Κεφάλαιο 1

Αριθμοί και Ακολουθίες

Μερικοί συμβολισμοί που θα χρησιμοποιούμε πολύ συχνά:
$\mathbb{R}$ Το σύνολο των πραγματικών αριθμών.
$\mathbb{Q}$ Το σύνολο των ρητών αριθμών.
$\mathbb{Z}$ Το σύνολο των ακεραίων αριθμών.
$\mathbb{N}$ Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\{1, 2, \dots\}$.

1.1 Πραγματικοί αριθμοί

Έστω $E \subset \mathbb{R}$. Το E ονομάζεται **άνω φραγμένο** αν υπάρχει αριθμός $b \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$\forall x \in E, \quad x \leq b.$$

Κάθε τέτοιος αριθμός b ονομάζεται **άνω φράγμα** τού E. Ο αριθμός $M \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **μέγιστο** τού E αν είναι άνω φράγμα τού E και $M \in E$. Αν το E είναι άνω φραγμένο, τότε έχει πολλά άνω φράγματα. Αν έχει μέγιστο, αυτό είναι μοναδικό. Το μέγιστο τού E συμβολίζεται με $\max E$.

Το E ονομάζεται **κάτω φραγμένο** αν υπάρχει αριθμός $a \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$\forall x \in E, \quad x \geq a.$$

Κάθε τέτοιος αριθμός a ονομάζεται **κάτω φράγμα** τού E. Ο αριθμός $m \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **ελάχιστο** τού E αν είναι κάτω φράγμα τού E και $m \in E$. Το ελάχιστο τού E συμβολίζεται με $\min E$. Το E ονομάζεται **φραγμένο** αν είναι άνω και κάτω φραγμένο.

Παράδειγμα 1.1.1. Το σύνολο $= (0, 1] \cup (2, 3]$ είναι φραγμένο σύνολο και ισχύει $\max E = 3\cdot$ το E δεν έχει ελάχιστο.

Παράδειγμα 1.1.2. Το σύνολο $(-\infty, 2)$ δεν είναι κάτω φραγμένο είναι άνω φραγμένο αλλά δεν έχει μέγιστο.

Παράδειγμα 1.1.3. Το $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο και $\min \mathbb{N} = 1$. Κάθε μη κενό υποσύνολο τού $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών ικανοποιεί το παρακάτω αξίωμα:

— *Αξίωμα της πληρότητας* —

Έστω E ένα μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Το σύνολο των άνω φραγμάτων τού E έχει ελάχιστο.

Ορισμός 1.1.4. Αν E είναι ένα μη κενό, άνω φραγμένο σύνολο, το ελάχιστο άνω φράγμα του (που υπάρχει λόγω τού αξιώματος της πληρότητας) ονομάζεται **supremum** ή **άνω πέρας** τού E και συμβολίζεται με $\sup E$. Αν το E είναι μη κενό αλλά δεν είναι άνω φραγμένο, ορίζουμε $\sup E = +\infty$. Τέλος για το κενό σύνολο ορίζουμε $\sup \varnothing = -\infty$.

Πρόταση 1.1.5. *Έστω E ένα μη κενό, κάτω φραγμένο υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Το σύνολο των κάτω φραγμάτων τού E έχει μέγιστο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $-E = \{-x : x \in E\}$. Το $-E$ είναι άνω φραγμένο· έστω $S = \sup(-E)$. Θα δείξουμε ότι το $-S$ είναι κάτω φράγμα τού E. Έστω $x \in E$. Τότε $-x \in -E$. Επειδή $S = \sup(-E)$, ισχύει $-x \leq S$. Άρα $x \geq -S$, δηλαδή το $-S$ είναι κάτω φράγμα τού E. Τέλος αποδεικνύουμε ότι το $-S$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα τού E. Έστω a ένα κάτω φράγμα του E. Τότε το $-a$ είναι άνω φράγμα τού $-E$. Επειδή $S = \sup(-E)$, ισχύει $S \leq -a$, δηλαδή $a \leq -S$. □

Ορισμός 1.1.6. Αν E είναι ένα μη κενό, κάτω φραγμένο σύνολο, το μέγιστο κάτω φράγμα του (που υπάρχει λόγω τής Πρότασης 1.1.5) ονομάζεται **infimum** ή **κάτω πέρας** τού E και συμβολίζεται με $\inf E$. Αν το E είναι μη κενό αλλά δεν είναι κάτω φραγμένο, ορίζουμε $\inf E = -\infty$. Επίσης ορίζουμε $\inf \varnothing = +\infty$.

Παρατήρηση 1.1.7. Ένα υποσύνολο τού $\mathbb{R}$ μπορεί να μην έχει μέγιστο ή ελάχιστο· όμως κάθε υποσύνολο τού $\mathbb{R}$ έχει supremum και infimum. Αν ένα σύνολο E έχει μέγιστο τότε $\max E = \sup E$· αν το E έχει ελάχιστο, τότε $\min E = \inf E$.

Πρόταση 1.1.8 (Αρχιμήδεια ιδιότητα τού $\mathbb{R}$). (α) *Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο.*

(β) *Αν x, y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $nx > y$.*

Απόδειξη. (α) Έστω ότι το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο. Τότε $S := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Ο αριθμός $S-1$ δεν είναι άνω φράγμα τού $\mathbb{N}$· άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $S-1 < m$, δηλαδή $S < m+1 \in \mathbb{N}$. Άτοπο.

(β) Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση είναι ψευδής, δηλαδή $nx \leq y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε ο αριθμός y/x είναι άνω φράγμα τού $\mathbb{N}$, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με το (α). □

Παράδειγμα 1.1.9. Έστω $E = \mathbb{N} \cup \{-1 + n^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$. Το E δεν είναι άνω φραγμένο· άρα $\sup E = +\infty$. Επίσης $\inf E = -1$. Το E δεν έχει ούτε ελάχιστο, ούτε μέγιστο.

Παράδειγμα 1.1.10. Αν $E = (0,1) \cup \{2^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\}$, τότε $\sup E = \max E = 2$ και $\inf E = 0$. Το E δεν έχει ελάχιστο.

Πρόταση 1.1.11. (α) *Αν E είναι ένα μη κενό, άνω φραγμένο σύνολο και $S \in \mathbb{R}$, τότε*

$$S = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E, \quad x \leq S, \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in E \text{ τέτοιο ώστε } a > S - \varepsilon. \end{cases} \tag{1.1}$$

(β) *Αν E είναι ένα μη κενό, κάτω φραγμένο σύνολο και $s \in \mathbb{R}$, τότε*

$$s = \inf E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E, \quad x \geq s, \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists b \in E \text{ τέτοιο ώστε } b < s + \varepsilon. \end{cases} \tag{1.2}$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο το (α). Η απόδειξη τού (β) είναι παρόμοια. Έστω ότι $S = \sup E$. Τότε το S είναι άνω φράγμα τού E. Άρα $\forall x \in E$, $x \leq S$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή το S είναι το ελάχιστο άνω φράγμα τού E, ο αριθμός $S - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του E. Άρα υπάρχει $a \in E$ με $a > S - \varepsilon$.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε: (i) $\forall x \in E$, $x \leq S$ και (ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in E$ τέτοιο ώστε $a > S - \varepsilon$. Η (i) λέει ότι το S είναι άνω φράγμα τού E. Ας υποθέσουμε ότι το S δεν είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του E. Τότε υπάρχει ένα άνω φράγμα S' τού E με $S' < S$. Θέτουμε $\varepsilon = S - S'$. Λόγω της (ii) $\exists a \in E$ τέτοιο ώστε $a > S - \varepsilon = S'$. Άτοπο διότι το S' είναι άνω φράγμα τού E. Άρα $S = \sup E$. □

Πρόταση 1.1.12. *Αν E είναι ένα μη κενό σύνολο, τότε υπάρχουν ακολουθίες $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ και $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ τέτοιες ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup E \quad \textit{και} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \inf E.$$

Απόδειξη. Πρώτα εξετάζουμε την περίπτωση που το E δεν είναι κάτω φραγμένο. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $b_n \in E$ με $b_n \leq -n$. Άρα $b_n \to -\infty = \inf E$.

