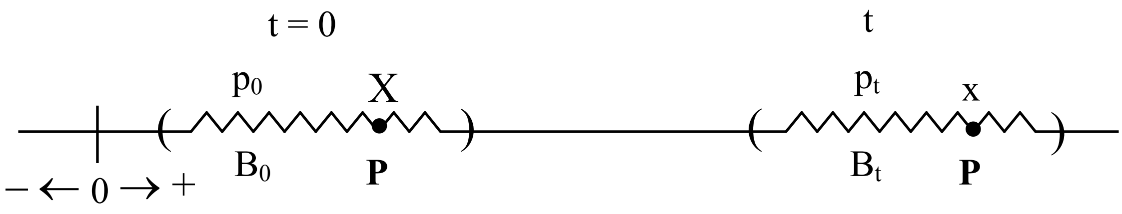
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ
-ΠΕΡΙΛΗΨΗ-

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

1. ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ



Κίνηση: $\chi(X,t)$; $x=\chi(X,t)$, χ συνεχής συνάρτηση; $\chi(X,0)=X$

Ταχύτητα: $v=\dfrac{\partial\chi(X,t)}{\partial t}=\dfrac{\partial x}{\partial t}\equiv\dot{x}$

Επιτάχυνση: $a=\dfrac{\partial^2\chi(X,t)}{\partial t^2}=\dfrac{\partial v}{\partial t}\equiv\ddot{x}$

Παραμόρφωση: $F=\dfrac{\partial\chi(X,t)}{\partial X}\equiv\dfrac{\partial x}{\partial X}$; $dx=FdX$ ... σταθερό t $\left(F\neq\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}\right)$

Μετατόπιση: $u=x-X$

Ανηγμένη Παραμόρφωση: $\varepsilon = \left.\dfrac{dx - dX}{dX}\right|_{t=\sigma\tau\alpha\theta.} = F - 1 = \dfrac{\partial u}{\partial X} \equiv u_X$

Κλίση Ταχύτητας: $D = \dfrac{\partial v}{\partial x}$ ... $\left(D = \dfrac{\dot{\overline{dx}}}{dx} \right)$

Υλική Παράγωγος και Παρατήρηση (Lagrangean): $\dot{f} = \dfrac{\partial f(X,t)}{\partial t}$

Χωρική Παράγωγος και Παρατήρηση (Eulerian): $\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}$

$\therefore \quad \dot{f} = \dfrac{\partial f}{\partial t} + v\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ... Σύνθετη παραγώγιση (chain rule)

2. ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΜΑΖΑΣ

$$m(p_t) = \int_{p_t} \rho(x,t)dx, \quad \rho = \rho(x,t) > 0$$

$m(p_t)\dots$ μάζα του p_t

$\rho(x,t)$... πυκνότητα (μάζα / μονάδα μήκους) στο σε χρόνο t

$m(p_t) = m(p_0)$ ... Αξίωμα Διατήρησης Μάζας

$$\int_{p_t} \rho(x,t)dx = \int_{p_0} \rho_0 dX, \quad \rho_0 = \rho(X,0) > 0$$ ...πυκνότητα Αναφοράς (t=0)

(dx=FdX ...“Ιακωβιανή”, μετασχηματισμός $p_t \to p_0$)

$$\int_{p_0} \rho F dX = \int_{p_0} \rho_0 dX, \quad \forall p_0$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{F} \quad \text{ή} \quad \rho(X,t) = \frac{\rho_0(X)}{F(X,t)}$$

- Διαφορική Εξίσωση Διατήρησης Μάζας (Lagrangean) ... (X,t)

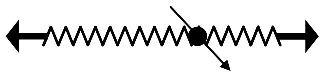
$$\rho F = \rho_0 \quad \to \quad \dot{\overline{\rho F}} = 0 \quad \to \quad \dot{\rho} F + \rho \dot{F} = 0 \quad \to$$

$$\dot{\rho} F + \rho F \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \left(\dot{F} = \frac{\partial v}{\partial x} F \right)$$

$$\dot{\rho} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \text{ή} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0$$

- Διαφορική Εξίσωση Διατήρησης Μάζας (Eulerian) ... (x,t)

3.ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΟΡΜΗΣ

$T_1 = T(x_1,t)$  $T(x_2,t) = T_2$

$b(x,t)$

- $f_C(p_t) = T_2 - T_1 = T(x_2,t) - T(x_1,t) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial T}{\partial x} dx = \int_{p_t} \frac{\partial T}{\partial x} dx$

f_C...(Εσωτερική) Δύναμη Επαφής ή Συνοχής f_C (δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας δηλαδή τάση)

- $f_B(p_t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho b dx = \int_{p_t} \rho b dx$

f_B...(Εξωτερική) Δύναμη Πεδίου f_B (b ... δύναμη ανά μονάδα μάζας)

- Ολική Δύναμη στο p_t: $f(p_t) = f_C(p_t) + f_B(p_t) = \int_{p_t} (\frac{\partial T}{\partial x} + \rho b) dx$

- Ορμή του p_t: $\ell(p_t) = \int_{p_t} \rho v dx$

- Αξίωμα Διατήρησης Ορμής (Euler): $f = \dot{\ell}$

.....κατ' αναλογία του αξιώματος του Νεύτωνα

$$\int_{p_t}\left(\frac{\partial T}{\partial x}+\rho b\right)dx=\dot{\overline{\int_{p_t}\rho v dx}}=\int_{p_t}\rho\dot{v}dx$$

$$\rightarrow\quad\begin{cases}\dot{\overline{\int_{p_t}\rho v dx}}=\dot{\overline{\int_{p_0}\rho vFdX}}=\int_{p_0}\left(\dot{\rho}vF+\rho\dot{v}F+\rho v\dot{F}\right)dX\\[2ex]\int_{p_0}\left(\dot{\rho}+\rho\frac{\partial v}{\partial x}\right)vFdX+\int_{p_0}\rho\dot{v}FdX=\int_{p_0}\rho_0\dot{v}FdX=\int_{p_t}\rho\dot{v}dx\end{cases}$$

(***Σημείωση:*** $\dot{\overline{\int_{p_t}\rho v dx}}=\int_{p_0}\rho_0\dot{v}dX=\int_{p_t}\rho\dot{v}dx$ ... συντομότερη απόδειξη)

$$dm=\rho_0 dX=\rho dx$$

$$\Rightarrow\frac{\partial T}{\partial x}+\rho b=\rho\dot{v}$$ ... Διαφορική Εξίσωση Διατήρησης Ορμής (Eulerian)

$$\Rightarrow\frac{\partial T}{\partial X}+\rho_0 b=\rho_0\dot{v}$$ Διαφορική Εξίσωση Διατήρησης Ορμής (Lagrangean)

Σημείωση: $\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial T}{\partial X}\frac{1}{F},\quad \rho=\frac{\rho_0}{F}$

4. ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Άγνωστοι 3: $\rho,\ \chi \begin{Bmatrix} u \\ \varepsilon \\ v \end{Bmatrix}, T$

Εξισώσεις 2: $\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} + \rho b = \rho \dot{v} \end{cases}$

$\Rightarrow$ χρειαζόμαστε μία ακόμη εξίσωση (που διαφοροποιεί επίσης το ένα υλικό από το άλλο)

Καταστατική (ή Νομοτελειακή) Εξίσωση: $T = f\left(\chi, \dfrac{\partial^n \chi}{\partial X^n}, \dfrac{\partial^n \chi}{\partial t^n}\right)$

Παράδειγμα:

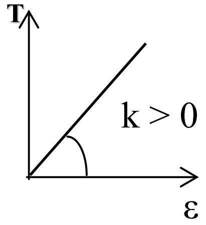
$T = k\varepsilon = ku_X$ … Ελαστικό Στερεό

$T = -p(\rho) + \mu \dfrac{\partial v}{\partial x}$ ... Νευτωνικό Υγρό

5. ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ ΚΑΙ ΥΓΡΑ

5Α.ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ $T = g(\varepsilon, X),\ \varepsilon = \dfrac{\partial u}{\partial X} = F - 1$

Ομογενή $\rightarrow$ $T = g(\varepsilon)$



Γραμμικά $\rightarrow$ $T = k\varepsilon$

$$\Rightarrow (*) \begin{cases} \rho = \dfrac{\rho_0}{1+u_X} \\ T = k u_X \\ k u_{XX} + \rho_0 b = \rho_0 \ddot{u} \end{cases}$$

$(*)$ περιγραφή κατά Lagrange (X,t) για τρεις αγνώστους ρ, u, T του στερεού. Η $(*)_3$ ελήφθη με αντικατάσταση της $(*)_2$ στην διαφορική εξίσωση διατήρησης ορμής (Lagrangean). Επίλυση της $(*)_3$ προσδιορίζει όλους τους αγνώστους ρ, u, T

