ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, Τμημα β+γ, Χειμ. εξαμ. 2011

Ασκήσεις, Φυλλαδιο 7

1. Δειξετε οτι η συναρτηση $f:(0,1]\to\mathbb{R}$, με $f(x)=\sin(\frac{1}{x})$ δεν ειναι ομοιομορφα συνεχης.

2. Εξετασετε αν οι συναρτησεις ειναι παραγωγισιμες στο σημειο $a=0$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}), & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x)}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0,\end{cases}\qquad h(x)=x|x|.$$

3. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγισιμη με $f'(x)=f(x)$ για καθε $x\in\mathbb{R}$. Δειξετε οτι υπαρχει $c\in\mathbb{R}$ ωστε $f(x)=ce^x$ για καθε $x\in\mathbb{R}$.

4. Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ειναι παραγωγισιμη στο $c\in(a,b)$ δειξετε οτι $\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c-h)}{2h}=f'(c)$.

5. Βρειτε τη μεγιστη τιμη της συναρτησης $f(x)=x^n(1-x)^m$ στο διατημα $[0,1]$, οπου $n,m\in\mathbb{N}$ και $n,m\geq 2$.

6. Εστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχης στο $[a,b]$ και παραγωγισιμη στο (a,b), με $f(a)=f(b)$. Δειξετε οτι υπαρχουν $x_1,x_2\in(a,b)$ με $x_1\neq x_2$ ωστε $f'(x_1)+f'(x_2)=0$.

7. Εστω $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγισιμη με $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$. Δειξετε οτι $\lim_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))=0$.

8. Εστω $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγισιμη συναρτηση για την οποια ισχυει $f'(x)=\frac{1}{x}$ για καθε $x\in(0,\infty)$ και $f(1)=0$. Δειξετε οτι $f(xy)=f(x)+f(y)$ για καθε $x,y\in(0,\infty)$.

9. Αν $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ ειναι συνεχης και το οριο $\lim_{x\to\infty}f(x)$ υπαρχει και ειναι πεπερασμενο, δειξετε οτι η f ειναι φραγμενη στο $[0,\infty)$.

10. Αν $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ειναι συνεχης και $x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$ δειξετε οτι υπαρχει $x_0\in(a,b)$ ωστε $f(x_0)=\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$.

11. Δειξετε οτι η συναρτηση $f(x)=[x]\sin^2(\pi x)$ ειναι παραγωγισιμη σε καθε $x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)=\pi[x]\sin(2\pi x)$.

12. Εστω $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγισιμη συναρτηση με $f(1)=0$, για την παραγωγο της οποιας ισχυει $|f'(x)|\leq 2x$ για καθε $x>1$. Δειξετε οτι $|f(x)|<2x^2$ για καθε $x>1$.

13. Δειξετε οτι η συναρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})}-\frac{1}{x}, & 0<x\leq\pi,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ ειναι παραγωγισιμη σε καθε $x\in[0,\pi]$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^x$, $x>0$ και f^{-1} η αντιστροφη συναρτηση. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{d\,f^{-1}(z)}{d\,z}=\frac{f^{-1}(z)}{z\,(1+f^{-1}(z))},\ \text{γιά } z>0$$

15. Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ειναι συνεχης και $f'(x)=0$ για καθε $x\in(a,b)$ τότε η f είναι σταθερή. Εφαρμογή:

(a) $\arctan x+\operatorname{arccot}x=\dfrac{\pi}{2}$, (b) $\arcsin\dfrac{x-1}{x+1}=2\arctan\sqrt{x}-\dfrac{\pi}{2}$, (c) $2\arcsin x=\arccos(1-2x^2)$ για $x\geq 0$.

16. Δίνεται μία καμπύλη στο επίπεδο (x,y) υπό παραμετρική μορφή $x=\sinh t$ $y=\cosh t$. Να υπολογισθούν οι παράγωγοι $\dfrac{dy}{dx}$ και $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ σαν συναρτήσεις του t.

17* (α) Δειξετε οτι η συναρτηση $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0,\end{cases}$ ειναι απειρες φορες παραγωγισιμη στο $a=0$.

(β) Δειξετε οτι η συναρτηση $g(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}}, & x\in(0,1),\\ 0, & x\in(-\infty,0]\cup[1,\infty),\end{cases}$ ειναι απειρες φορες παραγωγισιμη σε καθε $x\in\mathbb{R}$.