# ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι $\boxed{\text{ΤΜΗΜΑ 16}}$

*24 Ιανουαρίου 2005*

Τα θέματα 1, 2, 3 και 4 είναι υποχρεωτικά. Από τα θέματα 5 και 6 θα επιλέξετε 1 θέμα. Δηλαδή θα γράψετε ΜΟΝΟ 5 θέματα.

---

**ΘΕΜΑ 1$^o$** $(1.5 + 0.5 = 2$ β.)

**(α)** Να αποδειχθεί ότι η δυναμοσειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}\, x^n$$

συγκλίνει απόλυτα για $|x| < 1$, αποδείξτε ότι τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}\, x^n = -\frac{\ln(1-x)(1+x)+x}{x}$$

Αποδείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει για $|x| > 1$. Εξετάστε την σύγκλιση της σειράς για $x = 1$ και $x = -1$.

**(β)** Να μελετηθεί η σύγκλιση της ακολουθίας $a_n = \frac{n!}{n^n}$ για $n \to \infty$

**ΘΕΜΑ 2$^o$** $(0.5 + 0.25 + 0.5 + 0.75 = 2$ β.)

**(α)** Να μελετηθεί και να σχεδιασθεί η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ για $x \geq 0$.

**(β)** Να βρεθεί ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς

$$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[5]{5},\ \ldots,\ \sqrt[n]{n}, \ldots$$

<u>χωρίς να χρησιμοποιηθεί υπολογιστής για οποιονδήποτε υπολογισμό</u>.

**(γ)** Να αποδειχθεί ότι η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right) \cos(n\pi)$$

συγκλίνει.

**(δ)** Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ είναι συνάρτηση Lipschitz για $x \in \mathbb{R}$ και να αποδειχθεί ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής.

**ΘΕΜΑ 3$^o$** (2 β.) Υπολογίστε την τιμή της 23ης και της 24ης παραγώγου για $x = 0$ της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\cosh(3x)}{\cosh x}$$

**ΘΕΜΑ 4$^o$** (2 β.)

**(α)** Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^p$ είναι κυρτή για $p > 1$ και $x > 0$.

**(β)** Αποδείξτε ότι

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^{\frac{9}{8}} \leq \frac{x_1^{\frac{9}{8}}+x_2^{\frac{9}{8}}+x_3^{\frac{9}{8}}}{3}$$

**ΘΕΜΑ 5$^o$** (2 β.)

(I) Η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a,\, b]$. Εχει συνεχή πρώτη παράγωγο $f'(x)$ και ορίζεται η δεύτερη παράγωγος $f''(x)$ για κάθε $x \in (a,\, b)$. Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει τρείς ρίζες:

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0, \qquad a < x_1 < x_2 < x_3 < b$$

Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα $\xi \in (a,\, b)$ όπου μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγος $f''(\xi) = 0$. Ισχύει το αντίστροφο;

(II) Αν $A$ και $B$ είναι φραγμένα σύνολα να αποδείξετε ότι $\sup{(A+B)} \;=\; \sup\, A + \sup\, B$

**ΘΕΜΑ 6$^o$** (2 β.)

**(I)** Εστω $\alpha \neq 0$ ένας πραγματικός αριθμός. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι έχει τις ακόλουθες ιδότητες:

$$f(1) = \alpha, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

για κάθε $x$ και $y$. Αποδείξτε τα εξής:

**(α)** $f(nx) = nf(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

**(β)** $f(1/m) = \alpha/m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$

**(γ)** $f(\rho) = \alpha\rho$ για κάθε $\rho$ θετικό ρητό αριθμό

**(δ)** $f(0) = 0$ και $f(-x) = -f(x)$

**(ε)** Αποδείξτε ότι $f(x) = \alpha x$ για κάθε $x$ θετικό ή αρνητικό πραγματικό αριθμό.

**(II)** Αν $A$ και $B$ είναι φραγμένα σύνολα να αποδείξετε ότι $\inf{(A+B)} \;=\; \inf\, A + \inf\, B$

---

*ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !*

**ΠΡΟΣΟΧΗ**: Στο γραπτό σας να υπάρχει πλήρης δικαιολόγιση του σκεπτικού που χρησιμοποιείτε, με αναφορά στα θεωρήματα που είναι αναγκαία για την απόδειξη των θεμάτων και των σχέσεων-ταυτοτήτων που είναι αναγκαίες. Η βαθμολόγιση του γραπτού θα στηριχθεί στην σαφήνεια και την πληρότητα των χρησιμοποιούμενων συλλογισμών και υπολογισμών

---

**Χρήσιμοι τύποι**:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad e = 2.71828$$

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=}^{\infty} t^n \quad \text{για} \quad |t| < 1, \qquad \frac{a^3+b^3}{a+b} = a^2 - ab + b^2 \qquad \ln{(1-x)} \;=\; -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad |x| < 1$$