Υποθέτουμε τώρα ότι το E είναι κάτω φραγμένο. Έστω $s := \inf E \in \mathbb{R}$. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.1.11 (β) για $\varepsilon = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ και βρίσκουμε αριθμούς $b_n \in E$ με $b_n < s + \frac{1}{n}$. Επειδή $s = \inf E$ και $b_n \in E$, έχουμε $s \leq b_n$. Άρα

$$s \leq b_n < s + \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} b_n = s$.

Η απόδειξη για το $\sup E$ είναι παρόμοια. □

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό υποσύνολο τού $\mathbb{R}$, δηλαδή $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$· το ίδιο ισχύει και για το σύνολο των άρρητων αριθμών $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Θεώρημα 1.1.13. (α) *Αν $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$, τότε υπάρχουν $q \in \mathbb{Q}$ και $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $q, r \in (a, b)$.*

(β) *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία $\{q_n\} \subset \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} q_n = a$.*

(γ) *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία $\{r_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} r_n = a$.*

Απόδειξη. (α) Εφαρμόζοντας την Πρόταση 1.1.8 για $x = b - a$ και $y = 1$, βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ με $n(b - a) > 1$, δηλαδή $nb - na > 1$. Επειδή οι αριθμοί na, nb έχουν διαφορά μεγαλύτερη τού 1, θα υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ με $na < m < nb$, δηλαδή $a < m/n < b$. Άρα για το ρητό αριθμό $q := m/n$ ισχύει $q \in (a, b)$. Για να βρούμε άρρητο στο (a, b) εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.1.8 για $x = (b - a)\sqrt{2}$ και $y = 1$ και εργαζόμαστε όπως παραπάνω.

(β) Εφαρμόζοντας το (α) για $b = a + \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}$, βρίσκουμε μιά ακολουθία ρητών $\{q_n\}$ με $a < q_n < a + \frac{1}{n}$. Προφανώς $q_n \to a$.

(γ) Η απόδειξη είναι παρόμοια με τού (β). □

Ορισμός 1.1.14. Έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μιά συνάρτηση. Ορίζουμε το *supremum* και το *infimum* της f στο E με τις ισότητες

$$\sup_{x\in E} f(x) = \sup\{f(x) : x \in E\} \quad \text{και} \quad \inf_{x\in E} f(x) = \inf\{f(x) : x \in E\}.$$

Χρησιμοποιούμε επίσης τους συμβολισμούς $\sup_E f$ και $\inf_E f$. Ειδικά για ακολουθίες $\{a_n\}$ χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς

$$\sup_n a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{και} \quad \inf_n a_n := \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Αν η συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ έχει μέγιστο (ελάχιστο), τότε ισχύει η ισότητα $\max_E f(x) = \sup_E f(x)$ ($\min_E f(x) = \inf_E f(x)$). Όπως είναι γνωστό από το Λογισμό, κάθε συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα έχει μέγιστο και ελάχιστο.

Παράδειγμα 1.1.15. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η f έχει μέγιστο στο 0. Άρα $\sup_{\mathbb{R}} f(x) = \max_{\mathbb{R}} f(x) = f(0) = 1$. Επειδή $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, ισχύει $\inf_{\mathbb{R}} f(x) = 0$. Η f δεν έχει ελάχιστο.

Παράδειγμα 1.1.16. Για τη συνάρτηση

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3}, \quad x \in [-3, \sqrt{3}]$$

ισχύει

$$\sup_{x\in[-3,\sqrt{3}]} f(x) = \max_{x\in[-3,\sqrt{3}]} f(x) = f(-3) = 6$$

και

$$\inf_{x\in[-3,\sqrt{3}]} f(x) = \min_{x\in[-3,\sqrt{3}]} f(x) = f(-1) = -\frac{2}{3}.$$

Παράδειγμα 1.1.17. Η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$, $x \in (0, \infty)$ είναι φθίνουσα. Άρα

$$\sup_{x\in(0,\infty)} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = 1,$$

$$\inf_{x\in(0,\infty)} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Παράδειγμα 1.1.18. Για την ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$\sup_n a_n = \max_n a_n = 1 \quad \text{και} \quad \inf_n a_n = 0.$$

Για την ακολουθία $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$\sup_n a_n = \max_n a_n = \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \inf_n a_n = \min_n a_n = -1.$$

Πρόταση 1.1.19. *Αν $f\colon E \to \mathbb{R}$ είναι μιά συνάρτηση, $\xi \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ένα σημείο συσσώρευσης τού E και αν τό όριο $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει, τότε*

$$\inf_E f \le \lim_{x\to\xi} f(x) \le \sup_E f. \tag{1.3}$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in E$, ισχύει

$$\inf_E f \le f(x) \le \sup_E f.$$

Παίρνουμε το όριο για $x \to \xi$ και προκύπτει η (1.3). □

Θεώρημα 1.1.20. (α) *Αν $\{a_n\}$ είναι μιά αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n a_n.$$

(β) *Αν $\{b_n\}$ είναι μιά φθίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \inf_n a_n.$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το (α)· η απόδειξη του (β) είναι παρόμοια.

Υποθέτουμε πρώτα ότι η $\{a_n\}$ δεν είναι άνω φραγμένη. Έστω $M > 0$. Υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_{n_o} > M$. Επειδή η $\{a_n\}$ είναι αύξουσα, $a_n > M$ για κάθε $n \geq n_o$. Άρα $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty = \sup_n a_n$.

Αν η $\{a_n\}$ είναι άνω φραγμένη, τότε $\sup_n a_n = S \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω της Πρότασης 1.1.11, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_{n_o} > S - \varepsilon$. Επειδή η $\{a_n\}$ είναι αύξουσα, ισχύει $S \geq a_n > S - \varepsilon,\ \forall n \geq n_o$, δηλαδή $|a_n - S| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_o$. Άρα $\lim_{n\to\infty} a_n = S$. □

Θεώρημα 1.1.21 (Αρχή τού κιβωτισμού). *Αν $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, είναι κλειστά διαστήματα με $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing$. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, τότε η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ περιέχει ακριβώς ένα σημείο.*

Απόδειξη. Ισχύει $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, λόγω και τού Θεωρήματος 1.1.20, υπάρχουν τα όρια

$$a := \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n a_n \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad b := \lim_{n\to\infty} b_n = \inf_n b_n \in \mathbb{R},$$

και μάλιστα ισχύει $a \leq b$. Θα δείξουμε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b]$. Πράγματι, αν $x \in I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε $a_n \leq x \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και επομένως $a \leq x \leq b$. Αντιστρόφως, αν $x \in [a, b]$, τότε $x \in [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Τέλος, αν ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, τότε $a = b$. Άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$. □

1.2 Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα

Ορισμός 1.2.1. Δύο σύνολα A, B ονομάζονται **ισοδύναμα** αν υπάρχει συνάρτηση $f : A \to B$ πού είναι $1-1$ και επί. Αν τα A, B είναι ισοδύναμα σύνολα, γράφουμε $A \sim B$.