Επίλυση της Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης $(*)_3$ γνωστής σαν Εξίσωση Κύματος $(b \equiv 0)$

$$\ddot{u} = c^2 u_{XX} \quad \left(c = \sqrt{\frac{k}{\rho_0}}\ \text{... ταχύτητα ήχου στο στερεό}\right)$$

Γενική Λύση D' Alembert : $u = u(X,t) = f(X - ct) + g(X + ct)$

όπου οι συναρτήσεις f και g προσδιορίζονται από τις αρχικές (δύο) και οριακές (δύο) συνθήκες

Για μία ελαστική ράβδο ή ελατήριο μήκους L ($0 \le X \le L$) οι βοηθητικές συνθήκες (αρχικές και οριακές) είναι

$u(X,0) = u_0(X), \quad \dot{u}(X,0) = \upsilon_0(X)$ ... αρχική θέση και ταχύτητα

$u(0,t) = u_1(t), \quad u(L,t) = u_2(t)$ ... μετατοπίσεις στα άκρα

Αποδεικνύεται ότι η λύση του $\begin{cases} \ddot{u} = c^2 u_{XX} \\ u(X,0) = u_0 ; \quad \dot{u}(X,0) = \upsilon_0 \quad (\text{ΑΣ}) \\ u(0,t) = u_1 \ ; \quad u(L,t) = u_2 \quad (\text{ΟΣ}) \end{cases}$

υπάρχει και είναι μοναδική.

(ΑΣ)... Αρχικές συνθήκες

(ΟΣ)... Οριακές συνθήκες

Παράδειγμα λύσης της Εξίσωσης Κύματος για ημιάπειρο χώρο

$$\begin{cases} \ddot{u} = c^2 u_{XX}, \quad X \geq 0 \\ u(X,0) = 0, \quad \dot{u}(X,0) = 0 \\ u_X(0,t) = \dfrac{1}{k} p(t) \end{cases}$$

δηλ, δίνεται η τάση T=p(t) στο X=0

$$u = u(X,t) = \begin{cases} 0, \quad X - ct \geq 0 \\ -\dfrac{c}{k} \displaystyle\int_0^{t-X/c} p(\tau)\, d\tau, \quad X - ct \leq 0 \end{cases}$$

$$T = T(X,t) = \begin{cases} 0, \quad X - ct \geq 0 \\ p\left(t - \dfrac{X}{c}\right), \quad X - ct \leq 0 \end{cases}$$

Μη-Γραμμικά Ελαστικά Υλικά : T = g(t) = g(u_X)

5B. ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΥΓΡΑ $T = -p(\rho, X)$

Ομογενή $\rightarrow$ $T = -p(\rho)$

Γραμμικά $\rightarrow$ $T = -\sigma\tau\alpha\theta.\rho$ ... τέλεια αέρια

$$\Rightarrow \quad (*) \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial x} + \rho b = \rho \dot{v} \\[2ex] T = -p(\rho) \end{cases}$$

$(*)$ περιγραφή κατά Euler (x, t) για τρεις αγνώστους (ρ, v, T) του υγρού. Συνδιασμός της $(*)_2$ και $(*)_3$ οδηγεί στο σύστημα

$$\therefore \left. \begin{aligned} & -p'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho b = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} v\right) \\[2ex] & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \end{aligned} \right\}$$

που συνιστά τις

- Βασικές Εξισώσεις της Μονοδιάστατης Αεροδυναμικής (Υποθέτουμε $b \equiv 0$)

Ισορροπία: $v = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \rho\big|_{\iota\sigma o\rho.} = \rho_0 = \sigma\tau\alpha\theta.$

Γραμμικοποίηση

Θεωρούμε καταστάσεις ‘πλησίον’ της ισορροπίας, δηλ.

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 + \tilde{\rho} \\ \\ v = 0 + \tilde{v} \end{cases} \quad \text{με}$$

$$|\tilde{\rho}| = O(\varepsilon); \quad |\tilde{v}| = O(\varepsilon), \quad |\ \cdot\ | \equiv \text{μέτρο}, \quad |O(\varepsilon)| < \text{σταθ.}\varepsilon, \quad \varepsilon << 1 \ ;$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{p'(\rho_0)}{\rho_0}\dfrac{\partial\tilde{\rho}}{\partial x} = \dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial t} \\ \\ \dfrac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} = -\rho_0\dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial x} \end{cases}$$

δηλαδή σύστημα $1^{ου}$ βαθμού για $\{\tilde{\rho}\ ,\ \tilde{v}\}$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} -\dfrac{p'(\rho_0)}{\rho_0}\dfrac{\partial}{\partial x} & -\dfrac{\partial}{\partial t} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} & \rho_0\dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \det\begin{bmatrix} -\dfrac{p'(\rho_0)}{\rho_0}\dfrac{\partial}{\partial x} & -\dfrac{\partial}{\partial t} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} & \rho_0\dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad p'(\rho_0)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$$

δηλ. πάλι η εξίσωση κύματος

$$\psi_{tt} = c^2\psi_{xx} \ ; \ \psi \equiv \begin{Bmatrix} \rho \\ v \end{Bmatrix} = f(x - ct) + g(x + ct), \ c = \sqrt{p'(\rho_0)}$$

c... ταχύτητα ήχου στο βαροτροπικό υγρό

Υπολογισμός Ασυνεχούς Λύσης $\Rightarrow \begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0 \\ T_x = \rho \dot{v} \\ T = -p(\rho) \end{cases} \qquad (*)$

Για $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = \dfrac{\partial v}{\partial t} = 0$; $\begin{cases} \rho = \rho_0 \\ v = v_0 \\ T = -p_0 \end{cases} \quad , \quad x \to -\infty$

$(*)_1 \quad \to \quad \rho v = \rho_0 v_0 \quad \to \quad F = \dfrac{\rho_0}{\rho} = \dfrac{v}{v_0}$

$(*)_3 \quad \to \quad T = -p\left(\dfrac{\rho_0}{F}\right)$

$(*)_2 \quad \to \quad T_x = \rho v \dfrac{\partial v}{\partial x} = \rho_0 v_0 \dfrac{\partial v}{\partial x} \quad \to \quad T = \rho_0 v_0 v + \text{σταθ.}$

$\to \text{σταθ.} = -p_0 - \rho_0 v_0^2 \quad \to \quad T = \rho_0 v_0 (v - v_0) - p_0$

$$\left.\begin{array}{l} -p\left(\dfrac{\rho_0}{F}\right)=\rho_0 v_0^2\left(F-1\right)-p\left(\rho_0\right) \\ \\ F\ \to\ 1,\ \ t\ \to -\infty \end{array}\right\} \therefore \quad \text{Μία λύση είναι η F=1}$$

Μία άλλη που ζητούμε

$$F=1-h,\quad h<<1\ \Rightarrow\ h=-\left(F-1\right)\quad \to \quad p\left(\frac{\rho_0}{1-h}\right)-p\left(\rho_0\right)=\rho_0 v_0^2 h$$

αλλά $\dfrac{1}{1-h}=1+h+h^2+...$

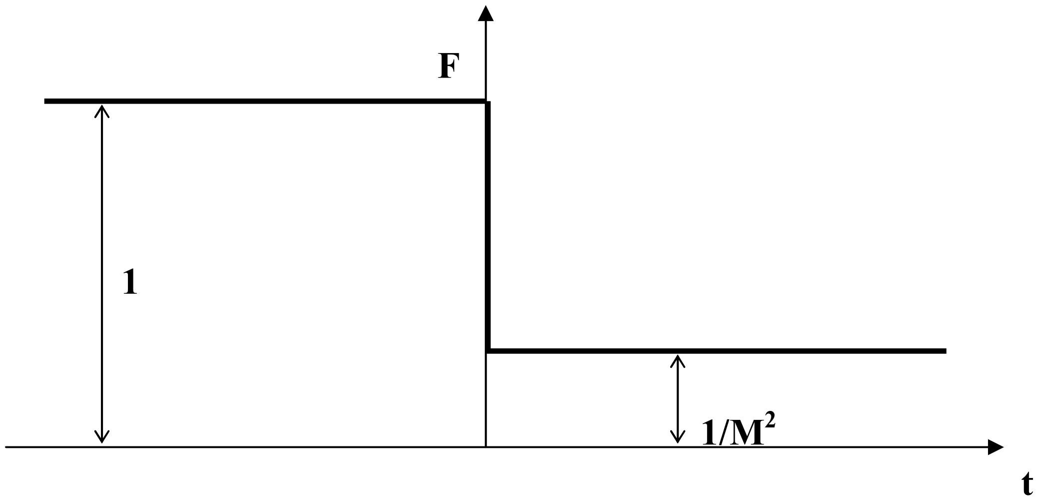
$$\therefore \quad \frac{p\left(\rho_0+\rho_0 h\right)-p\left(\rho_0\right)}{\rho_0 h}=v_0^2 \quad \to \quad p'\left(\rho_0\right)=v_0^2$$

