

Περίληψη μαθήματος I

Τυπολόγιο – μεθοδολογία στατικής

I. 1. ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΑΔΩΝ SI

Στα πλαίσια της στατικής θα διαχειριστούμε μονάδες με βασικά μεγέθη που φαίνονται στον πίνακα παρακάτω. Είναι σημαντικό κάθε φορά να γίνονται οι κατάλληλες μετατροπές στο σύστημα SI **πριν** ξεκινήσουμε την επίλυση.

Μήκος	Χρόνος	Μάζα	Δύναμη
μέτρο [m]	δευτ/πτο [s]	χιλ/μο [kg]	Νιούτον [N]

Σημείωση: Κάνοντας χρήση του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα μπορείς κανείς να δει ότι:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow [N] = [kg] \frac{[m]}{[s^2]}$$

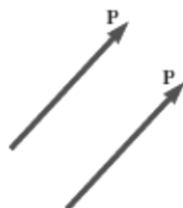
	Εκθέτης		Σύμβολο
1,000,000,000	10 ⁹	Giga	G
1,000,000	10 ⁶	Mega	M
1,000	10 ³	Kilo	k
0.001	10 ⁻³	milli	m
0.000001	10 ⁻⁶	micro	μ
0.000000001	10 ⁻⁹	nano	n

I. 2. ΣΤΑΤΙΚΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

I.2.1 Χαρακτηριστικά διανύσματος

Τα διανύσματα χαρακτηρίζονται από α. μέτρο, β. διεύθυνση και γ. φορά.

Τα διανύσματα \vec{P} έχουν ίδιο μέτρο, ίδια διεύθυνση και φορά.

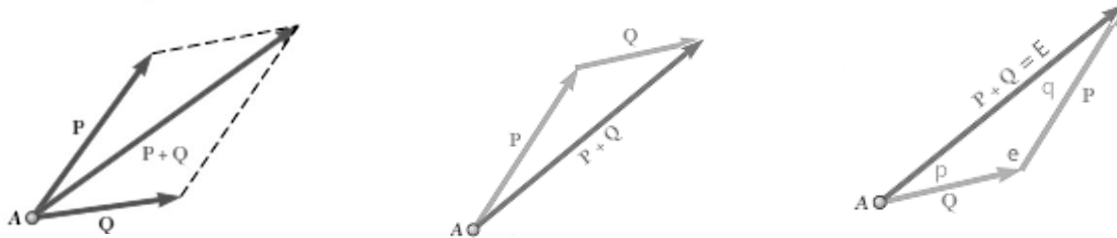


Τα διανύσματα \vec{P} και $-\vec{P}$ έχουν ίδιο μέτρο, ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά.



1.2.2 Κανόνας παραλληλογράμμου και νόμος ημιτόνων / συνημίτονων

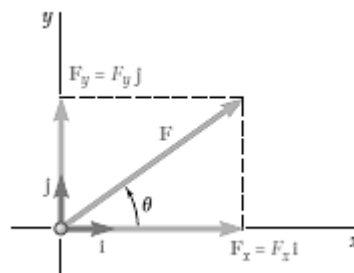
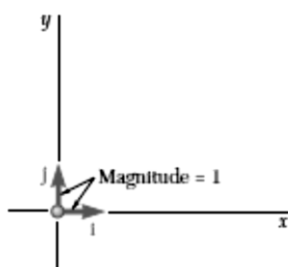
Παρακάτω παρουσιάζονται η γραφική και αναλυτική λύση για την εύρεση της συνισταμένης \vec{E} δύο διανυσμάτων \vec{P} και \vec{Q} . Για τη γραφική λύση απαιτείται απαραίτητη η χρήση κανόνα και κλίμακας.



$$\frac{|\vec{P}|}{\sin p} = \frac{|\vec{Q}|}{\sin q} = \frac{|\vec{E}|}{\sin e}$$

$$|\vec{E}| = \sqrt{|\vec{Q}|^2 + |\vec{P}|^2 - 2|\vec{Q}||\vec{P}|\cos e}$$

1.2.3 Δεξιόστροφο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και μοναδιαία διανύσματα βάσης



$$\vec{F} = |\vec{F}_x|\vec{i} + |\vec{F}_y|\vec{j}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{|\vec{F}_x|^2 + |\vec{F}_y|^2}$$

$$\begin{cases} |\vec{F}_x| = |\vec{F}|\cos\theta \\ |\vec{F}_y| = |\vec{F}|\sin\theta \end{cases}$$

$$\tan\theta = \frac{|\vec{F}_y|}{|\vec{F}_x|}$$

1.2.4 Ισορροπία υλικού σημείου στο επίπεδο

Η πρώτη μέθοδος ανάλυσης της ισορροπίας ενός υλικού σημείου είναι γραφική και γνωστή ως μέθοδος δυναμοπολυγώνου. Σ αυτή τη μέθοδο μεταφέρουμε κάθε δύναμη παράλληλα στο φορέα της μέχρι του σχηματισμού ενός πολυγώνου. Για να ισχύει η ισορροπία του υλικού σημείο το πολύγωνο θα πρέπει να είναι **κλειστό**.



Η δεύτερη μέθοδος είναι αναλυτική. Ξεκινούμε με το σχεδιασμό του Διαγράμματος Ελευθέρου Σώματος (Δ.Ε.Σ.) του υλικού σημείου, τοποθετώντας στο υλικό σημείο όλες τις δυνάμεις που ασκούνται σ αυτό. Κατόπιν κάνουμε χρήση του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα για το στατικό πρόβλημα:

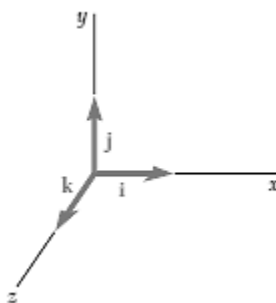
$$\Sigma \vec{F} = ma \Rightarrow \Sigma \vec{F} = 0$$

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases}$$

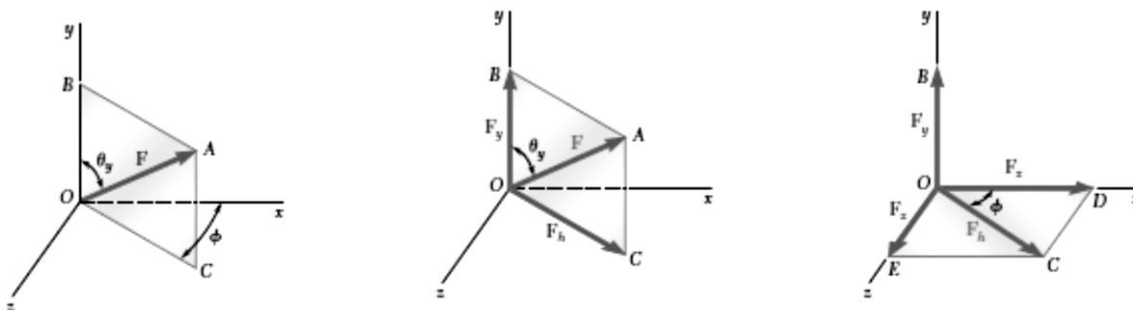
Οι δύο παραπάνω εξισώσεις χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό δύο αγνώστων δυνάμεων που ασκούνται στο υλικό σημείο.

Υπόδειξη: Αν οι δυνάμεις που ασκούνται στο υλικό σημείο είναι το πολύ 3 τότε σχεδιάζουμε το κλειστό δυναμοπολύγωνο και επιλύουμε το πρόβλημα με τη γραφική μέθοδο. Αν οι δυνάμεις που ασκούνται στο υλικό σημείο είναι περισσότερες από 3 τότε ακολουθούμε την επίλυση με την αναλυτική μέθοδο προσδιορίζοντας το πολύ 2 άγνωστες δυνάμεις.

1.2.5 Δεξιόστροφο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και μοναδιαία διανύσματα βάσης



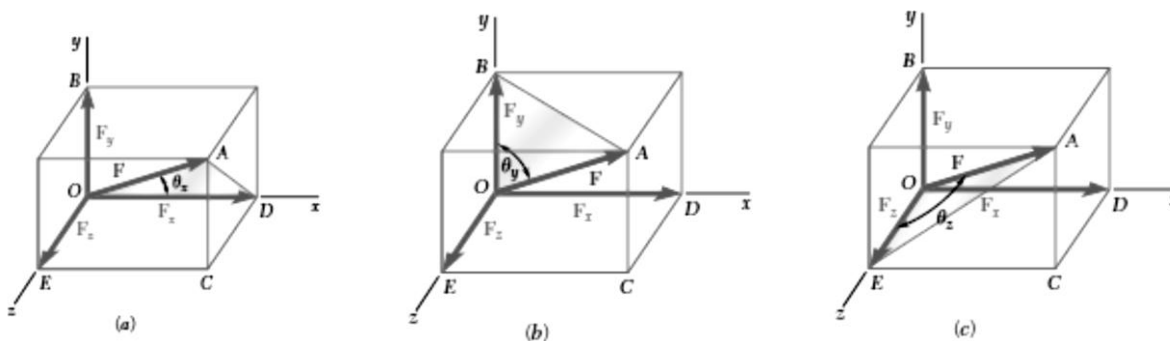
1.2.6 Ανάλυση διανύσματος στο χώρο



$$\vec{F} = |\vec{F}_x|\vec{i} + |\vec{F}_y|\vec{j} + |\vec{F}_z|\vec{k}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{|\vec{F}_x|^2 + |\vec{F}_y|^2 + |\vec{F}_z|^2}$$

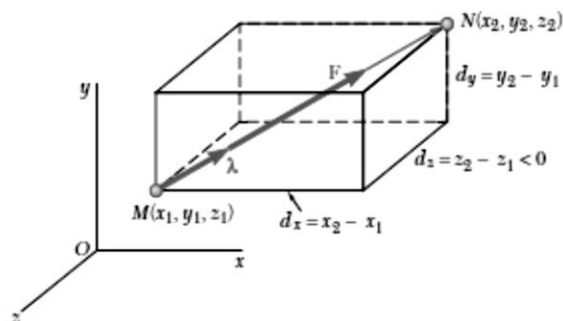
1.2.7 Συνημίτονα κατεύθυνσης



$$\begin{cases} \cos\theta_x = \frac{|\vec{F}_x|}{|\vec{F}|} \\ \cos\theta_y = \frac{|\vec{F}_y|}{|\vec{F}|} \\ \cos\theta_z = \frac{|\vec{F}_z|}{|\vec{F}|} \end{cases}$$

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$$

1.2.8 Συνιστώσες δύναμης που ορίζεται από το μέτρο της και δύο σημεία στο φορέα της



Έστω δύναμη \vec{F} γνωστού μέτρου κατά τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος λ που ορίζεται μέσω των δύο σημείων $M(x_1, y_1, z_1)$ και $N(x_2, y_2, z_2)$. Αν οι συνιστώσες του διανύσματος \overrightarrow{MN} είναι έστω d_x, d_y, d_z τότε

$$\overrightarrow{MN} = d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k}$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα λ που ορίζει τη διεύθυνση της δύναμης \vec{F} μπορεί να βρεθεί ως

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{1}{d} (d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k})$$

και

$$\vec{F} = \lambda |\vec{F}| = \frac{|\vec{F}|}{d} (d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k})$$

επομένως

$$\begin{cases} |\vec{F}_x| = \frac{|\vec{F}|}{d} d_x \\ |\vec{F}_y| = \frac{|\vec{F}|}{d} d_y \\ |\vec{F}_z| = \frac{|\vec{F}|}{d} d_z \end{cases}$$

Επίσης,

$$\begin{cases} d_x = x_2 - x_1 \\ d_y = y_2 - y_1 \\ d_z = z_2 - z_1 \end{cases}$$

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

οπότε και υπολογίζουμε τα μέτρα των συνιστωσών της δύναμης στις τρεις διευθύνσεις, ενώ τα συνημίτονα κατεύθυνσης είναι

$$\begin{cases} \cos\theta_x = \frac{d_x}{d} \\ \cos\theta_y = \frac{d_y}{d} \\ \cos\theta_z = \frac{d_z}{d} \end{cases}$$

1.2.9 Ισορροπία υλικού σημείου στο χώρο

Για την στατική ισορροπία ενός υλικού σημείου στο χώρο σχεδιάζουμε το Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος (Δ.Ε.Σ.) του υλικού σημείου, τοποθετώντας στο υλικό σημείο όλες τις δυνάμεις που ασκούνται σ αυτό και απαιτούμε

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \Sigma \vec{F} = 0$$

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 \end{cases}$$

1.3. ΣΤΑΤΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

1.3.1 Εξωτερικές και εσωτερικές δυνάμεις

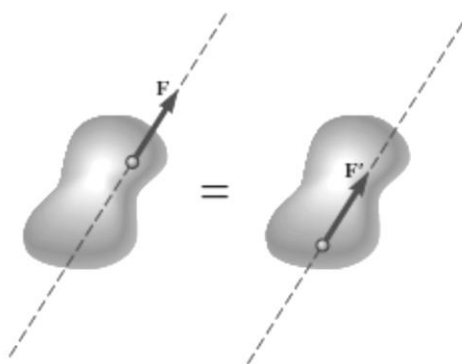
Δύο ειδών δυνάμεων θα δούμε κατά την ισορροπία στερεών σωμάτων,

α) τις εξωτερικές που ασκούνται από το «περιβάλλον» στο στερεό σώμα και

β) τις εσωτερικές που κρατούν το στερεό σώμα σε συνοχή ή ασκούνται μεταξύ μελών του στερεού σώματος.

1.3.2 Μεταφορά δύναμης

Η μεταφορά δύναμης, σε οποιοδήποτε σημείο πάνω στο φορέα της, δεν προκαλεί καμία μεταβολή στις συνθήκες ισορροπίας του σώματος στο οποίο αυτή ασκείται.



1.3.3 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

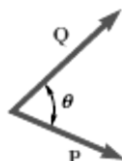
Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων μας δίνει βαθμωτό μέγεθος και υπολογίζεται από

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = |\vec{P}||\vec{Q}|\cos\theta$$

Από την παραπάνω σχέση είναι προφανές ότι

α) τα παράλληλα μεταξύ τους διανύσματα έχουν εσωτερικό γινόμενο ίσο με τα μέτρα τους και

β) τα κάθετα μεταξύ τους διανύσματα έχουν εσωτερικό γινόμενο ίσο με το μηδέν.



1.3.4 Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

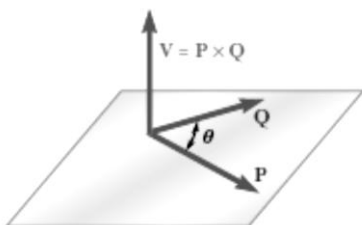
Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων μας δίνει επίσης διάνυσμα και υπολογίζεται από

$$\vec{P} \times \vec{Q} = [|\vec{P}||\vec{Q}|\sin\theta]\vec{V}$$

Από την παραπάνω σχέση είναι προφανές ότι

α) τα παράλληλα μεταξύ τους διανύσματα έχουν εξωτερικό γινόμενο ίσο με το μηδέν και

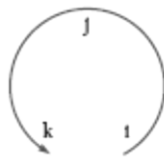
β) τα κάθετα μεταξύ τους διανύσματα έχουν ως αποτέλεσμα διάνυσμα \vec{V} κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα \vec{P}, \vec{Q} . Η φορά του \vec{V} προκύπτει από τον κανόνα του δεξιού χεριού, όπου τα δάχτυλα της παλάμης δείχνουν τη φορά του πολλαπλασιασμού, δηλαδή $\vec{P} \times \vec{Q}$ = πολλαπλασιάζουμε από το \vec{P} προς το \vec{Q} και ο αντίχειρας μας δίνει τη φορά του \vec{V} .



Με βάση τα παραπάνω

$$\vec{P} \times \vec{Q} = -\vec{Q} \times \vec{P}$$

Για δύο διανύσματα εκφρασμένα στο σύστημα της βάσης $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ακολουθούμε τον παρακάτω μνημονικό κανόνα για τον πολλαπλασιασμό των μοναδιαίων



δηλαδή,

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} & \vec{i} \times \vec{i} = 0 \\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} & \vec{j} \times \vec{j} = 0 \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} & \vec{k} \times \vec{k} = 0 \end{cases}$$

Για δύο διανύσματα

$$\vec{P} \times \vec{Q} = (P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}) \times (Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k})$$

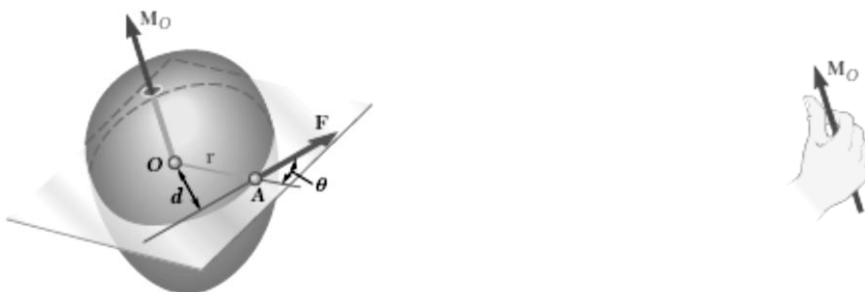
ο υπολογισμός του εξωτερικού γινομένου γίνεται απλούστερα μέσω της σχέσης

$$\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

1.3.5 Ροπή δύναμης ως προς σημείο

Η ροπή δύναμης ως προς σημείο είναι το εξωτερικό γινόμενο του διανύσματος θέσης από το σημείο υπολογισμού της ροπής στο σημείο εφαρμογής της δύναμης επί το διάνυσμα της δύναμης. Δηλαδή,

$$M_o = \vec{\rho}_{oA} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$



Η φορά της ροπής προκύπτει από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Τοποθετώντας τα δάχτυλα της παλάμης κατά τη φορά που περιστρέφει η δύναμη το σώμα ως προς το σημείο O, ο αντίχειρας μας δείχνει τη φορά του διανύσματος της ροπής.

1.3.6 Μικτό γινόμενο διανυσμάτων

Το μικτό γινόμενο διανυσμάτων είναι βαθμωτό μέγεθος και ορίζεται ως

$$\vec{S} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$



Με το μικτό γινόμενο υπολογίζουμε τον όγκο που ορίζουν τα τρία διανύσματα.

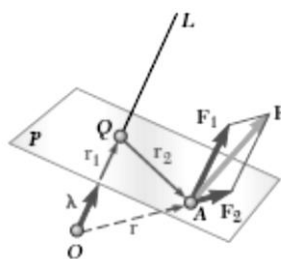
1.3.7 Ροπή γύρω από άξονα

Η συνολική ροπή της δύναμης \vec{F} γύρω από το άξονα OL δίνεται από

$$M_{OL} = \vec{\lambda} \cdot \vec{M}_O = \vec{\lambda} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$$

όπου $\vec{\lambda}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που ορίζει τη διεύθυνση του άξονα OL και

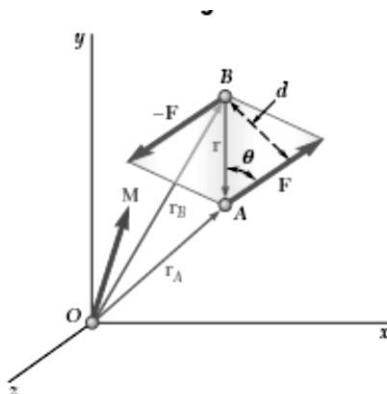
\vec{r} το διάνυσμα θέσης από οποιοδήποτε σημείο του άξονα OL σε οποιοδήποτε σημείο του φορέα της \vec{F} .



1.3.8 Ροπή ζεύγους δυνάμεων

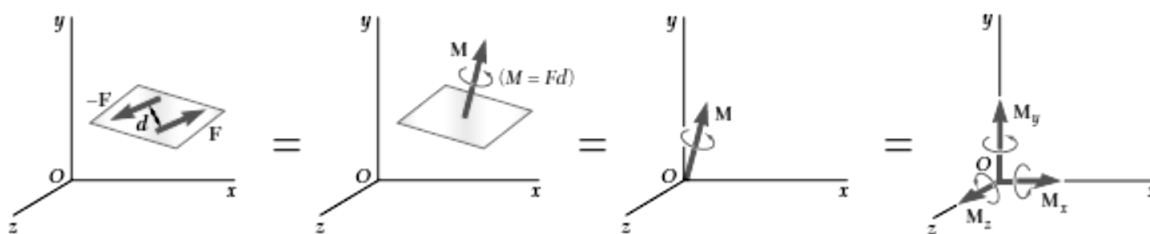
Η συνολική ροπή δύο ίσων και αντίρροπων δυνάμεων (ζεύγος) δίνεται από

$$\vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}$$



1.3.9 Η ροπή ως διάνυσμα

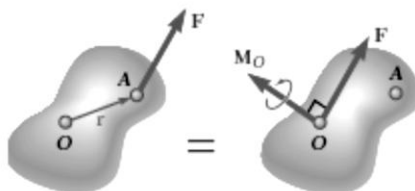
Την ροπή τη χειριζόμαστε ως οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα (ανάλυση σε συνιστώσες) αρκεί να θυμόμαστε ότι τα δάχτυλα της παλάμης δείχνουν τη στροφή του σώματος, λόγω δυνάμεων ή ροπών, και ο αντίχειρας του δεξιού χεριού μας δίνει τη φορά, τη διεύθυνση δηλαδή το διάνυσμα της ροπής.



1.3.10 Μεταφορά δύναμης εκτός του φορέα της

Οποιαδήποτε δύναμη που ασκείται σε κάποιο σημείο A ενός σώματος μπορεί να αντικατασταθεί από ένα ζεύγος ροπής και δύναμης που ασκούνται σε τυχαίο σημείο O. Η ροπή στο σημείο O είναι ίση με τη ροπή που προκαλεί δύναμη γύρω από το O όταν ασκείται στο σημείο A.

$$\vec{M}_O = \vec{\rho}_{OA} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$



1.3.11 Ισορροπία στερεού σώματος στο χώρο

Για την στατική ισορροπία ενός σώματος στο χώρο σχεδιάζουμε το Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος (Δ.Ε.Σ.), τοποθετώντας στο σώμα όλες τις εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σ αυτό και απαιτούμε

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 \end{cases}$$

και

$$\Sigma \vec{M}_O = 0 \Rightarrow \Sigma (\vec{r} \times \vec{F}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma M_x = 0 \\ \Sigma M_y = 0 \\ \Sigma M_z = 0 \end{cases}$$

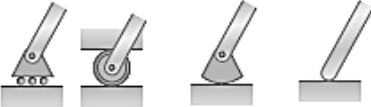

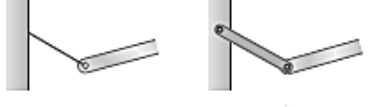


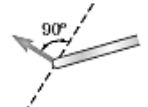

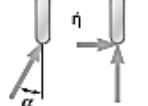

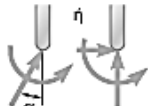
1.3.12 Ισορροπία στερεού σώματος στο επίπεδο / Αντιδράσεις στήριξης

Για τον υπολογισμό της ισορροπίας στερεού σώματος και την εύρεση των αντιδράσεων στήριξης:

Βήμα 1^ο επιλέγουμε θετικό (δεξιόστροφο) σύστημα συντεταγμένων,

Βήμα 2^ο σχεδιάζουμε το Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος (Δ.Ε.Σ.). Στο Δ.Ε.Σ. θα πρέπει να εμφανίζονται όλες τις εξωτερικές δυνάμεις καθώς και οι δυνάμεις που ασκούνται από τις στηρίξεις του σώματος σ αυτό. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι διάφοροι τύποι στηρίξεων και οι άγνωστες δυνάμεις που τους συνοδεύουν (στο επίπεδο) και

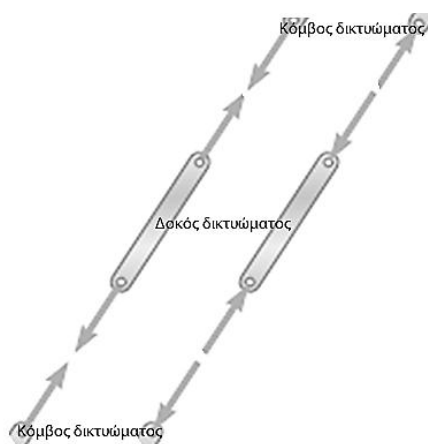
Βήμα 3^ο εφαρμόζουμε τις εξισώσεις ισορροπίας του στερεού σώματος για τον υπολογισμό των άγνωστων αντιδράσεων. Οι άγνωστες δυνάμεις ή/και ροπές των στηρίξεων σχεδιάζονται με **αυθαίρετη φορά**. Αν μετά τον υπολογισμό προκύψουν θετικές η φορά που υποθέσαμε ήταν ορθή διαφορετικά τη διορθώνουμε στο Δ.Ε.Σ..

Είδος έδρασης	Αντίδραση	Αρ. αγνώστων
 <p>Κύλιση Επκράνεα χωρίς τριβή</p>	 <p>Άγνωστη δύναμη γνωστής διεύθυνσης</p>	1
 <p>Καλώδιο Εσωτερική άρθρωση</p>	 <p>Άγνωστη δύναμη γνωστής διεύθυνσης</p>	1
 <p>Οδηγός</p>	 <p>90° Άγνωστη δύναμη γνωστής διεύθυνσης</p>	1
 <p>Άρθρωση Επκράνεα με τριβή</p>	 <p>ή α Άγνωστη δύναμη αγνώστης διεύθυνσης</p>	2
 <p>Πάκτωση</p>	 <p>ή α Άγν. δύναμη (διευθ.) & άγν. ροπή</p>	3

1.4. ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

1.4.1 Δοκοί και κόμβοι των δικτυωμάτων

Στα δικτυώματα συναντούμε δύο βασικά στοιχεία τις δοκούς και τους κόμβους. Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται είτε στους κόμβους είτε στις δοκούς μεταφέρονται τελικά στους κόμβους.



Όπως φαίνεται κι από το παραπάνω σχήμα όταν οι δυνάμεις σχεδιάζονται να απομακρύνονται από τους κόμβους τότε οι δοκοί εφελκύνονται και το αντίστροφο. Προφανώς μεταξύ δύο κόμβων και της ενδιάμεσης δοκού η σχέση των δυνάμεων στα άκρα της δοκού και των κόμβων θα είναι η γνωστή μας δράση – αντίδραση.

1.4.2 Απλό δικτύωμα

Ένα απλό δικτύωμα αποτελείται από παράθεση ενός ή περισσότερων στερεών δικτυωμάτων. Το απλούστερο στερεό δικτύωμα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα αριστερά ενώ δεξιά με παράθεσή του προκύπτει ένα μεγαλύτερο απλό δικτύωμα.



Σ ένα απλό δικτύωμα η σχέση μεταξύ του αριθμού των δοκών (m) και των κόμβων (n) δίνεται από τη σχέση

$$m = 2n - 3$$

1.4.3 Μέθοδος των κόμβων για δικτύωμα

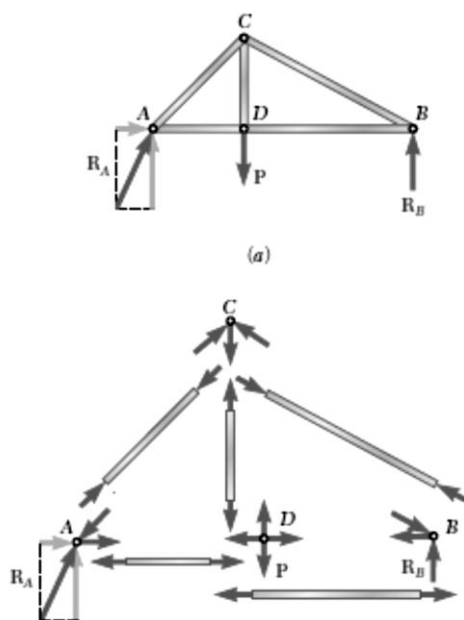
Βήμα 1^ο Το ζητούμενο είναι να βρούμε τις δυνάμεις που ασκούνται στις δοκούς του δικτυώματος. Επομένως, κάθε δοκός φέρει μια άγνωστη δύναμη κατά τη διεύθυνσή της. Ο υπολογισμός των δυνάμεων των δοκών θα γίνει μέσω του υπολογισμού των δυνάμεων στους κόμβους.

Βήμα 2^ο Υπολογίζουμε τις εξωτερικές αντιδράσεις του δικτυώματος γράφοντας τις εξισώσεις ισορροπίας για ολόκληρο το δικτύωμα. Εφόσον το δικτύωμα είναι στερεό σώμα μπορούμε να γράψουμε 3 εξισώσεις ισορροπίας για τον υπολογισμό 3 αγνώστων αντιδράσεων.

Βήμα 3^ο Κατακερματίζουμε το δικτύωμα σε δοκούς και κόμβους. Αντιμετωπίζοντας κάθε κόμβο ως υλικό σημείο γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας υλικού σημείου για κάθε κόμβο. Εφόσον έχουμε 2 εξισώσεις ισορροπίας σε κάθε κόμβο θα πρέπει να εκκινήσουμε τη μέθοδο υπολογισμού από τον κόμβο στον οποίο συντρέχουν **το πολύ 2** άγνωστες δυνάμεις, δηλαδή **το πολύ 2** δοκοί. Τυπικά σχεδιάζουμε τις άγνωστες δυνάμεις στον κόμβο ώστε η φορά τους να είναι από τον κόμβο προς τη δοκό.