Είναι προφανές ότι αν η $f : A \to B$ είναι $1-1$ συνάρτηση, τότε το A είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο τού B. Επίσης αποδεικνύεται εύκολα ότι η σχέση $\sim$ είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

Παράδειγμα 1.2.2. Ισχύει $\mathbb{R} \sim (-\pi/2, \pi/2)$ διότι η συνάρτηση $x \mapsto \tan^{-1} x$ απεικονίζει αμφιμονότιμα το $\mathbb{R}$ επί τού $(-\pi/2, \pi/2)$.

Πρόταση 1.2.3. *Αν $f\colon A \to B$ είναι μιά συνάρτηση, τότε το $f(A)$ είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο τού A.*

Απόδειξη. Έστω $y \in f(A)$. Τότε το σύνολο $f^{-1}(\{y\})$ είναι μη κενό. Επιλέγουμε ένα στοιχείο του x και ορίζουμε $g(y) := x$. Έτσι ορίζεται μια $1-1$ συνάρτηση $g\colon f(A) \to A$. Έστω $A_1 := g(f(A)) \subset A$. Η g είναι $1-1$ συνάρτηση τού $f(A)$ επί τού A_1. Άρα $f(A) \sim A_1$. □

Πόρισμα 1.2.4. *Αν η συνάρτηση $f\colon A \to B$ είναι επί, τότε το B είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο τού A.*

Ορισμός 1.2.5. Ένα σύνολο A ονομάζεται **πεπερασμένο** αν $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ή αν $A = \varnothing$. Αλλιώς το A ονομάζεται **άπειρο**. Ένα σύνολο A ονομάζεται **αριθμήσιμο** αν $A \sim \mathbb{N}$. Ένα σύνολο πού δεν είναι ούτε πεπερασμένο ούτε αριθμήσιμο ονομάζεται **υπεραριθμήσιμο**. Αν ένα σύνολο είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο τότε λέμε ότι είναι **το πολύ αριθμήσιμο**.

Παράδειγμα 1.2.6. Το $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο. Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ με

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{αν } n \geq 1, \\ -2n+1 & \text{αν } n \leq 0. \end{cases}$$

Η f είναι 1-1 και επί. Άρα $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 1.2.7. Κάθε φυσικός αριθμός k γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $k = 2^{m-1}(2n-1)$, όπου m, n κατάλληλοι φυσικοί. Ορίζουμε $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $f(m,n) = 2^{m-1}(2n-1)$. Λόγω της παραπάνω παρατήρησης η f είναι επί. Εύκολα φαίνεται ότι είναι και $1-1$. Άρα $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

Πρόταση 1.2.8. *Αν $A \subset \mathbb{N}$ και A άπειρο, τότε $A \sim \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Το A είναι άπειρο, άρα μη κενό. Έστω $x_1 = \min A$. Το $A \setminus \{x_1\}$ είναι μη κενό. Έστω $x_2 = \min(A \setminus \{x_1\})$. Το $A \setminus \{x_1, x_2\}$ είναι μη κενό. Συνεχίζοντας επαγωγικά βρίσκουμε $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \in A$ με $x_n = \min(A \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\})$. Επειδή το A είναι άπειρο, το σύνολο $\{x_1, x_2, \dots\}$ είναι επίσης άπειρο και επομένως μη φραγμένο.

Θα δείξουμε ότι $A = \{x_1, x_2, \dots\}$. Έστω $x \in A \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$. Υπάρχει ένα τουλάχιστον x_k με $x_k > x$ (διότι αν $x \leq x$, $\forall k \in \mathbb{N}$, τότε το $\{x_1, x_2, \dots\}$ θα ήταν φραγμένο). Άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_1 < \cdots < x_{n-1} < x < x_n$. Άτοπο διότι $x_n = \min(A \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\})$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $A = \{x_1, x_2, \dots\}$. Ορίζουμε $f\colon A \to \mathbb{N}$ με $f(x_k) = k$. Η f είναι προφανώς 1-1 και επί· άρα $A \sim \mathbb{N}$. □

Παρατήρηση 1.2.9. Αν A είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο, τότε υπάρχει $f : \mathbb{N} \to A$ που είναι 1-1 και επί. Θέτουμε $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. Μια τέτοια γραφή τού A ονομάζεται **αρίθμηση** τού A.

Οι παρακάτω προτάσεις αποδεικνύονται με τη μέθοδο της απόδειξης της Πρότασης 1.2.8. Οι αποδείξεις αφήνονται για άσκηση.

Πρόταση 1.2.10. *Αν A είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο και $B \subset A$, τότε το B είναι το πολύ αριθμήσιμο.*

Πρόταση 1.2.11. *Κάθε άπειρο σύνολο περιέχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο.*

Θεώρημα 1.2.12. *Αν τα σύνολα A_j, $j = 1, 2, \dots$ είναι το πολύ αριθμήσιμα, τότε η ένωσή τους $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ είναι το πολύ αριθμήσιμο σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω ότι

$$A_j = \{a_{j1}, a_{j2}, \dots\}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Θεωρούμε το σύνολο $X := \{(j, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a_{ji} \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : X \to \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ με $f(j, i) = a_{ji}$. Η f είναι επί. (Η f δεν είναι κατ' ανάγκη συνάρτηση 1-1 διότι τα σύνολα A_j εν γένει δεν είναι ξένα). Από την Πρόταση 1.2.3, το σύνολο $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο του X, άρα και τού $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ το οποίο είναι αριθμήσιμο. Επομένως το $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ είναι το πολύ αριθμήσιμο. □

Παράδειγμα 1.2.13. Αν $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\}$ είναι προφανώς αριθμήσιμο. Όμως

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Λόγω τού Θεωρήματος 1.2.12, το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο.

Θεώρημα 1.2.14. *Το διάστημα $(0, 1)$ είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το κλειστό διάστημα $[0, 1]$ είναι υπεραριθμήσιμο. Ας υποθέσουμε ότι το $[0, 1]$ είναι αριθμήσιμο. Έστω

$$[0, 1] = \{x_1, x_2, \dots\}$$

μια αρίθμηση του. Χωρίζουμε το $[0, 1]$ σε τρία κλειστά διαστήματα ίσου μήκους:

$$[0, 1] = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Έστω I_1 ένα από αυτά τα διαστήματα που δεν περιέχει το x_1. Χωρίζουμε το I_1 σε τρία ισομήκη κλειστά διαστήματα και ονομάζουμε I_2 ένα από αυτά που δεν περιέχει το x_2. Συνεχίζοντας έτσι κατασκευάζουμε μιά φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων $\{I_n\}$. Το μήκος τού I_n είναι $1/3^n \to 0$ όταν $n \to \infty$. Από την αρχή τού κιβωτισμού υπάρχει μοναδικό $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Τότε $x = x_m$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Άτοπο, διότι $x_m \notin I_m$. □

Παράδειγμα 1.2.15. Αν $a < b$, το διάστημα (a, b) είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο διότι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

απεικονίζει αμφιμονότιμα το (a, b) επί τού $(0, 1)$.

Πόρισμα 1.2.16. *Κάθε υποσύνολο τού $\mathbb{R}$ πού περιέχει ένα διάστημα είναι υπεραριθμήσιμο.*

1.3 Υπακολουθίες

Ορισμός 1.3.1. Μια ακολουθία $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ ονομάζεται **υπακολουθία** τής ακολουθίας $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ αν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ τέτοιοι ώστε $b_k = a_{n_k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Για παράδειγμα, οι ακολουθίες $\{\frac{1}{n^2}\}$, $\{\frac{1}{n!}\}$ και $\{\frac{1}{2n}\}$ είναι όλες υπακολουθίες της $\{\frac{1}{n}\}$. Η ακολουθία $\{a_1, a_2, a_4, a_8, a_{16}, \dots\}$ και οι ακολουθίες $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$ είναι υπακολουθίες της $\{a_n\}$.

