

ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι : ΑΣΚΗΣΗ 3

Άσκηση 1: (α') Αποδείξτε ότι για μεγάλα x ισχύει $x^x > e^{2x}$

(β') Αποδείξτε ότι για μεγάλα $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $(\ln n)^{\ln n} > n^2$

(γ') Αποδείξτε ότι η ακολουθία $x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$

Άσκηση 2: Ορίζουμε την συνάρτηση $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x \frac{x^n - n}{x^n + n}$. Αποδείξτε ότι

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } |x| < 1 \\ -x & \text{αν } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Άσκηση 3: Δίνεται η ακολουθία που ορίζεται με την αναδρομική σχέση

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_{n+1} &= 1 + \frac{1}{x_n} \end{aligned}$$

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει και να βρεθεί το όριό της.

Άσκηση 4: Δίνεται η ακολουθία που ορίζεται με την αναδρομική σχέση

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_{n+1} &= \sqrt{3x_n - 2} \end{aligned}$$

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει και να βρεθεί το όριό της.

Άσκηση 5: Να βρεθούν τα όρια των παρακάτω ακολουθιών για $n \rightarrow \infty$:

$$(i) n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (ii) \frac{(2n)!}{5^n(n!)^2}, \quad (iii) \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{5^n(n!)^2}}$$

Επιστροφή των ασκήσεων την Δευτέρα 20 Νοε. 2009