$M^2\equiv\dfrac{v_0^2}{p'\left(\rho_0\right)}$ (δηλαδή, M... αριθμός Mach)

ώστε

$M>1$, υπερηχητική

$M<1$, υποηχητική



6. ΝΕΥΤΩΝΙΚΑ ΥΓΡΑ

$$T = f\left(\rho, \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad \rightarrow \quad T = -p(\rho) + \mu \frac{\partial v}{\partial x}$$

$p(\rho)$: Θερμοδυναμική Πίεση

$\mu \dfrac{\partial v}{\partial x}$: Ιξωτάση (Τάση που οφείλεται σε τριβές λόγω Ιξώδους)

Το πρόβλημα προς λύση είναι ο προσδιορισμός των (Τ, ρ, v) όταν {p(ρ)>0, μ>0} είναι γνωστά (πείραμα, στατιστικά μοντέλα)

$$\Rightarrow (*) \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial x} = \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\[2ex] T = -p(\rho) + \mu \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Λύση του $(*)$ για μόνιμη κατάσταση (ανεξάρτητη από χρόνο)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \;\Rightarrow\; \rho = \rho(x), \quad v = v(x)$$

$$
(*) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} (\rho v)_x = 0 \\ \\ T_x = \rho v\, v_x \\ \\ T = -p(\rho) + \mu\, v_x \end{cases}
$$

με οριακές συνθήκες

$$
\begin{Bmatrix} \rho \\ \\ v \\ \\ T \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \rho_0 \\ \\ v_0 \\ \\ -p(\rho_0) \equiv -p_0 \end{Bmatrix} \text{ για } x \rightarrow -\infty
$$

$$
\therefore \quad \rho\, v = \rho_0 v_0, \quad T = \rho_0 v_0 v + \text{σταθ.}, \quad \text{σταθ.} = -p_0 - \rho_0 v_0^2
$$

$$
\rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{\rho} = \dfrac{v}{v_0} \equiv f = f(x) \\ \\ T = \rho_0 v_0 (v - v_0) - p_0 \\ \\ -p\left(\dfrac{\rho_0}{f}\right) + \mu v_0 \dfrac{df}{dx} = \rho_0 v_0^2 (f-1) - p_0 \ ; \quad f \rightarrow 1 \quad \text{όταν} \quad x \rightarrow -\infty \quad [*] \end{cases}
$$

Η λύση λοιπόν ανάγεται στη λύση της [∗]. Εκφράζουμε αυτή σε συν-τεταγμένες Lagrange :

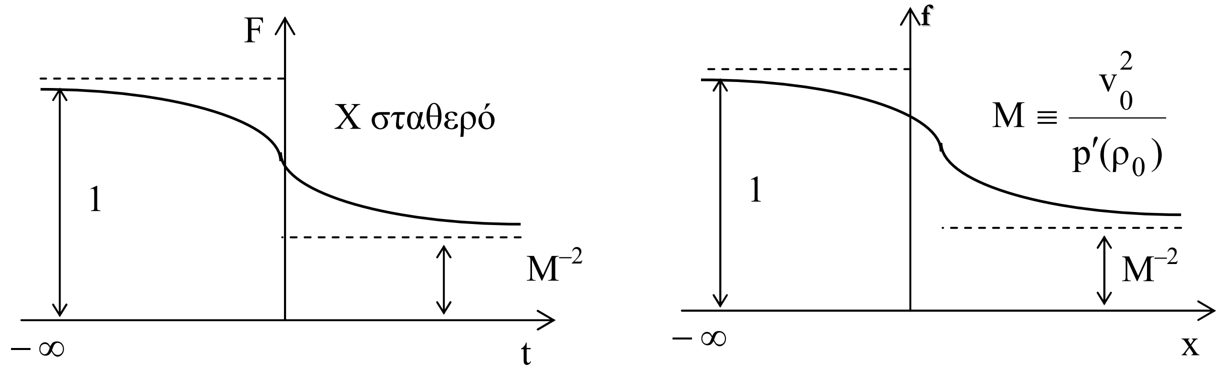
$$F = \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{v}{v_0} \qquad \ldots \text{ σταθερό X}$$

$$f = \frac{v}{v_0} \qquad \ldots \text{ σταθερό } x$$

$$F(X,t) = f(x)\Big|_{x=x(X,t)} \quad \rightarrow \quad \dot{F} = \frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \dot{F} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} v_0\right)F$$

$$\therefore \quad -p\left(\frac{\rho_0}{F}\right) + \mu\frac{\dot{F}}{F} = \rho_0 v_0^2 (F-1) - p_0 \quad \forall X, \quad F \rightarrow 1, \quad t \rightarrow -\infty \quad (+)$$

Μία λύση είναι η F=1. Θα αποδείξουμε ότι αυτή είναι η μοναδική λύση όταν το v_0 είναι σχετικά μικρό. Όταν το v_0 γίνεται αρκετά μεγάλο εμ-φανίζεται μία αλλη λύση ασυνεχούς μορφής σε κάποιο σημείο



Για τη λύση της (+) υποθέτω ένα ειδικό μοντέλο για το p(ρ), δηλ.

p(ρ) = σταθ.ρ   … (θερμοδυναμική πίεση τέλειου αερίου)

$$p = \frac{p_0}{\rho_0}\rho \;\Rightarrow\; \begin{cases} \mu\,\dot{F} = \rho_0 v_0^2\left(F-1\right)\left(F-M^{-2}\right) \;\; ; \;\; M \equiv \dfrac{\rho_0 v_0^2}{p_0} \\ \\ F \to 1, \quad t \to -\infty \end{cases}$$

Ολοκληρώνοντας

$$\frac{\mu M^2}{\rho_0 v_0^2\left(M^2-1\right)}\log\left|\frac{F-1}{F-M^{-2}}\right| = t + t_0, \quad t_0 \equiv \text{σταθ. ολοκλ.}$$

Απόδειξη:

$$\frac{\mu}{\rho_0 v_0^2}\frac{dF}{\left(F-1\right)\left(F-M^{-2}\right)} \quad \to$$

$$\to \quad \frac{dF}{\left(F-1\right)\left(1-M^{-2}\right)} + \frac{dF}{\left(F-M^{-2}\right)\left(M^{-2}-1\right)} = \frac{\rho_0 v_0^2}{\mu}dt$$

$$\frac{1}{1-M^{-2}}\frac{d\left(F-1\right)}{F-1} + \frac{1}{M^{-2}-1}\frac{d\left(F-M^{-2}\right)}{F-M^{-2}} = \frac{\rho_0 v_0^2}{\mu}dt \quad \to$$

$$\frac{\mu}{\rho_0 v_0^2}\left\{\frac{1}{1-M^{-2}}\left(\log\left|F-1\right| - \log\left|F-M^{-2}\right|\right)\right\} = t + t_0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{F-1}{F-M^{-2}}\right| = \exp\frac{t-t_0}{\tau}$$

$$\tau \equiv \frac{\mu M^2}{\rho_0 v_0^2\left(M^2-1\right)} = \frac{\mu}{p_0\left(M^2-1\right)}$$ … χαρακτηριστικός χρόνος

<u>Παρατήρηση 1</u> : $F \to 1, \quad t \to -\infty$ μόνο όταν τ > 0, δηλ. η λύση υφίσταται μόνο όταν M>1 (υπερηχητική ροή). Επίσης $t \to \infty \Rightarrow F \to M^{-2}$. Αν M<1, F=1 είναι η μόνη λύση

<u>Παρατήρηση 2</u> : M>1

(i) $M^{-2} < F < 1 \quad \rightarrow \quad \dfrac{1-F}{F-M^{-2}} = \exp\dfrac{t-t_0}{\tau}$

(ii) $F > 1 \quad \rightarrow \quad \dfrac{F-1}{F-M^{-2}} = \exp\dfrac{t-t_0}{\tau}$

(iii) $F < M^{-2} \quad \rightarrow \quad \dfrac{F-1}{F-M^{-2}} = \exp\dfrac{t-t_0}{\tau}$