Παρατήρηση 1.3.2. Αν $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, τότε κάθε υπακολουθία τής $\{a_n\}$ συγκλίνει στο ℓ.

Θεώρημα 1.3.3 (Bolzano–Weierstrass). *Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό.*

Απόδειξη. Έστω $\{a_n\}$ μιά φραγμένη ακολουθία. Τότε υπάρχουν αριθμοί $m_1, M_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$m_1 \le a_n \le M_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Θέτουμε $I_1 = [m_1, M_1]$. Διαιρούμε το I_1 σε δύο ισομήκη κλειστά διαστήματα

$$\left[m_1, \frac{m_1 + M_1}{2}\right] \quad \text{και} \quad \left[\frac{m_1 + M_1}{2}, M_1\right].$$

Σε ένα τουλάχιστον από αυτά τα δύο διαστήματα υπάρχουν άπειροι όροι της $\{a_n\}$. Ονομάζουμε I_2 αυτό το διάστημα. Διχοτομούμε το I_2 και παρατηρούμε πάλι ότι σε τουλάχιστο ένα από τα υποδιαστήματα πού προκύπτουν υπάρχουν άπειροι όροι της $\{a_n\}$. Ονομάζουμε I_3 αυτό το υποδιάστημα. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία κατασκευάζουμε μια ακολουθία διαστημάτων

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_j \supset \cdots$$

και παρατηρούμε ότι η ακολουθία των μηκών τους τείνει στο 0 και ότι το I_j περιέχει άπειρους όρους της $\{a_n\}$.

Από την αρχή του κιβωτισμού (Θεώρημα 1.1.21) προκύπτει ότι υπάρχει μοναδικό $\ell \in \bigcap_{j=1}^{\infty} I_j$. Θα δείξουμε ότι μιά υπακολουθία $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ της $\{a_n\}$ συγκλίνει στο ℓ. Αν $k \in \mathbb{N}$, το διάστημα $(\ell - 1/k, \ell + 1/k)$ περιέχει ένα τουλάχιστον από τα διαστήματα $I_1, I_2, \ldots$ (διότι όλα περιέχουν το ℓ και η ακολουθία των μηκών τους τείνει στο 0). Κατασκευάζουμε τώρα την $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ επαγωγικά ως εξής:

$$\begin{aligned} n_1 &:= \min\{n \geq 1 : a_n \in (\ell - 1, \ell + 1)\}, \\ n_k &:= \min\left\{n > n_{k-1} : a_n \in \left(\ell - \frac{1}{k}, \ell + \frac{1}{k}\right)\right\}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Τότε $|a_{n_k} - \ell| < 1/k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Άρα $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \ell$. □

Παράδειγμα 1.3.4. Μιά φραγμένη ακολουθία μπορεί να έχει πολλές συγκλίνουσες υπακολουθίες με διαφορετικά όρια. Για παράδειγμα η ακολουθία

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, -1, 2, 1, -1, 2, 1, -1, 2, \ldots\}$$

έχει μιά υπακολουθία, την $\{a_{3n-2}\}$, που συγκλίνει στο 1, μιά άλλη υπακολουθία που συγκλίνει στο -1, και μιά τρίτη υπακολουθία που συγκλίνει στο 2.

Μιά ακολουθία που δεν είναι φραγμένη, ασφαλώς δεν συγκλίνει. Όμως μπορεί να έχει υπακολουθία που συγκλίνει. Για παράδειγμα η ακολουθία

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ περιττός}, \\ \dfrac{1}{n}, & n \text{ άρτιος}, \end{cases}$$

δεν είναι φραγμένη, αλλά η υπακολουθία των άρτιων όρων της συγκλίνει στο 0.

Πρόταση 1.3.5. (α) *Αν μιά ακολουθία δεν είναι άνω φραγμένη, τότε έχει υπακολουθία που τείνει στο $+\infty$.*

(β) *Αν μιά ακολουθία δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε έχει υπακολουθία που τείνει στο $-\infty$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το (α)· η απόδειξη τού (β) είναι παρόμοια. Έστω λοιπόν ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ δεν είναι άνω φραγμένη. Άρα ο αριθμός 1 δεν είναι άνω φράγμα της. Θα έχει λοιπόν όρους μεγαλύτερους τού 1. Θέτουμε

$$n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n > 1\}.$$

Ο αριθμός 2 δεν είναι άνω φράγμα τής ακολουθίας $\{a_{n_1}, a_{n_1+1}, \dots\}$. Θέτουμε

$$n_2 = \min\{n > n_1 : a_n > 2\}.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά θέτουμε

$$n = \min\{n > n_{k-1} : a_n > k\}, \quad k = 3, 4, \dots.$$

Έτσι κατασκευάσαμε υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ τής $\{a_n\}$ τέτοια ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $a_{n_k} > k$. Προφανώς ισχύει $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$. □

1.4 Ακολουθίες Cauchy

Ορισμός 1.4.1. Μιά ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{a_n\}$ ονομάζεται ακολουθία Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\forall m, n \geq n_o, \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Πρόταση 1.4.2. *Κάθε ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τον ορισμό για $\varepsilon = 1$ βρίσκουμε n_o τέτοιο ώστε

$$\forall m, n \geq n_o, \quad |a_n - a_m| < 1.$$

Ειδικότερα, αυτό συνεπάγεται ότι

$$\forall n \geq n_o, \quad |a_n - a_{n_o}| < 1.$$

Επομένως

$$\forall n \geq n_o, \quad |a_n| < 1 + |a_{n_o}|.$$

Θέτουμε $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_o-1}|, 1 + |a_{n_o}|\}$ και παρατηρούμε ότι

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq M. \qquad \square$$

Πρόταση 1.4.3. *Αν μιά ακολουθία Cauchy $\{a_n\}$ έχει μιά υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ με $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \ell \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχουν $k_o, k_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε

$$\forall k \geq k_o, \quad |a_{n_k} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

και

$$\forall m, n \geq k_1, \quad |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θέτουμε $k_2 = \max\{k_o, k_1\}$. Έστω $k \geq k_2$. Τότε $n_k \geq k \geq k_2 \geq k_o$ και άρα $|a_{n_k} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Επίσης $n_k, k \geq k_2 \geq k_1$. Επομένως $|a_{n_k} - a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Τελικά λοιπόν αν $k \geq k_2$, τότε έχουμε

$$|a_k - \ell| \leq |a_k - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

το οποίο σημαίνει ότι $\lim_{k\to\infty} a_k = \ell$. □

Θεώρημα 1.4.4. *Μιά ακολουθία συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο $l \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\forall n \geq n_o, \quad |a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έστω $m, n \geq n_o$. Τότε

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άρα η $\{a_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy. Αντιστρόφως, έστω $\{a_n\}$ μιά ακολουθία Cauchy. Από την Πρόταση 1.4.2, η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη. Άρα θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (θεώρημα Bolzano–Weierstrass). Λόγω της Πρότασης 1.4.3 και η ίδια η $\{a_n\}$ είναι συγκλίνουσα. □

Παράδειγμα 1.4.5. Η ακολουθία

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

δεν είναι Cauchy. Πράγματι για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \cdots + \frac{1}{n+1} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Αν η $\{a_n\}$ ήταν ακολουθία Cauchy, τότε για $\varepsilon = \frac{1}{3}$, θα υπήρχε $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_{2n_o} - a_{n_o}| < \frac{1}{3}$. Άτοπο. Άρα η $\{a_n\}$ δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

1.5 Οριακοί αριθμοί ακολουθίας

Ορισμός 1.5.1. Λέμε ότι ο επεκτεταμένος αριθμός $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ είναι **οριακός αριθμός** της ακολουθίας $\{a_n\}$ αν υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ της $\{a_n\}$ με $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = x$.

