ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι / ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι $\boxed{\text{ΤΜΗΜΑ 1α}}$

11 Οκτωβρίου 2006

ΘΕΜΑ 1^o(1+1.5 βαθμ.)

(i) Χρησιμοποιώντας τον εψιλοντικό ορισμό αποδείξτε ότι αν $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell > 0$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\ell}$

(ii) Αποδείξτε ότι αν $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ και $A \cdot B \equiv \{z = xy, x \in A,\ y \in B\}$, έστω $\inf A > 0$ και $\inf B > 0$ τότε $\inf(A \cdot B) = (\inf A) \cdot (\inf B)$

ΘΕΜΑ 2^o (1.5 β.) Υπολογίστε την τιμή της 89ης παραγώγου για $x = 0$ της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$$

ΘΕΜΑ 3^o(1+0.5+0.25+0.75 βαθμ.)

(i) Αποδείξτε ότι $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

(ii) Αποδείξτε ότι $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}$

(iii) Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση αποδείξτε ότι $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$

(iv) Αποδείξτε ότι $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{18}$

(v) **Προαιρετικό θέμα:** Βρείτε ένα γενικό τύπο για την σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+k)}$
(αν λύσετε αυτό το θέμα μπορείτε να παραλείψετε ένα θέμα ισοδύναμο με 1.5 βαθμό)

ΘΕΜΑ 4^o (0.75 +0.75 βαθμ.)

(i) Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών

$$a)\ x_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \qquad b)\ x_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots \sqrt[n]{n}}{n} \qquad c)\ x_n = \left(\frac{n^3}{n^3+1}\right)^{n^3}$$

(ii) Να μελετηθεί αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν και αν η σύγκλιση είναι απλή (κατ' εκδοχήν) ή απόλυτη

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},\ p > 0 \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^m}{n!} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}\ p > 0$$

ΘΕΜΑ 5^o (2 β.) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = |x|^{1/x} \quad \text{γιά} \quad x \neq 0;$$

(i) Να βρεθούν τα όρια της $f(x)$ για $x \to \pm\infty$

(ii) Να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$

(iii) Να υπολογισθεί η $f'(x)$ για $x \neq 0$.

(iv) Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x)$ για $-\infty < x < \infty$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !
