

ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι ΤΜΗΜΑ 1γ

ΘΕΜΑ 1ο: (1.5 β.) Δώστε τον ορισμό της ακολουθίας Cauchy. Δίνεται η ακολουθία

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

αποδείξτε ότι η ακολουθία αυτή δεν είναι ακολουθία Cauchy (μελετώντας την διαφορά $x_{2n} - x_n$) και επομένως δεν συγκλίνει.

Με ποιά άλλη μέθοδο μπορεί να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει;

ΘΕΜΑ 2ο: (1.5 β.) Να αποδειχθούν τα όρια των παρακάτω ακολουθιών

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\sqrt{n^2 + a} - n} = 0 \quad (b) k \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \frac{(\ln 2)^k + (\ln 3)^k + \dots + (\ln n)^k}{1 + 2^k + 3^k + \dots + n^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$
$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} = 0 \quad (d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n} + \sqrt[4]{n}} = 1$$

ΘΕΜΑ 3ο: (2.5 β.) Να μελετηθεί αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν και αν η σύγκλιση είναι απλή (κατ' εκδοχήν) ή απόλυτη

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \tanh n} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 3^n}{3^n + 5^n} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} (\ln n)^2}$$
$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + 4n^2)^{1/n}} \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^{2n} (n!)^2} \quad f) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

ΘΕΜΑ 4ο: (1.5) Η συνάρτηση $f(x)$ είναι μια συνάρτηση που έχει δεύτερη παράγωγο στο κλειστό διάστημα $[a, b]$. Επίσης $f(a) = f(b) = 0$ και υπάρχει $c \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(c) > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) < 0$.

ΘΕΜΑ 5ο: (1) Να βρεθούν τα όρια των συναρτήσεων

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right), \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \arctan \left[\frac{1}{1 + x^2} \right]$$

ΘΕΜΑ 6ο: (2 β.) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x|^{1/x}$, που ορίζεται για κάθε $x \neq 0$. Να υπολογίσετε το $f'(x)$ για $x \neq 0$. Να βρεθούν αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0-0} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Να βρεθούν τα τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα της συνάρτησης και να σχεδιαστεί το γράφημά της.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!