Βήμα 4^ο Επιλύοντας έναν κόμβο προχωρούμε στο γειτονικό στον οποίο και πάλι πρέπει να συντρέχουν **το πολύ 2** άγνωστες δυνάμεις.

Βήμα 5^ο Έχοντας βρει τις δυνάμεις στους κόμβους μεταφέρουμε τις δυνάμεις των κόμβων στις δοκούς και σχεδιάζουμε έναν πίνακα που αναγράφεται η τιμή της καταπόνησης κάθε δοκού και το είδος της καταπόνησης (εφελκυστική ή θλιπτική).



	Ισοροπία κόμβου	Δυναμοπολύγωνο
Κόμβος Α		
Κόμβος D		
Κόμβος C		
Κόμβος Β		

1.4.4 Μέθοδος των τομών για δικτύωμα

Η μέθοδος των κόμβων είναι χρήσιμη όταν ζητούνται οι δυνάμεις σε όλες τις δοκούς του δικτύωματος. Όταν όμως ζητούνται οι δυνάμεις μόνο σε κάποιες δοκούς του δικτύωματος τότε γίνεται η χρήση της μεθόδου των τομών.



Βήμα 1^ο Εφόσον είναι απαραίτητο, υπολογίζουμε τις εξωτερικές αντιδράσεις του δικτύωματος γράφοντας τις εξισώσεις ισορροπίας για ολόκληρο το δίκτυωμα. Εφόσον το δίκτυωμα είναι στερεό σώμα μπορούμε να γράψουμε 3 εξισώσεις ισορροπίας για τον υπολογισμό 3 αγνώστων αντιδράσεων.

Βήμα 2^ο Κάνουμε μια τομή σε **το πολύ τρεις διαδοχικές δοκούς.**

Βήμα 3^ο Κρατάμε το δίκτυωμα είτε δεξιά είτε αριστερά της τομής.

Βήμα 4^ο Στη θέση της τομής αντικαθιστούμε τις δοκούς από τις οποίες διέρχεται η τομή με τις άγνωστες δυνάμεις. Τυπικά τις σχεδιάζουμε τις δυνάμεις με φορά από το κόμβο προς τη δοκό.

Βήμα 5^ο Εφόσον το δίκτυωμα είναι στερεό σώμα μπορούμε να γράψουμε 3 εξισώσεις ισορροπίας για τον υπολογισμό 3 αγνώστων δυνάμεων.

1.4.5 Ανάλυση πλαισίων ή μηχανισμών με εσωτερικές στηρίξεις

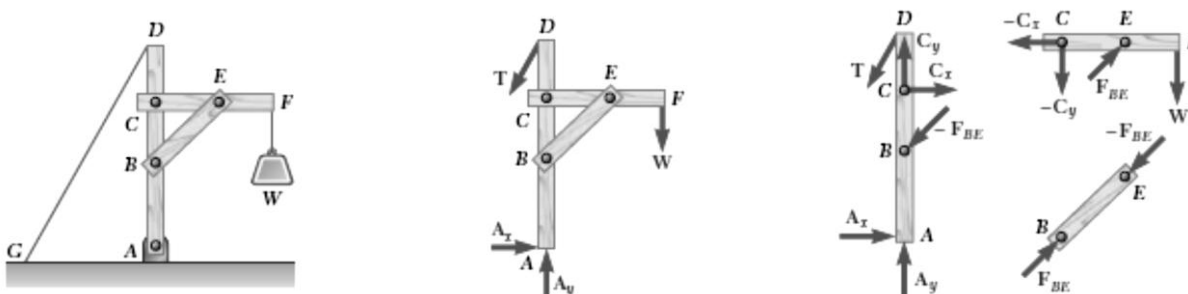
Στις περιπτώσεις όπου καλούμαστε να μελετήσουμε ένα πλαίσιο ή μηχανισμό με εσωτερικές αρθρώσεις, τότε συχνά πρέπει να υπολογίσουμε τις εξωτερικές και εσωτερικές αντιδράσεις του πλαισίου ή μηχανισμού. Για το λόγο αυτό κατακερματίζουμε το πλαίσιο ή μηχανισμό στα διάφορα μέλη του και εξετάζοντας την ισορροπία ολόκληρου του πλαισίου ή μηχανισμού όπως επίσης και την ισορροπία των μελών του. Συνοπτικά:

Βήμα 1^ο Γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας ολόκληρου του πλαισίου ή μηχανισμού.

Βήμα 2^ο Κατακερματίζουμε τα μέλη του μηχανισμού.

Βήμα 3^ο Γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για κάθε μέλος.

Βήμα 4^ο Συνδυάζουμε τις παραπάνω εξισώσεις για να υπολογίσουμε το συνολικό αριθμό των αγνώστων που αναφέρεται στις εξωτερικές και εσωτερικές αντιδράσεις του πλαισίου ή του μηχανισμού.



1.5. ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΦΟΡΤΙΑ ΔΙΑΤΟΜΩΝ

Για την ανάλυση της φόρτισης διατομών, κυρίως δοκών, χρησιμοποιούμε τη μεθοδολογία που κάνει χρήση της έννοιας των εσωτερικών φορτίων. Για την ανάλυση με αυτή τη μεθοδολογία λαμβάνουμε υπόψη ότι

- τα εσωτερικά φορτία διατομών αντικατοπτρίζουν τις δυνάμεις (ροπές) που κρατούν σε συνοχή το υλικό,
- για την εύρεση των εσωτερικών φορτίων κάνουμε ιδεατές τομές σε επιλεγμένες θέσεις της δοκού και
- στη θέση της τομής τοποθετούμε τα προς εύρεση φορτία διατομών και δουλεύουμε είτε στο αριστερό είτε στο δεξί της τομής τμήμα, εφαρμόζοντας τις εξισώσεις για την ισορροπία του στερεού σώματος.

1.5.1 Φύση των εσωτερικών φορτίων διατομών

Οι εξωτερικές δυνάμεις που ενεργούν σε κάποιο σώμα ή φορέα, μεταφέρονται μέσω της μάζας του σώματος ή του φορέα στις στηρίξεις και έτσι προκαλούνται οι γνωστές *αντιδράσεις* που υπολογίζουμε με τις εξισώσεις ισορροπίας του στερεού σώματος. Σε κάθε επομένως σημείο της μάζας του σώματος ή του φορέα «κυκλοφορούν» φορτία (δυνάμεις και ροπές). Αυτά τα φορτία που ονομάζονται εσωτερικά φορτία διατομών και η μεθοδολογία υπολογισμού τους είναι το ζητούμενο αυτής της παραγράφου.

1.5.2 Γενική μεθοδολογία επίλυσης

Βήμα 1^ο Για το δεδομένο φορέα προς επίλυση επιλέγουμε το θετικό σύστημα συντεταγμένων (δεξιόστροφο).

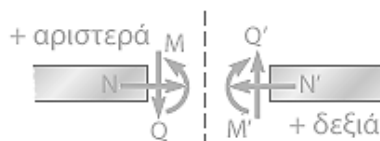
Βήμα 2^ο Σχεδιάζουμε το Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος (Δ.Ε.Σ.) τοποθετώντας όλες τις εξωτερικές δυνάμεις καθώς και αυτές που προέρχονται από τις στηρίξεις του σώματος.

Βήμα 3^ο Ανάλογα με τον τύπο του φορέα προς μελέτη επιλύουμε το στατικό μοντέλο κάνοντας χρήση των εξισώσεις ισορροπίας του στερεού σώματος.

Βήμα 4^ο Ξεκινούμε να διατρέχουμε το φορέα από αριστερά προς τα δεξιά και εφαρμόζουμε τη μέθοδο των ιδεατών τομών. Οι τομές γίνονται πάντα λίγο πριν τα σημεία που είναι υποψήφια για τη μεταβολή της εσωτερικής φόρτισης της δοκού ή του σώματος. Τέτοια σημεία είναι π.χ. τα σημεία που ασκούνται εξωτερικά φορτία (σημειακές και καταναμημένες δυνάμεις ή σημειακές ροπές).

Βήμα 5^ο Στα σημεία της τομής τοποθετούμε τα προς εύρεση εσωτερικά φορτία $M(x), N(x), Q(x)$ που είναι συνάρτηση της απόστασης x από το αριστερό άκρο του φορέα. Η απόσταση αυτή είναι μια τυχαία θέση μεταξύ του αριστερού άκρου και του σημείου της τομής (**πάντα λίγο πριν** τα σημεία στα οποία παρατηρείται μεταβολή της εσωτερικής φόρτισης).

Βήμα 6^ο Δουλεύουμε είτε στο αριστερό ή στο δεξί τμήμα της τομής, τοποθετώντας τη θετική σύμβαση των προσήμων για τις δυνάμεις και ροπές στη θέση της τομής. Αυτές φαίνονται παρακάτω τόσο για το αριστερό όσο και για το δεξί τμήμα της τομής.



Βήμα 7^ο Γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας του στερεού σώματος που απομένει μετά την τομή. Εργαζόμαστε με τις εξισώσεις ισορροπίας του στερεού σώματος και με τη θετική σύμβαση των προσήμων του Βήματος 6. Την εξίσωση των ροπών τη γράφουμε **πάντα** ως προς το σημείο της τομής.

Βήμα 8^ο Υπολογίζουμε τις τιμές των $M(x), N(x), Q(x)$ ανάλογα με τις τιμές που παίρνει η μεταβλητή x από τη μια θέση της τομής στην άλλη. Τα αποτελέσματα τα αναπαριστούμε σε γράφημα με τον κατακόρυφο άξονα να αναπαριστά τις τιμές των εσωτερικών φορτίων και τον οριζόντιο άξονα τις τιμές της μεταβλητής x .

1.5.3 Παρατηρήσεις στα διαγράμματα

Π1. Η θέση και ο αριθμός των τομών δεν είναι απαραίτητα ο ίδιος για τα τρία διαγράμματα $M(x), N(x), Q(x)$. Θα πρέπει πάντοτε να προσέχουμε ότι το εξωτερικό φορτίο είναι το αίτιο που μεταβάλλει την εσωτερική φόρτιση του φορέα, επομένως η θέση και ο αριθμός των τομών θα πρέπει να συσχετίζεται με τη φύση του εξωτερικού φορτίου (αξονικό, τέμνων ή ροπή), τη θέση του και το υπό μελέτη διάγραμμα $M(x), N(x), Q(x)$.

Π2. Οποτεδήποτε συναντούμε ένα σημειακό φορτίο (δύναμη ή ροπή) πάνω στο φορέα τότε στο αντίστοιχο διάγραμμα εμφανίζεται ένα “άλμα” στις τιμές του. Το “άλμα” είναι ίσο με το μέγεθος της σημειακής δύναμης ή ροπής και είναι προς

- τις θετικές τιμές του διαγράμματος αν η σημειακή ροπή ή δύναμη είναι αντίρροπη από τη θετική σύμβαση προσήμων στο τμήμα δεξιά ή αριστερά της τομής στο οποίο δουλεύουμε,
- τις αρνητικές τιμές του διαγράμματος αν η σημειακή ροπή ή δύναμη είναι ομόρροπη με τη θετική σύμβαση προσήμων στο τμήμα δεξιά ή αριστερά της τομής στο οποίο δουλεύουμε.

Π3. Μεταξύ της τέμνουσας δύναμης $Q(x)$ και του τέμνοντος φορτίου $q(x)$ που φέρει ο φορέας ισχύει η σχέση

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -q(x) \Rightarrow Q_B = Q_A - \int_{x_A}^{x_B} q(x) dx$$

α) Αν το τέμνων φορτίο είναι σημειακή δύναμη τότε $q(x) = 0$, επομένως σ αυτή την περίπτωση $Q_B = Q_A$ και η γραφική παράσταση στο τμήμα από το σημείο Α στο Β είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα x .

β) Αν το τέμνων φορτίο είναι κατανεμημένη δύναμη τότε με βάση τον τύπο της κατανομής η τέμνουσα δύναμη στο Β είναι ίση με την τέμνουσα δύναμη στο Α έχοντας πρώτα αφαιρέσει απ' αυτήν το εμβαδό της κατανεμημένης δύναμης $q(x)$ από το σημείο Α στο Β ($-\int_{x_A}^{x_B} q(x) dx$).

γ) Η συνάρτηση $Q(x)$ της τέμνουσας δύναμης είναι πάντα βαθμού $n + 1$ όπου n ο βαθμός της συνάρτησης $q(x)$.

δ) Όταν εμφανίζεται κατανομή φορτίου $q(x)$, τότε για την επίλυση του στατικού φορέα και την εύρεση των αντιδράσεων όπως και για τη εύρεση των εσωτερικών φορτίων διατομών είναι απαραίτητη η μετατροπή του κατανεμημένου φορτίου σε σημειακό. Το σημειακό φορτίο ισούται πάντα με το εμβαδό της κατανομής και ασκείται στο κέντρο βάρους αυτής.

ε) Τα κατανεμημένα φορτία προκαλούν μεταβολή της εσωτερικής φόρτισης του φορέα κατά το μήκος του φορέα στο οποίο ασκούνται. Επομένως, είναι απαραίτητη μια τομή κατ' αυτό το μήκος προκειμένου να λάβουμε υπόψη την επίδραση του φορτίου αυτού.

Π4. Μεταξύ της ροπής $M(x)$ και της τέμνουσας δύναμης $Q(x)$ που φέρει ο φορέας ισχύει η σχέση

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \Rightarrow M_B = M_A + \int_{x_A}^{x_B} Q(x) dx$$

α) Η συνολική ροπή στο σημείο Β είναι ίση με τη συνολική ροπή στο σημείο Α έχοντας πρώτα προσθέσει σ' αυτήν το εμβαδό της τέμνουσας δύναμης $Q(x)$ από το σημείο Α στο Β ($\int_{x_A}^{x_B} Q(x) dx$).

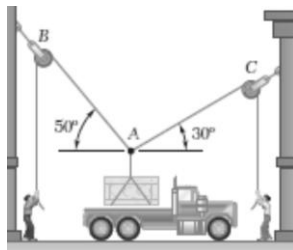
β) Η συνάρτηση $M(x)$ της ροπής είναι πάντα βαθμού $n + 1$ όπου n ο βαθμός της συνάρτησης $Q(x)$.

γ) Στα σημεία όπου η συνάρτηση $Q(x)$ μηδενίζεται η συνάρτηση $M(x)$ παρουσιάζει ακρότατα.

δ) $\frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{dQ(x)}{dx}$ επομένως τα κοίλα της συνάρτησης $M(x)$ θα έχουν το ίδιο πρόσημο με την κλίση της συνάρτησης $Q(x)$.

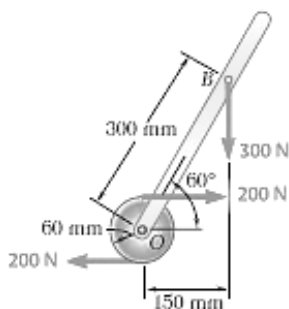
ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Ι

Άσκηση 1.1: Στο Σχήμα 1.1 φαίνεται ένας μηχανισμός ανύψωσης βάρους από όχημα. Αν το κιβώτιο ζυγίζει $75[kg]$ να βρεθούν οι δυνάμεις των σχοινιών AB και AC ώστε το βάρος μόλις να ανυψωθεί.



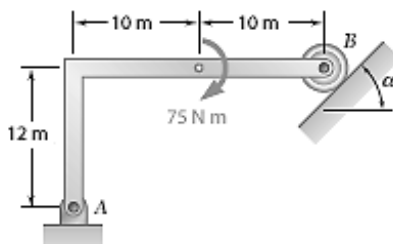
Σχήμα 1.1

Άσκηση 1.2: Στο Σχήμα 1.2 παριστάνεται ένα μοχλός αρθρωμένος στο σημείο O . Να αντικατασταθούν οι τρεις δυνάμεις του σχήματος με μια μόνο δύναμη που να ασκείται στο μοχλό και να υπολογιστεί η θέση άσκησης της δύναμης αυτής από το σημείο O .



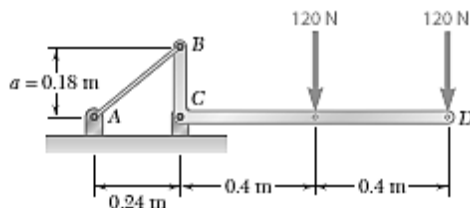
Σχήμα 1.2

Άσκηση 1.3: Για το μηχανισμό του Σχήματος 1.3 να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στήριξης στα σημεία A και B , ώστε να ισορροπεί, αν είναι γνωστό ότι i) $\alpha = 0$, ii) $\alpha = 30^\circ$ και iii) $\alpha = 90^\circ$.



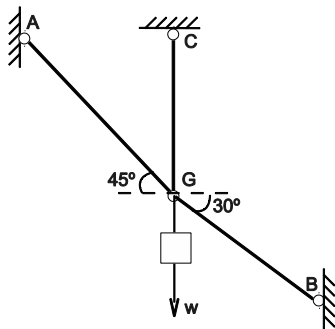
Σχήμα 1.3

Άσκηση 1.4: Ο μηχανισμός του Σχήματος 1.4 στηρίζεται μέσω της άρθρωσης C και του σχοινιού AB . Να υπολογιστούν α) η δύναμη του σχοινιού AB και η αντίδραση στην άρθρωση C , ώστε ο μηχανισμός να ισορροπεί.



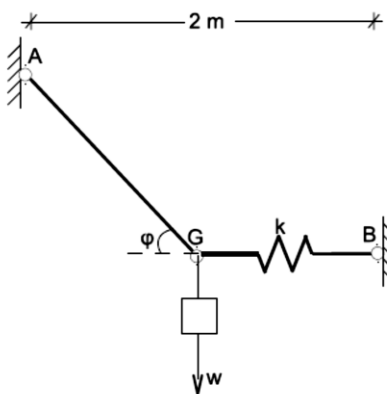
Σχήμα 1.4

Άσκηση 1.5: Δίνεται το σύστημα του Σχήματος 1.5. Αν γνωρίζετε ότι η δύναμη του καλωδίου CG είναι 40 kN , υπολογίστε τις δυνάμεις των δεσμικών ράβδων AG και BG έτσι ώστε το υλικό σημείο G να βρίσκεται σε ισορροπία. Δίνεται $w = 80\text{ kN}$.



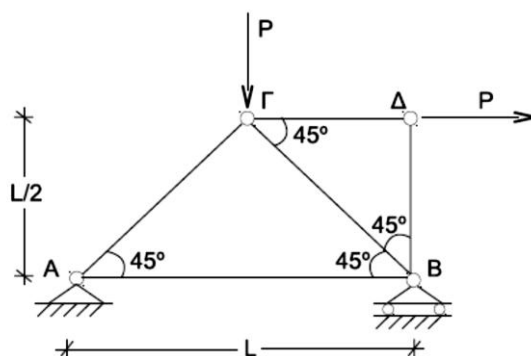
Σχήμα 1.5

Άσκηση 1.6: Δίνεται το σύστημα του Σχήματος 1.6. Υπολογίστε το απαιτούμενο μήκος για το καλώδιο AG έτσι ώστε το σύστημα να ισορροπεί στη θέση που φαίνεται. Δίνονται $k = 350\text{ kN/m}$, το αρχικό μήκος του ελατηρίου $BG = 0.4\text{ m}$, $\varphi = 35^\circ$, $w = 80\text{ kN}$.



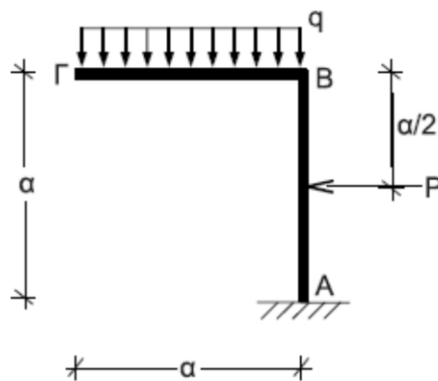
Σχήμα 1.6

Άσκηση 1.7: Υπολογίστε τις αντιδράσεις των στηρίξεων έτσι ώστε το δικτύωμα του Σχήματος 1.7 να ισορροπεί. Δίνονται $L = 6m, P = 12kN$.



Σχήμα 1.7

Άσκηση 1.8: Υπολογίστε τις αντιδράσεις της στήριξης ώστε το πλαίσιο του Σχήματος 1.8 να ισορροπεί. Δίνονται $a = 1.4m, P = 6kN, q = 3kN/m$.



Σχήμα 1.8

[TYPE THE COMPANY NAME]

Περίληψη μαθήματος II

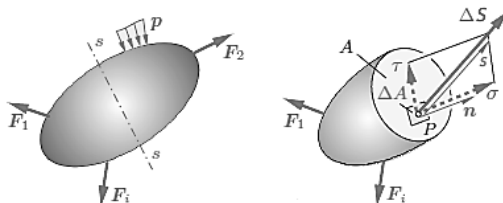
Τυπολόγιο – μεθοδολογία αντοχής

II.1. ΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΝΤΑΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ

II.1.1 Ορισμός τάσης

ΤΑΣΗ είναι η ανά μονάδα επιφανείας εσωτερική δύναμη που προκύπτει λόγω των εξωτερικών φορτίσεων. Στη στοιχειώδη επιφάνεια της ιδεατής τομής του σχήματος το διάνυσμα της τάσης θα είναι:

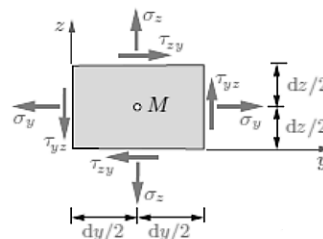
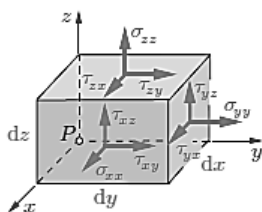
$$\vec{s} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta A} = \frac{d\vec{S}}{dA}$$



- Η κάθετη συνιστώσα σ στην επιφάνεια ΔA ονομάζεται **ορθή τάση** και μπορεί να είναι εφελκυστική ή θλιπτική.
- Η παράλληλη συνιστώσα τ στην επιφάνεια ΔA ονομάζεται **διατμητική τάση**.

II.1.2 Τρισδιάστατη εντατική κατάσταση

Οι ορθές τάσεις $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ ενεργούν κατά τους άξονες x, y, z και κάθετα στις επιφάνειες του κύβου του σχήματος. Οι δείκτες της ορθής τάσης απλοποιούνται σε $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ και υποδηλώνουν την κατεύθυνση του άξονα στον οποίο ενεργεί η τάση.



Οι διατμητικές τάσεις ενεργούν κατά τους άξονες x, y, z και παράλληλα στις επιφάνειες του κύβου του σχήματος. Οι πρώτος δείκτης της διατμητικής τάσης υποδηλώνει το κάθετο διάνυσμα επιφανείας στην οποία ενεργεί η διατμητική τάση και ο δεύτερο δείκτης την κατεύθυνση της τάσης. Για παράδειγμα η διατμητική τάση τ_{xy}

- ενεργεί σε μια επιφάνεια που είναι κάθετη στον άξονα x και
- ενεργεί κατά τη κατεύθυνση y .

Με αυτό τον τρόπο ορίζεται ο **τανυστής τάσεων 2ας τάξης** ως

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

- Οι γραμμές του τανυστή υποδηλώνουν αντίστοιχα τις κατευθύνσεις x, y, z και
- Οι στήλες του τανυστή υποδηλώνουν αντίστοιχα επιφάνειες κάθετες στις κατευθύνσεις x, y, z .

Η εφαρμογή των συνθηκών ισορροπίας ροπών συνολικά ως προς x, y, z δίνουν τις γνωστές σχέσεις του Cauchy για τις διατμητικές τάσεις,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

οπότε οι ανεξάρτητες συνιστώσες τάσεων του ταυυστή της τάσης μειώνονται από εννέα (9) σε έξι (6).

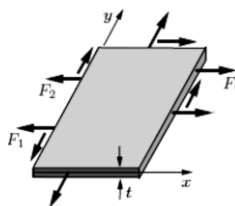
Η εφαρμογή των συνθηκών ισορροπίας δυνάμεων συνολικά ως προς x, y, z δίνουν τις συνθήκες ισορροπίας για την τρισδιάστατη εντατική κατάσταση:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases}$$

όπου X, Y, Z είναι οι μαζικές δυνάμεις (βαρυτικές, ηλεκτρομαγνητικές) κατά τους άξονες x, y, z .

II.1.3 Επίπεδη εντατική κατάσταση – προβλήματα επίπεδης τάσης

Στην επίπεδη εντατική κατάσταση του δίσκου του σχήματος παρατηρούμε ότι



- το πάχος του δίσκου είναι κατά πολύ μικρότερο των δύο υπολοίπων διαστάσεων,
- ο δίσκος φορτίζεται με εξωτερικά φορτία μόνο στο επίπεδό του ($x - y$) και
- η άνω και κάτω επιφάνεια του δίσκου είναι αφόρτιστες.

Τα παραπάνω σημεία ορίζουν το πρόβλημα **της επίπεδης τάσης** που με επαρκή ακρίβεια υποθέτουμε ότι

1. οι συνιστώσες της τάσης στη διεύθυνση z είναι μηδενικές $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ και
2. οι υπόλοιπες συνιστώσες της τάσης παραμένουν σταθερές κατά το πάχος του δίσκου.

Ο ταυυστής της τάσης μετασχηματίζεται σε

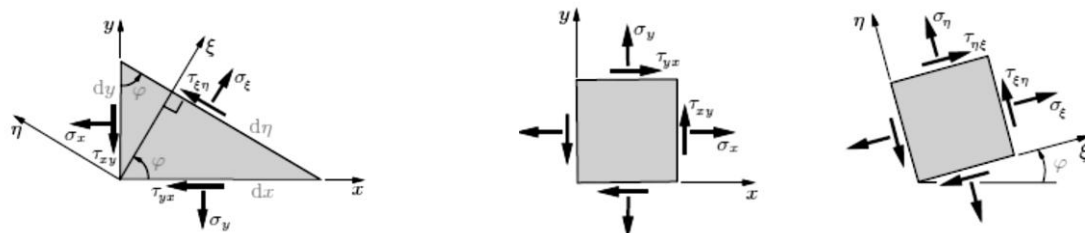
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ενώ οι εξισώσεις ισορροπίας

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \end{cases}$$

II.1.4 Αναλυτικός προσδιορισμός τάσεων

Γνωρίζοντας τις τάσεις $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ σε τυχαίο σημείο στο επίπεδο και κατά τους άξονες $x - y$ υπολογίζουμε τις τάσεις $\sigma_{\xi}, \sigma_{\eta}, \tau_{\xi\eta}$ στο ίδιο σημείο κατά άξονες $\xi - \eta$ που έχουν περιστραφεί κατά γωνία φ σε σχέση με τους αρχικούς. Οι νέες τάσεις δίνονται από



$$\begin{cases} \sigma_{\xi,\eta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi \pm \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau_{\xi\eta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \end{cases}$$

Οι παραπάνω τιμές των τάσεων στους άξονες $\xi - \eta$ εξαρτώνται από τη γωνία φ .

- Μέγιστες ορθές τάσεις.

Η διεύθυνση στην οποία οι ορθές τάσεις $\sigma_{\xi}, \sigma_{\eta}$ παρουσιάζουν τη μέγιστη τιμή ονομάζεται **κύρια διεύθυνση** κι αυτές οι τάσεις ονομάζονται **κύριες τάσεις**. Η γωνία φ_0 της κύριας διεύθυνσης δίνεται από τη λύση της εξίσωσης

$$\frac{d\sigma_{\xi}}{d\varphi} = \frac{d\sigma_{\eta}}{d\varphi} = 0 \text{ και είναι ίση με}$$

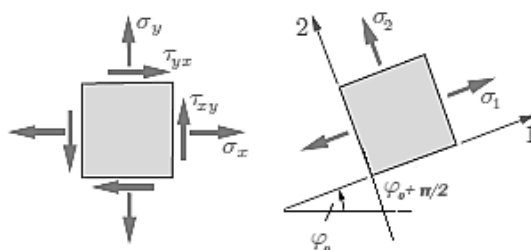
$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Λόγω της περιοδικότητας της εφαπτομενικής συνάρτησης η ζητούμενη διεύθυνση είναι η φ_0 και η κάθετη σ αυτή $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$. Αυτές οι δύο γωνίες (διευθύνσεις) ορίζουν το **κύριο σύστημα συντεταγμένων**. Η τιμή των κυρίων τάσεων $\sigma_{\xi}, \sigma_{\eta}$ (έστω σ_1 η μέγιστη και σ_2 η ελάχιστη) για τις δύο αυτές γωνίες είναι

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

ενώ η διατμητική τάση στο κύριο σύστημα συντεταγμένων είναι

$$\tau_{\xi\eta} = 0$$



- Μέγιστες διατμητικές τάσεις.

