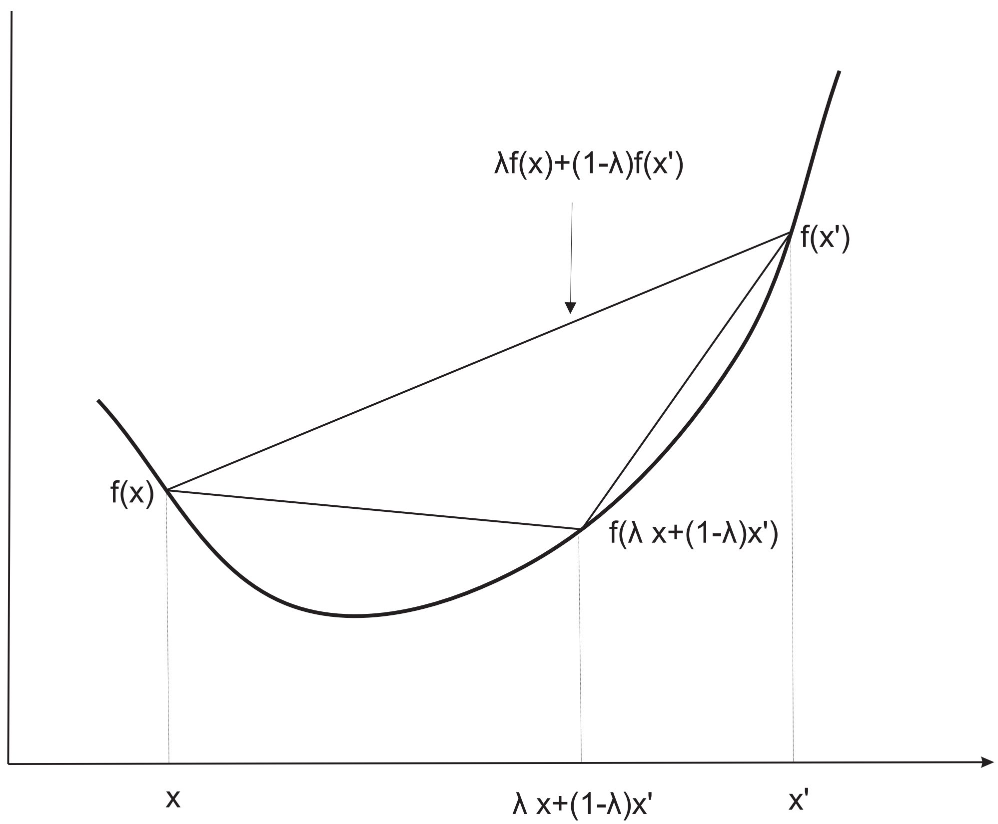
$n = 2k$. Αν $f^{(n)}(\xi) > 0$ τότε $f(x) - f(x_0) \geq 0$ άρα το x_0 τοπικό minimum. □

Ορισμός κυρτής συνάρτησης

$f(x)$ $\boxed{\text{κυρτή}}$ (convex)$\Leftrightarrow$

$$a \leq x < x' \leq b \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \;\rightsquigarrow$$

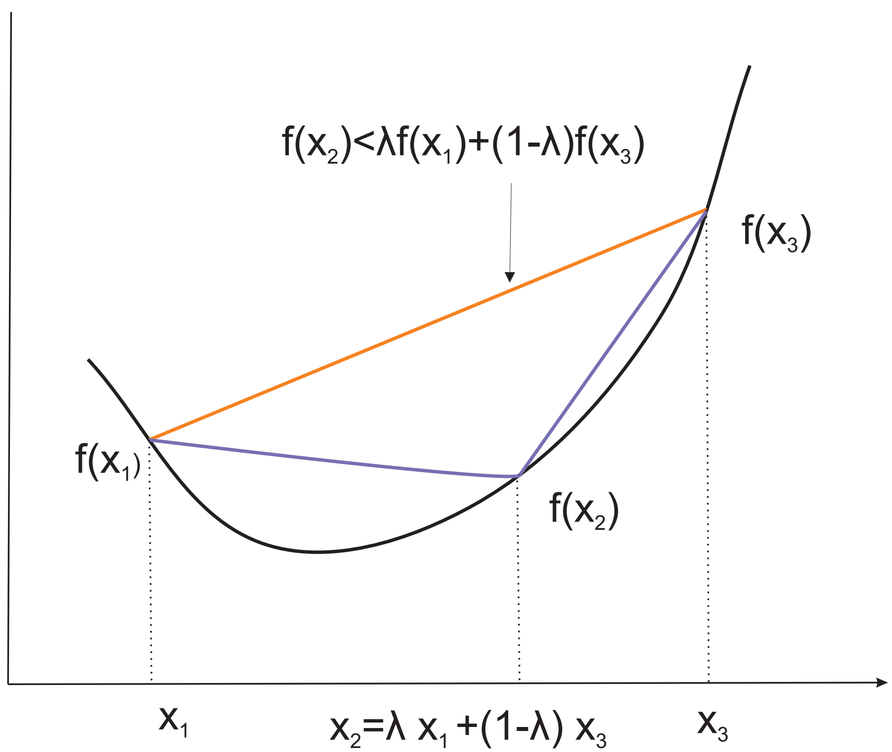
$$\boxed{f\left(\lambda x + (1-\lambda)x'\right) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')}$$