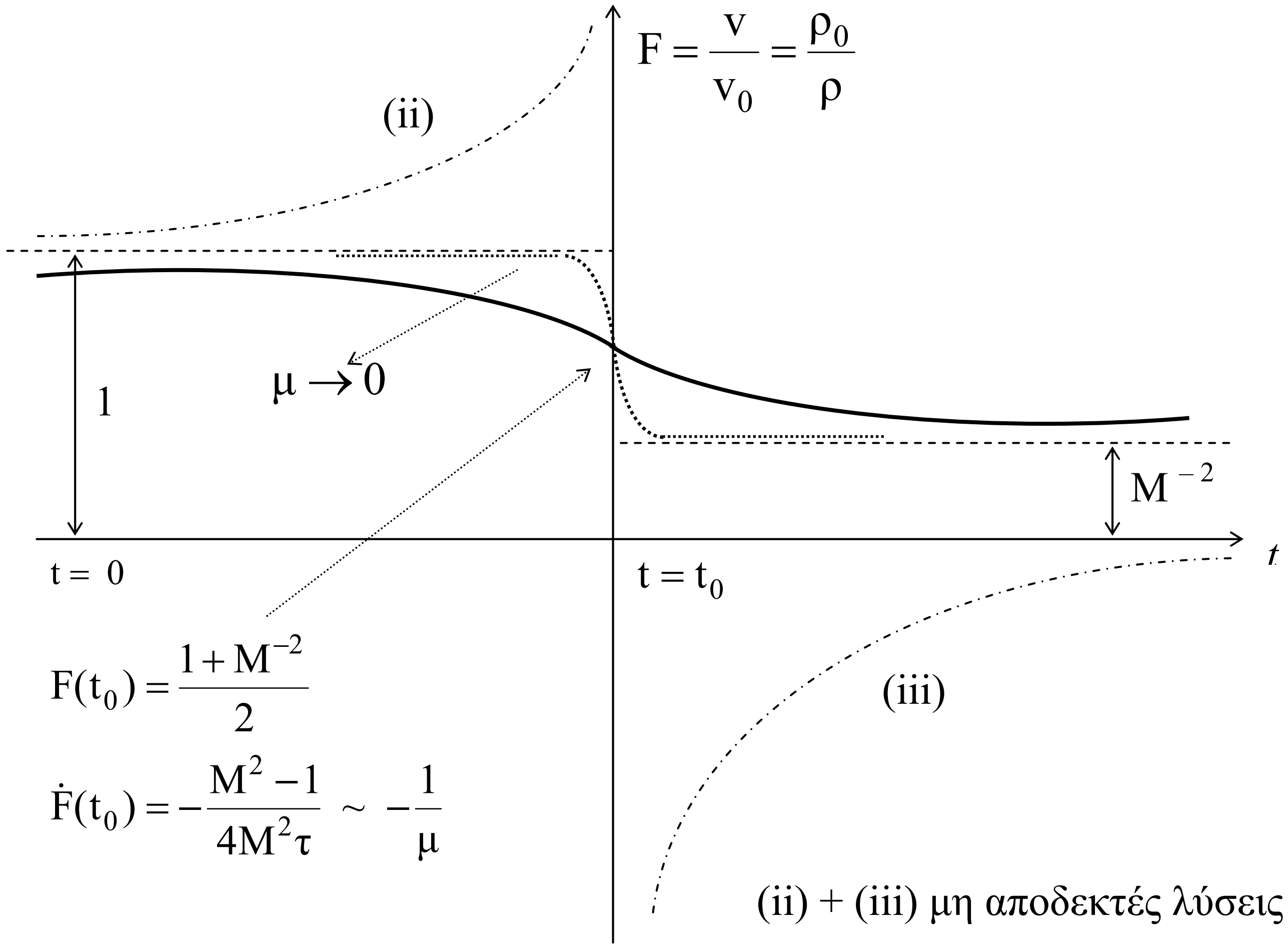
<u>Παρατήρηση 3</u> : Μπορεί να υπολογισθεί ότι χρησιμοποιώντας τη λύση (i)

$\therefore \quad t \to t_0 \quad \rightarrow \quad F\left(t_0\right) = \dfrac{1+M^{-2}}{2}$

$$\dot{F}\left(t_0\right) = -\frac{M^{-2}-1}{4M^2\tau} \quad \sim \quad -\frac{1}{\mu}$$ ... κλίση

Για μικρά μ (μ→0) το προφίλ πλησιάζει τη δομή ασυνεχούς λύσης.

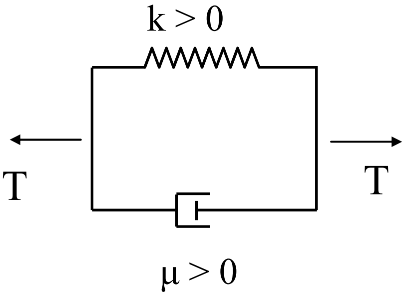
Τα αποτελέσματα των παραπάνω παρατηρήσεων δίνονται γραφικά παρακάτω



7. ΙΞΩΕΛΑΣΤΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ

7Α. ΜΟΝΤΕΛΟ KELVIN-VOIGT

$$T = f\left(\varepsilon, \dot{\varepsilon}\right) \quad \rightarrow \quad T = k\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon}$$



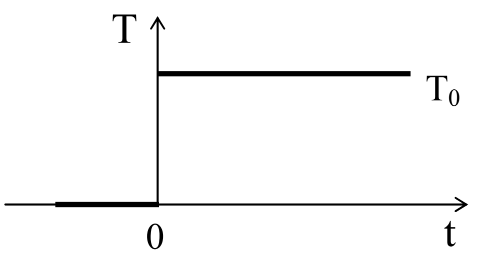
$$\left.\begin{aligned} T_k &= k\varepsilon_k \\ T_\mu &= \mu\dot{\varepsilon}_\mu \end{aligned}\right\} \quad T = T_k + T_\mu, \quad \varepsilon_k = \varepsilon_\mu = \varepsilon$$

Η παραπάνω διάταξη της “παράλληλης σύνδεσης” του ελαστικού ελατηρίου (k>0) και αποσβεστήρα (μ>0) με τις παραπλεύρω υποθέσεις είναι η φυσική αναπαράσταση της μηχανικής συμπεριφοράς του σημείου *X* του εν λόγω στερεού

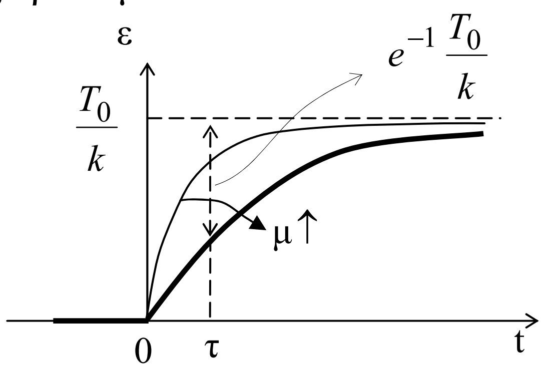
Το παραπάνω μοντέλο επιδεικνύει “ερπυσμό” δηλαδή ε↑ για σταθερό *T*

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \frac{T_o}{\mu} - \frac{k}{\mu}\varepsilon \\ \varepsilon(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \frac{T_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\tau \equiv \frac{\mu}{k} > 0, \quad \tau : \text{χαρακτηριστικός χρόνος ερπυσμού}$$



“Ιστορία Τάσης”



“Ιστορία Παραμόρφωσης”

Δυναμική Εξίσωση του Μοντέλου

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial X} = \rho_0 \ddot{u} \\ &T = k\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon} = ku_X + \mu\dot{u}_X \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad ku_{XX} + \mu\dot{u}_{XX} = \rho_0 \ddot{u}$$

... γραμμική μερική διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ)

Για να λυθεί χρειαζόμαστε πάλι αρχικές (ΑΣ) και οριακές (ΟΣ) συνθήκες

Παράδειγμα : $0 \le X \le L$

$$\begin{cases} u(X,0) = 0 \\ \dot{u}(X,0) = \sin\dfrac{\pi X}{L} \end{cases} \quad \text{... (ΑΣ)}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases} \quad \text{… (ΟΣ)}$$

Λύση : Έστω $u(X,t) = U(t)\sin\dfrac{\pi X}{L}$ που ικανοποιεί τις ΟΣ

Αντικαθιστώντας στην αρχική ΜΔΕ $\rightarrow$

$$\begin{cases} k\left(\dfrac{\pi}{L}\right)^2 U(t) + \mu\left(\dfrac{\pi}{L}\right)^2 \dot{U}(t) + \rho_0 \ddot{U}(t) = 0 \\ U(0) = 0, \;\; \dot{U}(0) = 1 \quad (\text{ΑΣ}) \end{cases}$$