Η διεύθυνση στην οποία διατμητικές τάσεις $\tau_{\xi\eta}$ παρουσιάζουν τη μέγιστη τιμή προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης $\frac{d\tau_{\xi\eta}}{d\varphi} = 0$ και είναι ίση με

$$\tan 2\varphi_1 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

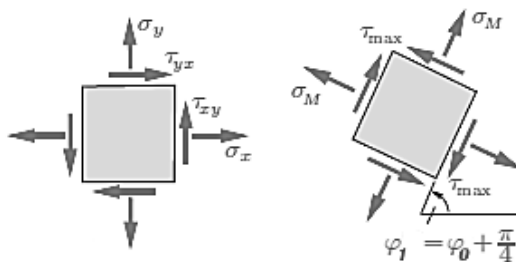
Λόγω της περιοδικότητας της εφαπτομενικής συνάρτησης η ζητούμενη διεύθυνση είναι η φ_1 και η κάθετη σ αυτή $\varphi_1 + \frac{\pi}{2}$. Η τιμή της μέγιστης διατμητικής τάσης είναι

$$\tau_{\xi\eta} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Η δύο τιμές είναι κατ' απόλυτη τιμή ίσες και το πρόσημο υποδηλώνει την κατεύθυνση της διατμητικής τάσης κατά τη θετική διεύθυνση (+) και κατά την αρνητική διεύθυνση (-).

Στην περίπτωση αυτή η κύρια τάση παίρνει την τιμή

$$\sigma_{\xi,\eta} = \sigma_M = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$



Να σημειωθεί ότι

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{\pi}{4}$$

Δηλαδή, οι άξονες στους οποίους εμφανίζεται η μέγιστη διατμητική τάση έχουν στραφεί κατά 45 μοίρες ως προς του άξονες στους οποίους εμφανίζεται η μέγιστη ορθή τάση.

II.1.5 Γραφικός προσδιορισμός - κύκλος του Mohr

Η εξίσωση του κύκλου του Mohr συνδέει τις τάσεις στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων $x - y$ και τις τάσεις σε σύστημα συντεταγμένων $\xi - \eta$ που έχουν περιστραφεί κατά γωνία φ σε σχέση με τους αρχικούς. Αυτή είναι

$$\left[\sigma_{\xi} - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right]^2 + \tau_{\xi\eta}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \Rightarrow$$

$$(\sigma - \sigma_M)^2 + (\tau - 0)^2 = r^2$$

Επομένως το κέντρο του κύκλου του Mohr είναι το σημείο με συντεταγμένες

$$[\sigma_M, 0] = \left[\frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2}, 0 \right]$$

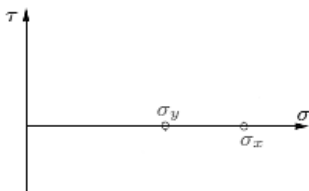
και ακτίνα

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

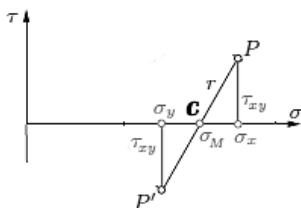
II.1.6 Κατασκευή του κύκλου του Mohr

Εφόσον είναι γνωστή η εντατική κατάσταση του σώματος από τις τάσεις $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ είναι δυνατή η κατασκευή του κύκλου στο επίπεδο σ, τ .

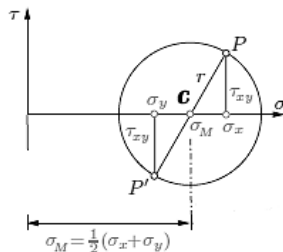
- Πάνω στον άξονα των ορθών τάσεων σημειώνονται οι τάσεις σ_x, σ_y με το πρόσημό τους.



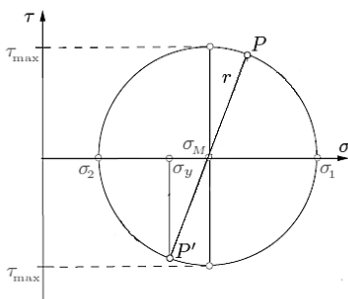
- Με βάση αυτά τα σημεία φέρουμε τα οριζόντια τμήματα ίσα με τη διατμητική τάση τ_{xy} και ορίζουμε τα σημεία P και P' . Το σημείο P αντιστοιχεί στην τάση σ_x και το πρόσημο της διατμητικής τάσης του προβλήματος που μελετούμε ενώ το σημείο P' στην τάση σ_y και το αντίθετο πρόσημο της διατμητικής τάσης του προβλήματος που μελετούμε. Επομένως τα σημεία P, P' αναφέρονται στα επίπεδα στα οποία ασκούνται οι τάσεις σ_x, τ_{yx} και σ_y, τ_{xy} .



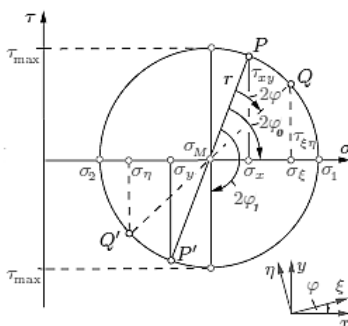
- Το σημείο C με συντεταγμένες $[\sigma_M, 0] = \left[\frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2}, 0 \right]$ ορίζει το κέντρο του κύκλου και αντίστοιχα η απόσταση CP την ακτίνα του κύκλου.



- Η ανάγνωση των τιμών των μεγίστων ορθών και διατμητικών τάσεων γίνεται κατευθείαν από το διάγραμμα. Οι τομές του κύκλου με τον άξονα σ μας δίνουν τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της ορθής τάσης σ_1, σ_2 όπου η διατμητική παίρνει τιμή ίση με μηδέν $\tau = 0$, ενώ η κάθετη που περνά από το κέντρο κύκλου σ_M και είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου μας δίνει τη μέγιστη κατ' απόλυτο τιμή, διατμητική τάση τ_{max} όπου η ορθή τάση παίρνει τιμή $\sigma = \sigma_M$. Το θετικό πρόσημο της διατμητικής τάσης δίνει τη φορά κατά το θετικό άξονα και το αρνητικό κατά την αρνητική αντίστοιχα.

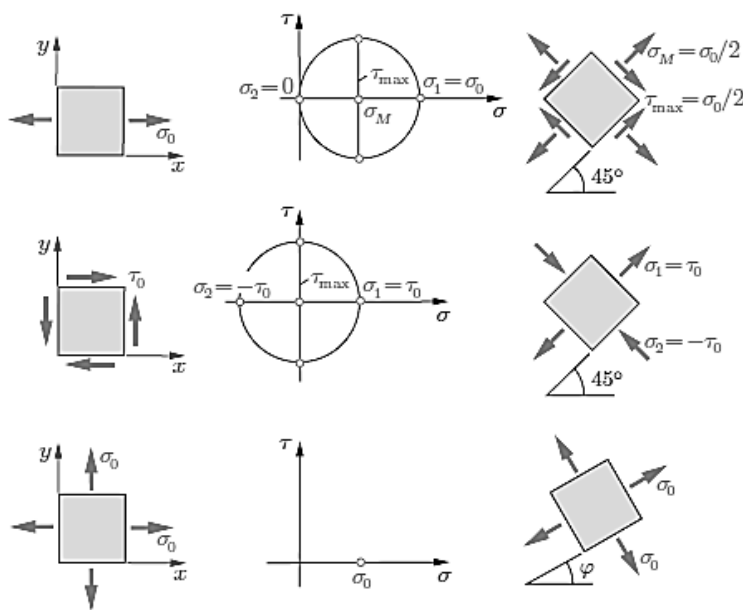


- Η γωνία στην οποία εμφανίζονται οι μέγιστες ορθές τάσεις, σε σχέση με το αρχικό σύστημα συντεταγμένων, δίνεται απ ευθείας από τον κύκλο. Η γωνία αυτή, έστω φ_0 , είναι η διπλάσια γωνία μεταξύ της ευθείας που σχηματίζουν τα σημεία της αρχικής φόρτισης P, P' και του άξονα των ορθών τάσεων, δηλαδή η $2\varphi_0$, κινούμενοι με την ωρολογιακή φορά. Η τάση σ_1 θα ασκείται θα ασκείται πάντα στο επίπεδο με γωνία φ_0 ενώ η σ_2 στο επίπεδο $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$, όπως άλλωστε προέκυψε και από την αναλυτική λύση. Η γωνία φ_0 στο φυσικό πρόβλημα μετριέται αντιωρολογιακά από τον άξονα των συντεταγμένων x .



- Η γωνία στην οποία εμφανίζονται οι μέγιστες διατμητικές τάσεις, σε σχέση με το αρχικό σύστημα συντεταγμένων, δίνεται απ ευθείας από τον κύκλο. Η γωνία αυτή, έστω φ_1 , είναι η διπλάσια γωνία μεταξύ της ευθείας που σχηματίζουν τα σημεία της αρχικής φόρτισης P, P' και του άξονα των διατμητικών τάσεων, δηλαδή η $2\varphi_1$, κινούμενοι με την ωρολογιακή φορά.
- Για οποιαδήποτε άλλη περίπτωση όπου ζητούνται οι τάσεις σε τυχαία γωνία φ τότε από την αρχική ευθεία P, P' γράφουμε γωνία ίση με 2φ , κινούμενοι ωρολογιακά, και φέρουμε τη διάμετρο του κύκλου. Τα σημεία Q, Q' μας δίνουν τα στοιχεία των τάσεων στην τυχαία γωνία φ .

Παρακάτω δίνονται χαρακτηριστικές περιπτώσεις του φυσικού προβλήματος και του κύκλου του MOHR που το περιγράφει.



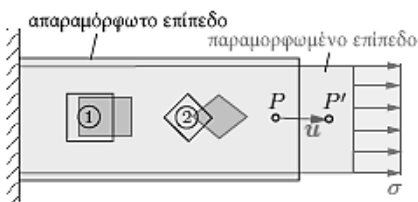
II.2. ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΗΣ - ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

II.2.1 Ανάλυση παραμορφώσεων

Για το σώμα του σχήματος στο οποίο ασκείται ορθή τάση και για δύο στοιχειώδη επίπεδα 1 και 2 ορίζεται, για μικρές παραμορφώσεις,

- η ορθή παραμόρφωση που αναφέρεται σε μεταβολές μηκών και
- η διατμητική παραμόρφωση που αναφέρεται σε μεταβολές γωνιών

των στοιχειωδών επιπέδων 1 και 2 αντίστοιχα.



Αν με $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ συμβολίσουμε τις μετατοπίσεις των σημείων ενός σώματος υπό την επίδραση φορτίσεων τότε οι ορθές παραμορφώσεις για κάθε διεύθυνση του χώρου θα δίνονται από

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

ενώ οι διατμητικές παραμορφώσεις από

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{cases}$$

Με αυτό τον τρόπο ορίζεται και εδώ ο ταυιστής της παραμόρφωσης ως

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Ο μετασχηματισμός των παραμορφώσεων, σ ένα επίπεδο πρόβλημα, ακολουθεί ακριβώς τη ίδια μεθοδολογία με το μετασχηματισμό των τάσεων. Γνωρίζοντας τις παραμορφώσεις $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ σε τυχαίο σημείο στο επίπεδο και κατά τους άξονες $x - y$ υπολογίζουμε τις παραμορφώσεις $\varepsilon_{\xi}, \varepsilon_{\eta}, \gamma_{\xi\eta}$ στο ίδιο σημείο κατά άξονες $\xi - \eta$ που έχουν περιστραφεί κατά γωνία φ σε σχέση με τους αρχικούς. Οι νέες παραμορφώσεις δίνονται από

$$\begin{cases} \varepsilon_{\xi,\eta} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\varphi \pm \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\varphi \\ \frac{1}{2}\gamma_{\xi\eta} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \cos 2\varphi \end{cases}$$

Η διαδικασία υπολογισμού των παραμορφώσεων σε τυχαία γωνία σε σχέση με το αρχικό σύστημα συντεταγμένων (που δίνεται από τις παραπάνω σχέσεις), των μεγίστων παραμορφώσεων, ορθών και διατμητικών, της γωνίας στην οποία αυτές εμφανίζονται, καθώς και οι εξισώσεις του κύκλου του MOHR και η κατασκευή του, ακολουθούν την ίδια μεθοδολογία που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα εφόσον αντικαταστήσουμε **παντού, στις σχέσεις της προηγούμενης ενότητας**, τις ορθές τάσεις σ με ορθές παραμορφώσεις ε και τις διατμητικές τάσεις τ με διατμητικές παραμορφώσεις $\frac{1}{2}\gamma$.

II.2.2 Νόμος του Hooke (Ελαστικότητα)

Ο νόμος του Hooke που συνδέει τις τάσεις με τις παραμορφώσεις είναι

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)] + \alpha \Delta T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \\ \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \end{cases}$$

όπου

ν το μέτρο του Poisson

E το μέτρο ελαστικότητας του υλικού

G το μέτρο διάτμησης του υλικού

α ο συντελεστής θερμικής διαστολής – συστολής του υλικού.

Οι τρεις ελαστικές σταθερές του νόμου του Hooke συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

II.2.3 Επίπεδη εντατική κατάσταση – προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης

Στην επίπεδη εντατική κατάσταση όπου

- η μια διάσταση του σώματος (π.χ. πάχος στη διεύθυνση z) είναι κατά πολύ μεγαλύτερη των δύο υπολοίπων,
- ο δίσκος φορτίζεται με εξωτερικά φορτία κατά τη διεύθυνση z
- οι υπόλοιπες επιφάνειες του σώματος είναι αφόρτιστες.

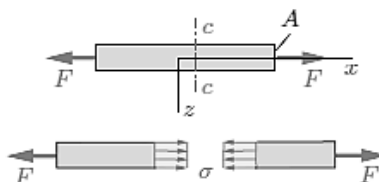
Τα παραπάνω σημεία ορίζουν το πρόβλημα **της επίπεδης παραμόρφωσης** που με επαρκή ακρίβεια υποθέτουμε ότι

1. οι συνιστώσες της παραμόρφωσης στη διεύθυνση z είναι μηδενικές $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$ και
2. οι υπόλοιπες συνιστώσες της παραμόρφωσης παραμένουν σταθερές κατά το πάχος του δίσκου.

Ο ταυστής της παραμόρφωσης μετασχηματίζεται σε

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

II.3. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ



Η ορθή τάση κατά τον άξονα του υπό εφελκυσμό (ή θλίψη) στοιχείου δίνεται από το νόμο του Hooke

$$\sigma_x(z) = \varepsilon_x(z)E$$

Η δοκός παραμορφώνεται ομοιόμορφα κατά x σε όλο της το ύψος z , επομένως

$$\varepsilon_x(z) = \text{σταθερό} = c$$

Η συνολική αξονική τάση σε κάθε επιφάνεια της δοκού επί την επιφάνεια αυτή είναι ίση με το εσωτερικό αξονικό φορτίο στην ίδια επιφάνεια, επομένως η αξονική τάση θα είναι ίση με

$$N_x(x) = \iint_A \sigma_x(z) dA \Rightarrow$$

$$\sigma_x(z) = \frac{N_x(x)}{A(x)}$$

ενώ η αξονική παραμόρφωση λόγω αξονικού φορτίου

$$\varepsilon_x(z) = \frac{N_x(x)}{EA(x)}$$

ενώ αν το σώμα υποβάλλεται σε διαφορά θερμοκρασίας τότε η συνολική παραμόρφωση λόγω φορτίου και θερμοκρασίας είναι

$$\varepsilon_x(z) = \frac{N_x(x)}{EA(x)} + \alpha \Delta T$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση μεταξύ αξονικής παραμόρφωσης και μετατόπισης κατά τον άξονα x

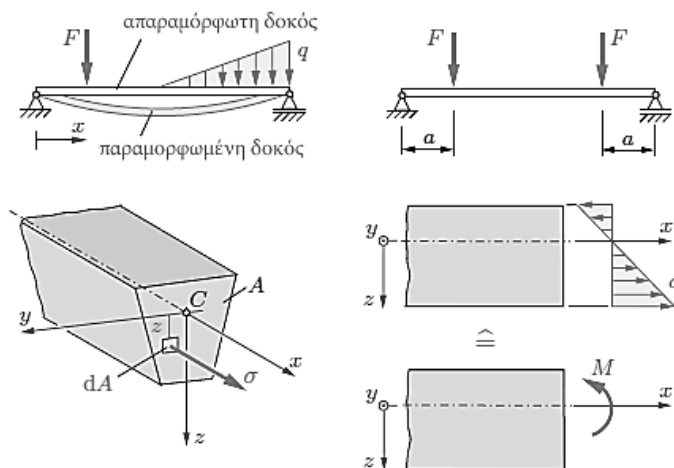
$$\varepsilon_x(z) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{N_x(x)}{EA(x)} + \alpha \Delta T \Rightarrow$$

$$u(x) = \int \left(\frac{N_x(x)}{EA(x)} + \alpha \Delta T \right) dx + C$$

όπου C μια σταθερά ολοκλήρωσης που υπολογίζεται με βάση τις **συνοριακές συνθήκες** τις δοκού, δηλαδή κάποια γνωστή μετατόπιση σε κάποιο σημείο της δοκού.

II.4 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΜΨΗΣ

II.4.1 Καθαρή κάμψη



Κατά την καθαρή κάμψη έχουμε εμφάνιση μόνο ορθών τάσεων στον άξονα της δοκού. Η παραμόρφωσή της είναι μια γραμμική κατανομή της μορφής

$$\varepsilon_x(z) = cz$$

που σημαίνει ότι η μέγιστη παραμόρφωση της δοκού εμφανίζεται στην άνω και κάτω επιφάνεια ενώ για $z = 0$ η δοκός παραμένει απαραμόρφωτη. Να σημειωθεί ότι οι άξονες σ' αυτή την περίπτωση διέρχονται από το σημείο C που είναι το κέντρο βάρους της διατομής.

Η συνολική αξονική τάση σε κάθε επιφάνεια της δοκού επί την επιφάνεια αυτή και επί την απόσταση από τον ουδέτερο άξονα είναι ίση με το εσωτερικό καμπτικό φορτίο στην ίδια επιφάνεια, επομένως η αξονική τάση θα είναι ίση με

$$M_y(x) = \iint_A \sigma_x(z)z \, dA \Rightarrow$$

$$M_y(x) = \iint_A E\varepsilon_x(z)z \, dA = Ec \iint_A z^2 \, dA \Rightarrow$$

$$M_y(x) = \frac{\sigma_x(z)}{z} \iint_A z^2 \, dA \Rightarrow$$

$$\sigma_x(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z$$

όπου $I_y = \iint_A z^2 \, dA$ η ροπή αδρανείας της επιφάνειας ως προς τον άξονα y και το κέντρο βάρους C της διατομής.

Η αξονική τάση έχει γραμμική κατανομή και παίρνει μηδενική τιμή κατά τον ουδέτερο άξονα της δοκού που περνά από το κέντρο βάρους της. Η μέγιστη εφελκυστική και θλιπτική ορθή τάση για μια τυχαία διατομή εμφανίζεται στην άνω και κάτω επιφάνεια της δοκού. Η μέγιστη εφελκυστική και θλιπτική ορθή τάση σε ολόκληρο τη δοκό εμφανίζεται στη θέση της μέγιστης καμπτικής ροπής και πάλι στην άνω και κάτω επιφάνεια της δοκού.

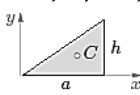
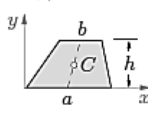
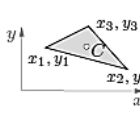
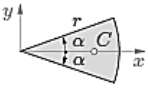
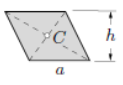
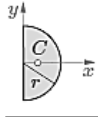
11.4.2 Λοξή κάμψη / σύνθετη κάμψη

Στην περίπτωση όπου η δοκός υπόκειται σε καμπτική καταπόνηση από ροπές με διάνυσμα στον άξονα y και στον άξονα z και επιπλέον υπάρχει εφελκυστικό φορτίο στη διεύθυνση x τότε η ορθή τάση δίνεται από

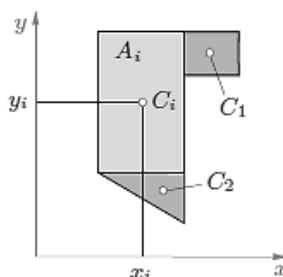
$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N_x(x)}{A(x)} + \frac{M_y(x)}{I_y} z - \frac{M_z(x)}{I_z} y$$

11.4.3 Κέντρο βάρους επιφανειών

Η θέση του κέντρου βάρους στοιχειωδών επιφανειών φαίνεται στον πίνακα παρακάτω

Επιφάνεια	Συντεταγμένες κέντρου βάρους		
<p>Ορθογώνιο τρίγωνο</p>  <p>$A = \frac{1}{2} ah$</p>	$x_c = \frac{2}{3} a, \quad y_c = \frac{h}{3}$	<p>Τραπεζίο</p>  <p>$A = \frac{h}{2} (a + b)$</p>	$y_c = \frac{h}{3} \frac{a + 2b}{a + b}$
<p>Τυχαίο τρίγωνο</p>  <p>$A = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]$</p>	$x_c = \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3)$ $y_c = \frac{1}{3} (y_1 + y_2 + y_3)$	<p>Κυκλικός τομέας</p>  <p>$A = \alpha r^2$</p>	$x_c = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$
<p>Παράλληλογραμμο</p>  <p>$A = ah$</p>	<p>Το κέντρο βάρους βρίσκεται στην τομή των διαγωνίων του παραλληλογράμμου</p>	<p>Ημικύκλιο</p>  <p>$A = \frac{\pi}{2} r^2$</p>	$x_c = \frac{4r}{3\pi}$

Στην περίπτωση όπου η μελετώμενη σύνθετη επιφάνεια μπορεί να περιγραφεί από απλούστερες επιφάνειες τότε

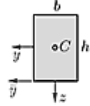




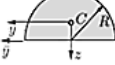
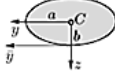


- επιλέγουμε ένα ολικό σύστημα συντεταγμένων,
- τοποθετούμε στα κέντρα βάρους των επιμέρους επιφανειών τα επιμέρους κεντροβαρικά συστήματα συντεταγμένων,
- βρίσκουμε τις συντεταγμένες x_i, y_i των επιμέρους κέντρων βαρών ως προς το ολικό σύστημα συντεταγμένων καθώς και το εμβαδό A_i των επιμέρους επιφανειών και
- υπολογίζουμε τη θέση του ολικού κέντρου βάρους της σύνθετης επιφάνειας ως προς το ολικό σύστημα συντεταγμένων από τις σχέσεις

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^N x_i A_i}{\sum_{i=1}^N A_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^N y_i A_i}{\sum_{i=1}^N A_i}$$

11.4.4 Ροπές αδρανείας επιφανειών

Οι ροπές αδρανείας απλών επιφανειών ως προς το κέντρο βάρους τους δίνονται στον παρακάτω πίνακα

 <p>Ορθογώνιο</p>	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	0
 <p>Τετράγωνο</p>	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	0
 <p>Τρίγωνο</p>	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{bh}{36}(h^2 - ba + a^2)$	$-\frac{bh^2}{72}(b - 2a)$
 <p>Κύκλος</p>	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	0
 <p>$t \ll R_m$</p>	$\pi R_m^3 t$	$\pi R_m^3 t$	0
 <p>Ημικύκλιο</p>	$\frac{R^4}{72\pi}(9\pi^2 - 64)$	$\frac{\pi R^4}{8}$	0
 <p>Έλλειψη</p>	$\frac{\pi}{4}ab^3$	$\frac{\pi}{4}ba^3$	0

Στην περίπτωση όπου η μελετώμενη σύνθετη επιφάνεια μπορεί να περιγραφεί από απλούστερες επιφάνειες τότε

1. βρίσκουμε το κεντροβαρικό σύστημα συντεταγμένων που διέρχεται από το κέντρο βάρους της σύνθετης διατομής, με βάση την παράγραφο 4.3,
2. τοποθετούμε στα κέντρα βάρους των επιμέρους επιφανειών τα επιμέρους κεντροβαρικά συστήματα συντεταγμένων,
3. υπολογίζουμε τις ροπές αδρανείας των επιμέρους επιφανειών ως προς τους άξονες και ως προς τα επιμέρους κέντρα βάρη τους,
4. μεταφέρουμε τις τιμές των ροπών αδρανείας κάθε επιφάνειας από το κέντρο βάρους της στο κέντρο βάρους της σύνθετης διατομής με βάση τη σχέση του Steiner. Για μια απλή διατομή με δείκτη 1

$$(I_y)_1^C = (I_y)_1^{C_1} + a^2 A_1$$

$$(I_z)_1^C = (I_z)_1^{C_1} + b^2 A_1$$

όπου

$(I_y)_1^{C_1}$ η ροπή αδρανείας της απλής διατομής 1 ως προς το κέντρο βάρους της C_1

$(I_y)_1^C$ η ροπή αδρανείας της απλής διατομής 1 ως προς το κέντρο βάρους C της σύνθετης διατομής

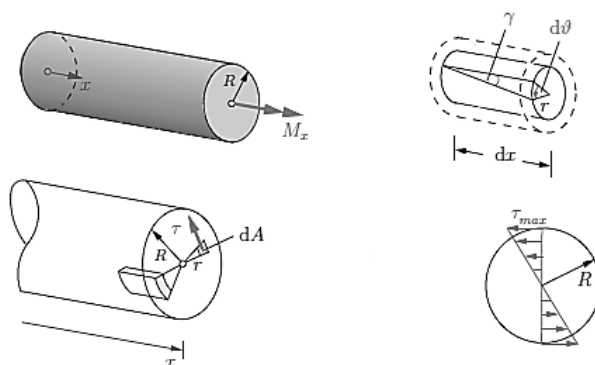
a η απόσταση κατά τον άξονα z των σημείων C και C_1

b η απόσταση κατά τον άξονα y των σημείων C και C_1

A_1 το εμβαδό της διατομής 1

5. εφόσον η σύνθετη διατομή προκύπτει ως άθροισμα των επιμέρους διατομών προσθέτουμε τις τιμές των ροπών αδρανείας κάθε διατομής ως προς άξονα και το κέντρο βάρους ολόκληρης της διατομής, δηλαδή προσθέτουμε τις διάφορες τιμές $(I_y)_i^C$ για κάθε διατομή i .

II.5 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΡΕΨΗΣ



Για πολύ μικρές παραμορφώσεις μπορούμε να δούμε ότι

$$\gamma dx = r d\theta \Rightarrow \gamma = r \frac{d\theta}{dx} = r\theta'$$

Επομένως η διατμητική παραμόρφωση κατά τη στρέψη παρουσιάζει γραμμική κατανομή σε μια τυχαία επιφάνεια της κυκλικής δοκού. Η διατμητική τάση μπορεί να υπολογιστεί μέσω του νόμου του Hooke

$$\tau = G\gamma = Gr\theta'$$

που επίσης εμφανίζει γραμμική κατανομή με μηδενική τιμή στο κέντρο της δοκού (κ.β.), $r = 0$, και μέγιστη στην εξωτερική περιφέρεια, $r = R$.

Η συνολική διατμητική τάση σε κάθε επιφάνεια της δοκού επί την επιφάνεια αυτή και επί την απόσταση από τον ουδέτερο άξονα είναι ίση με το εσωτερικό στρεπτικό φορτίο στην ίδια επιφάνεια, επομένως η διατμητική τάση θα είναι ίση με

$$M_T = \iint_A \tau(r)r \, dA \Rightarrow M_T = \iint_A Gr^2\theta' \, dA \Rightarrow$$

$$M_T = G\theta' \iint_A r^2 \, dA \Rightarrow M_T = G\theta' I_P$$

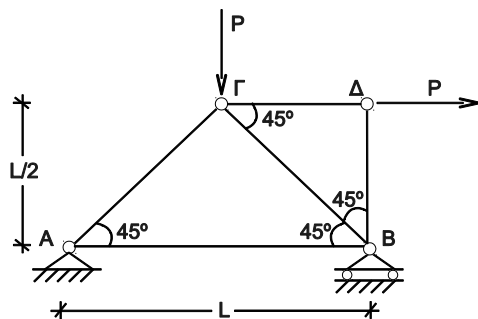
όπου $I_P = \iint_A r^2 \, dA = \frac{\pi R^4}{2}$ η πολική ροπή αδρανείας της κυκλικής επιφάνειας.

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση μπορούμε να βρούμε τη στροφή ενός σημείου. Για μια δοκό μήκους L , ακτίνας r , πακτωμένη στο A και με το ελεύθερο της άκρο στο B όπου ασκείται στρεπτική ροπή ίση με M_T η σχετική στροφή του σημείου B ως προς το A θα είναι

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_T}{GI_P} \Rightarrow \int_{\theta_A}^{\theta_B} d\theta = \frac{M_T}{GI_P} \int_{L_A}^{L_B} dx \Rightarrow (\theta_B - \theta_A) = \frac{M_T}{GI_P} (L_B - L_A)$$

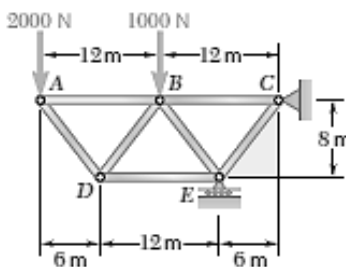
ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ II

Άσκηση II.1: Υπολογίστε τις δυνάμεις (τάσεις) των ράβδων του παρακάτω δικτύωματος. Δίνονται $L = 6m$, $P = 12kN$.



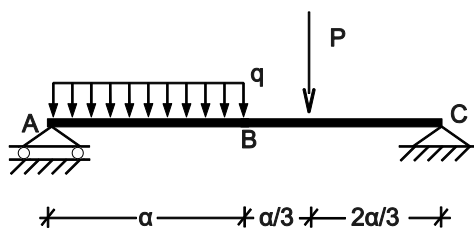
Σχήμα II.1

Άσκηση II.2: Για το δικτύωμα του Σχήματος II.2 να σχεδιασθούν τα εσωτερικά φορτία διατομών $M(x)$, $N(x)$, $Q(x)$ όλων των μελών του.



