

ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι / ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

ΤΜΗΜΑ 1α

19 Σεπτεμβρίου 2006

ΘΕΜΑ 1^ο (1+1 βαθμ.)

α) Χρησιμοποιώντας τον εψιλωντικό ορισμό αποδείξτε ότι αν $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = m > 0$

$$\text{τότε } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\ell}{m}$$

β) Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] = 1$. ($[a]$ = ακέραιο μέρος του $a \in \mathbb{R}$)

ΘΕΜΑ 2^ο (1.5 βαθμ.) Υπάρχει μόνο μια ρίζα για $x \in [-1, 1]$ για την εξίσωση $x^4 - 6x^2 + 20x + 1 = 0$

ΘΕΜΑ 3^ο (1.5 βαθμ.) Ορίζεται η ακολουθία x_n με αναδρομικό τρόπο

$$x_1 = 1 \text{ και } x_n = \frac{1}{3 + x_n}$$

Αποδείξτε ότι συγκλίνει και να βρεθεί το όριο της.

ΘΕΜΑ 4^ο (1 +1 βαθμ.)

α) Έστω $a_1 > a_2 > \dots > a_m > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = a_1$$

β) Να μελετηθεί αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν και αν η σύγκλιση είναι απλή (κατ' εκδοχήν) ή απόλυτη

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \tanh n} & \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{3^n + 7^n} \\ \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^2} & \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + 2^{n^2})^{1/n}} \end{array}$$

ΘΕΜΑ 5^ο (1.5 βαθμ.) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\cos 5x}{\cos x}$. Να υπολογισθεί η $f^{(4)}(0)$.

ΘΕΜΑ 6^ο (1.5 βαθμ.) Αποδείξτε ότι

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^c - 1}{x} = c, (c > 0) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x} = -\frac{1}{4} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + \ln 2}{x - \ln 2} \right)^x = 4 \end{array}$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !