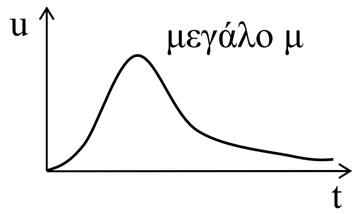
δηλ. το πρόβλημα ανάγεται στη λύση μίας δευτεροβάθμιας Συνήθους Διαφορικής Εξίσωσης (ΣΔΕ)

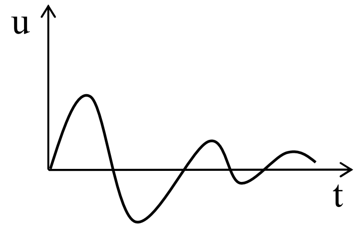
$$\Rightarrow u(X,t) = U(t)\sin\frac{\pi X}{L} \quad \text{όπου} \quad U(t) = \frac{1}{2a}e^{-\omega t}\left(e^{at} - e^{-at}\right) \;; \quad a \neq 0$$

$$\omega \equiv \frac{\mu}{2\rho_0}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2, \quad a \equiv \frac{\mu}{2\rho_0}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{1 - \frac{4\rho_0 k}{\mu^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2}}$$

δηλαδή,

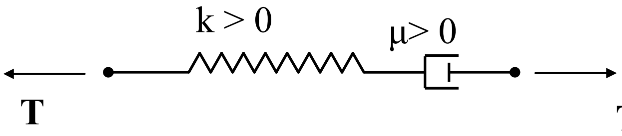
$$u(X,t) = e^{-\omega t}\sin\frac{\pi X}{L}\begin{cases} \dfrac{1}{a}\sinh at, \quad a \text{ ...πραγματικός} & \left(\dfrac{4\rho_0 k}{\mu^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2} < 1\right) \\[2ex] \dfrac{1}{|a|}\sin|a|t, \quad a \text{ ...φανταστικός} & \left(\dfrac{4\rho_0 k}{\mu^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2} > 1\right) \end{cases}$$





7Β. ΜΟΝΤΕΛΟ MAXWELL

$$T = k\varepsilon + \int_0^{\infty} \dot{G}(s)\varepsilon(t-s)ds \; ; \quad G(s) \equiv k\varepsilon^{-\frac{s}{\tau}}, \quad \tau \equiv \frac{\mu}{k}$$



$$\left.\begin{aligned} T_k &= k\varepsilon_k \\ T_\mu &= \mu\dot{\varepsilon}_\mu \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} T &= T_k = T_\mu \\ \varepsilon_k &+ \varepsilon_\mu = \varepsilon \end{aligned}\right.$$

Η παραπάνω διάταξη της "εν σειρά" του ελαστικού ελατηρίου (k>0) και του γραμμικού αποσβεστήρα (μ>0) με τις παραπλεύρω υποθέσεις είναι η φυσική αναπαράσταση της μηχανικής συμπεριφοράς του σημείου Χ του εν λόγω στερεού

Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε ότι οι παραπάνω σχέσεις δίνουν

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_k + \dot{\varepsilon}_\mu = \frac{\dot{T}}{k} + \frac{T}{\mu} \quad \rightarrow \quad \dot{T} + \frac{1}{\tau}T = k\dot{\varepsilon}$$

$$\tau \equiv \frac{\mu}{k} > 0, \quad \tau : \text{χαρακτηριστικός χρόνος απόσβεσης}$$

$$\rightarrow \quad \dot{\overline{e^{t/\tau}T}} = e^{t/\tau}k\dot{\varepsilon} \quad \text{και ολοκληρώνοντας από 0 έως } \infty \quad \rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{t} \dot{\overline{e^{\xi/\tau}T(\xi)}}d\xi = \int_{-\infty}^{t} ke^{\xi/\tau}\dot{\varepsilon}(\xi)d\xi \quad \text{και με την υπόθεση ότι } T(-\infty) < \infty$$

$$T(t) = \int_{-\infty}^{t} ke^{-\frac{(\tau-\xi)}{\tau}}\dot{\varepsilon}(\xi)d\xi = \int_{0}^{\infty} ke^{-\frac{s}{\tau}}\dot{\varepsilon}(t-s)ds$$

όπου $s = t-\xi$

$$\therefore \quad T(t) = \left[-ke^{-\frac{s}{\tau}}\varepsilon(t-s)\right]_{s=0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty}\frac{k}{\tau}e^{-\frac{s}{\tau}}\varepsilon(t-s)ds =$$

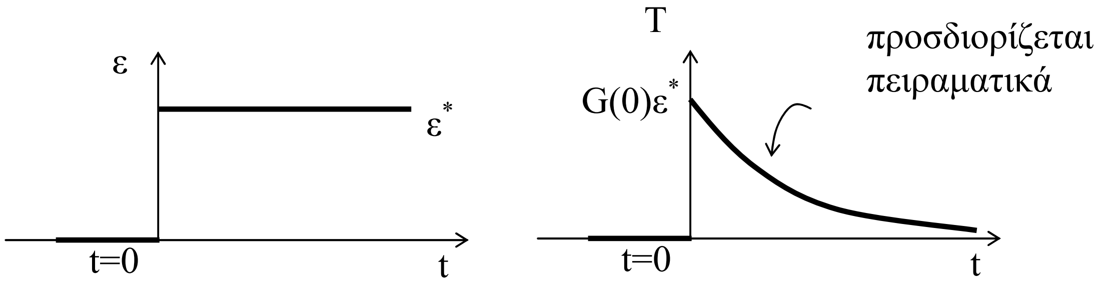
$$= k\varepsilon(t) - \int_{0}^{\infty}\frac{k}{\tau}e^{-\frac{s}{\tau}}\varepsilon(t-s)ds$$

όπου υποθέσαμε ότι $\varepsilon(-\infty) < \infty$

$$\therefore \quad T(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} ke^{-\frac{(t-\xi)}{\tau}}\dot{\varepsilon}(\xi)d\xi \\ \int_{0}^{\infty} ke^{-\frac{s}{\tau}}\dot{\varepsilon}(t-s)ds \\ k\varepsilon(t) - \int_{0}^{\infty}\frac{k}{\tau}e^{-\frac{s}{\tau}}\varepsilon(t-s)ds \end{cases} \quad ; \quad T(t) = G(0)\varepsilon(t) + \int_{0}^{\infty}\dot{G}(s)\varepsilon(t-s)ds$$

$$G(s) \equiv ke^{-\frac{s}{\tau}} \quad \left(G(s) > 0; \quad G(s) \to 0, \quad s \to \infty\right)$$

Το μοντέλο Maxwell επιδείχνει το φαινόμενο “χαλάρωσης τάσης”, δηλ. $T \downarrow$ για ε=σταθ.



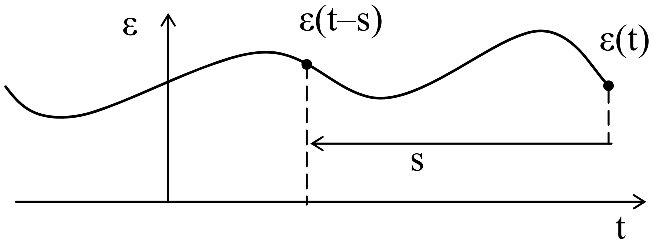
$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \\ \varepsilon^*, & t\geq 0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad T(t)=\begin{cases}0, & t\leq 0\\ \\ G(t)\varepsilon^*, & t>0\end{cases}$$

Το μοντέλο Maxwell είναι κατάλληλο για υγρά επειδή δεν έχει παραμένουσα ελαστικότητα δηλ. $G(s)=0, \quad s\to\infty$. Επίσης υποδείχνει τη γενική μορφή της καταστατικής (νομοτελειακής ή συντακτικής) εξίσωσης της γραμμικής ιξωελαστικότητας όπως δείχνεται παρακάτω

7C. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΙΞΩΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

$$\mathrm{T} = \mathop{\mathcal{F}}_{s=0}^{\infty}\left[\varepsilon\left(t-s\right)\right], \quad s=\left(0,\infty\right), \quad \mathcal{F}$$ ... συναρτησιακή της ιστορίας του ε

συναρτησιακή ≡ συνάρτηση καμπύλης...(Volterra)



$\varepsilon\left(t-s\right), \quad s=\left(0,\infty\right)$ … καμπύλη ή ιστορία του ε.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν το $\mathcal{F}$ είναι γραμμικό με μνήμη που ξεθωριάζει στο παρελθόν (fading memory) →

$$T = k_{\infty}\varepsilon + G\left(0\right)\varepsilon + \int_{0}^{\infty}\dot{G}\left(s\right)\varepsilon\left(t-s\right)ds; \qquad (*)$$

$G\left(s\right) > 0$ με $G\left(s\right) \to 0, \quad s \to \infty$

δηλ. βλέπουμε ότι σαν αποτέλεσμα της θεωρίας της συναρτησιακής ανάλυσης και γραμμικοποίησης (ανάπτυξη της συναρτησιακής $\mathcal{F}$ κατά Frechét σε αναλογία με την ανάπτυξη της συνάρτησης f κατά Taylor και διατήρηση του πρώτου ή γραμμικού όρου) παίρνουμε μια γενικευμένη σχέση που θυμίζει το μοντέλο Maxwell αλλά με γενικευμένη συνάρτηση ή μέτρο χαλάρωσης $G\left(s\right)$ και μη-μηδενική παραμένουσα ελαστικότητα δηλ. $k_{\infty} \neq 0$. Η $(*)$ είναι η γενική καταστατική (συντακτική) εξίσωση της γραμμικής ιξωελαστικότητας.

Η $(*)$ μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$T = \hat{G}(0)\varepsilon + \int_0^\infty \dot{\hat{G}}(0)\varepsilon(t-s)ds; \qquad \begin{cases} \hat{G}(s) \equiv k_\infty + G(s) \\ G(s) \to 0, \quad s \to \infty \\ \hat{G}(s) \to k_\infty, \quad s \to \infty \end{cases}$$

k_∞ ………..ελαστική σταθερά ισορροπίας

$k_\infty + G(0)$….αρχική ελαστική σταθερά

- Δυναμική Εξίσωση (ή Εξίσωση Κίνησης)

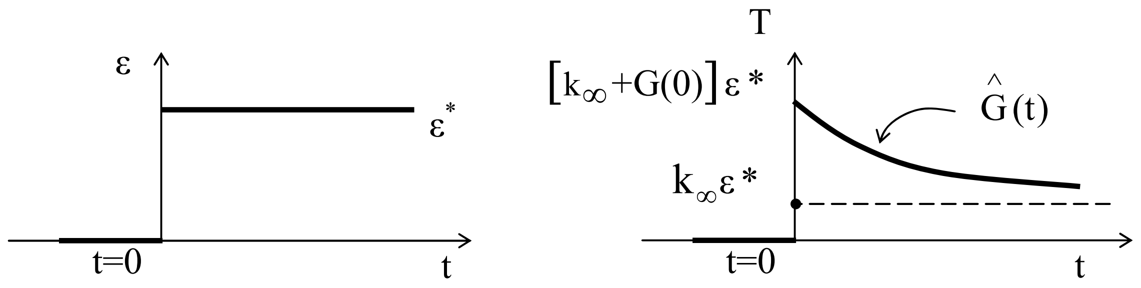
Αντικαθιστώντας την $[*]$ στην εξίσωση διατήρησης ορμής

$T_X + \rho_0 b = \rho_0 \ddot{u} \quad \rightarrow$

$$\left[k_\infty + G(0)\right]u_{XX}(X,t) + \int_0^\infty \dot{G}(s)u_{XX}(X,t-s)ds + \rho_0 b = \rho_0 \ddot{u}(X,t)$$

η οποία είναι είναι μια ολοκληρο-διαφορική (integro-differencial) εξίσωση που λύνεται χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace και τη χρήση των δύο “αρχικών” και δύο “οριακών” συνθηκών. Επίσης αποδεικνύεται η μοναδικότητα της λύσης για {k,μ}>0

- Προσδιορισμός G : (φαινόμενο “χαλάρωσης”)



$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \varepsilon^*, & t\geq 0\end{cases}$$

$$T(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ k_\infty\varepsilon^*+G(t)\varepsilon^*, & T(\infty)=k_\infty\varepsilon^* \quad \rightarrow\end{cases}$$

$$T(t)=k_\infty\varepsilon^*+G(0)\varepsilon^*+\underbrace{\int_0^t \dot{G}(s)\varepsilon(t-s)ds}_{\downarrow}+\int_t^\infty \dot{G}(s)\varepsilon(t-s)ds \quad \rightarrow$$

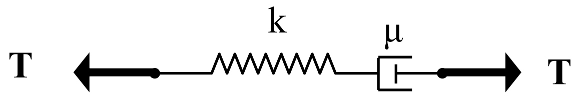
$$\int_0^t \dot{G}(s)\varepsilon^* ds$$

$$T(t)=k_\infty\varepsilon^*+G(0)\varepsilon^*+\left[G(t)-G(0)\right]\varepsilon^*$$

Ειδικές Περιπτώσεις της Γραμμικής Ιξωελαστικότητας και Φυσική Αναπαράσταση

$$T(t) = k_\infty \varepsilon(t) + G(0)\varepsilon(t) + \int_0^\infty \dot{G}(s)\varepsilon(t-s)ds$$

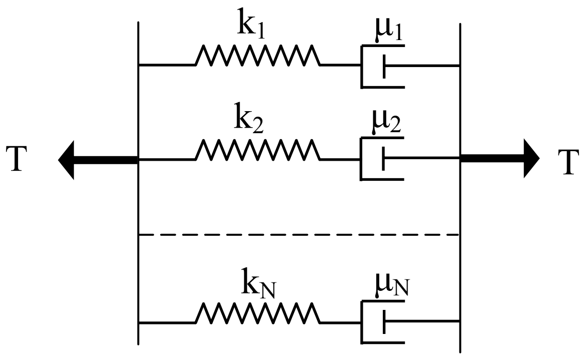
1. Maxwell :



$$k_\infty = 0; \quad G(s) = ke^{-\frac{s}{\tau}}, \quad \tau \equiv \frac{\mu}{k} \quad \ldots \text{ (χρόνος χαλάρωσης)}$$

$$\left(\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{T}}{k} + \frac{T}{\mu}\right) \quad \rightarrow \quad T = k\,\varepsilon(t) + \int_0^\infty \left(-\frac{k}{\tau}e^{-\frac{s}{\tau}}\right)\varepsilon(t-s)ds$$

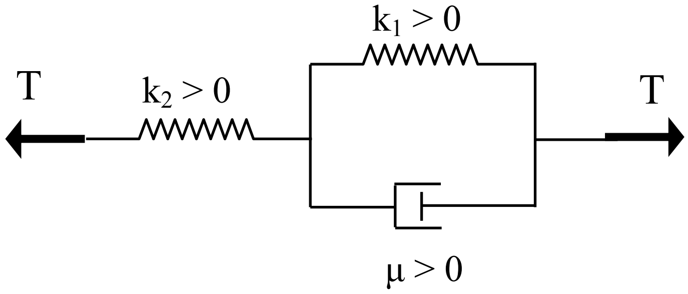
2. N-Maxwell εν // :



$$k_\infty = 0; \quad G(s) = \sum_{i=1}^{N} k_i e^{-\frac{s}{\tau_i}}, \quad \tau_i \equiv \frac{\mu_i}{k_i} \quad \ldots \text{ (φάσμα χαλάρωσης)}$$

$$\left(\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{T}_i}{k_i} + \frac{T_i}{\mu_i}, \quad \sum T_i = T\right) \quad \rightarrow \quad T = \sum_{i=1}^{N} k_i\,\varepsilon(t) + \int_0^\infty \sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{k_i}{\tau_i}e^{-\frac{s}{\tau_i}}\right)\varepsilon(t-s)ds$$

3. Στάνταρτ Ιξωελαστικό Στερεό :



$$(\#)\quad \left(\begin{array}{l} T_{k_2} = k\varepsilon_{k_2}, \quad T_{k_1} = k_1\varepsilon_{k_1,\mu}, \quad T_\mu = \mu\dot{\varepsilon}_{k_1,\mu} \\ \\ \varepsilon = \varepsilon_{k_2} + \varepsilon_{k_1,\mu} \\ \\ T = T_{k_2} = T_{k_1} + T_\mu \\ \\ \left[T(-\infty),\ \varepsilon(-\infty)\right] < \infty \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$k_\infty = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}, \quad G(s) = \frac{k_2^2}{k_1 + k_2} e^{-\frac{k_1+k_2}{\mu}s}$$

Δηλαδή, με την ολοκλήρωση των εξισώσεων (#), που αντιστοιχούν στο στάνταρτ ιξωελαστικό στερεό (εν σειρά σύνδεση Kelvin-Voigt στερεού με ελατήριο), παίρνουμε την καταστατική εξίσωση

$$T(t) = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\varepsilon(t) + \frac{k_2^2}{k_1 + k_2}\varepsilon(t) + \int_0^\infty \left(-\frac{k_2^2}{\mu}\right) e^{-\frac{k_1+k_2}{\mu}s} \varepsilon(t-s)\,ds$$

Σημείωση: Κλείνοντας την ανασκόπηση της γραμμικής ιξωελαστικότητας τονίζεται ότι το Μοντέλο Maxwell κατέληξε σε καταστατική εξίσωση της μορφής

$$\mathrm{T}(\mathrm{t}) = \underset{\mathrm{s}=0}{\overset{\infty}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}\left[\varepsilon(\mathrm{t}-\mathrm{s})\right]$$

Ανάλογα το μοντέλο Kelvin-Voigt μπορεί να αποδειχθεί ότι οδηγεί στη μορφή

$$\varepsilon(\mathrm{t}) = \underset{\mathrm{s}=0}{\overset{\infty}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}\left[\mathrm{T}(\mathrm{t}-\mathrm{s})\right]$$

που οδηγεί σε γραμμικοποιημένες μορφές όπως κι η παραπάνω ανάλυση.

Επίσης αναφέρεται ότι οι παραπάνω δύο εξισώσεις δεν είναι πάντα ισοδύναμες

π.χ. το μοντέλο Maxwell δεν είναι ισοδύναμο με το μοντέλο Kelvin-Voigt. Δηλαδή, οι παραπάνω εξισώσεις δεν είναι εν γένει αντιστρεπτές

8. ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΘΕΡΜΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ (ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ)

Εσωτερική Ενέργεια : $E(p_t) = \int_{p_t} \rho e \, dx$

Θέρμανση : $Q(p_t) = Q_c(p_t) + Q_r(p_t)$ $\quad \begin{cases} Q_c(p_t) = q\big|_{x_1} - q\big|_{x_2} = \displaystyle\int_{p_t} -\frac{\partial q}{\partial x} dx \\ \\ Q_r(p_t) = \displaystyle\int_{p_t} \rho r \, dx \end{cases}$

Θερμοκρασία : $\theta = \theta(x,t) > 0$

Ισχύς :

$$P(p_t;v) = W(p_t;v) - \dot{K}(p_t;v) \quad \begin{cases} W(p_t;v) = \displaystyle\int_{p_t} \left\{ -\frac{\partial (Tv)}{\partial x} + \rho b v \right\} dx \\ \\ K(p_t;v) = \displaystyle\int_{p_t} \frac{1}{2} \rho v^2 \, dx \end{cases}$$

<u>Παρατήρηση (Θεώρημα)</u> : $W(p_t) = \dot{K}(p_t) + \int_{p_t} T \frac{\partial v}{\partial x} dx$

Πρώτος Θερμοδυναμικός Νόμος :

$$\dot{E}(p_t) = P(p_t) + Q(p_t) \quad \left\{\dot{E} = -p\dot{V} + \dot{Q}\right\}$$

$$\dot{E}(p_t) = \int_{p_t} T\frac{\partial v}{\partial x}dx + Q(p_t) \Rightarrow$$

$$\int_{p_t} \rho\dot{e}\,dx = \int_{p_t} T\frac{\partial v}{\partial x}dx + \int_{p_t}\left(-\frac{\partial q}{\partial x} + \rho r\right)dx \quad \Rightarrow$$

$$\rho\dot{e} = T\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} + \rho r \quad (*) \quad \text{ή}$$

$$\rho_0\dot{e} = T\dot{F} - \frac{\partial q}{\partial X} + \rho_0 r$$

$$(*) \quad \rightarrow \quad \dot{e} = \frac{1}{\rho}T\frac{\partial v}{\partial x} + h \quad ; \quad h \equiv \frac{1}{\rho}\left(-\frac{\partial q}{\partial x} + \rho r\right)$$

h … τοπική θέρμανση

Δεύτερος Θερμοδυναμικός Νόμος :

Εντροπία : $H(p_t) = \int_{p_t} \rho\eta\,dx$

Ανισότητα Planck : $\rho\dot{\eta} > \left(-\frac{\partial q}{\partial x} + \rho r\right)/\theta$ ή $\dot{\eta} \geq \frac{h}{\theta}$

Σημείωση: $\Delta s \geq \frac{\Delta Q}{\theta}$

Εσωτερική Απώλεια : $\delta \equiv \theta\dot{\eta} - h =$

$$\theta\dot{\eta} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial q}{\partial x} + \rho r\right) \geq 0$$

δηλαδή $\delta \geq 0$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ FOURIER: $q\frac{\partial \theta}{\partial x} \leq 0$ ή $-\dot{\eta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \geq 0$

$\Rightarrow$ Clausius-Duhem Inequality : $\rho\delta - \left(\frac{q}{\theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} \geq 0$

$$\therefore \quad \rho\gamma \equiv \rho\dot{\eta} + \frac{1}{\theta}\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{q}{\theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\rho r}{\theta} \geq 0 \quad \rightarrow$$

$$\rho\gamma \equiv \rho\dot{\eta} - \left(-\frac{\partial(q/\theta)}{\partial x} + \frac{\rho r}{\theta}\right)$$

$$\therefore \quad \Gamma(p_t) = \int_{p_t} \rho\gamma \, dx = \dot{H} - \left\{\left.\frac{q}{\theta}\right|_{x_1} - \left.\frac{q}{\theta}\right|_{x_2}\right\} + \int_{p_t} \frac{\rho r}{\theta} dx$$

$\Rightarrow \quad \Gamma(p_t) \geq 0$ … ρυθμός παραγωγής εντροπίας

Ελεύθερη Ενέργεια : $\psi \equiv e - \theta\eta$

$$\therefore \quad \dot{\psi} + \eta\dot{\theta} - \frac{1}{\rho}T\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{q}{\rho\theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} \leq 0$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΑΝΥΣΤΩΝ

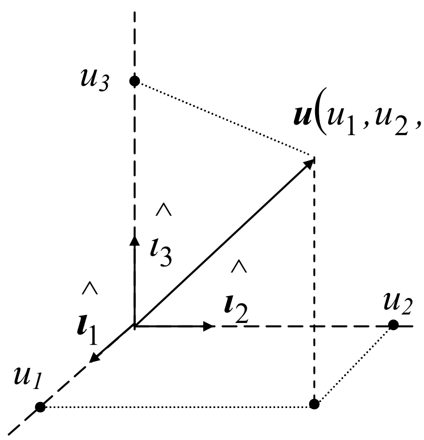
1. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

■ Συνιστώσες - Συμβολισμός

Ευκλείδειος Χώρος $\boldsymbol{u} \in V$

Καρτεσιανό σύστ. συντεταγμένων

$$\left\{ \hat{\boldsymbol{\imath}}_i \right\} = \left(\hat{\boldsymbol{\imath}}_1, \hat{\boldsymbol{\imath}}_2, \hat{\boldsymbol{\imath}}_3 \right)$$



$$\hat{\boldsymbol{\imath}}_1 = (1,0,0), \quad \hat{\boldsymbol{\imath}}_2 = (0,1,0), \quad \hat{\boldsymbol{\imath}}_3 = (0,0,1)$$

Διάνυσμα $\boldsymbol{u} = u_3\, \hat{\boldsymbol{\imath}}_1 + u_3\, \hat{\boldsymbol{\imath}}_2 + u_3\, \hat{\boldsymbol{\imath}}_3 =$

$$= \sum_{i=1}^{3} u_i\, \hat{\boldsymbol{\imath}}_i = u_i\, \hat{\boldsymbol{\imath}}_i$$

… συμβολισμός δεικτών (Einstein)

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$ … εναλλακτικοί συμβολισμοί

■ Κανόνες Δεικτών – Σύμβολα δ_{ij} και ε_{ijk}

- Επαναληπτικότητα (δύο φορές) δείκτη (i) υπονοεί άθροιση από i=1 μέχρι i=3

- Εμφάνιση δείκτη (i) 3 φορές σ' ένα όρο δεν έχει έννοια

- Το σύμβολο $\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ όταν εμφανίζεται σ' ένα όρο που έχει ένα κοινό δείκτη με το δ_{ij} μπορεί ν' απαλειφθεί αλλάζοντας το κοινό δείκτη με τον άλλο. Το σύμβολο δ_{ij} είναι επίσης γνωστό ως Kronecker-delta

$$A_{ij}u_j = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}u_j = A_{i1}u_1 + A_{i2}u_2 + A_{i3}u_3$$

$$A_{ijk}\,B_{jk} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} A_{ijk}\,B_{jk} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\left(A_{ij1}\,B_{j1} + A_{ij2}\,B_{j2} + A_{ij3}\,B_{j3}\right)$$