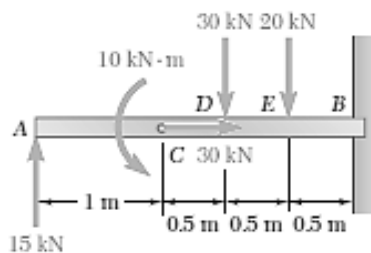
Σχήμα II.2

Άσκηση II.3: Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα $M(x)$ και $Q(x)$ για τη δοκό του σχήματος. Δίνονται $a = 1.4m$, $P = 6kN$, $q = 3kN/m$.



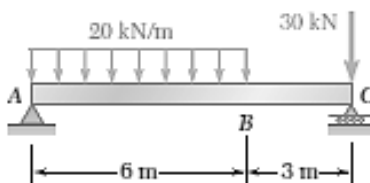
Σχήμα II.3

Άσκηση II.4: Να σχεδιασθούν τα εσωτερικά φορτία διατομών $M(x)$, $N(x)$, $Q(x)$ για το φορέα του Σχήματος II.4.



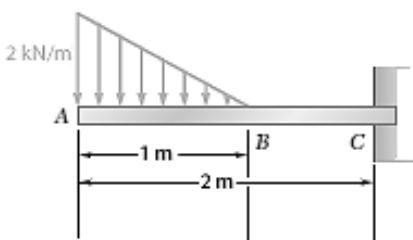
Σχήμα II.4

Άσκηση II.5: Να σχεδιασθούν τα εσωτερικά φορτία διατομών $M(x)$, $N(x)$, $Q(x)$ για το φορέα του Σχήματος II.5 και να προσδιορισθεί η θέση της μέγιστης καμπτικής ροπής.



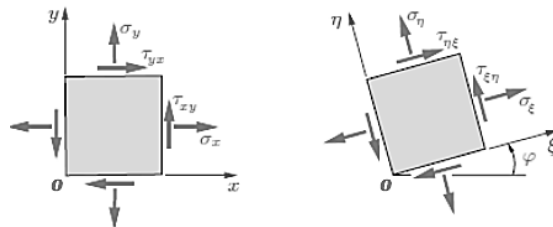
Σχήμα II.5

Άσκηση II.6: Να σχεδιασθούν τα εσωτερικά φορτία διατομών $M(x)$, $N(x)$, $Q(x)$ για το φορέα του Σχήματος II.6.



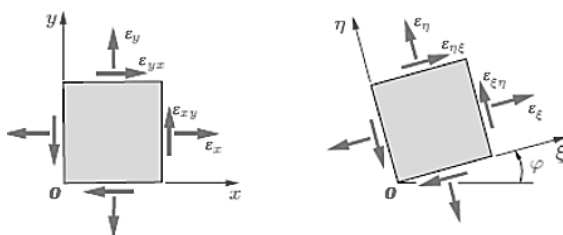
Σχήμα II.6

Άσκηση II.7: Θεωρούμε το πρόβλημα επίπεδης έντασης του Σχήματος II.7. Δίνονται οι τάσεις $\sigma_x = 8 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 8 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 4 \text{ MPa}$, στο σημείο O. Ζητούνται να υπολογιστούν αναλυτικά και γραφικά: α) οι κύριες τάσεις και β) το μητρώο τάσεων στο σημείο O ως προς το σύστημα συντεταγμένων $O\xi\eta$, το οποίο σχηματίζει με το Oxy γωνία $\varphi = 45^\circ$.



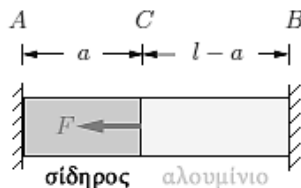
Σχήμα II.7

Άσκηση II.8: Στο πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης του Σχήματος II.8 χρησιμοποιούνται 3 μηκυνσιόμετρα, με τα οποία προσδιορίζονται οι παραμορφώσεις $\epsilon_x = 10^{-4}$, $\epsilon_y = 3 \cdot 10^{-4}$, $\epsilon_\xi = 2,5 \cdot 10^{-4}$ στο σημείο O. Να προσδιοριστούν το μητρώο παραμορφώσεων και το μητρώο τάσεων στο σημείο O ως προς το σύστημα συντεταγμένων Oxy . Δίνονται $\varphi = 45^\circ$, λόγος του Poisson $\nu = 0,3$, μέτρο ελαστικότητας $E = 100 \text{ GPa}$.



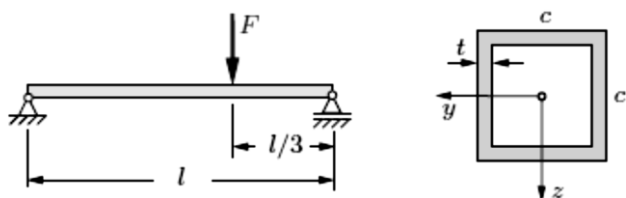
Σχήμα II.8

Άσκηση II.9: Στην πακτωμένη δοκό του Σχήματος II.9 που αποτελείται από αλουμίνιο και σίδηρο να βρεθούν α) οι αντιδράσεις στα σημεία A και B υπό την επίδραση του φορτίου F , β) η κατανομή των εσωτερικών αξονικών δυνάμεων αν η δοκός είναι αφόρτιστη ($F = 0$) και θερμανθεί κατά ΔT . Δίνονται ο λόγος του μέτρου ελαστικότητας σιδήρου προς αλουμινίου $\frac{E_{\sigma\delta}}{E_{\alpha\lambda\omicron\mu\mu}} = 3$ και ο λόγος του συντελεστής θερμικής διαστολής - συστολής σιδήρου προς αλουμινίου $\frac{\alpha_{\sigma\delta}}{\alpha_{\alpha\lambda\omicron\mu\mu}} = \frac{1}{2}$.



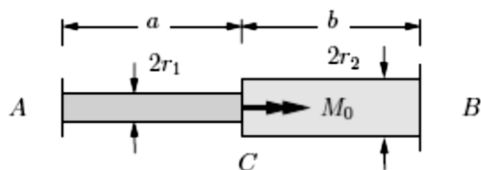
Σχήμα II.9

Άσκηση II.10: Η δοκός του Σχήματος II.10 φορτίζεται με σημειακό φορτίο $F = 200 \text{ kN}$ κι έχει μήκος $l = 10 \text{ m}$. Αν είναι γνωστό ότι η κρίσιμη τάση του υλικού της δοκού είναι $\sigma_{critical} = 200 \text{ MPa}$ (τιμή τάσης μεγαλύτερη αυτής οδηγεί σε αστοχία του υλικού) να βρεθεί ποια πρέπει να είναι η διάσταση c της διατομής ώστε να μην αστοχήσει η δοκός. Να σημειωθεί ότι $t \ll c$. Δίνεται $t = 15 \text{ mm}$.



Σχήμα II.10

Άσκηση II.11: Η σύνθετη δοκός του Σχήματος II.11 φορτίζεται με στρεπτική ροπή M_0 και είναι πακτωμένη στα σημεία A και B. Με δεδομένα τα γεωμετρικά μεγέθη της σύνθετης δοκού (επιμέρους μήκη και ακτίνες της κυκλικής διατομής) να βρεθούν οι αντιδράσεις στα σημεία A και B και η στροφή του σημείου C.



Σχήμα II.11

Περίληψη μαθήματος III

Τυπολόγιο – μεθοδολογία αντοχής

III.1. ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

III.1.1 Διαφορική εξίσωση

Κατά την κάμψη δοκού είναι δυνατή η εξαγωγή μιας διαφορικής εξίσωσης για την κατακόρυφη μετατόπιση κάθε σημείου της δοκού έστω $w(x)$. Οι παραδοχές που χρησιμοποιούνται αποδίδονται στον Bernoulli και συνοψίζονται στις κάτωθι βασικές

- οι αρχικά επίπεδες διατομές παραμένουν επίπεδες και μετά την κάμψη,
- οι διατομές της δοκού παραμένουν κάθετες στον ουδέτερο άξονα της δοκού,
- η συνεισφορά της διάτμησης στο πρόβλημα της κάμψης είναι αμελητέα,
- η μετατόπιση $w(x)$ είναι συνάρτηση μόνο του x και
- η γωνία που διαγράφουν οι διατομές της δοκού κατά την κάμψη είναι θετικές κατά την αντιστροφολογική περιστροφή.

Είναι χρήσιμο σ αυτή την ενότητα να θυμηθούμε ότι τα εσωτερικά φορτία συνδέονται μέσω των σχέσεων

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -q(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x)$$

Επίσης, μελετώντας την υπό κάμψη δοκό και τη γεωμετρία της, λαμβάνοντας υπόψη τις παραδοχές της δοκού Bernoulli, παρατηρούμε ότι η $\psi(x)$, δηλαδή η κλίση μιας τυχαίας διατομής ως προς τον κατακόρυφο άξονα και η $\frac{dw(x)}{dx}$, δηλαδή η κλίση της ελαστικής γραμμής, είναι ίσες (μια προς μια κάθετες πλευρές)

$$\frac{dw(x)}{dx} = -\psi(x)$$



Στη συνέχεια, η μετατόπιση ενός στοιχείου σε μια τυχαία θέση x και σε απόσταση z από τον ουδέτερο άξονα είναι

$$u(x, z) = \psi(x)z$$

μπορούμε να υπολογίσουμε την αξονική τάση ως

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = E \frac{\partial u}{\partial x} = E \frac{\partial}{\partial x} [\psi(x)z] = E z \psi'(x)$$

Η καμπτική ροπή συνδέεται με την αξονική τάση μέσω της σχέσης

$$M(x) = \int \sigma_{xx} z dA = E \psi'(x) \int z^2 dA = EI \psi'(x) \Rightarrow$$

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{M(x)}{EI}$$

Με βάση αυτά υπολογίζουμε τη διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής ως προς $w(x)$

$$\begin{cases} \frac{dw(x)}{dx} = -\psi(x) \\ \frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{M(x)}{EI} \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$$

III.1.2 Συνοριακές συνθήκες

Η παραπάνω εξίσωση παράγει, κατά την ολοκλήρωση, δύο σταθερές που υπολογίζονται με βάση τις συνοριακές, κάθε φορά, συνθήκες του προβλήματος.

Για τις συνοριακές συνθήκες μπορεί κανένας να λάβει υπόψη του, σε συγκεκριμένα σημεία του κατασκευαστικού στοιχείου, μεγέθη όπως

- τη βύθιση της δοκού $w(x)$ (γεωμετρική συνοριακή συνθήκη),
- τη στροφή της δοκού $w'(x)$ (γεωμετρική συνοριακή συνθήκη),
- την τιμή της ροπής $M(x)$ και να συνδέσει αυτήν με τη δεύτερη παράγωγο της βύθισης μέσω της εξίσωσης της ελαστικής γραμμής $\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$ (κινηματική συνοριακή συνθήκη),
- την τιμή της τέμνουσας δύναμης $Q(x)$ και να συνδέσει αυτήν με την τρίτη παράγωγο της βύθισης μέσω της εξίσωσης $\frac{d^3w(x)}{dx^3} = -\frac{Q(x)}{EI}$ (κινηματική συνοριακή συνθήκη) και
- την τιμή εξωτερικού φορτίου $q(x)$ και να συνδέσει αυτό με την τέταρτη παράγωγο της βύθισης μέσω της εξίσωσης $\frac{d^4w(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI}$ (κινηματική συνοριακή συνθήκη).

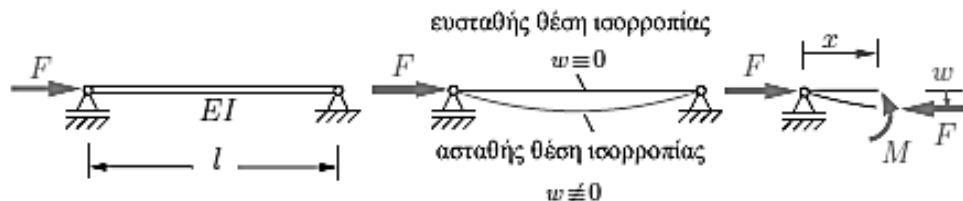
III.1.3 Μεθοδολογία

- Λύνουμε το στατικό πρόβλημα είτε αυτό είναι υπερστατικό είτε όχι. Αν είναι υπερστατικό τότε η εύρεση των αντιδράσεων δεν είναι δυνατή από τις εξισώσεις της στατικής και θα χρησιμοποιηθούν και σχέσεις που θα προκύψουν για τη βύθιση της δοκού.
- Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα $M(x)$, $Q(x)$.
- Γράφουμε την εξίσωση της ελαστικής γραμμής για κάθε τμήμα της δοκού, για κάθε δηλαδή τμήμα της δοκού στο οποίο έχουμε μεταβολή της συνάρτησης $M(x)$.
- Ολοκληρώνουμε και υπολογίζουμε τη συνάρτηση $w(x)$. Στην περίπτωση μιας δοκού με δύο περιοχές, δηλαδή δύο συναρτήσεις $M(x)$, ο υπολογισμός των σταθερών πέρα από συνοριακές συνθήκες απαιτεί και **συνθήκες συνέχειας**.
- Υπολογίζουμε είτε τις ζητούμενες βυθίσεις, ή έχοντας ως γνωστά μεγέθη τη βύθιση υπολογίζουμε τις άγνωστες αντιδράσεις του υπερστατικού προβλήματος σε συνδυασμό με τις εξισώσεις της στατικής.

III.2. ΛΥΓΙΣΜΟΣ

III.2.1 Εισαγωγή

Ο λυγισμός εμφανίζεται σε κατασκευαστικά στοιχεία (δοκούς) που καταπονούνται σε θλίψη. Στο παράδειγμα του σχήματος εμφανίζεται μια δοκός που καταπονείται σε θλίψη και εδράζεται σε μια κύλιση (αριστερά) και μια άρθρωση (δεξιά). Κατά το λυγισμό είναι δυνατό να εμφανιστούν ευσταθής και ασταθής θέσεις ισορροπίας. Αν το θλιπτικό φορτίο ξεπεράσει μια συγκεκριμένη τιμή η ασταθής θέση ισορροπίας εμφανίζεται για μεγάλες μετατοπίσεις w , μετατοπίσεις που οδηγούν σε αστοχία του κατασκευαστικού στοιχείου.



III.2.2 Χαρακτηριστική εξίσωση στο λύγισμα

Κάνοντας μια τυχαία τιμή στο κατασκευαστικό στοιχείο και υπολογίζοντας την εσωτερική ροπή ως προς το σημείο της τομής

$$M(x) = F w(x)$$

Με βάση την εξίσωση της ελαστικής γραμμής

$$EIw''(x) = -M(x)$$

Από τις δυο παραπάνω σχέσεις προκύπτει μια ομογενής, γραμμική, δευτέρου βαθμού διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές (εφόσον $EI = \text{σταθερό}$ και $F = \text{σταθερό}$)

$$EIw''(x) + F w(x) = 0$$

Θέτοντας όπου

$$\lambda^2 = \frac{F}{EI}$$

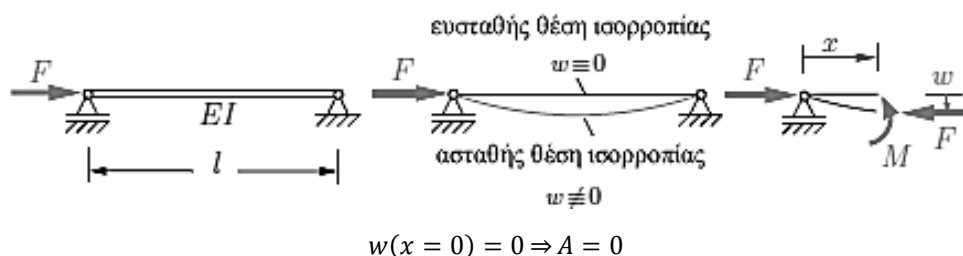
παράγεται η διαφορική εξίσωση μέσα από την οποία θα υπολογιστεί το κρίσιμο φορτίο του λυγισμού

$$w''(x) + \lambda^2 w(x) = 0$$

Η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$w(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)$$

Οι δύο σταθερές A, B θα υπολογιστούν από τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Εφόσον η βύθιση της δοκού στα άκρα της είναι μηδενική θα είναι



και η λύση γίνεται

$$w(x) = B \sin(\lambda x)$$

Κάνοντας χρήση της δεύτερης συνοριακής συνθήκης υπολογίζουμε ότι

$$w(x=L) = 0 \Rightarrow B \sin(\lambda L) = 0$$

Για μη μηδενική λύση θα πρέπει $B \neq 0$ επομένως

$$\sin(\lambda L) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, n = 1, 2, 3$$

καθώς για $n = 0$ και πάλι η λύση για τη βύθιση της δοκού $w(x)$ γίνεται μηδενική που δεν παρουσιάζει κανένα ενδιαφέρον.

III.2.3 Κρίσιμο φορτίο

Η πρώτη λύση που παρουσιάζει ενδιαφέρον για το κατασκευαστικό στοιχείο είναι η λύση (ιδιοτιμή)

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{L}$$

κατά την οποία η βύθιση της δοκού γίνεται (το σχήμα της δοκού κατά το λυγισμό – ιδιομορφή)

$$w_1(x) = B \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right)$$

Η ελάχιστη δύναμη που προκαλεί το λυγισμό είναι αυτή που αντιστοιχεί στο λ_1 , επομένως **το κρίσιμο φορτίο για το λυγισμό** θα είναι

$$\lambda^2 = \frac{F}{EI} \xrightarrow{\lambda=\lambda_1, F=F_{\text{κρίσιμο}}}$$

$$F_{\text{κρίσιμο}} = \lambda_1^2 EI = \pi^2 \frac{EI}{L^2}$$

III.2.4 Γενίκευση του προβλήματος

Θέλοντας να γενικεύσουμε το πρόβλημα για διάφορες συνοριακές συνθήκες της δοκού παραγωγίζουμε 2 φορές τη διαφορική εξίσωση της παραγράφου 2.2

$$EI w''''(x) + F w''(x) = 0 \Rightarrow$$

$$w''''(x) + \lambda^2 w''(x) = 0$$

εφόσον $EI = \text{σταθερό}$ και $F = \text{σταθερό}$ και πάλι $\lambda^2 = \frac{F}{EI}$.

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης δίνεται από

$$w(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) + Cx + D$$

Ανάλογα με τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος προκύπτει το κρίσιμο φορτίο όπως και στην παράγραφο 2.3. Για τις συνοριακές συνθήκες μπορεί κανένας να λάβει υπόψη του, σε συγκεκριμένα σημεία του κατασκευαστικού στοιχείου, μεγέθη όπως

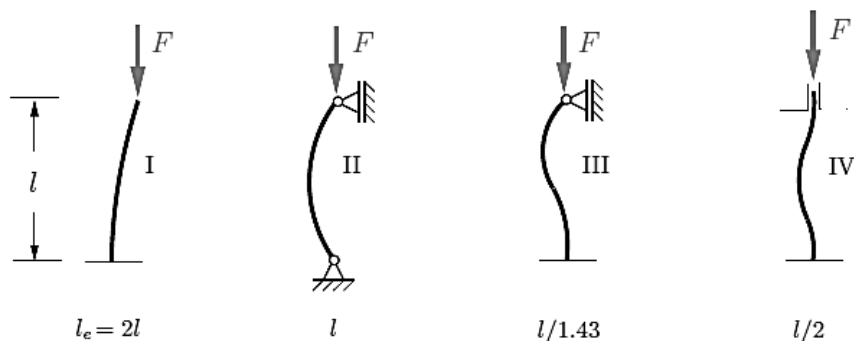
- τη βύθιση της δοκού $w(x)$ (γεωμετρική συνοριακή συνθήκη),
- τη στροφή της δοκού $w'(x)$ (γεωμετρική συνοριακή συνθήκη) και
- την τιμή της ροπής $M(x)$ και να συνδέσει αυτήν με τη δεύτερη παράγωγο της βύθισης μέσω της εξίσωσης της ελαστικής γραμμής $\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$ (κινηματική συνοριακή συνθήκη).

III.2.5 Σχέση του Euler για το λυγισμό

Ο υπολογισμός του κρίσιμου φορτίου για το λυγισμό μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας τη σχέση του Euler

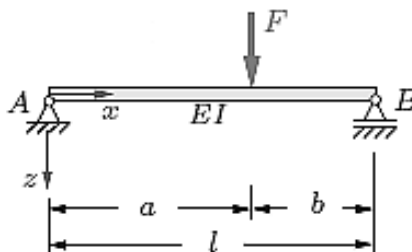
$$F_{\text{κρίσιμο}} = \frac{EI}{L_{\text{eff}}^2}$$

όπου L_{eff} είναι το ισοδύναμο μήκος που μπορεί να αντικατασταθεί κατάλληλα ανάλογα με τη στήριξη της δοκού στα άκρα της. Τέσσερις είναι οι πιο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις στήριξης και φαίνονται στο παρακάτω σχήμα όπου δίνονται και οι τιμές του ισοδύναμου μήκους



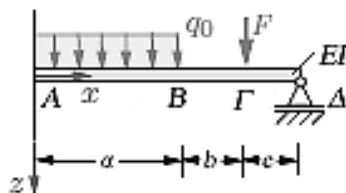
ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ IV

Άσκηση IV.1: Η δοκός του Σχήματος IV.1 φορτίζεται με σημειακό φορτίο $F = 6 \text{ [kN]}$. Δίνονται $a = 2 \text{ [m]}$, $b = 1 \text{ [m]}$. Να υπολογιστεί η βύθιση της δοκού στο σημείο $x = a$. Δίνεται το γινόμενο EI .



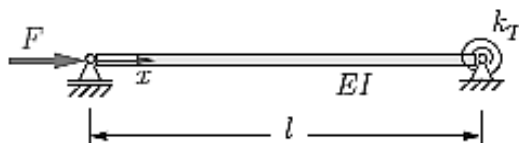
Σχήμα IV.1

Άσκηση IV.2: Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα $M(x)$ και $Q(x)$ για τη δοκό του σχήματος. Δίνονται $a = 1.4 \text{ [m]}$, $b = \frac{2a}{3} \text{ [m]}$, $c = \frac{a}{3} \text{ [m]}$, $F = 6 \text{ [kN]}$, $q_0 = 3 \text{ [kN/m]}$. Δίνεται το γινόμενο EI .



Σχήμα IV.2

Άσκηση IV.3: Η ελαστική δοκός του Σχήματος IV.3 καταπονείται από αξονικό φορτίο F . Στο αριστερό της άκρο στηρίζεται με κύλιση ενώ στο δεξί της άκρο στηρίζεται σε καμπτικό ελατήριο με σταθερά k_T . Να υπολογιστεί η χαρακτηριστική εξίσωση και το κρίσιμο φορτίο για $\frac{k_T l}{EI} = 10$. Δίνεται το γινόμενο EI και επιπλέον ότι η αντίσταση που προβάλλει το καμπτικό ελατήριο είναι ίση με $k_T \varphi$ όπου φ η στροφή της δοκού στο σημείο του ελατηρίου.



Σχήμα IV.3

Περίληψη μαθήματος IV

Τυπολόγιο – μεθοδολογία μηχανικής του συνεχούς

IV.1. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

IV.1.1 Γραφή με δείκτες

Ένα ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ένα τυχαίο διάνυσμα στο χώρο γράφεται



$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3 \Rightarrow$$

ή απλούστερα στη γραφή με δείκτες

$$\vec{v} = v_i e_i = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$$

όπου ο δείκτης $i = 1, 2, 3$.

Η παραπάνω γραφή ισοδυναμεί με τη γραφή

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i e_i = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$$

και απλοποιείται σημαντικά απαλείφοντας στο σύμβολο της άθροισης και ορίζοντας ότι **η επανάληψη του ίδιου δείκτη δύο φορές σε ένα γινόμενο ορίζει άθροιση ως προς τις τιμές του δείκτη**. Η επανάληψη του ίδιου δείκτη πάνω από 2 φορές σε ένα γινόμενο **δεν επιτρέπεται**.

Η επιλογή του δείκτη για να εκφράσουμε το διάνυσμα \vec{v} είναι τυχαία δηλαδή

$$\vec{v} = v_i e_i = v_j e_j$$

όπου ο δείκτης $i = 1, 2, 3$ και βέβαια $j = 1, 2, 3$.

IV.1.2 Kronecker δέλτα

Το δέλτα του Kronecker παρουσιάζει τις εξής ιδιότητες

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} = [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\delta_{ii} = \delta_{jj} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\delta_{ij} v_i = \delta_{1j} v_1 + \delta_{2j} v_2 + \delta_{3j} v_3 =$$

$$= \delta_{11} v_1 + \delta_{21} v_2 + \delta_{31} v_3 +$$

$$\begin{aligned}
 & +\delta_{12}v_1 + \delta_{22}v_2 + \delta_{32}v_3 + \\
 & +\delta_{13}v_1 + \delta_{23}v_2 + \delta_{33}v_3 = \\
 & = v_1 + v_2 + v_3 = v_j \Rightarrow
 \end{aligned}$$

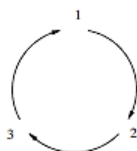
$$\delta_{ij}v_i = v_j$$

η εφαρμογή του δέλτα πάνω στο διάνυσμα έχει ως αποτέλεσμα την αντικατάσταση του επαναλαμβανόμενου δείκτη i από το δείκτη j στο διάνυσμα v .

IV.1.2 Σύμβολο μετάθεσης

Το σύμβολο μετάθεσης παρουσιάζει τις εξής ιδιότητες

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{ ζυγή εναλλαγή } 1-2-3 \\ -1, \text{ μονή εναλλαγή } 3-2-1 \\ 0, \text{ χωρίς εναλλαγή δεικτών} \end{cases}$$



ζυγή εναλλαγή δεικτών



μονή εναλλαγή δεικτών

Με βάση τα παραπάνω

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$$

$$\varepsilon_{321} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{231} = -1$$

$$\varepsilon_{331} = \varepsilon_{131} = \varepsilon_{322} = \varepsilon_{111} = 0$$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ikj}$$

Μια από τις σημαντικότερες ιδιότητες του συμβόλου μετάθεσης είναι

$$\varepsilon_{miq}\varepsilon_{jka} = \delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij}$$

IV.1.3 Πράξεις με τη γραφή με δείκτες

- Πρόσθεση διανυσμάτων

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = u_i e_i + v_i e_i = (u_i + v_i) e_i = w_i e_i$$

- Πολλαπλασιασμός με βαθμωτό μέγεθος

$$\lambda \vec{w} = \lambda w_i e_i$$

- Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_i e_i) \cdot (v_j e_j) = u_i v_j (e_i \cdot e_j) = u_i v_j \delta_{ij} = u_i v_i = u_j v_j = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

αφού από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

άρα

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$$

- Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u} = [|\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})] \vec{n}$$

όπου το διάνυσμα n είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα \vec{u}, \vec{v} και η φορά του \vec{n} ορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού, βάζοντας τον αντίχειρα στη διεύθυνση του και τα δάχτυλα της παλάμης στη φορά του πολλαπλασιασμού δηλαδή $\vec{u} \times \vec{v}$ από το διάνυσμα \vec{u} στο διάνυσμα \vec{v} .

Από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = 0$$

κ.λ.π. επομένως γενικεύοντας τα παραπάνω

$$e_i \times e_j = \varepsilon_{ijk} e_k$$

Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων τώρα γίνεται

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_i e_i) \times (v_j e_j) = u_i v_j (e_i \times e_j) = u_i v_j \varepsilon_{ijk} e_k$$

- Μεικτό γινόμενο διανυσμάτων

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = (u_i e_i) \cdot (v_j e_j) \times (w_k e_k)$$

Το εξωτερικό γινόμενο **έχει προτεραιότητα πράξεων** επομένως

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} &= (u_i e_i) \cdot (v_j e_j) \times (w_k e_k) = (u_i e_i) \cdot [v_j w_k (e_j \times e_k)] = \\ &= (u_i e_i) \cdot [v_j w_k \varepsilon_{jkq} e_q] = u_i v_j w_k \varepsilon_{jkq} (e_i \cdot e_q) = \\ &= u_i v_j w_k \varepsilon_{jkq} \delta_{iq} = u_i v_j w_k \varepsilon_{jki} = u_i v_j w_k \varepsilon_{ijk} \end{aligned}$$

- Τριπλό εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w} &= (u_i e_i) \times (v_j e_j) \times (w_k e_k) = (u_i e_i) \times [v_j w_k (e_j \times e_k)] \\
 &= (u_i e_i) \times [v_j w_k \varepsilon_{jkq} e_q] = u_i v_j w_k \varepsilon_{jkq} (e_i \times e_q) = \\
 &= u_i v_j w_k \varepsilon_{jkq} \varepsilon_{ikm} e_m = u_i v_j w_k \varepsilon_{miq} \varepsilon_{jkq} e_m \\
 &= u_i v_j w_k e_m (\delta_{mj} \delta_{ik} - \delta_{mk} \delta_{ij}) = u_i v_j w_k \delta_{mj} \delta_{ik} e_m - u_i v_j w_k e_m \delta_{mk} \delta_{ij} = \\
 &= (u_i v_m w_i - u_j v_j w_m) e_m = (u_i w_i v_m - u_i v_i w_m) e_m
 \end{aligned}$$

IV.1.4 Τανυστές

Ως τανυστής ορίζεται ως ο μετασχηματισμός που αν εφαρμοστεί σ ένα διάνυσμα το μετασχηματίζει σ ένα άλλο διάνυσμα. Δηλαδή, στη σχέση

$$T\vec{u} = \vec{v}$$

ο τανυστής T μετασχηματίζει το διάνυσμα \vec{u} στο διάνυσμα \vec{v} .