Παράδειγμα 1.5.2. Η ακολουθία με όρους

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

έχει ακριβώς δύο οριακούς αριθμούς, το 1 και το -1.

Παράδειγμα 1.5.3. Έστω $\{a_n\}$ η ακολουθία με όρους

$$1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

Κάθε φυσικός αριθμός είναι οριακός αριθμός τής $\{a_n\}$. Επίσης υπάρχει υπακολουθία τής $\{a_n\}$ που συγκλίνει στο $+\infty$. Άρα και το $+\infty$ είναι οριακός αριθμός τής $\{a_n\}$. Εύκολα φαίνεται ότι η $\{a_n\}$ δεν έχει άλλους οριακούς αριθμούς. Επομένως το σύνολο των οριακών αριθμών τής $\{a_n\}$ είναι το $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Παρατήρηση 1.5.4. Αν μιά ακολουθία συγκλίνει στο $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, τότε κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο ℓ. Άρα η ακολουθία έχει μόνο έναν οριακό αριθμό, το ℓ.

Παρατήρηση 1.5.5. Μιά ακολουθία $\{a_n\}$ έχει ένα τουλάχιστον οριακό αριθμό. Πράγματι αν η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη τότε έχει ένα τουλάχιστον πραγματικό οριακό αριθμό, λόγω τού Θεωρήματος 1.3.3. Αν η $\{a_n\}$ δεν είναι φραγμένη τότε, λόγω τής Πρότασης 1.3.5, ένα τουλάχιστον από τα $+\infty, -\infty$ είναι οριακός αριθμός τής $\{a_n\}$.

Θεώρημα 1.5.6. *Έστω $\{a_n\}$ μιά ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε το σύνολο K όλων των οριακών αριθμών της $\{a_n\}$.*

(α) *Αν η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη, τότε το K είναι μη κενό φραγμένο σύνολο που έχει μέγιστο και ελάχιστο.*

(β) *Αν η $\{a_n\}$ δεν είναι ούτε άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη, τότε $-\infty \in K$ και $+\infty \in K$.*

(γ) *Αν η $\{a_n\}$ είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη, τότε $-\infty \in K$, $+\infty \notin K$ και το σύνολο $K \setminus \{-\infty\}$ είτε είναι το κενό, είτε είναι άνω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών που έχει μέγιστο.*

(δ) *Αν η $\{a_n\}$ είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη, τότε $+\infty \in K$, $-\infty \notin K$ και το σύνολο $K \setminus \{+\infty\}$ είτε είναι το κενό, είτε είναι κάτω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών που έχει ελάχιστο.*

Απόδειξη. (α) Το K είναι μη κενό λόγω του Θεωρήματος Bolzano–Weierstrass. Επειδή η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Αν $x \in K$, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ της $\{a_n\}$ με $a_{n_k} \to x$. Όμως ισχύει $-M \leq a_{n_k} \leq M$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Άρα $-M \leq x \leq M$. Επομένως το K είναι φραγμένο σύνολο.

Θέτουμε $\sup K = a \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $a \in K$. Για $k \in \mathbb{N}$, το $a - 1/k$ δεν είναι άνω φράγμα τού K. Άρα υπάρχει $\ell_k \in K$ με

$$a - \frac{1}{k} < \ell_k \leq a.$$

Επομένως σε καθένα από τα διαστήματα $(a - 1/k, a + 1/k]$, $k \in \mathbb{N}$, υπάρχουν άπειροι όροι τής $\{a_n\}$. Κατασκευάζουμε υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ ως εξής: Έστω

$$\begin{aligned} n_1 &= \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \in (a-1, a+1]\}, \\ n_2 &= \min\{n > n_1 : a_n \in (a - 1/2, a + 1/2]\}, \end{aligned}$$

και επαγωγικά

$$n_k = \min\{n > n_{k-1} : a_n \in (a - 1/k, a + 1/k]\}.$$

Τότε $a - 1/k < a_{n_k} \leq a + 1/k$ κι επομένως $a_{n_k} \to a$. Άρα $a \in K$ και $a = \max K$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\inf K = \min K$.

(β) Λόγω τής Πρότασης 1.3.5, η $\{a_n\}$ έχει δύο υπακολουθίες που συγκλίνουν στο ∞ και στο $-\infty$ αντίστοιχα. Άρα $+\infty, -\infty \in K$.

(γ) Έστω ότι η $\{a_n\}$ είναι άνω φραγμένη από το $M \in \mathbb{R}$ και δεν είναι κάτω φραγμένη. Από την Πρόταση 1.3.5, ισχύει $-\infty \in K$. Έστω $\ell \in K \setminus \{-\infty\}$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $a_{n_j} \to \ell$. Προφανώς $\ell \leq M$. Άρα to είναι άνω φράγμα τού $K \setminus \{-\infty\}$. Η απόδειξη ότι το $K \setminus \{-\infty\}$ (όταν δεν είναι κενό) έχει μέγιστο είναι ίδια με την αντίστοιχη απόδειξη στο (α).

(δ) Η απόδειξη είναι παρόμοια με τού (γ). □

Χάρη στο θεώρημα που μόλις αποδείξαμε μπορούμε τώρα να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.5.7. Έστω $\{a_n\}$ μιά ακολουθία.

(α) Αν η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη, τότε: Ο μεγαλύτερος οριακός αριθμός της ονομάζεται **ανώτερο όριο** τής $\{a_n\}$ και συμβολίζεται με $\limsup a_n$. Ο μικρότερος οριακός αριθμός της ονομάζεται **κατώτερο όριο** τής $\{a_n\}$ και συμβολίζεται με $\liminf a_n$.

(β) Αν η $\{a_n\}$ δεν είναι ούτε άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη, τότε θέτουμε $\limsup a_n = +\infty$ και $\liminf a_n = -\infty$.

(γ) Αν η $\{a_n\}$ είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη, τότε $\liminf a_n = -\infty$. Αν το $-\infty$ είναι ο μοναδικός οριακός αριθμός τής $\{a_n\}$, τότε $\limsup a_n = -\infty$. Αν η $\{a_n\}$ έχει κι άλλους οριακούς αριθμούς, τότε το $\limsup a_n$ είναι ο μεγαλύτερος οριακός αριθμός τής $\{a_n\}$.
(δ) Αν η $\{a_n\}$ είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη, τότε $\limsup a_n = +\infty$. Αν το ∞ είναι ο μοναδικός οριακός αριθμός τής $\{a_n\}$, τότε $\liminf a_n = +\infty$. Αν η $\{a_n\}$ έχει κι άλλους οριακούς αριθμούς, τότε το $\liminf a_n$ είναι ο μικρότερος οριακός αριθμός τής $\{a_n\}$.

Με συντομία μπορούμε να πούμε ότι το $\limsup a_n$ είναι ο μεγαλύτερος οριακός αριθμός τής $\{a_n\}$ και το $\liminf a_n$ είναι ο μικρότερος οριακός αριθμός της.