Πρ:

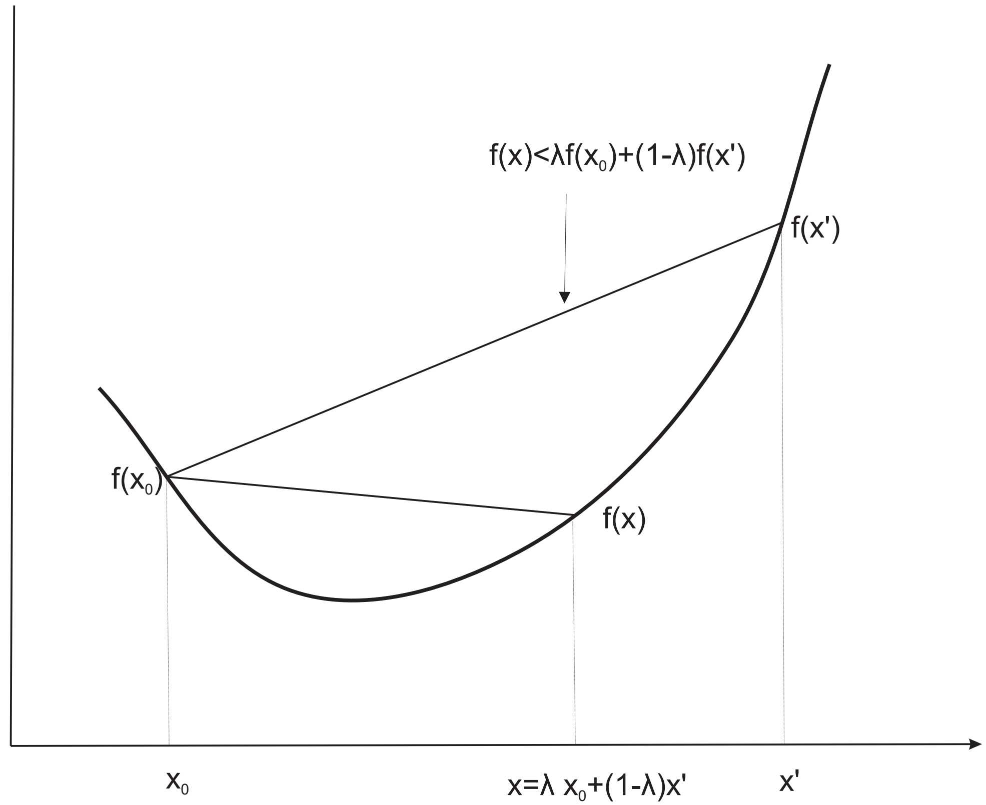
$$\boxed{f(x) \text{ κυρτή}} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} & x_1 < x_2 < x_3 \rightsquigarrow \\ & \qquad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \\ & \quad \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \end{aligned}}$$



Πρ:

$$f(x) \text{ κυρτή} \Leftrightarrow g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ είναι αύξουσα συνάρτηση.}$$



Πρ:

$$f(x) \text{ κυρτή} \Rightarrow f'_-(x) \leq f'_+(x)$$

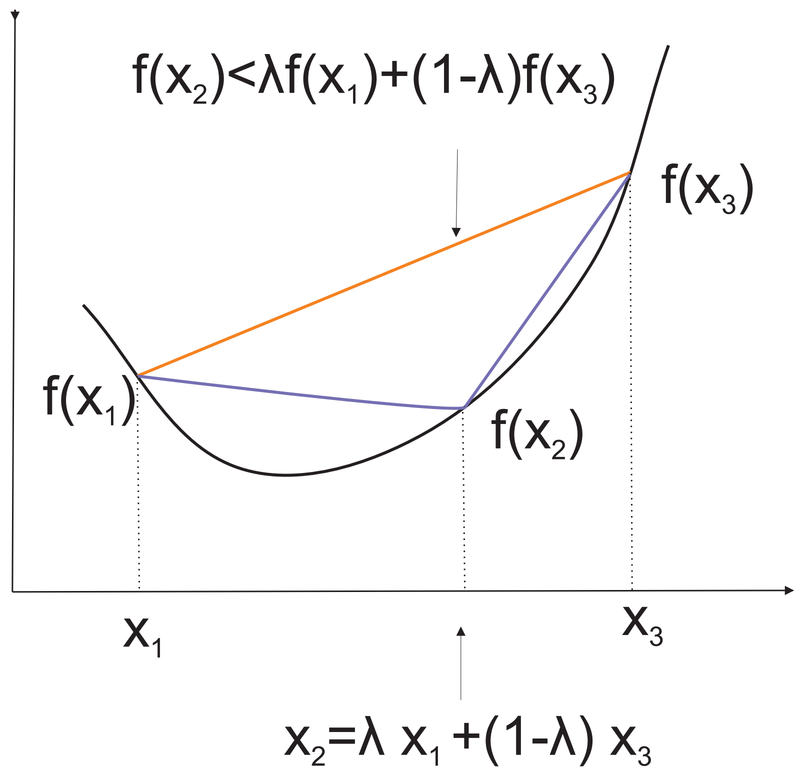
Πρ:

$$f(x) \text{ κυρτή} \Leftrightarrow f'(x) \text{ αύξουσα} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$$

Πρ:

$$\boxed{f(x) \text{ κυρτή}} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} & x_1 < x_2 < x_3 \ \rightsquigarrow \\ & \qquad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \\ & \qquad \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \end{aligned}}$$



$f(x)$ κυρτή $\Leftrightarrow f'(x)$ αύξουσα $\Leftrightarrow f''(x) \ge 0$

$f(x)$ κυρτή $\Rightarrow$

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq$$

$$\leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

$f(x)$ κυρτή $a_k > 0 \Rightarrow$

$$f\left(\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right) \leq$$

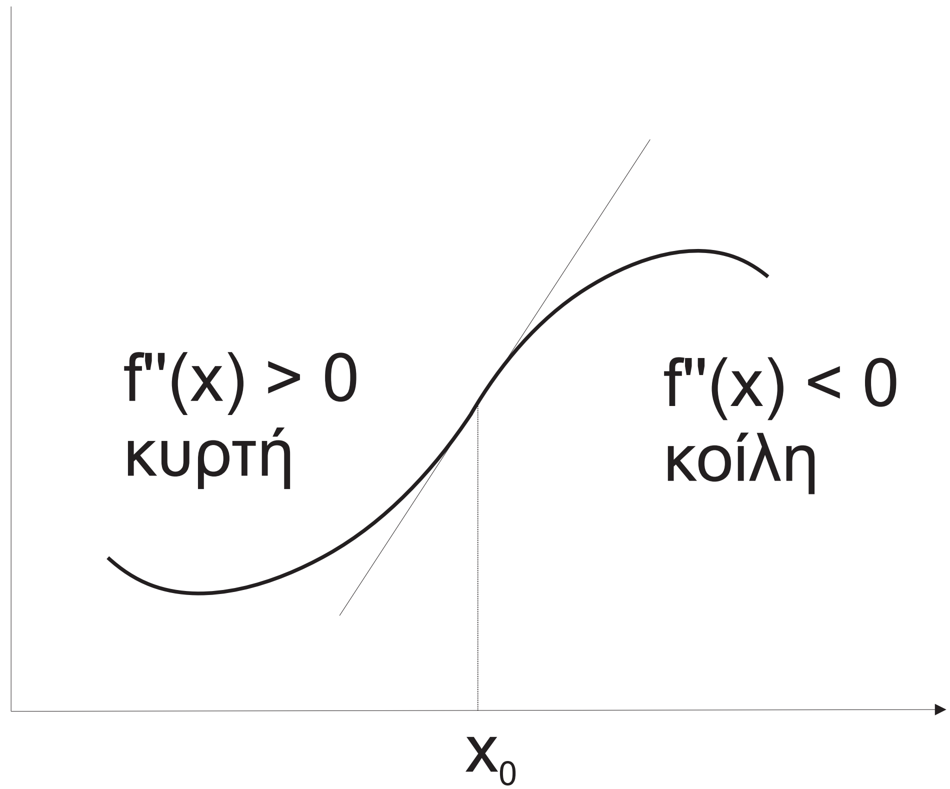
$$\leq \frac{a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+\cdots+a_nf(x_n)}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

$f(x) = \mathrm{e}^x \rightsquigarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ κυρτή

$a_k > 0 \Rightarrow$

$$\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n}$$

Σημείο καμπής (turning point) $\Leftrightarrow \quad f''(x_0 - h) \cdot f''(x_0 + h) < 0$



x_0 σημείο καμπής $\exists f''(x_0)$ $\Rightarrow \boxed{f''(x_0) = 0}$

(Σημ. το αντίστροφο δεν ισχύει)

Πρ:

$$\boxed{\begin{array}{c} f^{(n)}(x) \text{ συνεχής στο } (a,\, b) \\ f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \cdots = \\ \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ f^{(n)}(x_0) \neq 0 \\ n \text{ περιττός} \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x_0 \\ \text{σημείο} \\ \text{καμπής} \end{array}}$$