Αν λάβουμε ως διανύσματα τα μοναδιαία διανύσματα της βάσης του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ τότε εφαρμογή ενός τανυστή θα τα μετασχηματίσει σε $T\vec{e}_1, T\vec{e}_2, T\vec{e}_3$ που είναι και πάλι διανύσματα. Το κάθε ένα απ αυτά γράφεται

$$\begin{cases} T\vec{e}_1 = T_{11}\vec{e}_1 + T_{21}\vec{e}_2 + T_{31}\vec{e}_3 \\ T\vec{e}_2 = T_{12}\vec{e}_1 + T_{22}\vec{e}_2 + T_{32}\vec{e}_3 \\ T\vec{e}_3 = T_{13}\vec{e}_1 + T_{23}\vec{e}_2 + T_{33}\vec{e}_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T e_i = e_j T_{ji}$$

Τα στοιχεία του **τανυστή** T , ως προς το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με διανύσματα βάσης $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, μπορούν να εκφραστούν ως στοιχεία ενός πίνακα διαστάσεων 3×3

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = e_i \cdot T e_j$$

όπου παρατηρούμε ότι κάθε μια από τις τρεις στήλες του πίνακα T_{ij} εκφράζει τα διανύσματα $T\vec{e}_1, T\vec{e}_2, T\vec{e}_3$ αντίστοιχα.

- Τανυστικό γινόμενο διανυσμάτων (δυάδα)

$$\begin{aligned}
 \vec{u}\vec{v} &= (u_i e_i)(v_j e_j) = u_i v_j e_i e_j = \\
 &= u_1 v_1 \vec{e}_1 e_1 + u_2 v_1 \vec{e}_2 e_1 + u_3 v_1 \vec{e}_3 e_1 + \\
 &= u_1 v_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1 + u_2 v_1 \vec{e}_2 \vec{e}_1 + u_3 v_1 \vec{e}_3 \vec{e}_1 + \\
 &+ u_1 v_2 \vec{e}_1 \vec{e}_2 + u_2 v_2 \vec{e}_2 \vec{e}_2 + u_3 v_2 \vec{e}_3 \vec{e}_2 + \\
 &+ u_1 v_3 \vec{e}_1 \vec{e}_3 + u_2 v_3 \vec{e}_2 \vec{e}_3 + u_3 v_3 \vec{e}_3 \vec{e}_3
 \end{aligned}$$

Επομένως

$$(\vec{u}\vec{v})_{ij} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι το τανυστικό γινόμενο δύο διανυσμάτων δίνει ένα άθροισμα 9 όρων ή διαφορετικά ένα τανυστή 2^{ας} τάξης (πίνακα 3x3). Επομένως θα μπορούσαμε να ορίσουμε το τανυστή 2^{ας} τάξης ως $\mathbf{T} = T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j$.

Να σημειωθεί ότι το δυαδικό γινόμενο των μοναδιαίων διανυσμάτων είναι

$$\begin{aligned} \vec{e}_1\vec{e}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_1\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_1\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \vec{e}_2\vec{e}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \vec{e}_3\vec{e}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_3\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_3\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Άθροισμα τανυστών

$$W_{ij} = T_{ij} + S_{ij}$$

- Γινόμενο δυάδας

$$\begin{aligned} (\vec{u}\vec{v}) \cdot (\vec{w}\vec{s}) &= [(u_i e_i)(v_j e_j)] \cdot [(w_k e_k)(s_q \vec{e}_q)] = \\ &= u_i v_j w_k s_q e_i (e_j \cdot e_k) e_q = \\ &= u_i v_j w_k s_q e_i \delta_{jk} e_q = \\ &= u_i v_j w_j s_q e_i e_q \end{aligned}$$

- Γινόμενο διάνυσμα με τανυστή

$$\vec{v} \cdot \mathbf{T} = v_i e_i \cdot T_{jk} e_j e_k = v_i T_{jk} \delta_{ij} e_k = v_i T_{ik} e_k$$

Ο τανυστής αποτελείται από 9 στοιχεία επομένως αναπαριστάται από έναν πίνακα 3x3, ενώ το διάνυσμα έχει τρία στοιχεία και είναι είτε πίνακας στήλη είτε πίνακας γραμμή. Στην περίπτωση αυτή για να είναι δυνατός ο πολλαπλασιασμός πινάκων θα πρέπει οι εσωτερικές διαστάσεις του γινομένου να είναι ίδιες δηλαδή (1x3)(3x3) και γι αυτό το διάνυσμά μας είναι πίνακας γραμμής. Παρατηρούμε ότι ο εσωτερικός δείκτης του γινομένου i είναι ίδιος στο γινόμενο $v_i T_{ik}$.

- Γινόμενο τανυστή με διάνυσμα

$$\mathbf{T} \cdot \vec{v} = T_{jk} e_j e_k \cdot v_i e_i = T_{jk} v_i \delta_{ki} e_j = T_{jk} v_k e_j$$

Στην περίπτωση αυτή για να είναι δυνατός ο πολλαπλασιασμός πινάκων θα πρέπει οι εσωτερικές διαστάσεις του γινομένου να είναι ίδιες δηλαδή (3x3)(3x1) και γι αυτό το διάνυσμά μας είναι πίνακας στήλη. Παρατηρούμε ότι ο εσωτερικός δείκτης του γινομένου k είναι ίδιος στο γινόμενο $T_{jk} v_k$.

- Γινόμενο τανυστών

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = T_{ij}e_i e_j \cdot S_{kq}e_k e_q = T_{ij}S_{kq}\delta_{jk}e_i e_q = T_{ij}S_{jq}e_i e_q$$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = S_{kq}e_k e_q \cdot T_{ij}e_i e_j = S_{kq}T_{ij}\delta_{qi}e_k e_j = S_{kq}T_{qj}e_k e_j$$

Στη γενική περίπτωση $\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \neq \mathbf{S} \cdot \mathbf{T}$

Αν θα θέλαμε να βρούμε μόνο τα στοιχεία του γινομένου των τανυστών τότε προφανώς

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S})_{iq} = T_{ij}S_{jq}$$

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S})_{kj} = S_{kq}T_{qj}$$

- Ανάστροφος τανυστή

Για τον ανάστροφο ενός τανυστή ισχύει ότι

$$(T_{ij})^T = T_{ji}$$

επομένως πρακτικά έχουμε μετατροπή των γραμμών του πίνακα, που εκφράζει τα στοιχεία του τανυστή, σε στήλες και των στηλών σε γραμμές

- Ίχνος τανυστή

Ο τελεστής του ίχνους (tr) ακολουθεί τις παρακάτω ιδιότητες

$$tr(\mathbf{T} + \mathbf{S}) = tr(\mathbf{T}) + tr(\mathbf{S})$$

$$tr(a\mathbf{T}) = atr(\mathbf{T})$$

$$tr(\vec{a}\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Το ίχνος ενός τανυστή δίνεται από το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του, δηλαδή

$$tr(\mathbf{T}) = tr(T_{ij}e_i e_j) = T_{ij}tr(e_i e_j) = T_{ij}e_i e_j = T_{ij}\delta_{ij} = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

Προφανώς

$$tr(\mathbf{T}^T) = tr(\mathbf{T})$$

- Αντίστροφος τανυστή

Αντίστροφος \mathbf{T}^{-1} ενός τανυστή \mathbf{T} είναι εκείνος για τον οποίο ισχύει

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{I}$$

όπου \mathbf{I} ο μοναδιαίος πίνακας.

Να σημειωθεί ότι για ορθογώνιους τανυστές

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$$

ή διαφορετικά

$$\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{T} \mathbf{T}^T = \mathbf{I} \Rightarrow$$

$$T_{ji} T_{ij} = T_{ij} T_{ji} = \delta_{ij}$$

- Συμμετρικός τανυστής

Ένας τανυστής είναι συμμετρικός εάν

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \Rightarrow T_{ij} = T_{ji}$$

- Αντι-συμμετρικός τανυστής

Ένας τανυστής είναι αντι-συμμετρικός εάν

$$\mathbf{T} = -\mathbf{T}^T \Rightarrow T_{ij} = -T_{ji}$$

Μπορούμε να δούμε ότι ο τανυστής \mathbf{T} μπορεί να εκφραστεί ως

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^S + \mathbf{T}^A$$

όπου

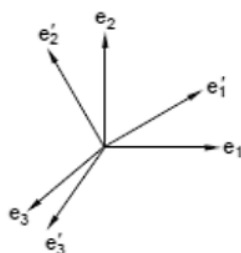
$$\mathbf{T}^S = \frac{\mathbf{T} + \mathbf{T}^T}{2}$$

και

$$\mathbf{T}^A = \frac{\mathbf{T} - \mathbf{T}^T}{2}$$

IV.1.5 Μετασχηματισμός συστήματος συντεταγμένων

Θεωρούμε δυο συστήματα συντεταγμένων με μοναδιαία βάση $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ και $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ όπου το τονούμενο σύστημα έχει περιστραφεί περί το $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Έστω ότι υπάρχει ένας τανυστής \mathbf{Q} που μετασχηματίζει τα μοναδιαία $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ στα $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ δηλαδή



$$e'_i = \mathbf{Q} e_i = e_m Q_{mi} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = Q_{11}\vec{e}_1 + Q_{21}\vec{e}_2 + Q_{31}\vec{e}_3 = \mathbf{Q}\vec{e}_1 \\ \vec{e}'_2 = Q_{12}\vec{e}_1 + Q_{22}\vec{e}_2 + Q_{32}\vec{e}_3 = \mathbf{Q}\vec{e}_2 \Rightarrow e'_i = Q_{ji}e_j \\ \vec{e}'_3 = Q_{13}\vec{e}_1 + Q_{23}\vec{e}_2 + Q_{33}\vec{e}_3 = \mathbf{Q}\vec{e}_3 \end{cases}$$

όπου Q ένας ορθογώνιος ταυυστής δηλαδή

$$QQ^T = Q^T Q = I$$

και στοιχεία

$$Q_{ij} = e_i \cdot Qe_j$$

Επομένως

$$Q_{11} = \vec{e}_1 \cdot Q\vec{e}_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}'_1$$

δηλαδή το στοιχείο Q_{11} αποτελεί στοιχείο του ταυυστή Q που εκφράζει το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ του μοναδιαίου \vec{e}_1 και του \vec{e}'_1 . Γενικεύοντας

$$Q_{ij} = e_i \cdot Qe_j = e_i \cdot e'_j = \cos(e_i, e'_j)$$

Δηλαδή τα στοιχεία Q_{ij} του ταυυστή Q είναι τα συνημίτονα της γωνίας μεταξύ των μοναδιαίων \vec{e}_i και των \vec{e}'_j , επομένως

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\vec{e}_1, \vec{e}'_1) & \cos(\vec{e}_1, \vec{e}'_2) & \cos(\vec{e}_1, \vec{e}'_3) \\ \cos(\vec{e}_2, \vec{e}'_1) & \cos(\vec{e}_2, \vec{e}'_2) & \cos(\vec{e}_2, \vec{e}'_3) \\ \cos(\vec{e}_3, \vec{e}'_1) & \cos(\vec{e}_3, \vec{e}'_2) & \cos(\vec{e}_3, \vec{e}'_3) \end{bmatrix}$$

Ο ταυυστής Q αποτελεί το ταυυστή μετασχηματισμού μεταξύ των δύο συστημάτων συντεταγμένων $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ και $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$.

- Μετασχηματισμός διανύσματος

Για ένα διάνυσμα \vec{u} που εκφράζεται στο σύστημα συντεταγμένων $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ μπορούμε να βρούμε το μετασχηματισμό του \vec{u}' στο σύστημα $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ ως

$$\vec{u}' = u'_i e'_i = u_j e_j = \vec{u} \xrightarrow{e'_i = Q_{ji} e_j} \vec{u}' = u'_i Q_{ji} e_j = u_j e_j = \vec{u} \Rightarrow$$

$$u_j = u'_i Q_{ji} \Rightarrow$$

$$u_i = u'_j Q_{ij} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{u} = Q\vec{u}'$$

Πολλαπλασιάζοντας με τον Q^T από αριστερά

$$Q^T \vec{u} = Q^T Q \vec{u}' \Rightarrow$$

$$\vec{u}' = Q^T \vec{u} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \Rightarrow u'_i = Q_{ji} u_j$$

- Μετασχηματισμός ταυυστή

Για ένα ταυυστή \mathbf{T} που εκφράζεται στο σύστημα συντεταγμένων $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ μπορούμε να βρούμε το μετασχηματισμό του \mathbf{T}' στο σύστημα $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ ως

$$T'_{ij} = Q_{im} T_{mn} Q_{nj} \Rightarrow$$

$$\mathbf{T}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{T} \mathbf{Q}$$

Πολλαπλασιάζοντας με τον ανάστροφο του \mathbf{Q} από δεξιά και τον \mathbf{Q} από αριστερά

$$\mathbf{Q} \mathbf{T}' \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} (\mathbf{Q}^T \mathbf{T} \mathbf{Q}) \mathbf{Q}^T$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q} \mathbf{T}' \mathbf{Q}^T$$

IV.1.6 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα ταυυστή

Ιδιοδιάνυσμα \vec{n} ενός ταυυστή \mathbf{T} είναι οποιοδήποτε διάνυσμα που μετασχηματίζεται σε διάνυσμα παράλληλο στον εαυτό του από την εφαρμογή ενός ταυυστή \mathbf{T} στο διάνυσμα \vec{n} . Δηλαδή

$$\mathbf{T} \vec{n} = \lambda \vec{n}$$

Εξ ορισμού τα ιδιοδιανύσματα του ταυυστή ορίζονται με μοναδιαίο μέτρο επομένως αν $\vec{n} = n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2 + n_3 \vec{e}_3$ τότε θα ισχύει ότι

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = 1 \Rightarrow n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

Ο υπολογισμός των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων γίνεται από την επίλυση του ιδιοπροβλήματος

$$\mathbf{T} \vec{n} = \lambda \vec{n} \Rightarrow \mathbf{T} \vec{n} = \lambda \mathbf{I} \vec{n} \Rightarrow$$

$$(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) \vec{n} = 0 \Rightarrow$$

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0$$

Για την ύπαρξη μη μηδενικής λύσης, δηλαδή για μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα $n_j \neq 0$ θα πρέπει

$$|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Από την παραπάνω εξίσωση, που ονομάζεται χαρακτηριστική του ιδιοπροβλήματος, υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές λ του ταυυστή. Με βάση τις ιδιοτιμές και τις σχέσεις

$$\begin{cases} (T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases}$$

υπολογίζουμε για κάθε ιδιοτιμή τα ιδιοδιανύσματα του ταυυστή.

IV.1.7 Αναλλοίωτες τανυστή

Η χαρακτηριστική εξίσωση

$$|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$$

μπορεί να γραφεί ως

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

όπου

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{T}) = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [\text{tr}(\mathbf{T})^2 - \text{tr}(\mathbf{T}^2)] = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \det(\mathbf{T}) = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές λ δεν εξαρτώνται από το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο εκφράζεται ο τανυστής και γι αυτό ονομάζονται κύριες αναλλοίωτες του τανυστή \mathbf{T} .

IV.1.8 Τανυστικός λογισμός

- Κλίση βαθμωτού μεγέθους

Η κλίση ενός βαθμωτού μεγέθους είναι **διάνυσμα**. Η μεταβολή των τιμών μιας βαθμωτής συνάρτησης $\varphi(\mathbf{r})$ κατά μια διεύθυνση \vec{e}_i δίνεται από

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|_{\vec{e}_i} = \nabla \varphi \cdot \mathbf{e}_i \Rightarrow$$

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \vec{e}_3$$

Επομένως, στις καρτεσιανές συντεταγμένες ο τελεστής της κλίσης δίνεται από

$$\nabla(\dots) = \frac{\partial(\dots)}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial(\dots)}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial(\dots)}{\partial x_3} \vec{e}_3$$

Αν το $\varphi(\mathbf{r})$ είναι ένα βαθμωτό μέγεθος που έχει σταθερή τιμή πάνω σε μια επιφάνεια τότε το διάνυσμα $\nabla \varphi$ θα είναι κάθετο στην επιφάνεια σε συγκεκριμένη σημείο αυτής. Αν \vec{n} είναι μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο στην επιφάνεια τότε

$$\nabla \varphi \cdot \vec{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

εφόσον δε μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης πάνω στην επιφάνεια. Η μέγιστη τιμή του εσωτερικού γινομένου θα είναι

$$\nabla \varphi \cdot \vec{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 1$$

επομένως η μεταβολή των τιμών των συναρτήσεων είναι μέγιστη σε μια διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια.

- Κλίση διανύσματος

Η κλίση ενός διανύσματος είναι **τανυστής**. Η μεταβολή των τιμών μιας διανυσματικής συνάρτησης $\vec{u}(\mathbf{r})$ κατά μια διεύθυνση e_j δίνεται από

$$\left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} \right|_{e_j} = (\nabla \vec{u}) e_j$$

Τα στοιχεία του τανυστή που εκφράζει την κλίση του διανύσματος θα δίνονται, με βάση τον ορισμό που έχουμε δώσει για τα στοιχεία ενός τανυστή

$$(\nabla \vec{u})_{ij} = e_i \cdot (\nabla \vec{u}) e_j = e_i \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} = \frac{\partial (\vec{u} \cdot e_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Rightarrow$$

$$[\nabla \vec{u}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

- Απόκλιση διανύσματος

Η απόκλιση διανύσματος είναι **βαθμωτό μέγεθος** και δίνεται από

$$\text{div } \vec{u} \equiv \text{tr}(\nabla \vec{u})$$

Δηλαδή, η απόκλιση ενός διανύσματος είναι το ίχνος του τανυστή $\nabla \vec{u}$, επομένως

$$\text{div } \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

- Απόκλιση τανυστή

Η απόκλιση τανυστή είναι **διανυσματικό μέγεθος** και δίνεται από

$$\text{div } \mathbf{T} = \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \right) e_i$$

- Συστροφική διανύσματος

Η συστροφική διανύσματος είναι επίσης διάνυσμα και δίνεται από

$$\text{curl } \vec{u} = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} e_i$$

- Λαπλασιανή βαθμωτού μεγέθους

Η Λαπλασιανή βαθμωτού μεγέθους είναι βαθμωτό μέγεθος και δίνεται από

$$\nabla^2 f = \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{tr}(\nabla(\nabla f)) \Rightarrow$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial f}{\partial x_3^2}$$

- Λαπλασιανή διανύσματος

Η Λαπλασιανή διανύσματος είναι διάνυσμα και δίνεται από

$$\nabla^2 \vec{u} = \nabla(\operatorname{div} \vec{u}) - \operatorname{curl}(\operatorname{curl} \vec{u}) = \nabla^2 u_i e_i$$

IV.2. ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

IV.2.1 Περιγραφή της κίνησης

Η κίνηση του κάθε σωματιδίου ενός συνεχούς μέσου περιγράφεται από το διάνυσμα θέσης \vec{r} ενός υλικού σημείου σε κάθε χρονική στιγμή t , ώστε στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων να ισχύει

$$\vec{r}(t) = x_1(t)\vec{e}_1 + x_2(t)\vec{e}_2 + x_3(t)\vec{e}_3$$

Η περιγραφή της κίνησης ενός συνεχούς μέσου απαιτεί την περιγραφή της κίνησης ενός άπειρου αριθμού υλικών σημείων. Για κάθε ένα απ αυτά μπορεί να οριστεί η αρχική θέση της κίνησης και η θέση της κίνησης σε μια τυχαία χρονική στιγμή t για το υλικό σημείο P είναι

$$\vec{x} = f(\vec{X}, t)$$

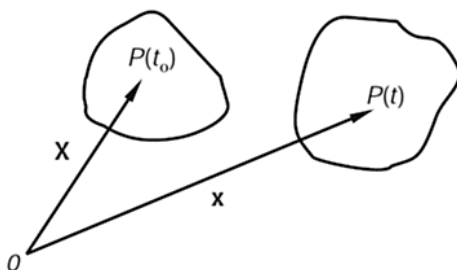
με \vec{x} να είναι οι συντεταγμένες του υλικού σημείου την τυχαία χρονική στιγμή t , δηλαδή

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

Οι τελευταίες εξαρτώνται από την αρχική θέση του υλικού σημείου \vec{X} τη χρονική στιγμή t_0 , όπου

$$\vec{X} = f(\vec{X}, t_0) \Rightarrow$$

$$\vec{X} = X_1\vec{e}_1 + X_2\vec{e}_2 + X_3\vec{e}_3$$



Οι συντεταγμένες X_i περιγράφουν τα διαφορετικά σημεία του σώματος και είναι οι λεγόμενες υλικές συντεταγμένες. Οι συντεταγμένες x_i περιγράφουν τα σημεία του χώρου από τα οποία διέρχονται τα σημεία του σώματος κατά την κίνησή του και είναι οι λεγόμενες χωρικές συντεταγμένες. Προφανώς θα ισχύει για τις δύο περιγραφές ότι

$$\vec{x} = f(\vec{X}, t) \Rightarrow \vec{X} = f^{-1}(\vec{x}, t)$$

Με βάση τη σχέση $\vec{x} = f(\vec{X}, t)$ μπορούμε να βρούμε την παρούσα θέση \vec{x} (χωρική συντεταγμένη) ενός υλικού σημείου κατά τη χρονική στιγμή t που βρίσκεται αρχικά στη θέση \vec{X} στη χρονική στιγμή t_0 . Αντίθετα, με βάση τη σχέση $\vec{X} = f^{-1}(\vec{x}, t)$ μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική θέση \vec{X} ενός υλικού σημείου γνωρίζοντας τις χωρικές του συντεταγμένες \vec{x} τη χρονική στιγμή t .

IV.2.2 Υλική και χωρική περιγραφή της κίνησης

Κατά την περιγραφή της κίνησης ενός συνεχούς μέσου γίνεται συχνά η μελέτη διαφόρων ιδιοτήτων του μέσου όπως π.χ. της θερμοκρασίας, της ταχύτητας, της επιτάχυνσης, του τανυστή της τάσης κλπ, μεγέθη που

μεταβάλλονται με το χρόνο. Η περιγραφή των μεταβολών αυτών (και άλλων) μεγεθών μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

- Υλική περιγραφή ή περιγραφή κατά Lagrange

Στην υλική περιγραφή η προσοχή μας εστιάζεται σε σημεία του σώματος και οι ιδιότητες προς περιγραφή εκφράζονται ως συνάρτηση των υλικών συντεταγμένων X_i και του χρόνου, δηλαδή

$$\theta = f(\vec{X}, t)$$

$$\vec{v} = g(\vec{X}, t)$$

$$\vec{a} = h(\vec{X}, t)$$

Αυτή η περιγραφή είναι κατάλληλη στην περίπτωση της μελέτης των στερεών όπου η τελική θέση του σώματος δεν είναι γνωστή οπότε και ακολουθούμε την κίνηση των σημείων του σώματος.

- Χωρική περιγραφή ή περιγραφή κατά Euler

Στη χωρική περιγραφή η προσοχή μας εστιάζεται σε συγκεκριμένη περιοχή του χώρου (όγκος ελέγχου) και οι ιδιότητες προς περιγραφή εκφράζονται ως συνάρτηση των χωρικών συντεταγμένων και του χρόνου, δηλαδή

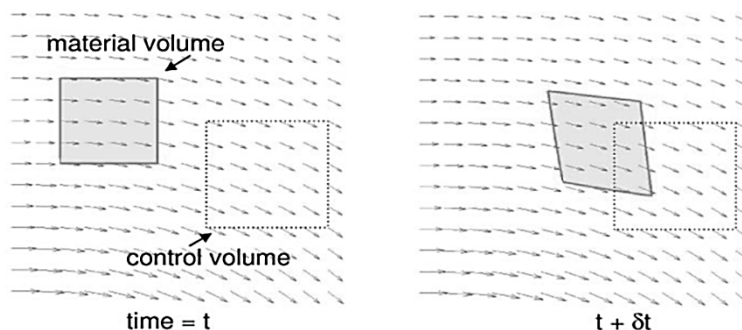
$$\theta = f(\vec{x}, t)$$

$$\vec{v} = g(\vec{x}, t)$$

$$\vec{a} = h(\vec{x}, t)$$

Αυτή η περιγραφή είναι κατάλληλη στην περίπτωση της μελέτης ρευστών όπου ορίζουμε μια περιοχή του ρευστού στην οποία μελετούμε τα μεγέθη του ενδιαφέροντος. Τα υλικά σημεία του ρευστού, που μεταφέρουν τις ιδιότητές του, διέρχονται απ αυτή την περιοχή καταλαμβάνοντας στιγμιαία τις χωρικές συντεταγμένες της.

Για την κατανόηση της διαφορετικότητας των δύο κινήσεων παρατίθεται το παρακάτω σχήμα στο οποίο περιγράφεται το πεδίο ταχύτητας ενός ρευστού, δηλαδή το διάνυσμα της ταχύτητας για κάθε υλικό σημείο ενός ρευστού. Η περιγραφή κατά Lagrange ακολουθεί ένα ή μια ομάδα υλικών σημείων καταγράφοντας τις υλικές συντεταγμένες τους ορίζοντας έτσι τον υλικό όγκο (material volume) που αλλάζει κατά την κίνηση του ρευστού (παραμορφώνεται). Αντίθετα, στην περιγραφή κατά Euler ορίζουμε έναν όγκο ελέγχου (control volume) διαμέσου του οποίου διέρχονται τα υλικά σημεία του ρευστού και καταλαμβάνουν στιγμιαία τις χωρικές του συντεταγμένες. Ο όγκος ελέγχου παραμένει αναλλοίωτος από την κίνηση του ρευστού.



IV.2.3 Υλική παραγωγή

Ο ρυθμός μεταβολής μιας ιδιότητας του μέσου (θερμοκρασία, ταχύτητα) υλικού του σημείου είναι η υλική παράγωγός της που παραδοσιακά συμβολίζεται με

$$\frac{D}{Dt}$$

- Όταν για την περιγραφή της ποσότητας χρησιμοποιείται η υλική περιγραφή, έστω δηλαδή για τη θερμοκρασία ότι

$$\theta = f(X_1, X_2, X_3, t)$$

τότε ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων θα είναι

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial\theta}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial t}$$

που είναι ο γνωστός μας κανόνας της σύνθετης παραγωγής (chain rule) για μια συνάρτηση (εδώ η θερμοκρασία) που εξαρτάται από περισσότερες από μια ανεξάρτητες μεταβλητές (X_1, X_2, X_3, t) . Εφόσον όμως τα X_1, X_2, X_3 περιγράφουν τις συντεταγμένες συγκεκριμένων σημείων του σώματος κι αυτή η περιγραφή δε μεταβάλλεται με το χρόνο, τότε

$$\frac{\partial X_1}{\partial t} = \frac{\partial X_2}{\partial t} = \frac{\partial X_3}{\partial t} = 0$$

και άρα στην περιγραφή κατά Lagrange η υλική παράγωγος θα είναι

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t}$$

- Όταν για την περιγραφή της ποσότητας χρησιμοποιείται η χωρική περιγραφή, έστω δηλαδή για τη θερμοκρασία ότι

$$\theta = f(x_1, x_2, x_3, t)$$

τότε ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας θα είναι

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial\theta}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial t}$$

που είναι ο γνωστός μας κανόνας της σύνθετης παραγωγής (chain rule) για μια συνάρτηση (εδώ η θερμοκρασία) που εξαρτάται από περισσότερες από μια ανεξάρτητες μεταβλητές (x_1, x_2, x_3, t) . Οι όροι τώρα

$$\frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial x_2}{\partial t}, \frac{\partial x_3}{\partial t}$$

περιγράφουν τη μεταβολή των χωρικών συντεταγμένων ενός υλικού σημείου που ήταν αρχικά στη θέση (X_1, X_2, X_3) , επομένως για την περίπτωση ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων περιγράφουν την ταχύτητα του υλικού σημείου σε κάθε διεύθυνση του χώρου, άρα η υλική παράγωγος τώρα γίνεται

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial\theta}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial\theta}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial\theta}{\partial x_3} v_3 + \frac{\partial\theta}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial\theta}{\partial x_i} v_i + \frac{\partial\theta}{\partial t} \Rightarrow \frac{D\theta}{Dt} = \vec{v} \cdot \nabla\theta + \frac{\partial\theta}{\partial t}$$

ή γενικά η υλική παράγωγος σ' αυτή την περίπτωση είναι ένας τελεστής που δίνεται από

$$\frac{D(\dots)}{Dt} = \frac{\partial(\dots)}{\partial x_i} v_i + \frac{\partial(\dots)}{\partial t} \Rightarrow \frac{D(\dots)}{Dt} = \vec{v} \cdot \nabla(\dots) + \frac{\partial(\dots)}{\partial t}$$

IV.2.4 Ταχύτητα και επιτάχυνση

Είδαμε ότι για μια κίνηση που περιγράφεται ως

$$\vec{x} = f(\vec{X}, t)$$

με αρχικές συνθήκες τη χρονική στιγμή t_0

$$\vec{X} = f(\vec{X}, t_0) \Rightarrow$$

η ταχύτητα του υλικού σημείου θα είναι

$$\vec{v} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial t} \equiv \frac{D\vec{x}}{Dt}$$

και αντίστοιχα η επιτάχυνση θα είναι

$$\vec{a} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \equiv \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

για ένα υλικό σημείο του σώματος με αρχικές συντεταγμένες $\vec{X} = f(\vec{X}, t_0)$ που είναι ανεξάρτητες του χρόνου, δηλαδή στην περιγραφή κατά Lagrange (υλική περιγραφή).