Παράδειγμα 1.5.8. Η ακολουθία

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$$

δεν είναι ούτε άνω, ούτε κάτω φραγμένη. Ισχύει $K = \{+\infty, -\infty\}$, άρα

$$\limsup a_n = +\infty \quad \text{και} \quad \liminf a_n = -\infty.$$

Παράδειγμα 1.5.9. Για την ακολουθία

$$1, 2, 3, \dots$$

ισχύει $K = \{+\infty\}$ και

$$\limsup a_n = \liminf a_n = \lim a_n = +\infty.$$

Παράδειγμα 1.5.10. Η ακολουθία

$$a_n = 2(-1)^n + \frac{1}{2^n}$$

είναι φραγμένη και έχει ακριβώς δύο οριακούς αριθμούς: το 2 και το -2 (διότι ισχύει $a_{2n} \to 2$ και $a_{2n-1} \to -2$). Επομένως

$$\limsup a_n = 2 \quad \text{και} \quad \liminf a_n = -2.$$

Παράδειγμα 1.5.11. Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο. Έστω $\{q_1, q_2, \dots\}$ μια αρίθμηση του. Θεωρούμε την ακολουθία $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ η οποία δεν είναι ούτε άνω, ούτε κάτω φραγμένη. Άρα

$$\limsup q_n = +\infty, \quad \liminf q_n = -\infty.$$

Θεώρημα 1.5.12. *Έστω $\{a_n\}$ φραγμένη ακολουθία και έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε*

(i) $x \leq \limsup a_n$ *αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < a_n\}$ είναι άπειρο.*

(ii) $x \geq \limsup a_n$ *αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : x + \varepsilon < a_n\}$ είναι πεπερασμένο.*

(iii) $x \geq \liminf a_n$ *αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x + \varepsilon\}$ είναι άπειρο.*

(iv) $x \leq \liminf a_n$ *αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x - \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο το (i). Η απόδειξη των (ii), (iii) και (iv) είναι ανάλογη. Για την απόδειξη του (i) θέτουμε $a = \limsup a_n$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι $x \leq a$ και παίρνουμε τυχαίο $\varepsilon > 0$. Υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ με $a_{n_k} \to a$. Άρα υπάρχει $k_o \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $k \geq k_o$, $a_{n_k} > a - \varepsilon \geq x - \varepsilon$. Έπεται ότι το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < a_n\}$ είναι άπειρο.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < a_n\}$ είναι άπειρο, δηλαδή άπειροι όροι της ακολουθίας είναι μεγαλύτεροι από το $x - \varepsilon$. Άρα υπάρχει μιά υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ με $a_{n_k} > x - \varepsilon$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Το θεώρημα Bolzano-Weierstrass συνεπάγεται ότι υπάρχει υπακολουθία τής $\{a_{n_k}\}$ που συγκλίνει σε ένα αριθμό ℓ. Τότε ισχύει $x - \varepsilon \leq \ell \leq a$. Επειδή το ε είναι τυχαίος θετικός αριθμός, έπεται ότι $x \leq a$. □

Θεώρημα 1.5.13. *Δίνονται μια ακολουθία $\{a_n\}$ και ένας αριθμός $\ell \in \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) $\lim a_n = \ell$.

(β) $\limsup a_n = \liminf a_n = \ell$.

(γ) *Κάθε υπακολουθία τής $\{a_n\}$ συγκλίνει στο ℓ.*

Απόδειξη. (γ) $\Rightarrow$ (α): Η $\{a_n\}$ είναι υπακολουθία τού εαυτού της. Άρα $a_n \to \ell$.

(α) $\Rightarrow$ (γ): Έστω ότι $a_n \to \ell$ και έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε μιά υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ τής $\{a_n\}$. Επειδή $a_n \to \ell$, θα υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_o$. Αν $k \geq n_o$, τότε $n_k \geq k \geq n_o$. Άρα $|a_{n_k} - \ell| < \varepsilon$. Άρα $a_{n_k} \to \ell$.

(γ) $\Rightarrow$ (β): Επειδή το $\limsup a_n$ είναι οριακός αριθμός τής $\{a_n\}$, θα υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ με $a_{n_k} \to \limsup a_n$. Λόγω τού (γ), θα έχουμε $\limsup a_n = \ell$. Παρομοίως $\liminf a_n = \ell$.

(β) $\Rightarrow$ (α): Παρατηρούμε πρώτα ότι επειδή το $\limsup a_n$ και το $\liminf a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι φραγμένη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από το Θεώρημα 1.5.12, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n > \ell + \varepsilon\} \cup \{n \in \mathbb{N} : a_n < \ell - \varepsilon\}$$

είναι πεπερασμένο. Επομένως υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_o$, ισχύει $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι $a_n \to \ell$. □

Θεώρημα 1.5.14. *Έστω $\{a_n\}$ φραγμένη ακολουθία.*
(i) *Θέτουμε $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$. Τότε $\limsup a_n = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim b_n$.*
(ii) *Θέτουμε $c_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$. Τότε $\liminf a_n = \sup\{c_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim c_n$.*

Απόδειξη. Η $\{b_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία. Άρα $b_n \to \inf b_n := b$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\limsup a_n = b$.

Υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ της $\{a_n\}$ με $a_{n_k} \to \limsup a_n$. Όμως $a_{n_k} \leq b_{n_k}$ και $b_{n_k} \to b$. Άρα

$$\limsup a_n = \lim a_{n_k} \leq \lim b_{n_k} = b.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα θα εφαρμόσουμε το (i) του Θεωρήματος 1.5.12. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $b_n \to b$, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$b_n > b - \varepsilon, \quad \forall n \geq n_o. \tag{1.4}$$

Ειδικότερα

$$b_{n_o} = \sup\{a_k : k \geq n_o\} > b - \varepsilon.$$

Άρα υπάρχει $k_1 \geq n_o$ τέτοιο ώστε $a_{k_1} > b - \varepsilon$. Εφαρμόζουμε τώρα την (1.4) για $n = k_1 + 1$ και παίρνουμε

$$b_{k_1+1} = \sup\{a_k : k \geq {}_1 + 1\} > b - \varepsilon.$$

Άρα υπάρχει $k_2 \geq k_1 + 1$ τέτοιο ώστε $a_{k_2} > b - \varepsilon$. Συνεχίζοντας έτσι κατασκευάζουμε υπακολουθία $\{a_{k_j}\}$ της $\{a_k\}$ με $a_{k_j} > b - \varepsilon$. Άρα έχουμε ότι το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n > b - \varepsilon\}$ είναι άπειρο. Από το Θεωρήμα 1.5.12 (i), $\limsup a_n \geq b$. Έτσι το (i) αποδείχτηκε. Το (ii) αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο. □

Πρόταση 1.5.15. *Έστω $\{a_n\}$ μια ακολουθία με $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ισχύει*

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο την πρώτη ανισότητα· η τρίτη αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο και η μεσαία είναι προφανής. Έστω

$$a := \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Προφανώς $a \geq 0$. Αν $a = 0$, τότε η ανισότητα είναι προφανής. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $a > 0$· (το a μπορεί να είναι και ∞). Παίρνουμε αριθμό b με $0 < b < a$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > b, \quad \forall k \geq N.$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες για $k = N, N+1, \dots, n-1$ και προκύπτει ότι για κάθε $n > N$,

$$\frac{a_n}{a_N} > b^{n-N}.$$

Παίρνουμε n-στές ρίζες και βρίσκουμε: $\sqrt[n]{a_n} > b\sqrt[n]{b^{-N}a_N}$. Άρα

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} \geq \liminf b\sqrt[n]{b^{-N}a_N} = b.$$

Τέλος παίρνουμε όρια για $b \to a$ και προκύπτει

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} \geq a = \liminf \frac{a_{n+1}}{n}.$$ □

Παράδειγμα 1.5.16. Έστω

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ περιττός}, \\ 2^n, & n \text{ άρτιος}. \end{cases}$$

Τότε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 2^{n+1}, & n \text{ περιττός}, \\ \frac{1}{2^n}, & n \text{ άρτιος}. \end{cases}$$

και

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} 1, & n \text{ περιττός}, \\ 2, & n \text{ άρτιος}. \end{cases}$$

Άρα

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0, \qquad \liminf \sqrt[n]{a_n} = 1$$

και

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = 2, \quad \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty.$$

Παράδειγμα 1.5.17. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.5.15 στην ακολουθία $a_n = n$. Ισχύει

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Συμπεραίνουμε ότι $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Παράδειγμα 1.5.18. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.5.15 στην ακολουθία

$$a_n = \frac{n^n}{n!}.$$

Ισχύει

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

1.6 Ασκήσεις

1.1 Δείξτε ότι κάθε μη κενό υποσύνολο τού $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο.
Υπόδειξη: Επαγωγή.

