ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι: ΑΣΚΗΣΗ 5

Ασκηση 1: Να βρεθούν τα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{[x]}{x}$. Να υπολογισθεί το όριο $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Ασκηση 2: Αποδείξτε ότι υπάρχει κάποιο $x \in (0,\, 1)$ που είναι λύση της εξίσωσης $x2^x = 1$

Ασκηση 3: Αποδείξτε ότι για $x > 0$, $\arctan \frac{1}{2x^2} = \arctan \frac{x}{x+1} - \arctan \frac{x-1}{x}$ για ότι για $x < 0$ $\arctan \frac{1}{2x^2} = \arctan \frac{x}{x+1} - \arctan \frac{x-1}{x} + \pi$

(Σημείωση: Δείξτε ότι η παράγωγος του αριστερού μέρους της εξίσωσης είναι ίση με την παράγωγο του δεξιού μέλους και υπολογίστε τις τιμές και των δύο μερών για $x \to \pm\infty$.)

Ασκηση 4: Αν $f(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση και $f(x) = 0$ αν $x \in \mathbb{Q}$, αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow f(x) = 0$

Ασκηση 5: Αν $f(x)$ συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $[a,\, b]$ και $a + b \neq 0$ τότε υπάρχει $c \in [a,\, b]$ τέτοιο ώστε $af(a) + bf(b) = (a + b)f(c)$

Ασκηση 6: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{Αν } x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & \text{Αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής μόνο στα σημεία $x = 0, 1$ και ότι είναι παραγωγίσιμη μόνο στο σημείο 0.

(Σημείωση: Χρησιμοποιείστε για την απόδειξη τους ορισμούς Heine)

Επιστροφή των ασκήσεων την Παρασκευή 11 Δεκ. 2009