Στην περιγραφή κατά Euler, στη χωρική περιγραφή, η επιτάχυνση θα πρέπει να υπολογιστεί με βάση την υλική παράγωγο. Για τις καρτεσιανές συντεταγμένες θα είναι

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{Dv_1}{Dt} \vec{e}_1 + \frac{Dv_2}{Dt} \vec{e}_2 + \frac{Dv_3}{Dt} \vec{e}_3$$

Για το μέτρο της επιτάχυνσης σε κάθε διεύθυνση

$$a_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_i}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_i}{\partial x_3} v_3 + \frac{\partial v_i}{\partial t} \Rightarrow$$

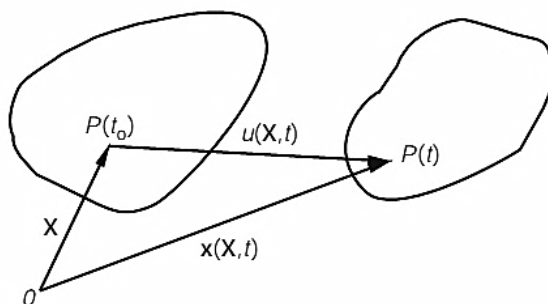
$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \frac{\partial v_i}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\vec{a} = \vec{v} \cdot \nabla\vec{v} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$$

IV.2.5 Μετατόπιση και ταχυστής μετατόπισης

Το διάνυσμα της μετατόπισης ενός υλικού σημείου του συνεχούς μέσου, για μικρές μετατοπίσεις, είναι η διαφορά του διανύσματος θέσης της παρούσας θέσης του σώματος έστω $P(t)$ και του διανύσματος θέσης της αρχικής θέσης του σώματος έστω $P(t_0)$. Επομένως αν το διάνυσμα αυτό το ονομάσουμε \vec{u} τότε

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X} = f(\vec{X}, t) - \vec{X} = f(\vec{X}, t)$$



Με βάση τον ορισμό της μετατόπισης μπορούμε να ορίσουμε ένα θεμελιώδες μέγεθος στη μηχανική του συνεχούς μέσου, τον ταχυστή της μετατόπισης. Κατά τη μετατόπιση του σώματος η τελική του θέση μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{x} = \vec{u}(\vec{X}, t) + \vec{X}$$

Γειτονικό υλικό σημείο που βρίσκεται αρχικά στη θέση $\vec{X} + d\vec{X}$ καταλαμβάνει την τελική του θέση που μπορεί να υπολογιστεί αντίστοιχα ως

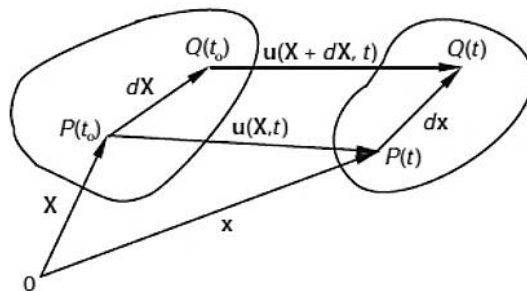
$$\vec{x} + d\vec{x} = \vec{u}(\vec{X} + d\vec{X}, t) + \vec{X} + d\vec{X}$$

Αφαιρώντας τις δύο παραπάνω κατά μέλη

$$\vec{x} + d\vec{x} - \vec{x} = \vec{u}(\vec{X} + d\vec{X}, t) + \vec{X} + d\vec{X} - \vec{u}(\vec{X}, t) - \vec{X} \Rightarrow$$

$$d\vec{x} = d\vec{X} + \vec{u}(\vec{X} + d\vec{X}, t) - \vec{u}(\vec{X}, t) \Rightarrow$$

$$d\vec{x} = d\vec{X} + (\nabla \vec{u})d\vec{X}$$



Αν θυμηθούμε ότι η εφαρμογή του τελεστή της κλίσης (gradient) σ ένα διάνυσμα μας δίνει έναν ταχυστή, τότε εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι στις καρτεσιανές συντεταγμένες

$$[\nabla \vec{u}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Η σχέση

$$d\vec{x} = d\vec{X} + (\nabla \vec{u})d\vec{X}$$

μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$d\vec{x} = [\mathbf{I} + (\nabla \vec{u})]d\vec{X} \Rightarrow$$

$$d\vec{x} = \mathbf{F}d\vec{X} \Rightarrow$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\vec{x}}{d\vec{X}} = \mathbf{I} + (\nabla \vec{u}) \Rightarrow$$

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

όπου \mathbf{F} είναι ο ταυστής της μετατόπισης.

Για τον υπολογισμό του ταυστή της παραμόρφωσης με βάση την παραπάνω σχέση να σημειωθεί ότι

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = \delta_{ij}$$

IV.2.6 Ταυστής παραμόρφωσης

Για μικρές μετατοπίσεις ορίζεται ο ταυστής της παραμόρφωσης ως

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}[\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T]$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες θα είναι

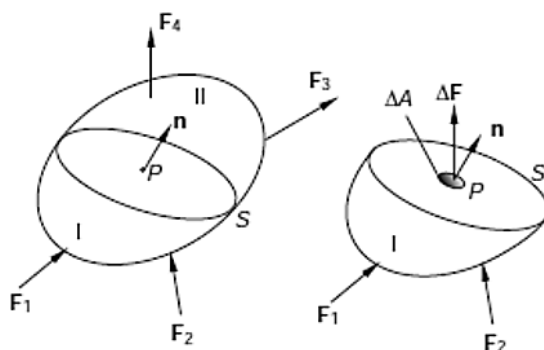
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \Rightarrow$$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

IV.3. ΑΡΧΕΣ ΤΑΣΗΣ

IV.3.1 Διάνυσμα τάσης

Για το σώμα που παριστάνεται στο κάτωθι σχήμα μπορούμε να ορίσουμε το διάνυσμα της τάσης στο σημείο P κάνοντας μια τομή μ ένα φανταστικό επίπεδο S που χωρίζει το σώμα σε δύο μέρη. Το επίπεδο της τομής ορίζεται με βάση το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα \vec{n} που διέρχεται από το P . Το διάνυσμα της τάσης ορίζεται τώρα ως



$$\vec{t}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$

Γενικεύοντας την παραπάνω θεώρηση για την περίπτωση μιας επιφάνειας S μπορούμε να ορίσουμε το διάνυσμα της τάσης ως

$$\vec{t} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S}$$

Το διάνυσμα της τάσης μπορεί να εκφραστεί ως

$$\vec{t} = f(\vec{x}, t, \vec{n})$$

επομένως θα υπάρχει κάποιος μετασχηματισμός που μετατρέπει το μοναδιαίο διάνυσμα \vec{n} στο διάνυσμα της τάσης \vec{t} , δηλαδή

$$\vec{t} = \sigma(\vec{x}, t) \vec{n}$$

όπου σ τανυστής της τάσης.

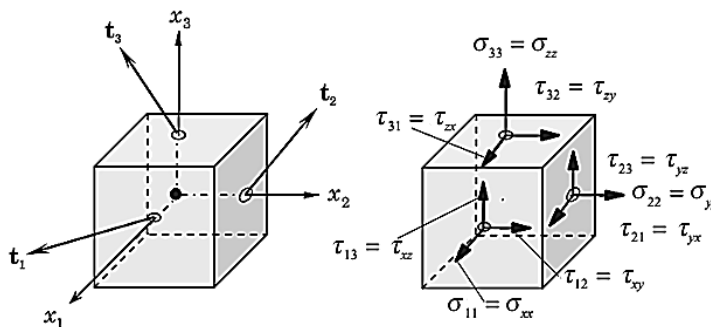
IV.3.2 Τανυστής τάσης

Για την ερμηνεία του τανυστή της τάσης και τη σύνδεσή του με το διάνυσμα της τάσης που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο, παρατίθεται το παρακάτω σχήμα όπου τα $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3$ εκφράζουν τα διανύσματα τάσης που ασκούνται σε επιφάνειες του κύβου που είναι αντίστοιχα κάθετες στις διευθύνσεις 1,2,3. Ο προσανατολισμός αυτών των επιφανειών μπορεί να οριστεί και με βάση το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα σ αυτές δηλαδή τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$. Στο ίδιο σχήμα φαίνεται η τασική εντατική κατάσταση του κύβου που μπορεί να αναλυθεί σε μια ορθή τάση που δρα κάθετα σε κάθε επιφάνεια και δύο διατμητικές που δρουν παράλληλα σε κάθε επιφάνεια του κύβου αντίστοιχα, ορίζοντας έτσι τον τανυστή της τάσης με στοιχεία

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Αναλύοντας τα διανύσματα τάσης $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3$ στα στοιχεία του ταυυστή της τάσης στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

$$\begin{cases} \vec{t}_1 = \sigma_{11}\vec{e}_1 + \tau_{12}\vec{e}_2 + \tau_{13}\vec{e}_3 \\ \vec{t}_2 = \tau_{21}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \tau_{23}\vec{e}_3 \\ \vec{t}_3 = \tau_{31}\vec{e}_1 + \tau_{32}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{t}_1 \\ \vec{t}_2 \\ \vec{t}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} \Rightarrow t_j = \sigma_{ji}e_i$$



μπορούμε να εξάγουμε χρήσιμα βασικά συμπεράσματα όπως

α) Η πρώτη στήλη του ταυυστή της τάσης εκφράζει το διάνυσμα τάσης \vec{t}_1 , αντίστοιχα η δεύτερη στήλη το \vec{t}_2 και η τρίτη το \vec{t}_3 , κάτι που σημαίνει ότι ο ταυυστής της τάσης συγκεντρώνει όλα τα διανύσματα τάσης που πιθανά να φορτίζουν το υπό εξέταση σώμα.

β) Το \vec{t}_1 είναι το διάνυσμα της τάσης με ένα στοιχείο ορθής τάσης σ_{11} που ενεργεί σε μια επιφάνεια κάθετη στη διεύθυνση 1 και κατά τη διεύθυνση 1. Επίσης, έχει δύο στοιχεία διατμητικής τάσης. Το τ_{12} ενεργεί σε μια επιφάνεια κάθετη στη διεύθυνση 1 (πρώτος δείκτης του τ_{12}) και κατά τη διεύθυνση 2 (δεύτερος δείκτης του τ_{12}). Αντίστοιχα και για το τ_{13} όπως και για τα υπόλοιπα στοιχεία του ταυυστή της τάσης.

γ) Η σχέση που συνδέει το διάνυσμα της τάσης μπορεί να γραφεί υπό μορφή πινάκων και υπό γραφής με δείκτες και είναι μια από τις θεμελιώδεις σχέσεις στη μηχανική του συνεχούς. Η σχέση του Cauchy για την τάση σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι (εδώ $n_i \equiv e_i$, ενώ για τυχαία προσανατολισμένα επίπεδα $\vec{n} = n_i e_i$)

$$t_j = \sigma_{ji}e_i \xrightarrow{e_i=n_i} t_j = \sigma_{ji}n_i$$

$$\vec{t} = \sigma^T \vec{n}$$

Δίνεται και δεν αποδεικνύεται στα πλαίσια αυτού του μαθήματος, ότι ο ταυυστής της τάσης είναι συμμετρικός ($\tau_{12} = \tau_{21}, \tau_{13} = \tau_{31}, \tau_{23} = \tau_{32}$), επομένως

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \Rightarrow \sigma = \sigma^T$$

$$\vec{t} = \sigma \vec{n} \Rightarrow t_i = \sigma_{ij}n_j$$

δ) Η μονάδα των στοιχείων του ταυυστή της τάσης και του διανύσματος της τάσης είναι δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας, δηλαδή N/m^2 .

Να σημειωθεί ότι η εξίσωση ενός τυχαία προσανατολισμένου επιπέδου δίνεται από

$$Ax + By + Cz = D$$

όπου

$$A = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} x_1 & 1 & z_1 \\ x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

όπου (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) και (x_3, y_3, z_3) είναι τρία σημεία από τα οποία διέρχεται το επίπεδο με εξίσωση

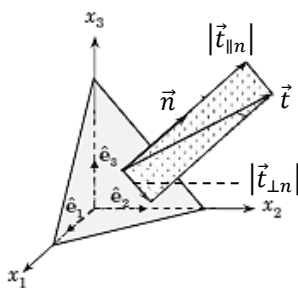
$$Ax + By + Cz = D$$

Το διάνυσμα που είναι κάθετο στο τυχαία προσανατολισμένο αυτό επίπεδο είναι

$$\vec{n} = A\vec{e}_x + B\vec{e}_y + C\vec{e}_z$$

Το μέτρο του διανύσματος της ορθής τάσης παράλληλα στο διάνυσμα \vec{n} , δηλαδή κάθετα στο τυχαία προσανατολισμένο επίπεδο, θα είναι η προβολή του \vec{t} πάνω στο \vec{n} επομένως το εσωτερικό γινόμενο τους, δηλαδή

$$|\vec{t}_{\parallel n}| = \vec{t} \cdot \vec{n}$$



ενώ το μέτρο του διανύσματος της διατμητικής τάσης που είναι κάθετη στο διάνυσμα \vec{n} , δηλαδή παράλληλα με το τυχαία προσανατολισμένο επίπεδο, μπορεί να βρεθεί από το Πυθαγόρειο Θεώρημα ως

$$|\vec{t}_{\perp n}| = \sqrt{|\vec{t}|^2 - |\vec{t}_{\parallel n}|^2}$$

IV.4. ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΝΟΜΟΙ

Στα πλαίσια της μηχανικής του συνεχούς και στα πλαίσια αυτού του εισαγωγικού μαθήματος είναι απαραίτητη η κατανόηση θεμελιωδών νόμων

- της διατήρησης της μάζας (συνέχειας),
- της διατήρησης της ορμής,
- της διατήρησης της ενέργειας (που δε θα παρουσιαστεί εδώ).

Οι παραπάνω εξισώσεις σε συνδυασμό με την καταστατική εξίσωση που περιγράφει τη συμπεριφορά του κάθε φορά υπό εξέταση υλικού, καθώς και οι εξισώσεις της κινηματικής μαζί με τις οριακές και συνοριακές συνθήκες ολοκληρώνουν τα διάφορα προβλήματα μηχανικής που καλείται κανένας να λύσει.

IV.4.1 Εξίσωση συνέχειας

Η πυκνότητα της μάζας, το πηλίκο της μάζας ως προς τη μήκος σε μια διάσταση, σε κάθε θέση ενός σώματος λαμβάνει δύο τιμές

$$\alpha) m(P_0) = \int_{P_0} \rho_0 dX \text{ όπου } \rho_0 = \rho_0(X, 0) \text{ η αρχική πυκνότητα του σώματος της χρονική στιγμή } t = 0,$$

$$\beta) m(P_t) = \int_{P_t} \rho dx \text{ όπου } \rho = \rho(x, t) \text{ η τρέχουσα πυκνότητα του σώματος της χρονική στιγμή } t.$$

Το αξίωμα διατήρησης της μάζας στην **περιγραφή κατά Lagrange** μπορεί τώρα να εκφραστεί ως ένα ισοζύγιο μεταξύ των δύο τιμών, δηλαδή

$$m(P_0) = m(P_t) \Rightarrow$$

$$\int_{P_0} \rho_0 dX = \int_{P_t} \rho dx \xrightarrow{F = \frac{dx}{dX}}$$

$$\int_{P_0} \rho_0 dX = \int_{P_0} \rho F dX \Rightarrow$$

$$\int_{P_0} (\rho_0 - \rho F) dX \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{F}$$

με δεδομένη τη συνέχεια των μεγεθών εντός του ολοκληρώματος.

Είναι χρήσιμο να εκφραστεί το ίδιο αξίωμα στην **περιγραφή κατά Euler**. Λαμβάνοντας την εξίσωση της συνέχειας κατά Lagrange και παραγωγίζοντας

$$\rho_0 = \rho F \Rightarrow \dot{\rho}_0 = \dot{\rho} F + \rho \dot{F} \Rightarrow 0 = \dot{\rho} F + \rho \dot{F}$$

Η χρονική παράγωγος της κλίσης παραμόρφωσης F είναι

$$\dot{F} = \frac{\dot{\partial x}}{\partial X} = \frac{\partial v}{\partial X} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} = \frac{\partial v}{\partial x} F$$

Από το συνδυασμό των δύο παραπάνω σχέσεων

$$\begin{aligned}\dot{\rho}F + \rho \frac{\partial v}{\partial x} F &= 0 \Rightarrow \\ \left(\dot{\rho} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} \right) F &= 0 \xrightarrow{F \neq 0} \\ \left(\dot{\rho} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= 0 \xrightarrow{\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v + \rho \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

Η άμεση γενίκευση της εξίσωσης της συνέχειας στις τρεις διαστάσεις **στην περιγραφή κατά Euler** είναι τώρα

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

όπου $v = v(x, y, z, t)$, $v = v(x, y, z, t)$, $w = w(x, y, z, t)$ οι ταχύτητες στη διεύθυνση x, y, z αντίστοιχα.

IV.4.2 Εξίσωση διατήρησης της ορμής

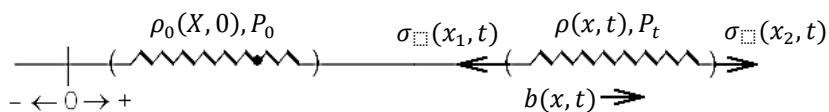
Για την εξαγωγή της διατήρησης της ορμής στη μια διάσταση θα πρέπει να διαχωρίσουμε τα τρία βασικά είδη δυνάμεων που εμφανίζονται κατά τη μελέτη της μηχανικής των σωμάτων

α) εξωτερικές δυνάμεις $\sigma(x, t)$ (δυνάμεις επαφής) που ασκούνται στην εξωτερική επιφάνεια των σωμάτων και εκφράζονται ως δύναμη ανά μονάδα επιφανείας,

β) εσωτερικές δυνάμεις $\sigma(x, t)$ (δυνάμεις επαφής) που ασκούνται στις εσωτερικές επιφάνειες των σωμάτων και εκφράζονται ως δύναμη ανά μονάδα επιφανείας, ως φαινομενολογικός μέσος όρος των μοριακών δυνάμεων μεταξύ γειτονικών υλικών σημείων,

γ) μαζικές δυνάμεις $b(x, t)$ που οφείλουν την ύπαρξή τους στην παρουσία κάποιου πεδίου (βαρυτικό, ηλεκτρομαγνητικό κλπ) και εκφράζονται ως δύναμη ανά μονάδα μάζας.

Για το μονοδιάστατο σώμα του παρακάτω σχήματος το οποίο βρίσκεται υπό δύναμη πεδίου και δυνάμεις επαφής μπορούμε να γράψουμε ότι η συνολική δύναμη επαφής είναι



$$f_c(P_t) = \sigma(x_2, t) - \sigma(x_1, t) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx$$

ενώ η συνολική μαζική δύναμη είναι

$$f_b(P_t) = \int_{x_1}^{x_2} b(x, t) \rho(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} b \rho dx$$

Η συνολική δύναμη στο σώμα θα είναι

$$f_t(P_t) = f_c(P_t) + f_b(P_t) = \int_{P_t} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} + b\rho \right) dx$$

Ορίζοντας την ορμή ως

$$L(P_t) = \int_{P_t} \rho v dx$$

και το αξίωμα διατήρησης της ορμής ως

$$\overline{\dot{L}(P_t)} = f_t(P_t)$$

μπορούμε να εξαγάγουμε την αρχή διατήρησης της ορμής **στην περιγραφή κατά Euler** σε μια διάσταση ως

$$\int_{P_t} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} + b\rho \right) dx = \overline{\int_{P_t} \rho v dx} = \overline{\int_{P_0} \rho v (F dX)} = \overline{\int_{P_0} \rho_0 v dX} = \int_{P_0} \rho_0 \dot{v} dX \Rightarrow$$

$$\int_{P_t} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} + b\rho \right) dx = \int_{P_t} \rho_0 \dot{v} \left(\frac{dx}{F} \right) = \int_{P_t} \rho_0 \dot{v} dx \Rightarrow$$

$$\int_{P_t} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} + b\rho - \rho_0 \dot{v} \right) dx = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + b\rho = \rho_0 \dot{v}$$

με δεδομένη τη συνέχεια των συναρτήσεων εντός του ολοκληρώματος.

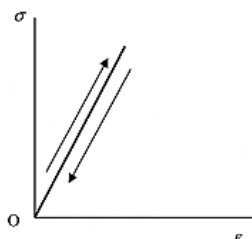
Η αντίστοιχη εξίσωση **στην περιγραφή κατά Lagrange** είναι

$$\frac{\partial \sigma}{\partial X} + b\rho_0 = \rho_0 \dot{v}$$

IV.5. ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

IV.5.1 Ελαστικά στερεά

Στο ελαστικό στερεό η σχέση μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης είναι μια γραμμική σχέση και περιγράφεται από το γενικευμένο νόμο του Hooke



$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$$

όπου ε_{ij} ο τανυστής της παραμόρφωσης

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

και λ, μ ελαστικές σταθερές που συνδέονται με το μέτρο ελαστικότητας και το μέτρο του Poisson από

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

και ο τανυστής της τάσης γίνεται

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$$

Η αντίστροφη σχέση για τον προσδιορισμό της παραμόρφωσης είναι

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}$$

Για τη μελέτη ενός μονοδιάστατου προβλήματος μηχανικής που αφορά σε ελαστικό στερεό θα χρησιμοποιήσουμε **την περιγραφή κατά Lagrange**. Η εξίσωση διατήρησης της μάζας, της ορμής και η καταστατική εξίσωση του ελαστικού στερεού είναι

$$\begin{cases} \rho = \frac{\rho_0}{F} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial X} + b\rho_0 = \rho_0\dot{v} \\ \sigma = E\varepsilon \end{cases}$$

ενώ από τον ορισμό της μετατόπισης και της παραμόρφωσης προκύπτει

$$\begin{cases} u = x - X \\ \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial X} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = \dot{x} = v \\ \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial X} \end{cases}$$

επομένως

$$\frac{\partial \sigma}{\partial X} + b\rho_0 = \rho_0 \dot{v} \Rightarrow \frac{\partial(E\varepsilon)}{\partial X} + b\rho_0 = \rho_0 \ddot{u} \Rightarrow$$

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + b\rho_0 = \rho_0 \ddot{u} \Rightarrow u_{,xx} + \frac{b\rho_0}{E} = \frac{\rho_0}{E} \ddot{u}$$

Αν επιπλέον θεωρήσουμε τις μαζικές δυνάμεις αμελητέες στα πλαίσια επίλυσης ενός προβλήματος τότε λαμβάνουμε τη μονοδιάστατη εξίσωση κύματος ως τη διαφορική εξίσωση του προβλήματος

$$\ddot{u} = c^2 u_{,xx}$$

όπου

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$$

είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στο ελαστικό στερεό. Το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών λαμβάνοντας και τις κατάλληλες οριακές και συνοριακές συνθήκες για το δεδομένο, κάθε φορά, πρόβλημα υπό μελέτη.

IV.5.2 Ρευστά

Στην περίπτωση των ρευστών θα μπορούσαμε να αναφέρουμε μια κατηγορία ρευστών που ονομάζονται Νευτώνεια και παρουσιάζουν την ιδιότητα η τάση που αναπτύσσεται σ αυτά κατά την κίνησή τους να είναι γραμμική συνάρτηση του ρυθμού παραμόρφωσής τους. Επιπλέον, αν προσθέσουμε την ιδιότητα του ασυμπίεστου ρευστού καταλήγουμε στην καταστατική εξίσωση για τα στοιχεία του ταυοστή της τάσης στα ασυμπίεστα Νευτώνεια ρευστά ως

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

όπου

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

Για τη μελέτη ενός προβλήματος μηχανικής ρευστών θα χρησιμοποιήσουμε **την περιγραφή κατά Euler**. Η εξίσωση διατήρησης της μάζας, της ορμής και η καταστατική εξίσωση του ασυμπίεστου Νευτώνειου ρευστού είναι

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \\ -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \rho \vec{b} = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} \\ \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \end{cases}$$

όπου

$$\vec{V} = v\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z$$

το πεδίο ταχύτητας του ρευστού.

Αναλύοντας τη δεύτερη των τριών εξισώσεων σε συνιστώσες στις διευθύνσεις x, y, z καταλήγει κανείς στις εξισώσεις Navier – Stokes για ασυμπίεστα Νευτώνεια ρευστά, δηλαδή

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \rho g_x = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \rho g_y = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \rho g_z = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + v\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{cases}$$

Με βάση τις εξισώσεις αυτές και την εξίσωση της συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

μπορούν να μελετηθούν προβλήματα υδροστατικής καθώς και δυναμικών ροών ρευστών σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

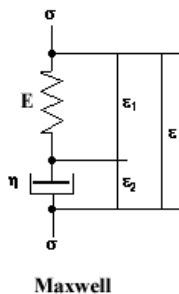
IV.5.3 Πολυμερή (ερπυσμός και χαλάρωση τάσης)

Τα δύο φαινόμενα που θα δούμε σ αυτή την παράγραφο, ο ερπυσμός και η χαλάρωση τάσης, εισάγουν μη γραμμική σχέση μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης, δηλαδή είναι μια μη γραμμική απόκλιση από το γραμμικό μοντέλο του Hooke που είδαμε στα ελαστικά στερεά. Τα πολυμερή εμφανίζουν και τα δύο φαινόμενα ίσως ως πιο αντιπροσωπευτικά υλικά μη γραμμική συμπεριφοράς, αν και βεβαίως ανάλογη συμπεριφορά εμφανίζουν και στερεά μεταλλικά υλικά.

Στον ερπυσμό το υλικό υπό μελέτη υπόκειται σε καταπόνηση σταθερής τάσης ενώ η παραμόρφωσή του μεταβάλλεται με το χρόνο, ενώ αντίθετα στη χαλάρωση τάσης το σταθερό μέγεθος είναι η παραμόρφωση του υλικού, ενώ η τάση μεταβάλλεται χρονικά.

Τα δύο απλοποιημένα μηχανικά μοντέλα που θα δούμε πως ακριβώς περιγράφουν τα δύο προαναφερθέντα φαινόμενα είναι το μοντέλο Kelvin – Voight για τον ερπυσμό και το μοντέλο Maxwell για τη χαλάρωση τάσης.

Το ισοδύναμο μηχανικό μοντέλο Maxwell αποτελείται από ένα μηχανικό πλήρως ελαστικό ελατήριο κι έναν ιξώδη αποσβεστήρα συνδεδεμένα εν σειρά. Στα άκρα της σύνδεσης ασκείται τη χρονική στιγμή $t = 0$ τάση ίση με σ_0 και το ζητούμενο είναι η μεταβολή αυτής της τάσης με το χρόνο καθώς η συνολική παραμόρφωση ελατηρίου και αποσβεστήρα παραμένει σταθερή, δηλαδή



$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma(t) \end{cases}$$

όπου για $\sigma(t = 0) = \sigma_0$.

Για το ελαστικό ελατήριο θα ισχύει ότι

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = \sigma(t)$$

Για τον αποσβεστήρα

$$\sigma_2 = \eta\dot{\varepsilon}_2 = \sigma(t)$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο τη σχέση των παραμορφώσεων και αντικαθιστώντας τις παραμορφώσεις σε ελατήριο και αποσβεστήρα από τις καταστατικές εξισώσεις αντίστοιχα

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = 0$$

αφού η συνολική παραμόρφωση ε παραμένει σταθερή κι ανεξάρτητη του χρόνου.

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση μπορεί να λυθεί ως προς $\sigma(t)$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= -\frac{E}{\eta}\sigma \Rightarrow \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{E}{\eta}\sigma \Rightarrow \\ \frac{d\sigma}{\sigma} &= \left(-\frac{E}{\eta}\right)dt \Rightarrow \ln\sigma = \left(-\frac{E}{\eta}\right)t + c \end{aligned}$$

Για $t = 0 \Rightarrow \sigma = \sigma_0$ οπότε

$$\ln\sigma_0 = c$$

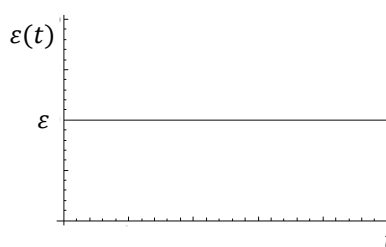
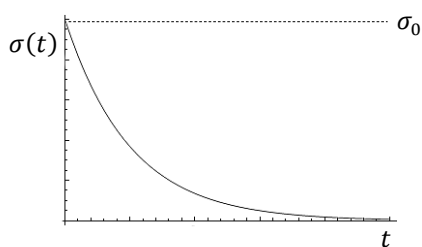
επομένως

$$\ln\sigma = \left(-\frac{E}{\eta}\right)t + \ln\sigma_0 \Rightarrow \ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) = \left(-\frac{E}{\eta}\right)t \Rightarrow \sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

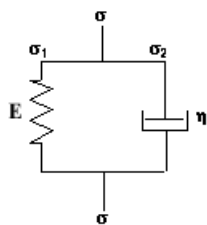
όπου

$$\tau = \frac{\eta}{E}$$

ο χρόνος χαλάρωσης που είναι χαρακτηριστική ιδιότητα του υλικού.