1.2 Έστω E ένα φραγμένο υποσύνολο τού $\mathbb{R}$ με δύο τουλάχιστον σημεία.
(α) Δείξτε ότι $-\infty < \inf E < \sup E < +\infty$.
(β) Αν το A είναι μη κενό υποσύνολο τού E, δείξτε ότι

$$\inf E \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup E.$$

1.3 Έστω $A \subset \mathbb{R}$ ($A \neq \varnothing$). Ορίζουμε $-A = \{x : -x \in A\}$. Δείξτε ότι

$$\sup(-A) = -\inf A, \quad \inf(-A) = -\sup A.$$

1.4 Δίνονται δύο μη κενά σύνολα A και B στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$A + B = \{x + y : x \in A,\ y \in B\},$$
$$A - B = \{x - y : x \in A,\ y \in B\},$$
$$A \cdot B = \{xy : x \in A,\ y \in B\}.$$

Δείξτε ότι

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \quad \text{και} \quad \sup(A - B) = \sup A - \inf B.$$

Αν επιπλέον $A, B \subset \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, τότε

$$\sup(A \cdot B) = (\sup A) \cdot (\sup B).$$

1.5 Για $A, B \subset \mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} \quad \text{και} \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

1.6 Για $E \subset \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$, ορίζομε $tE := \{tx : x \in E\}$. Δείξτε ότι:
(α) Αν $t \geq 0$, τότε $\sup(tE) = t \sup E$ και $\inf(tE) = t \inf E$.
(β) Αν $t < 0$, τότε $\sup(tE) = t \inf E$ και $\inf(tE) = t \sup E$.

1.7 Αν f, g είναι δύο πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο E, δείξτε ότι

$$\inf_E (f + g) \geq \inf_E f + \inf_E g \quad \text{και} \quad \sup_E (f + g) \leq \sup_E f + \sup_E g.$$

1.8 Αν S και T είναι δυό υποσύνολα τού $\mathbb{R}$ και $s \le t$ για κάθε $s \in S$ και $t \in T$, δείξτε ότι $\sup S \le \inf T$.

1.9 Βρείτε το άνω και το κάτω πέρας των παρακάτω συνόλων.
(α) $A = \{2^{-p} + 3^{-q} + 5^{-r} : p, q, r \in \mathbb{N}\}$.
(β) $B = \{x : 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$.
(γ) $C = \{x : (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0\}$.

1.10 Δείξτε ότι
$$\sup\{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 < 2\} = \sqrt{2}.$$

1.11 Βρείτε το sup και το inf των παρακάτω συνόλων.
$$A = \left\{2(-1)^{n+1} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(2 + \frac{3}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\},$$
$$B = \left\{\frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

1.12 Βρείτε τα $\sup A$, $\inf A$ και τα $\max A$, $\min A$ (εφόσον υπάρχουν), όπου
$$A = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N},\ m < 2n\right\}.$$

1.13 Υπολογίστε τα
$$\sup\{x \in \mathbb{R} : x^2+x+1 > 0\}, \quad \inf\{x+x^{-1} : x > 0\}, \quad \inf\{2^x+2^{\frac{1}{x}} : x > 0\}.$$

1.14 Βρείτε τα sup και inf των παρακάτω συνόλων.
$$A = \left\{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} : m, n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad B = \left\{\frac{mn}{4m^2+n^2} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\},$$
$$C = \left\{\frac{m}{m+n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad D = \left\{\frac{m}{|m|+n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\},$$
$$E = \left\{\frac{mn}{1+m+n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

1.15 Δείξτε ότι η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

1.16 Αποδείξτε τις Προτάσεις 1.2.10 και 1.2.11.

1.17 Δείξτε ότι ένα σύνολο είναι άπειρο αν και μόνο αν είναι ισοδύναμο με ένα γνήσιο υποσύνολό του.

1.18 Δείξτε ότι αν A, B είναι δύο το πολύ αριθμήσιμα σύνολα, τότε το $A \times B$ είναι το πολύ αριθμήσιμο.

1.19 Δίνονται δύο ξένα σύνολα A και B. Δείξτε ότι αν το A είναι το πολύ αριθμήσιμο και το B είναι άπειρο σύνολο, τότε $A \cup B \sim B$.

1.20 Δείξτε ότι το διάστημα $(0, 1)$ είναι ισοδύναμο με το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$.

1.21 Δείξτε ότι κάθε σύνολο ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων είναι το πολύ αριθμήσιμο.

1.22 Δείξτε ότι το σύνολο των κύκλων στο επίπεδο με ρητή ακτίνα και κέντρα πού έχουν ρητές συντεταγμένες είναι αριθμήσιμο.

1.23 Δείξτε ότι το σύνολο των πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές είναι αριθμήσιμο.

1.24 Ένας αριθμός ονομάζεται *αλγεβρικός* αν είναι ρίζα ενός πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές. Δείξτε ότι το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

1.25 Δείξτε ότι κάθε διάστημα περιέχει άρρητους αριθμούς και μάλιστα το σύνολο των άρρητων σε κάθε διάστημα είναι υπεραριθμήσιμο.

1.26 Δείξτε ότι αν το A είναι υπεραριθμήσιμο και το B είναι το πολύ αριθμήσιμο υποσύνολο τού A, τότε $A \setminus B \sim A$.

1.27* (Θεώρημα τού Cantor). Το *δυναμοσύνολο* $\mathscr{P}(\mathscr{A})$ ενός συνόλου A είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων τού A. Δείξτε ότι κανένα σύνολο δεν είναι ισοδύναμο με το δυναμοσύνολό του.

1.28 Έστω $\{a_n\}$ μιά ακολουθία. Δείξτε ότι $a_n \to \ell$ αν και μόνο αν οι υπακολουθίες $\{a_{2k}\}$ και $\{a_{2k-1}\}$ συγκλίνουν στο $\ell \in \mathbb{R}$. ($\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$).

1.29 Δείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{\arctan 1}{2} + \frac{\arctan 2}{2^2} + \cdots + \frac{\arctan n}{2^n}$$

είναι Cauchy.

1.30 Δίνονται δύο ακολουθίες $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ και ένας φυσικός N. Αν $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \geq N$, δείξτε ότι

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n \quad \text{και} \quad \limsup a_n \leq \limsup b_n.$$

1.31 Αν $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ είναι δύο φραγμένες ακολουθίες, δείξτε ότι

$$\begin{aligned}\liminf a_n + \liminf b_n &\leq \liminf(a_n + b_n) \leq \liminf a_n + \limsup b_n \\ &\leq \limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n.\end{aligned}$$

1.32 Αν $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ είναι δύο φραγμένες ακολουθίες με θετικούς όρους, δείξτε ότι

$$\begin{aligned}\liminf a_n \cdot \liminf b_n &\le \liminf(a_n b_n) \le \liminf a_n \cdot \limsup b_n \\ &\le \limsup(a_n b_n) \le \limsup a_n \cdot \limsup b_n.\end{aligned}$$

1.33 Δίνονται δύο ακολουθίες $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. Αν η $\{a_n\}$ συγκλίνει, δείξτε ότι

$$\limsup(a_n + b_n) = \lim a_n + \limsup b_n$$

και

$$\liminf(a_n + b_n) = \lim a_n + \liminf b_n.$$

1.34 Έστω $\{a_n\}$ μιά ακολουθία. Δείξτε ότι

$$\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$$

και

$$\liminf(-a_n) = -\limsup a_n.$$

1.35 Αποδείξτε το Θεώρημα 1.5.14 χωρίς την υπόθεση ότι η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη.