Το ισοδύναμο μηχανικό μοντέλο Kelvin - Voight αποτελείται από ένα μηχανικό πλήρως ελαστικό ελατήριο κι έναν ιξώδη αποσβεστήρα συνδεδεμένα παράλληλα. Στα άκρα της σύνδεσης ασκείται σταθερή τάση σ και το ζητούμενο είναι η μεταβολή της παραμόρφωσης με το χρόνο, δηλαδή



Kelvin - Voight

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \\ \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \end{cases}$$

Για το ελαστικό ελατήριο θα ισχύει ότι

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = \sigma(t)$$

Για τον αποσβεστήρα

$$\sigma_2 = \eta\dot{\varepsilon}_2 = \sigma(t)$$

Η συνολική τάση θα είναι επομένως

$$\sigma = E\varepsilon_1 + \eta\dot{\varepsilon}_2 \Rightarrow \sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \Rightarrow \sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E}{\eta}\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta} \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{E}{\eta} \left(\frac{\sigma}{E} - \varepsilon \right) \Rightarrow$$

$$\frac{d\varepsilon}{\left(\frac{\sigma}{E} - \varepsilon \right)} = \frac{E}{\eta} dt \Rightarrow \ln \left(\frac{\sigma}{E} - \varepsilon \right) = -\frac{E}{\eta} t + c$$

όπου

$$\frac{\sigma}{E} = \varepsilon_\infty$$

Ο υπολογισμός της σταθεράς γίνεται με βάση την αρχική συνθήκη ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ η παραμόρφωση είναι επίσης μηδέν επομένως,

$$\ln(\varepsilon_\infty) = c$$

άρα

$$\ln(\varepsilon_\infty - \varepsilon) = -\frac{E}{\eta} t + \ln(\varepsilon_\infty) \Rightarrow \ln \left(\frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon}{\varepsilon_\infty} \right) = -\frac{E}{\eta} t \Rightarrow$$

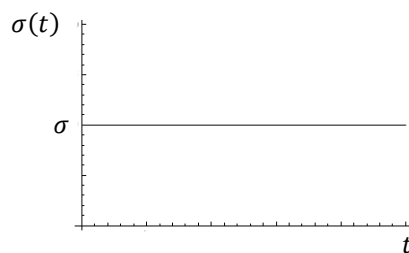
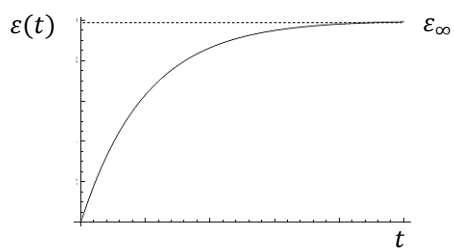
$$\frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon}{\varepsilon_\infty} = e^{-\frac{E}{\eta} t} \Rightarrow 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_\infty} = e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

όπου

$$\tau = \frac{\eta}{E}$$

ο χρόνος χαλάρωσης που είναι χαρακτηριστική ιδιότητα του υλικού.



Παρατηρούμε ότι η παραμόρφωση τείνει προς μια τιμή μετά από αρκετό χρόνο. Η τιμή αυτή είναι η παραμόρφωση

$$\varepsilon_{\infty} = \frac{\sigma}{E}$$

που είναι η παραμόρφωση του ελαστικού ελατηρίου. Δηλαδή, μετά από θεωρητικά άπειρο χρόνο μόνο το ελατήριο έχει την ικανότητα να απορροφήσει παραμόρφωση.

ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ V

Άσκηση V.1: Να υπολογιστούν (απλοποιηθούν) οι παραστάσεις

α) $\varepsilon_{3jk} a_j a_k$

β) $\varepsilon_{ijk} \delta_{kj}$

γ) $\varepsilon_{1jk} a_2 T_{kj}$

δ) $\varepsilon_{1jk} \delta_{3j} v_k$

Άσκηση V.2: Για τα κάτωθι διανύσματα

$$\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$$

$$\vec{b} = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$\vec{c} = 2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$$

να υπολογιστούν οι παραστάσεις

$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$$

Άσκηση V.3: Ο παρακάτω πίνακας δίνει τις γωνίες μεταξύ δύο καρτεσιανών συστημάτων συντεταγμένων

	x_1	x_2	x_3
x'_1	45	90	45
x'_2	60	45	120
x'_3	120	45	60

α) Να υπολογιστεί το μητρώο μετασχηματισμού μεταξύ των δύο συστημάτων συντεταγμένων.

β) Να βρεθούν οι εκφράσεις για το παρακάτω διάνυσμα και τανυστή στο Ox'_1, x'_2, x'_3 αν οι εκφράσεις τους στο Ox_1, x_2, x_3 είναι αντίστοιχα

$$\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$$

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Άσκηση V.4: Να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τανυστή

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & -23 & 28 \\ 0 & 28 & 10 \end{bmatrix}$$

Άσκηση V.5: Ο τανυστής της τάσης σε σημείο P και μονάδες $\frac{N}{m^2}$ δίνεται από

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} -9 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \\ -6 & 9 & -6 \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστούν

α) το διάνυσμα της τάσης στο σημείο P και για το επίπεδο του οποίου το κάθετο διάνυσμα είναι

$$\vec{n} = \frac{1}{9}(\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3)$$

β) το μέτρο του διανύσματος της τάσης,

γ) η συνιστώσα του διανύσματος της τάσης στη διεύθυνση του κάθετου διανύσματος \vec{n} ,

δ) η γωνία μεταξύ του διανύσματος της τάσης και του κάθετου διανύσματος \vec{n}

Άσκηση V.6: Οι συνιστώσες του διανύσματος μετατόπισης ενός σώματος στην περιγραφή κατά Lagrange είναι

$$\begin{cases} u_1 = 10^{-4}(X_1^2 + X_2) \\ u_2 = 10^{-4}(4X_3^2 - X_1) \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

α) Να υπολογιστεί ο τανυστής της παραμόρφωσης

β) Να βρεθεί η μέγιστη αξονική παραμόρφωση στο σημείο $(1,2,1)$

γ) Να υπολογιστεί ο τανυστής της τάσης στο σημείο $(1,2,1)$. Δίνεται ότι $\lambda = 100 [GPa]$, $\mu = 40[GPa]$

Παράρτημα

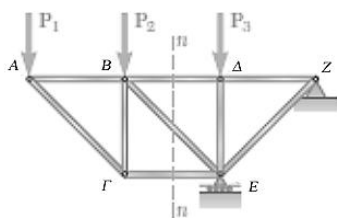
Ειδικά θέματα Στατική – Τεχνική Μηχανική Ι

Παράρτημα: Δικτυώματα (μέθοδος τομών), σύνθετα πλαίσια, δοκοί με εσωτερικές αρθρώσεις,
διαγράμματα M,N,Q σύνθετων φορέων.

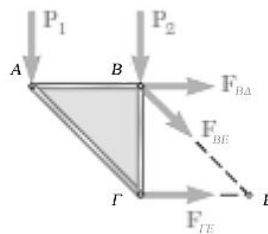
A. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΜΩΝ ΣΤΑ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΑ

A.1 Μεθοδολογία

Η μέθοδος των κόμβων, που έχει ήδη αναφερθεί στο κυρίως μέρος του συγγράμματος, είναι χρήσιμη όταν ζητούνται οι δυνάμεις σε όλες τις δοκούς του δικτυώματος. Όταν όμως ζητούνται οι δυνάμεις μόνο σε κάποιες δοκούς του δικτυώματος τότε γίνεται η χρήση της μεθόδου των τομών.



Σχήμα A.1α



Σχήμα A.1β

Βήμα 1^ο Εφόσον είναι απαραίτητο, υπολογίζουμε τις εξωτερικές αντιδράσεις του δικτυώματος γράφοντας τις εξισώσεις ισορροπίας για ολόκληρο το δικτύωμα. Εφόσον το δικτύωμα είναι στερεό σώμα μπορούμε να γράψουμε 3 εξισώσεις ισορροπίας για τον υπολογισμό 3 αγνώστων αντιδράσεων.

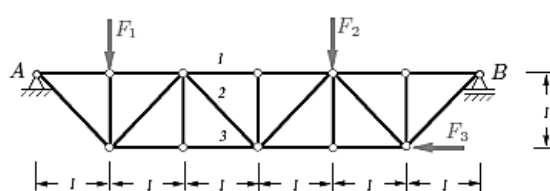
Βήμα 2^ο Κάνουμε μια τομή σε **το πολύ τρεις διαδοχικές δοκούς**.

Βήμα 3^ο Στη θέση της τομής αντικαθιστούμε τις δοκούς, από τις οποίες διέρχεται η τομή, με τις άγνωστες δυνάμεις. Τυπικά τις σχεδιάζουμε τις δυνάμεις με φορά από το κόμβο προς τη δοκό (να φεύγουν από το κόμβο). Οι δυνάμεις της ίδιας δοκού έχουν σχέση δράσης - αντίδρασης μεταξύ των δύο τμημάτων του δικτυώματος.

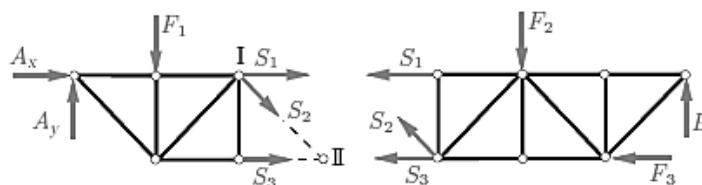
Βήμα 4^ο Δουλεύουμε στο δικτύωμα είτε δεξιά είτε αριστερά της τομής, είτε και στα δύο γράφοντας εξισώσεις ισορροπίας ροπών, ως προς σημείο στο οποίο προσέρχεται ο μέγιστος αριθμός αγνώστων δυνάμεων και εξισώσεις ισορροπίας δυνάμεων.

A.2α Εφαρμογή

Για το δικτύωμα του Σχήματος A2.α να υπολογιστούν οι δυνάμεις των ράβδων 1,2,3.



Σχήμα A.2α



Σχήμα A.2β

- Επίλυση στατικού προβλήματος

Με βάση το Σχήμα Α.2α επιλύουμε το στατικό πρόβλημα:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x - F_3 = 0 \Rightarrow A_x = F_3 \quad (\alpha.1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B - F_1 - F_2 \Rightarrow A_y + B = F_1 + F_2 \quad (\alpha.2)$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -F_1 l - F_2 4l + F_3 l + B 6l = 0 \Rightarrow \quad (\alpha.3)$$

$$B = \frac{F_1 + 4F_2 + F_3}{6} \quad (\alpha.4)$$

Από τις σχέσεις (α.2) και (α.4):

$$A_y = \frac{5F_1 + 2F_2 - F_3}{6} \quad (\alpha.5)$$

- Μέθοδος τομών

Με βάση τη μέθοδο των τομών μπορούμε να κάνουμε μια υποθετική τομή στις 3 διαδοχικές δοκούς 1,2,3 των οποίων οι δυνάμεις μας ζητούνται. Στο Σχήμα Α.2β απεικονίζεται το δικτύωμα σε δύο μέρη μετά την εφαρμογή της τομής. Οι δυνάμεις στις άγνωστες δοκούς τοποθετούνται έτσι ώστε να απομακρύνονται από τους κόμβους, δηλαδή να είναι εφελκυστικές στις δοκούς που καταπονούν (υπόθεση). Εφόσον βρεθούν με θετικό πρόσημο η αρχική υπόθεση ήταν σωστή. Εφόσον βρεθούν με αρνητικό πρόσημο η αρχική υπόθεση ήταν λανθασμένη και θα πρέπει διορθώσουμε τη φορά των δυνάμεων αντίθετα από την υπόθεση (να προσέρχονται στους κόμβους, δηλαδή θλιπτικές στις δοκούς που καταπονούν).

Τα δικτυώματα αριστερά και δεξιά της τομής αποτελούν ένα στερεό σώμα αντίστοιχα. Για τον υπολογισμό των αγνώστων δυνάμεων S_1, S_2, S_3 μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε από τα δύο τμήματα ή το συνδυασμό τους. Παίρνοντας ισορροπία ροπών στο αριστερό τμήμα για το σημείο τομής των δύο αγνώστων δυνάμεων S_1, S_2 μπορούμε να υπολογίσουμε την S_3 ως:

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow -A_y 2l + F_1 l + S_3 l = 0 \Rightarrow$$

$$S_3 = 2A_y - F_1 = \frac{4F_1 + 4F_2 - 2F_3}{6} \quad (\alpha.6)$$

Παίρνοντας ισορροπία ροπών στο δεξί τμήμα για το σημείο τομής των S_2, S_3 μπορούμε να υπολογίσουμε την S_1 ως:

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow -A_y 3l - A_x l + F_1 2l - S_1 l = 0 \Rightarrow$$

$$S_1 = 2F_1 - 3A_y - A_x = 2F_1 - \frac{5F_1 + 2F_2 - F_3}{2} - F_3 \Rightarrow$$

$$S_1 = \frac{F_1 - 2F_2 - F_3}{2} \quad (\alpha.7)$$

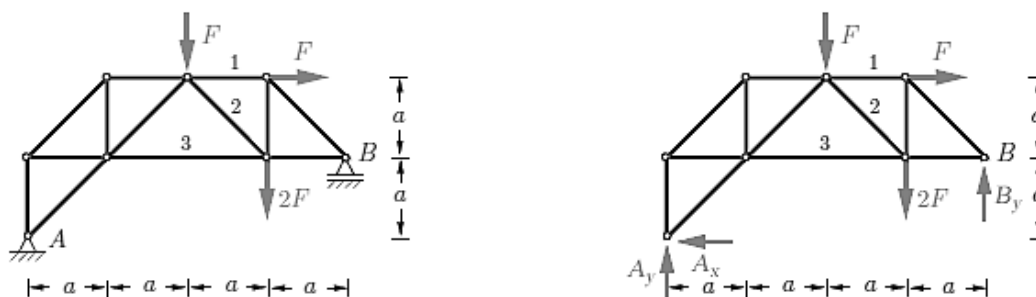
Παίρνοντας ισορροπία δυνάμεων στον κατακόρυφο άξονα στο αριστερό τμήμα υπολογίζουμε την S_2 ως:

$$A_y - F_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}S_2 = 0 \Rightarrow$$

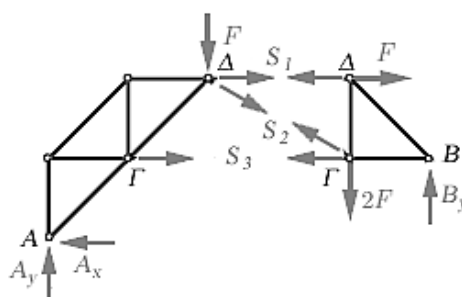
$$S_2 = \sqrt{2}(A_y - F_1) = \sqrt{2} \frac{-F_1 + 2F_2 - F_3}{6} \quad (\alpha.8)$$

A.2β Εφαρμογή

Για το δικτύωμα του Σχήματος Α3.α να υπολογιστούν οι δυνάμεις των ράβδων 1,2,3.



Σχήμα Α.3α



Σχήμα Α.3β

- Επίλυση στατικού προβλήματος

Με βάση το Σχήμα Α.3α επιλύουμε το στατικό πρόβλημα:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = F \quad (\alpha.9)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - F - 2F \Rightarrow A_y + B_y = 3F \quad (\alpha.10)$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow B_y 4a - F 2a - 2F 3a - F 2a = 0 \Rightarrow$$

$$B_y = \frac{10F}{4} = \frac{5F}{2} \quad (\alpha.11)$$

Από τις σχέσεις (α.10) και (α.11):

$$A_y = 3F - B_y \Rightarrow$$

$$A_y = 3F - \frac{5F}{2} = \frac{F}{2} \quad (\alpha.12)$$

- Μέθοδος τομών

Παίρνοντας ισορροπίας ροπών ως προς το σημείο Γ του τμήματος του δικτύωματος δεξιά της τομής, επομένως:

$$\Sigma M_\Gamma = 0 \Rightarrow B_y a - F a + S_1 a = 0 \Rightarrow$$

$$S_1 = -B_y + F = -\frac{5F}{2} + F = -\frac{3F}{2} < 0 \quad (\alpha.13)$$

επομένως λόγω του προσήμου η δύναμη στη ράβδο είναι θλιπτική.

Παίρνοντας ισορροπία ροπών ως προς το σημείο Δ του τμήματος του δικτυώματος αριστερά της τομής, επομένως:

$$\begin{aligned} \Sigma M_r = 0 &\Rightarrow S_3 a - A_y 2a - A_x 2a = 0 \Rightarrow \\ S_3 = 2A_y + 2A_x &= 2\frac{F}{2} + 2F = 3F > 0 \end{aligned} \quad (\alpha.14)$$

επομένως λόγω του προσήμου η δύναμη στη ράβδο είναι εφελκυστική.

Παίρνοντας ισορροπία δυνάμεων είτε στο αριστερό είτε στο δεξί τμήμα του δικτυώματος μπορούμε να υπολογίσουμε τη τελευταία ζητούμενη δύναμη ως:

$$S_2 = -\sqrt{2}\frac{F}{2} < 0 \quad (\alpha.15)$$

επομένως λόγω του προσήμου η δύναμη στη ράβδο είναι θλιπτική.

B. ΠΛΑΙΣΙΑ ΜΕ ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ

B.1 Μεθοδολογία

Συχνά εμφανίζονται κατασκευές που αποτελούνται από πολλές δοκούς που συνδέονται μεταξύ τους με εσωτερικές στηρίξεις. Οι συνηθέστερες εσωτερικές αυτές στηρίξεις είναι:

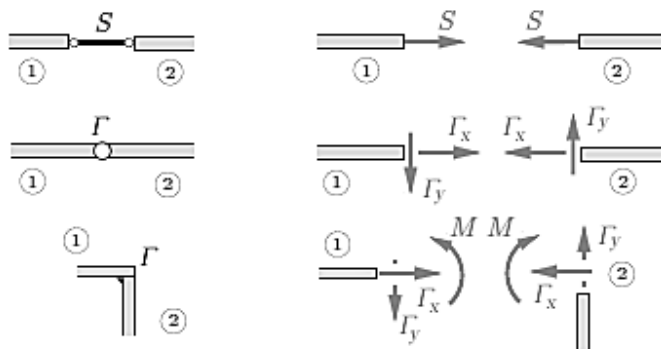
- α) δοκός δικτυώματος,
- β) άρθρωση
- γ) πάκτωση

Στην περίπτωση α) η δοκός του δικτυώματος μπορεί να μεταφέρει δυνάμεις μονό κατά τον άξονά της. Ο αριθμός των εσωτερικών αγνώστων αντιδράσεων είναι επομένως $\nu = 1$.

Στην περίπτωση β) η άρθρωση μπορεί να μεταφέρει μια δύναμη σε τυχαία διεύθυνση ενώ δεν παραλαμβάνει ροπή. Επομένως ο αριθμός των εσωτερικών αγνώστων αντιδράσεων είναι $\nu = 2$, οι συνιστώσες δηλαδή της δύναμης σε τυχαία διεύθυνση.

Στην περίπτωση γ) η πάκτωση μεταφέρει τόσο μια δύναμη σε τυχαία διεύθυνση όσο και μια ροπή, επομένως $\nu = 3$.

Στο Σχήμα B.1 παρουσιάζονται οι τρεις περιπτώσεις εσωτερικών στηρίξεων που περιγράφηκαν παραπάνω και οι αντίστοιχες άγνωστες δυνάμεις και ροπές.



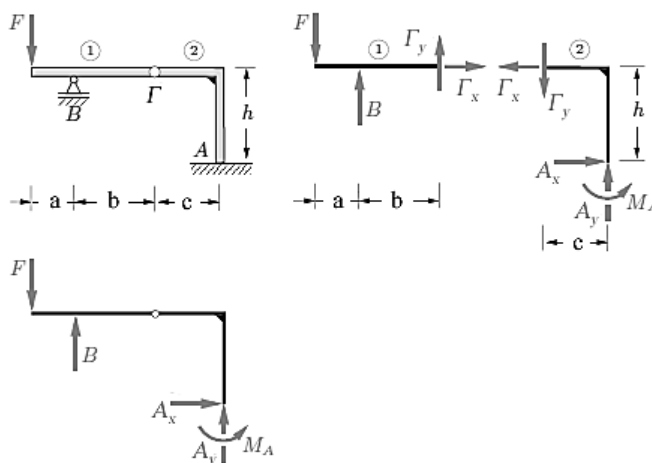
Σχήμα B.1

Για τον προσδιορισμό των αντιδράσεων εφαρμόζουμε τη μέθοδο της κατάργησης των εσωτερικών στηρίξεων και της αντικατάστασής τους από τις άγνωστες δυνάμεις ή/και ροπές που αυτές μεταφέρουν. Τρεις εξισώσεις ισορροπίας μπορούν να γραφούν για κάθε μέλος της κατασκευής, δηλαδή αριστερά και δεξιά της εσωτερικής στήριξης. Επομένως αν έχουμε μια κατασκευή με n αριθμό μελών $3n$ είναι ο αριθμός των εξισώσεων που μπορούν να γραφούν. Έστω r ο αριθμός των εξωτερικών στηρίξεων και v ο αριθμός των άγνωστων δυνάμεων που μεταφέρουν οι εσωτερικές στηρίξεις. Η κατασκευή θα είναι ισοστατική εφόσον ο αριθμός των αγνώστων είναι ίσος με τον αριθμό των διαθέσιμων εξισώσεων, δηλαδή:

$$r + v = 3n \quad (\beta.1)$$

B.2α Εφαρμογή

Για την κατασκευή του Σχήματος B.2 να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στο σημείο A και οι αντιδράσεις της εσωτερικής άρθρωσης στο σημείο Γ.



Σχήμα B.2

Η κατασκευή «λύνεται» στο σημείο Γ και χωρίζεται σε δύο μέλη, τα 1 και 2, καταργώντας την άρθρωση στο ίδιο σημείο. Με δεδομένο ότι το Γ αποτελεί άρθρωση γνωρίζουμε ότι μεταφέρει μια δύναμη σε τυχαία διεύθυνση ή δύο συνιστώσες Γ_x, Γ_y . Παρατηρούμε επίσης ότι $n = 2, r = 3 + 1, v = 2$ επομένως ικανοποιείται η εξίσωση (β.1) και η κατασκευή μας είναι ισοστατική. Τοποθετούμε τις άγνωστες εξωτερικές αντιδράσεις στο σημείο A με τυχαία φορά και τις άγνωστες εσωτερικές αντιδράσεις στο Γ στο μέλος 1 επίσης με τυχαία φορά. Η φορά των αγνώστων

αντιδράσεων στο Γ στο μέλος 2 προκύπτει από το νόμο της δράσης – αντίδρασης μεταξύ του μέλους 1 και του μέλους 2 στο σημείο Γ .

Από την ισορροπία δυνάμεων κατά τον οριζόντιο άξονα στο μέλος 1 προκύπτει:

$$\Gamma_x = 0 \quad (\beta.2)$$

Από την ισορροπία ροπών ως προς το σημείο Γ στο μέλος 1 προκύπτει:

$$(a + b)F - bB = 0 \Rightarrow$$

$$B = \frac{(a+b)}{b} \quad (\beta.3)$$

Από την ισορροπία ροπών ως προς το σημείο B στο μέλος 1 προκύπτει:

$$aF + b\Gamma_y = 0 \Rightarrow$$

$$\Gamma_y = -\frac{a}{b}F < 0 \quad (\beta.4)$$

Επομένως η Γ_y έχει αντίθετη φορά απ αυτή που υποθέσαμε και σχεδιάσαμε στο Δ.Ε.Σ.

Από την ισορροπία δυνάμεων κατά τον κατακόρυφο άξονα στο μέλος 2 προκύπτει:

$$A_y = \Gamma_y = -\frac{a}{b}F < 0 \quad (\beta.5)$$

Επομένως η A_y έχει αντίθετη φορά απ αυτή που υποθέσαμε και σχεδιάσαμε στο Δ.Ε.Σ.

Από την ισορροπία δυνάμεων κατά τον οριζόντιο άξονα στο μέλος 2 προκύπτει:

$$A_x = 0 \quad (\beta.6)$$

Από την ισορροπία ροπών ως προς το σημείο A στο μέλος 2 προκύπτει:

$$M_A + \Gamma_y h = 0 \Rightarrow$$

$$M_A = -\Gamma_y h = -\left(-\frac{a}{b}F\right)h = \frac{ah}{b}F \quad (\beta.7)$$

Για την επαλήθευση του προβλήματος μπορεί να γραφεί η ισορροπία ροπών για ολόκληρη την κατασκευή ως προς το σημείο A ή το σημείο B, εφόσον πρωτίστως έχουν διορθωθεί οι φορές των αρνητικών δυνάμεων στο Δ.Ε.Σ. για την αποφυγή λαθών. Η ισορροπία σ αυτή την περίπτωση θα πρέπει να μας δώσει αποτέλεσμα ίσο με το μηδέν.

B.2β Εφαρμογή

Να βρεθούν οι δυνάμεις των μελών του πλαισίου του Σχήματος Β.3.



Σχήμα Β.3

Επιλύουμε το στατικό πρόβλημα του ισοστατικού πλαισίου. Τοποθετώντας αυθαίρετα τις αντιδράσεις στην άρθρωση E και κύλιση Z και γράφοντας τις εξισώσεις ισορροπίας για το στερεό σώμα

Από την ισορροπία δυνάμεων κατά τον οριζόντιο άξονα στο πλαίσιο προκύπτει:

$$E_x = 0 \quad (\beta.8)$$

Από την ισορροπία δυνάμεων κατά τον κατακόρυφο άξονα στο πλαίσιο προκύπτει:

$$Z_y + E_y = 2400 \quad (\beta.9)$$

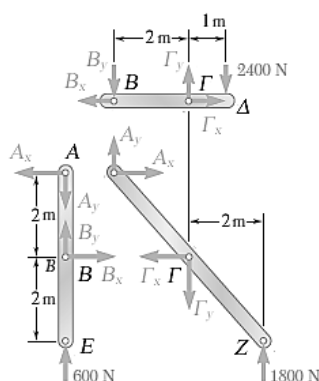
Από την ισορροπία ροπών ως προς το σημείο E προκύπτει:

$$-2400 [N] 3 [m] + F 4 [m] = 0 \Rightarrow$$

$$F = 1800 [N] \quad (\beta.10)$$

Από τις (β.9) και (β.10)

$$E_y = 600 [N] \quad (\beta.11)$$



Σχήμα Β.4

Η επίλυση του πλαισίου απαιτεί τη λύση του στα επιμέρους μέλη του. Σε κάθε εσωτερική άρθρωση από τις A, B και Γ προσθέτουμε δύο άγνωστες δυνάμεις. Αρθρώσεις που είναι κοινές μεταξύ δύο μελών φέρουν άγνωστες

δυνάμεις που έχουν μεταξύ των δύο μελών σχέση δράσης και αντίδρασης. Προκύπτει επομένως τα μέλη και οι δυνάμεις του Σχήματος Β.4. Από τα όμοια τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΓ βρίσκουμε ότι $BΓ = 2 [m]$, επομένως $ΓΔ = 1 [m]$ και $ΓΖ = 2 [m]$ κατά την οριζόντια διεύθυνση. Γράφοντας τις εξισώσεις ισορροπίας στερεού σώματος για κάθε μέλος χωριστά προκύπτει:

- *Μέλος ΒΓΔ*

Από την ισορροπία δυνάμεων κατά τον οριζόντιο άξονα στο μέλος προκύπτει:

$$-B_x + Γ_x = 0 \quad (\beta.12)$$

Από την ισορροπία ροπών στο σημείο Β για το μέλος προκύπτει:

$$\begin{aligned} -2400 [N] 3[m] + Γ_y 2[m] &= 0 \Rightarrow \\ Γ_y &= 3600 [N] \end{aligned} \quad (\beta.13)$$

Από την ισορροπία ροπών στο σημείο Γ για το μέλος προκύπτει:

$$\begin{aligned} -2400 [N] 1[m] + B_y 2[m] &= 0 \Rightarrow \\ B_y &= 1200 [N] \end{aligned} \quad (\beta.14)$$

Οι δυνάμεις $B_x, Γ_x$ δεν είναι δυνατό να προσδιορισθούν με βάση τις εξισώσεις σ αυτό το μέλος, οπότε προχωρούμε στο επόμενο.

- *Μέλος ΑΒΕ*

Από την ισορροπία ροπών στο σημείο Α για το μέλος προκύπτει:

$$B_x 2[m] = 0 \Rightarrow B_x = 0 \quad (\beta.15)$$

Από την ισορροπία δυνάμεων κατά τον οριζόντιο άξονα στο μέλος προκύπτει:

$$-A_x + B_x = 0 \Rightarrow A_x = 0 \quad (\beta.16)$$

Από την ισορροπία δυνάμεων κατά τον κατακόρυφο άξονα στο μέλος προκύπτει:

$$\begin{aligned} B_y + 600 - A_y &= 0 \Rightarrow \\ A_y &= 600 + 1200 = 1800 \end{aligned} \quad (\beta.17)$$

- *Μέλος ΒΓΔ*

Από τη (β.12) και τη (β.15) προκύπτει τώρα:

$$Γ_x = 0 \quad (\beta.18)$$

Η επαλήθευση των υπολογισμών μπορεί να γίνει γράφοντας την εξίσωση ισορροπίας ροπών ως προς ένα σημείο του μέλους ΑΓΖ.

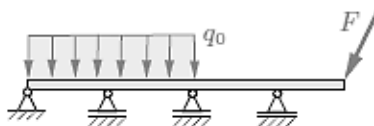
Γ. ΔΟΚΟΙ ΜΕ ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΑΡΘΡΩΣΕΙΣ

Γ.1 Μεθοδολογία

Οι κατασκευές που χρησιμοποιούν δοκούς σε μεγάλη μήκη συχνά στηρίζονται σε περισσότερες από μια στηρίξεις. Στο παράδειγμα της δοκού του Σχήματος Γ.1 ο αριθμός των εξωτερικών αντιδράσεων είναι $r = 5$, ο αριθμός των εσωτερικών στηρίξεων είναι $v = 0$ και ο αριθμός των μελών είναι $n = 1$, επομένως από τη σχέση (β.1)

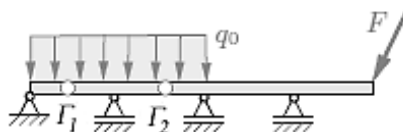
$$r + v = 5 > 3n = 3$$

συνεπώς η δοκός είναι 2 φορές υπερστατική.

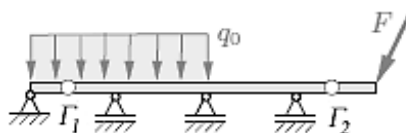


Σχήμα Γ.1

Στην περίπτωση των Σχημάτων Γ.2α και Γ.2β όπου η δοκός χωρίζεται σε περισσότερα από ένα μέλη με τη χρήση εσωτερικών αρθρώσεων είναι δυνατή η εύρεση του αριθμού των εσωτερικών αρθρώσεων για να αποφύγουμε την περίπτωση υπερστατικού φορέα.



Σχήμα Γ.2α



Σχήμα Γ.2β

Αν ο αριθμός των εσωτερικών αρθρώσεων είναι έστω g , η συνεχής δοκός χωρίζεται σε $g + 1$ μέλη. Με δεδομένο ότι κάθε άρθρωση μεταφέρει $v = 2$ άγνωστες δυνάμεις, ο συνολικός αριθμός των εσωτερικών αντιδράσεων είναι $v = 2g$. Επομένως από τη σχέση (β.1)

$$r + v = 3n \Rightarrow r + 2g = 3n \Rightarrow$$

$$g = r - 3 \quad (\gamma.1)$$

Η δοκός των Σχημάτων Γ.2α και Γ.2β έχει $r = 5$ εξωτερικές αντιδράσεις επομένως με βάση τη σχέση (γ.1) απαιτούνται

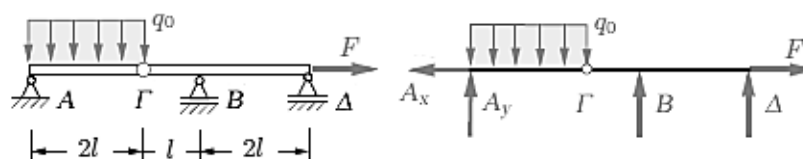
$$g = 5 - 3 = 2$$

εσωτερικές αρθρώσεις. Η διάταξη των εσωτερικών αρθρώσεων μπορεί να ποικίλει αρκεί να είναι έτσι τοποθετημένες ώστε τα εξωτερικά φορτία να παραλαμβάνονται από τις εξωτερικές στηρίξεις. Η δοκός του Σχήματος Γ.2α έχει σχεδιασθεί σωστά καθώς παραλαμβάνονται όλα τα εξωτερικά φορτία ενώ η δοκός του Σχήματος Γ.2β δεν έχει σχεδιασθεί σωστά καθώς η δύναμη F δεν παραλαμβάνεται από τις εξωτερικές στηρίξεις και η κατασκευή κρίνεται στατικά αναποτελεσματική.

Να σημειωθεί ότι είναι δυνατό μια δοκός να είναι εξωτερικά ισοστατική και εσωτερικά υπερστατική, που σημαίνει ότι είναι δυνατός ο υπολογισμός των εξωτερικών αντιδράσεων με βάση τις εξισώσεις ισορροπίας στατικής του στερεού σώματος αλλά δεν είναι αντίστοιχα δυνατός ο υπολογισμός των εσωτερικών αντιδράσεων.

Γ.2 Εφαρμογή

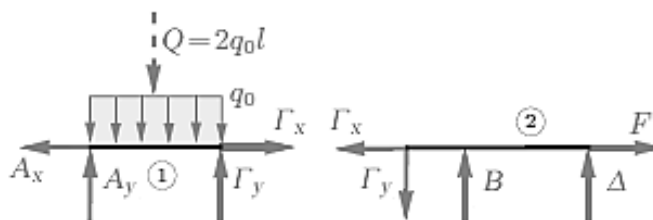
Δίνεται η δοκός του Σχήματος Γ.3 που φορτίζεται με σημειακό και καταναμημένο φορτίο. Να βρεθούν οι εσωτερικές και εξωτερικές αντιδράσεις.



Σχήμα Γ.3

Το Δ.Ε.Σ. της δοκού φαίνεται στο Σχήμα Γ.3. Με βάση τη σχέση (γ.1) η δοκός είναι ισοστατική αφού $g = 1$ και $r = 4$.

Για να επιλυθεί στατικά ο φορέας είναι απαραίτητο να καταργήσουμε την άρθρωση στο σημείο Γ, χωρίζοντας το φορέα σε δύο μέλη, τα μέλη 1 και 2. Με βάση αυτά προκύπτει το Δ.Ε.Σ. των δύο μελών που φαίνεται στο Σχήμα Γ.4.



Σχήμα Γ.4

Από την ισορροπία ροπών ως προς το σημείο A στο μέλος 1 προκύπτει:

$$lQ + 2l\Gamma_y = 0 \Rightarrow$$

$$\Gamma_y = q_0l \quad (\gamma.2)$$

Από την ισορροπία ροπών ως προς το σημείο Γ στο μέλος 1 προκύπτει:

$$-2lA_y + lQ = 0 \Rightarrow$$

$$A_y = q_0l \quad (\gamma.3)$$

αποτέλεσμα που ήταν αναμενόμενο καθώς η φόρτιση του μέλους 1 είναι συμμετρική.

Από την ισορροπία δυνάμεων στον οριζόντιο άξονα στο μέλος 1 προκύπτει:

$$-A_x + \Gamma_x = 0 \quad (\gamma.4)$$

Από την ισορροπία ροπών ως προς το σημείο B στο μέλος 2 προκύπτει:

$$l\Gamma_y + 2l\Delta = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = -\frac{1}{2}q_0l < 0 \quad (\gamma.5)$$

Επομένως η αντίδραση Δ έχει αντίθετη φορά απ αυτή που υποθέσαμε και σχεδιάσαμε στο Δ.Ε.Σ.

Από την ισορροπία ροπών ως προς το σημείο Δ στο μέλος 2 προκύπτει:

$$3l\Gamma_y - 2lB = 0 \Rightarrow$$

$$B = \frac{3}{2}q_0l \quad (\gamma.6)$$

Από την ισορροπία δυνάμεων στον οριζόντιο άξονα στο μέλος 2 προκύπτει:

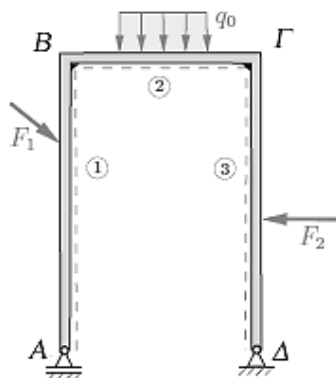
$$-\Gamma_x + F = 0 \Rightarrow$$

$$\Gamma_x = F \quad (\gamma.7)$$

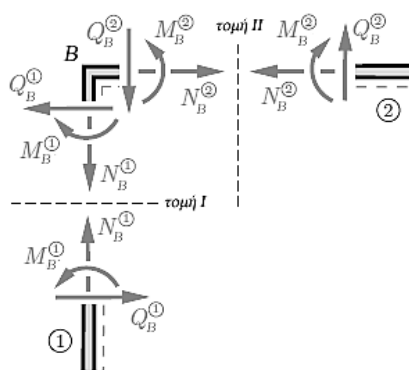
Δ. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Μ, Ν, Q ΠΛΑΙΣΙΩΝ. ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ.

Δ.1 Μεθοδολογία

Η χάραξη διαγραμμάτων Μ, Ν, Q σε πλαίσια που φορτίζονται στο επίπεδο είναι το αντικείμενο αυτής της ενότητας. Για το πλαίσιο του Σχήματος Δ.1α η χάραξη των διαγραμμάτων εσωτερικών μπορεί να απλοποιηθεί εάν γύρω από τα σημεία όπου αλλάζει διεύθυνση η δοκός (σημείο Β και Γ) γίνουν οι ιδεατές τομές, που έχουν ήδη περιγραφεί στην ενότητα του συγγράμματος που αναφέρεται στην κατασκευή των διαγραμμάτων Μ, Ν, Q. Έτσι, προκύπτει για τα εσωτερικά φορτία, αριστερά και δεξιά των τομών (Σχήμα Δ.1β),



Σχήμα Δ.1α



Σχήμα Δ.1β

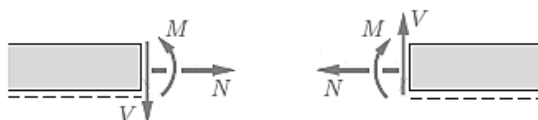
Μεταξύ των τομών I και II για το σημείο B θα ισχύει

$$N_B^1 + Q_B^2 = 0 \Rightarrow N_B^1 = -Q_B^2 \quad (\delta.1)$$

$$Q_B^1 - N_B^2 = 0 \Rightarrow Q_B^1 = N_B^2 \quad (\delta.2)$$

$$M_B^1 = M_B^2 \quad (\delta.3)$$

Να σημειωθεί ότι τα πρόσημα των θετικών εσωτερικών φορτίσεων δεξιά και αριστερά κάθε τομής έχουν προκύψει με βάση τη θετική ίνα αναφοράς που παριστάνεται με διακεκομμένη γραμμή στο πλαίσιο του Σχήματος Δ.1α. Στο Σχήμα Δ.2 φαίνεται η θετική σύμβαση προσήμων των εσωτερικών φορτίων αριστερά και δεξιά μιας τομής στην περίπτωση όπου η θετική ίνα αναφοράς τοποθετείται κάτω από τη δοκό.

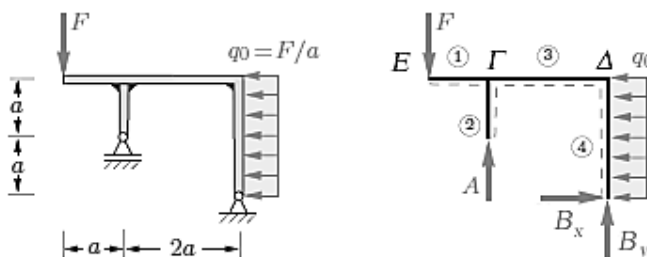


Σχήμα Δ.2

Δ.2α Εφαρμογή

Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα M , N , Q του πλαισίου του Σχήματος Δ.3.

Για την επίλυση του στατικού μοντέλου και τον υπολογισμό των αντιδράσεων στο σημείο Α και Β σχεδιάζεται το Δ.Ε.Σ. που φαίνεται στο Σχήμα Δ.3.



Σχήμα Δ.3

Από την επίλυση του στατικού μοντέλου προκύπτουν οι αντιδράσεις ως:

$$A = \frac{5}{2}F \quad (\delta.4)$$

$$B_y = -\frac{3}{2}F < 0 \quad (\delta.5)$$

Επομένως η B_y έχει αντίθετη φορά απ αυτή που υποθέσαμε και σχεδιάσαμε στο Δ.Ε.Σ.

$$B_x = 2F \quad (\delta.6)$$

Με βάση τη θετική ίνα αναφοράς και τη μέθοδο των τομών μπορούμε να γράψουμε για τα τρία πρώτα μέλη του πλαισίου:

$$N_F^1 = 0, Q_F^1 = 0, M_F^1 = -aF \quad (\delta.7)$$

$$N_F^2 = -A = -\frac{5}{2}F, Q_F^2 = 0, M_F^2 = 0 \quad (\delta.8)$$

$$N_{\Delta}^3 = 0, Q_{\Delta}^3 = -F + A = \frac{3}{2}F, M_{\Delta}^3 = -3aF + 2aA = 2aF \quad (\delta.9)$$

Στο σημείο Δ όπου τα τμήματα 3 και 4 είναι στερεά συνδεδεμένα (πάκτωση) κατ αναλογία με τις σχέσεις (δ.1 - δ.3) προκύπτει:

$$N_{\Delta}^4 = Q_{\Delta}^3 = \frac{3}{2}F, Q_{\Delta}^4 = -N_{\Delta}^3 = 0, M_{\Delta}^4 = M_{\Delta}^3 = 2aF \quad (\delta.10)$$

Στα σημεία επίσης E, A και B που είναι και τα ακραία σημεία του πλαισίου παρατηρούμε ότι:

$$N_E^1 = 0, Q_E^1 = -F, M_E^1 = 0 \quad (\delta.11)$$

αφού στο σημείο E υπάρχει μόνο κατακόρυφη σημειακή δύναμη που είναι επιπλέον ομόρροπη του Q_E^1 .

Επιπλέον,

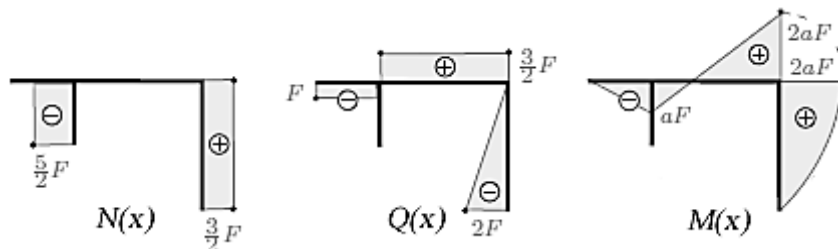
$$N_A^2 = -A = -\frac{5}{2}F, Q_A^2 = 0, M_A^2 = 0 \quad (\delta.12)$$

αφού στο σημείο A υπάρχει μόνο αξονική σημειακή δύναμη που είναι επιπλέον ομόρροπη του N_A^2 .

Τέλος,

$$N_B^4 = -B_y = -\left(-\frac{3}{2}F\right) = \frac{3}{2}F, Q_B^4 = -B_x = -2F, M_B^4 = 0 \quad (\delta.13)$$

Με βάση τα αποτελέσματα σχεδιάζουμε τα διαγράμματα των εσωτερικών φορτίσεων που φαίνονται στο *Σχήμα Δ.4*.



Σχήμα Δ.4

Η μορφή των φορτίσεων προκύπτει σύμφωνα με τις διαφορικές σχέσεις που συνδέουν τις εξωτερικές φορτίσεις με την κατανομή των εσωτερικών,

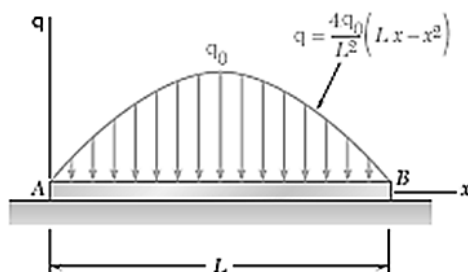
$$\frac{dQ(x)}{dx} = -q(x) \quad (\delta.14)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \quad (\delta.15)$$

Για σημειακά φορτία $q(x) = 0$ επομένως τα διαγράμματα $Q(x), N(x)$ θα είναι σταθερές συναρτήσεις. Γι αυτή την περίπτωση το διάγραμμα $M(x)$ θα παρουσιάζει γραμμική μεταβολή. Στην περίπτωση του ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου $q(x) = c$, επομένως η $Q(x)$ θα μεταβάλλεται γραμμικά και η $M(x)$ θα είναι δευτέρου βαθμού παραβολή. Τις τελευταίες αυτές μεταβολές παρατηρούμε στο μέλος 4 που η φόρτιση είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη.

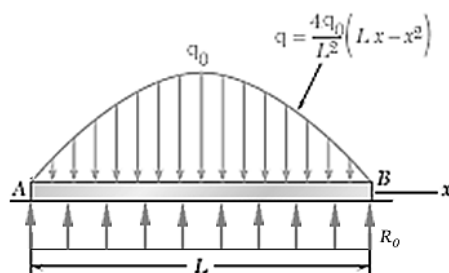
Δ.2β Εφαρμογή

Η πλάκα AB στηρίζεται στο έδαφος και φορτίζεται με το παραβολικό φορτίου του Σχήματος Δ.5, όπου q_0 η μέγιστη τιμή του. Να υπολογισθούν η συνάρτηση της τέμνουσας δύναμης $Q(x)$ και της καμπτικής ροπής $M(x)$ καθώς επίσης η θέση και η τιμή της μέγιστης ροπής. Για την αντίδραση του εδάφους να θεωρηθεί ότι αυτή κατανέμεται ομοιόμορφα κατά μήκος της πλάκας AB .



Σχήμα Δ.5

Στο Σχήμα Δ.6 φαίνεται το Δ.Ε.Σ. του προβλήματος λαμβάνοντας υπόψη την ομοιόμορφα κατανεμημένη αντίδραση του εδάφους έστω R_0 :



Σχήμα Δ.6

Παίρνοντας ισορροπία δυνάμεων στον κατακόρυφο άξονα λαμβάνοντας υπόψη ότι το σημειακό φορτίο μιας κατανομής δίνεται από το εμβαδό της κατανομής:

$$R_0 L = \int_{x=0}^{x=L} \frac{4q_0}{L^2} (Lx - x^2) dx \Rightarrow$$

$$R_0 = \frac{4q_0}{L^3} \left[L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=L} \Rightarrow$$

$$R_0 = \frac{4q_0}{L^3} \left[\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3} \right] \Rightarrow$$

$$R_0 = \frac{2q_0}{3} \quad (\delta.16)$$

Υπολογίζουμε την κατανομή της τέμνουσας δύναμης με βάση τη σχέση:

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -q(x) \Rightarrow \quad (\delta.17)$$

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -\frac{4q_0}{L^2} (Lx - x^2) + R_0 \Rightarrow$$

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -\frac{4q_0}{L^2}(Lx - x^2) + \frac{2q_0}{3} \Rightarrow$$

$$Q(x) = -\frac{4q_0}{L^2}\left(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{2q_0}{3}x + c_1 \quad (\delta.18)$$

Η σταθερά ολοκλήρωσης c_1 μπορεί να υπολογιστεί με βάση κάποια γνωστή τιμή του φορτίου $Q(x)$. Παρατηρούμε ότι (εφόσον στο σημείο Α δεν ασκείται σημειακό φορτίο):

$$Q(x=0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

επομένως η (δ.18) γίνεται:

$$Q(x) = -\frac{4q_0}{L^2}\left(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{2q_0}{3}x \quad (\delta.19)$$

Υπολογίζουμε την κατανομή της καμπτικής ροπής με βάση τη σχέση:

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \Rightarrow \quad (\delta.20)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = -\frac{4q_0}{L^2}\left(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{2q_0}{3}x \Rightarrow$$

$$M(x) = -\frac{2q_0}{3L^2}\left(Lx^3 - \frac{x^4}{2}\right) + \frac{q_0}{3}x^2 + c_2 \quad (\delta.21)$$

Η σταθερά ολοκλήρωσης c_2 μπορεί να υπολογιστεί με βάση κάποια γνωστή τιμή της ροπής $M(x)$. Παρατηρούμε ότι (εφόσον στο σημείο Β δεν ασκείται σημειακό φορτίο):

$$M(x=0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

επομένως η (δ.21) γίνεται:

$$M(x) = -\frac{2q_0}{3L^2}\left(Lx^3 - \frac{x^4}{2}\right) + \frac{q_0}{3}x^2 \quad (\delta.22)$$

Για να βρούμε τη θέση της μέγιστης καμπτικής μπορούμε να παραγωγίσουμε την (δ.22) και να λύσουμε ως προς x ή λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση:

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \quad (\delta.23)$$

να βρούμε που μηδενίζεται η συνάρτηση $Q(x)$. Επομένως:

$$Q(\hat{x}) = 0 \Rightarrow = -\frac{4q_0}{L^2}\left(L\frac{\hat{x}^2}{2} - \frac{\hat{x}^3}{3}\right) + \frac{2q_0}{3}\hat{x} = 0 \xrightarrow{\hat{x}_1=0}$$

$$-\frac{4q_0}{L^2}\left(L\frac{\hat{x}}{2} - \frac{\hat{x}^2}{3}\right) + \frac{2q_0}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \hat{x}_2 = L \\ \hat{x}_3 = \frac{L}{2} \end{cases} \quad (\delta.24)$$

Για τις ρίζες \hat{x}_1, \hat{x}_2 η καμπτική ροπή λαμβάνει την ελάχιστη τιμή $M(\hat{x}_1=0) = M(\hat{x}_2=L) = 0$ κάτι που ήταν αναμενόμενο εφόσον στα άκρα της δοκού δεν ασκείται σημειακή ροπή. Η τιμή $\hat{x}_3 = \frac{L}{2}$ μας δίνει τη μέγιστη τιμή της καμπτικής ροπής

$$M\left(\hat{x}_3 = \frac{L}{2}\right) = -\frac{2q_0}{3L^2} \left[L\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^4}{2} \right] + \frac{q_0}{3} \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{2q_0L^2}{96} \quad (\delta.25)$$

Η θέση της μέγιστης καμπτικής ροπής προκύπτει και από τον τύπο της συμμετρικής φόρτισης της δοκού.

Ε. ΧΑΡΑΞΗ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ M, N, Q ΧΩΡΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ

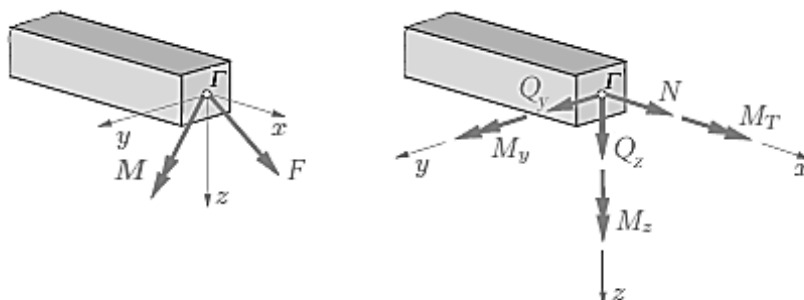
Ε.1 Μεθοδολογία

Στη γενική περίπτωση φόρτισης ενός φορέα που φορτίζεται με μια χωρική δύναμη F και ροπή M (Σχήμα Ε.1) μπορούμε να αναλύσουμε τόσο το διάνυσμα της ροπής (παριστάνεται με διπλό βέλος) όσο και το διάνυσμα της δύναμης στους τρεις άξονες του συστήματος συντεταγμένων ως αξονική δύναμη, τέμνουσα κατά τη διεύθυνση y και τέμνουσα κατά τη διεύθυνση z αντίστοιχα:

$$N, Q_y, Q_z \quad (\varepsilon.1)$$

και ροπή στρέψης κατά τον άξονα x και ροπές κάμψης κατά τους άξονες y, z αντίστοιχα:

$$M_T, M_y, M_z \quad (\varepsilon.2)$$



Σχήμα Ε.1

Να σημειωθεί ότι θετικές είναι οι ροπές των οποίων το διάνυσμα είναι κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα του συστήματος συντεταγμένων. Το διάνυσμα των ροπών παριστάνεται με διπλό βέλος και μπορεί να βρεθεί με βάση τη στροφή που προκαλεί στο φορέα μια δύναμη ως προς σημείο. Χρησιμοποιώντας το δεξί μας χέρι ο αντίχειρας δείχνει τη διεύθυνση και φορά του διανύσματος της ροπής ενώ τα δάχτυλα της παλάμης είναι προς τη φορά στροφής του φορέα.

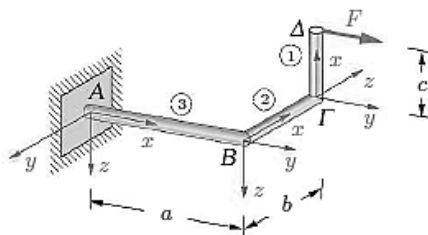


Σχήμα Ε.2

E.2 Εφαρμογή

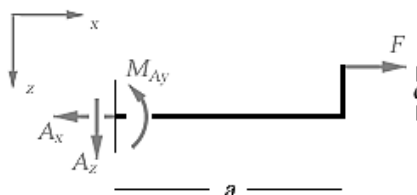
Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα M , N , Q χωρικού φορέα του Σχήματος E.3.

Για την επίλυση του προβλήματος θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε δύο μεθόδους. Στην πρώτη μέθοδο θα μπορούσαμε αρχικά να υπολογίσουμε τις αντιδράσεις της στήριξης στην πάκτωση και έπειτα να σχεδιάσουμε τα διαγράμματα κάνοντας τομές στο φορέα και προχωρώντας από την πάκτωση προς το σημειακό εξωτερικό φορτίο. Στη δεύτερη μέθοδο θα μπορούσαμε να παραλείψουμε τον υπολογισμό των αντιδράσεων και να ξεκινήσουμε τις τομές του φορέα από το σημειακό εξωτερικό φορτίο προς την πάκτωση. Ακολουθώντας την πρώτη μέθοδο θα πρέπει να δουλέψουμε αρχικά στο μέλος 3 και στο επίπεδο $x - z$.



Σχήμα E.3

- Μέλος 3 και επίπεδο $x - z$ (Σχήμα E.4)



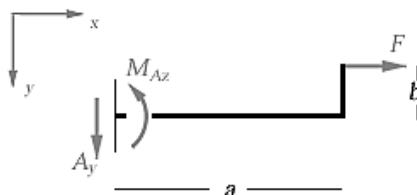
Σχήμα E.4

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x - F = 0 \Rightarrow A_x = F \quad (\epsilon.3)$$

$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow A_z = 0 \quad (\epsilon.4)$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_{Ay} - cF = 0 \Rightarrow M_{Ay} = cF \quad (\epsilon.5)$$

- Μέλος 3 και επίπεδο $x - y$ (Σχήμα E.5)



Σχήμα E.5

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y = 0 \quad (\epsilon.6)$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -M_{Az} - bF = 0 \Rightarrow M_{Az} = -bF \quad (\epsilon.7)$$

Έχοντας υπολογίσει τις αντιδράσεις στην πάκτωση A μπορούμε να σχεδιάσουμε τα διαγράμματα M, N, Q λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (δ.1 - δ.3) για τα σημεία Β και Γ και ότι στα άκρα, στα σημεία A και Δ ισχύει ότι:

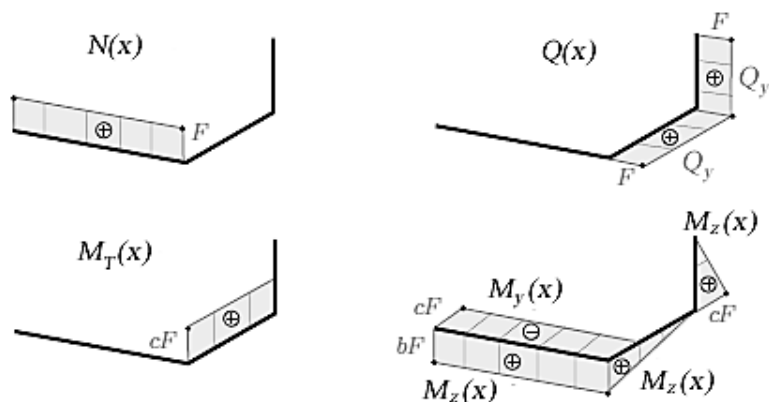
$$N_A^3 = F, Q_{Ay}^3 = Q_{Az}^3 = 0, M_{Ay}^3 = -cF, M_{Az}^3 = bF, M_{AT}^3 = 0 \quad (\epsilon.8)$$

αφού στο σημείο A εμφανίζεται αξονική δύναμη F αντίρροπή του N_A^3 και σημειακές ροπές cF και bF ομόρροπη και αντίρροπή του M_{Ay}^3 και του M_{Az}^3 αντίστοιχα. Ροπή στρέψης στο σημείο A δεν εμφανίζεται αφού το μέλος 3 δεν καταπονείται σε στρέψη επομένως δεν αντιδρά και η πάκτωση με κάποια στρεπτική ροπή.

Στο σημείο Δ:

$$N_\Delta^1 = 0, Q_{\Delta y}^1 = F, Q_{\Delta z}^1 = 0, M_{\Delta y}^1 = 0, M_{\Delta z}^1 = 0, M_{\Delta T}^1 = 0 \quad (\epsilon.9)$$

αφού η αξονική δύναμη του μέλους 1 στο σημείο Δ είναι μηδενική, η τέμνουσα δύναμη κατά τον άξονα y είναι ίση με F ενώ κατά τον άξονα z είναι μηδενική. Να σημειωθεί επίσης ότι το ελεύθερο άκρο Δ δε μπορεί να παραλάβει ροπές επομένως όλες οι ροπές στο σημείο Δ είναι μηδέν.



Σχήμα Ε. 6