1.36 Βρείτε το ανώτερο και το κατώτερο όριο των παρακάτω ακολουθιών:

$$\left\{2(-1)^n + \frac{1}{n!}\right\}, \quad \left\{3 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}.$$

1.37 Βρείτε το σύνολο των οριακών αριθμών για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες:

$$a_n = \sqrt[n]{4^{(-1)^n} + 2}, \qquad b_n = \frac{(1-(-1)^n)2^n + 1}{2^n + 3},$$

$$c_n = \frac{(1+\cos n\pi)\log(3n) + \log n}{\log(2n)}, \qquad d_n = \left(\cos\frac{n\pi}{3}\right)^n.$$

1.38 Υπολογίστε τα $\limsup$ και $\liminf$ για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες:

$$a_n = (-1)^n n, \qquad b_n = n^{(-1)^n n},$$

$$c_n = 1 + n\sin\frac{n\pi}{2}, \qquad d_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4},$$

$$e_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}.$$

1.39 Για μιά ακολουθία $\{a_n\}$, οι υπακολουθίες $\{a_{2k}\}$, $\{a_{2k+1}\}$, και $\{a_{3k}\}$ συγκλίνουν. Δείξτε ότι η $\{a_n\}$ συγκλίνει.

1.40 Έστω $\{a_n\}$ φραγμένη ακολουθία και έστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\limsup a_n = x$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, άπειροι όροι της ακολουθίας είναι μεγαλύτεροι από $x - \varepsilon$ και πεπερασμένου πλήθους όροι είναι μεγαλύτεροι από $x + \varepsilon$. Διατυπώστε και αποδείξτε ανάλογη πρόταση για το κατώτερο όριο.

1.41 Αν το $\lim_{n\to\infty} a_n$ υπάρχει (ως πραγματικός αριθμός), δείξτε ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι φραγμένη και ισχύει $\inf_n a_n \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \sup_n a_n$.

1.42 Αν $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, είναι κλειστά διαστήματα με $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ και $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, τότε από την Αρχή τού κιβωτισμού, υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$. Θεωρούμε μιά ακολουθία $\{x_n\}$ με $x_n \in I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

1.43 Δείξτε ότι αν $\lim a_n = \ell \in \mathbb{R}$, τότε το σύνολο $\{\ell, a_1, a_2, \dots\}$ έχει μέγιστο και ελάχιστο.

1.44 Έστω A ένα μη κενό, κάτω φραγμένο υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\inf A = s \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν το s είναι κάτω φράγμα τού A και υπάρχει ακολουθία $\{a_n\} \subset A$ με $a_n \to s$. Διατυπώστε και αποδείξτε ανάλογη πρόταση για το άνω πέρας.

1.45 Έστω $\{a_n\}$ μια ακολουθία η οποία δεν έχει μέγιστο και έστω $S = \sup a_n \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ με $a_{n_k} \to S$. Διατυπώστε και αποδείξτε ανάλογη πρόταση για το κάτω πέρας.

1.46 Έστω $\{q_1, q_2, \dots\}$ μιά αρίθμηση τού $\mathbb{Q}$. Βρείτε το σύνολο των οριακών αριθμών τής ακολουθίας $\{q_n\}$.

1.47 Σωστό ή Λάθος;

(α) Αν $\{a_n\}$ είναι μιά αύξουσα ακολουθία, τότε κάθε υπακολουθία της είναι αύξουσα.

(β) Υπάρχει ακολουθία που έχει άπειρους στο πλήθος οριακούς αριθμούς.

(γ) Αν η $\{b_n\}$ είναι υπακολουθία της $\{a_n\}$ και η $\{c_n\}$ είναι υπακολουθία της $\{b_n\}$, τότε η $\{c_n\}$ είναι υπακολουθία της $\{a_n\}$.

1.48* Δείξτε ότι το σύνολο των οριακών αριθμών τής ακολουθίας $a_n = \sin n$ είναι το διάστημα $[-1, 1]$.

1.49* Δείξτε ότι αν κάθε υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ μιάς ακολουθίας $\{a_n\}$ έχει υπακολουθία $\{a_{n_{k_j}}\}$ συγκλίνουσα στο ℓ, τότε $a_n \to \ell$.

1.50* Δίνεται μιά ακολουθία $\{a_n\}$ που έχει την ιδιότητα $a_{n+1} - a_n \to 0$. Υποθέτουμε ότι η $\{a_n\}$ έχει δύο οριακούς αριθμούς a, b με $a < b$. Δείξτε ότι κάθε αριθμός του διαστήματος $[a, b]$ είναι οριακός αριθμός της $\{a_n\}$.

1.51 Δίνεται μιά ακολουθία $\{a_n\}$. Ορίζουμε την ακολουθία $\{b_n\}$ θέτοντας

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

(α) Δείξτε ότι αν $a_n \to a$, τότε $b_n \to a$.

(β) Σωστό ή Λάθος; Αν $b_n \to a$, τότε $a_n \to a$.

(γ)* Δείξτε ότι αν $b_n \to a$ και η $\{a_n\}$ είναι αύξουσα, τότε $a_n \to a$.

(δ)* Δείξτε ότι

$$\liminf a_n \le \liminf b_n \le \limsup b_n \le \limsup a_n.$$

1.52* Δείξτε ότι κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον μία μονότονη υπακολουθία.

1.53* Έστω $\{a_n\}$ φραγμένη ακολουθία και έστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν κάθε συγκλίνουσα υπακολουθία τής $\{a_n\}$ συγκλίνει στο x, τότε $a_n \to x$.

1.54 Για το περίβλημα $\overline{E}$ τού E ισχύει

$$\sup \overline{E} = \sup E \quad \text{και} \quad \inf \overline{E} = \inf E.$$

1.55 Ο αριθμός $x \in \mathbb{R}$ είναι οριακός αριθμός της ακολουθίας $\{a_n\}$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$, υπάρχει $n \ge m$ τέτοιο ώστε $|a_n - x| < \varepsilon$.

1.7 Σημειώσεις

Μια πιο πλήρης εισαγωγή στους πραγματικούς αριθμούς μπορεί να βρεθεί στα βιβλία [1, 6, 7, 12]. Η κατασκευή τού $\mathbb{R}$ με τις τομές Dedekind υπάρχει στα βιβλία [6, 9].

Τα αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα εισήχθηκαν από τον θεμελιωτή της Θεωρίας Συνόλων, G. Cantor. Περισσότερα σχετικά θεωρήματα υπάρχουν στα βιβλία [2, 10], καθώς και στο βιβλίο [1:1].

Οι έννοιες της ακολουθίας και της υπακολουθίας παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο σε όλους τους κλάδους της Ανάλυσης. Για περισσότερα παραδείγματα και ασκήσεις παραπέμπουμε στα [9, 12]. Ο R. M. Dudley [1:2] σημειώνει ότι απόδειξη τού Θεωρήματος Bolzano δε βρέθηκε στα γραπτά τού Bolzano. Στα βιβλία Τοπολογίας ο αναγνώστης μπορεί να βρεί γενικότερες διατυπώσεις τού Θεωρήματος αυτού· για παράδειγμα: *Κάθε ακολουθία σε ένα συμπαγή μετρικό χώρο έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Αναφορές

[1:1] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover, 1975.
[1:2] R. M. Dudley, *Real Analysis and Probability*, Wadsworth, 1989.