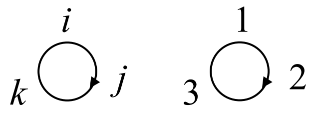
… 9 όροι συνολικά με ανάπτυξη του j

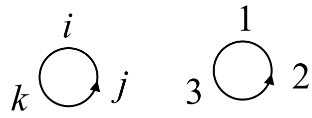
$A_{ijk}B_{iil}$ … δεν έχει νόημα

$$A_{ij}\delta_{ij} = A_{ii} = A_{jj}, \quad A_{ijk}\,\delta_{il} = A_{ljk}, \quad u_i\,\delta_{ij} = u_j$$

- Το σύμβολο ε_{ijk} (permutation, alternator, Eddington)

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1; \quad i, j, k \text{ άρτια ή δεξιόστροφη διάταξη των } 1,2,3 \\ 0; \quad \text{δύο από τα } i, j, k \text{ είναι ίσα} \\ -1; \quad i, j, k \text{ περριτή ή αριστερόστροφη διάταξη των } 1,2,3 \end{cases}$$





$$\varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{112} = 0, \quad \varepsilon_{132} = -1$$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji}$$

…εναλλακτικός συμβολισμός (ορισμός) των ε_{ijk}

■ Εσωτερικό γινόμενο

- $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} \equiv u_i v_i \quad \ldots \left(u_i v_i = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \right)$

- Ιδιότητες / Επιπλέον ορισμοί :

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}; \quad \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}; \quad a(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = (a\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v};$$
$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} > 0, \ \boldsymbol{u} \neq 0$$

- $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}$ ... μέτρο του $\boldsymbol{u}$ $\left(|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_i u_i} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \right)$

- Θεώρημα (Ανισότητα Cauchy-Schwarz) : $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} \leq |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$
- Θεώρημα (Τριγωνική ανισότητα) : $|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}| \leq |\boldsymbol{u}| + |\boldsymbol{v}|$

- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\varphi$ ... ορισμός γωνίας $\varphi = \angle(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$
- $\hat{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}}_j = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

$u_i = \boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{\imath}}_i$ ... τύπος για τις συνιστώσα u_i

$$\left(\boldsymbol{u} = u_m \hat{\boldsymbol{\imath}}_m \Rightarrow \boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{\imath}}_i = u_m \hat{\boldsymbol{\imath}}_m \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}}_i = u_m \delta_{mi} = u_i \right)$$

■ Εξωτερικό γινόμενο

- $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \varepsilon_{ijk}\, u_j v_k\, \hat{\boldsymbol{\iota}}_i$ … (Άθροισμα 27 όρων)

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} = w_i\, \hat{\boldsymbol{\iota}}_i,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{w_i} &= \varepsilon_{\mathrm{ijk}} \mathrm{u_j v_k} = \varepsilon_{\mathrm{ij1}} \mathrm{u_j v_1} + \varepsilon_{\mathrm{ij2}} \mathrm{u_j v_2} + \varepsilon_{\mathrm{ij3}} \mathrm{u_j v_3} = \\ &= \left(\varepsilon_{i11} u_1 v_1 + \varepsilon_{i21} u_2 v_1 + \varepsilon_{i31} u_3 v_1\right) + \left(\varepsilon_{i12} u_1 v_2 + \varepsilon_{i22} u_2 v_2 + \varepsilon_{i32} u_3 v_2\right) + \\ &= \left(\varepsilon_{i12} u_1 v_3 + \varepsilon_{i23} u_2 v_3 + \varepsilon_{i33} u_3 v_3\right) \end{aligned}$$

π.χ.

$$w_1 = \varepsilon_{132} u_3 v_2 + \varepsilon_{123} u_2 v_3 = u_2 v_3 - u_3 v_2$$

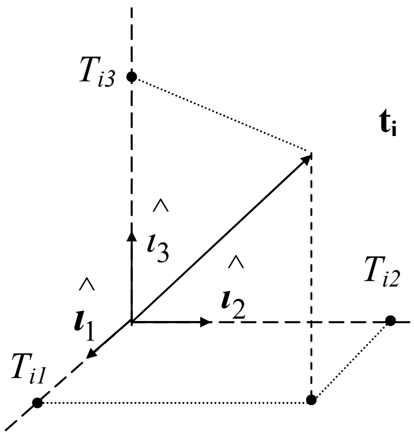
- $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} \;\rightarrow\; \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$

- $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$

- $\hat{\boldsymbol{\iota}}_i \times \hat{\boldsymbol{\iota}}_j = \varepsilon_{ijk}\, \hat{\boldsymbol{\iota}}_k \;\rightarrow\; \left(\hat{\boldsymbol{\iota}}_i \times \hat{\boldsymbol{\iota}}_j\right) \cdot \hat{\boldsymbol{\iota}}_k = \varepsilon_{ijk}$

2. ΤΑΝΥΣΤΈΣ

■ Συνιστώσες - Συμβολισμός



i=1,2,3

$\{\boldsymbol{t}_i\}$ ... 3 διανύσματα χαρακτηριστικά του τανυστή $\boldsymbol{T}$

$\{t_i\}$ ... "διανυσματικές συνιστώσες" ή προβολές του $\boldsymbol{T}$ στο σύστ. συντ. $\left\{\hat{\boldsymbol{\iota}}_i\right\}$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_1 \\ \boldsymbol{t}_2 \\ \boldsymbol{t}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

■ Γραφή με δείκτες – Τύποι για τις Συνιστώσες

$\boldsymbol{T} \equiv \hat{\boldsymbol{\iota}}_i \otimes \boldsymbol{t}_i$; $\otimes \equiv$δυαδικό γινόμενο : $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u})$ … [ορισμός $\boldsymbol{T}$]

$\boldsymbol{t}_i \equiv T_{ij}\,\hat{\boldsymbol{\iota}}_j$; T_{ij} ορίζεται ως η j συνιστώσα του διανύσματος $\boldsymbol{t}_i$ ως προς $\left\{\hat{\boldsymbol{\iota}}_j\right\}$

$\therefore \quad \boldsymbol{T} \equiv \boldsymbol{T_{ij}}\, \hat{\boldsymbol{\iota}}_{\boldsymbol{i}} \otimes \hat{\boldsymbol{\iota}}_{\boldsymbol{j}}$; T_{ij} ... συνιστώσες του τανυστή $\boldsymbol{T}$

$$\left(9 \text{ αριθμοί } \boldsymbol{T} \equiv \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} T_{ij}\, \hat{\boldsymbol{\iota}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{\iota}}_i\right)$$

$T_{mn} \equiv \hat{\boldsymbol{\iota}}_m \cdot \boldsymbol{T}\, \hat{\boldsymbol{\iota}}_n$ ... τύπος για τον υπολογισμό των συνιστωσών T_{mn} του $\boldsymbol{T}$

- Παραδείγματα :

$$O_{ij} = \hat{\boldsymbol{\iota}}_i \cdot \boldsymbol{O}\, \hat{\boldsymbol{\iota}}_j = \hat{\boldsymbol{\iota}}_i \cdot \boldsymbol{o} = 0,$$

$$1_{ij} = \hat{\boldsymbol{\iota}}_i \cdot \mathbf{1}\, \hat{\boldsymbol{\iota}}_j = \hat{\boldsymbol{\iota}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{\iota}}_j = \delta_{ij} \quad \text{όπου} \quad \begin{cases} \boldsymbol{Ou} = \boldsymbol{o} & \forall \boldsymbol{u} \\ \mathbf{1}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} & \forall \boldsymbol{u} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Tu} = T_{ij}\, \hat{\boldsymbol{\iota}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{\iota}}_j\, u_m\, \hat{\boldsymbol{\iota}}_m = T_{ij} u_m\, \hat{\boldsymbol{\iota}}_i \left(\hat{\boldsymbol{\iota}}_j \cdot \hat{\boldsymbol{\iota}}_m \right) = T_{ij} u_m\, \hat{\boldsymbol{\iota}}_i\, \delta_{jm} = T_{ij} u_j\, \hat{\boldsymbol{\iota}}_i$$

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})_{ij} \equiv \hat{\boldsymbol{\iota}}_i \cdot (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})\, \hat{\boldsymbol{\iota}}_j = \hat{\boldsymbol{\iota}}_i \cdot \boldsymbol{a} \left(\boldsymbol{b} \cdot \hat{\boldsymbol{\iota}}_j \right) = a_i b_j$$

Άθροισμα / Γινόμενο

$$(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{S}\boldsymbol{u}$$

$$(a\boldsymbol{T})\boldsymbol{u}=a\,(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u})$$

$$(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{u})$$

Μπορούν να αποδειχθούν χωρίς δυσκολία οι παρακάτω σχέσεις για τις συνιστώσες

$$(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S})_{ij}=T_{ij}+S_{ij}$$

$$(a\boldsymbol{T})_{ij}=a\,T_{ij}$$

$$(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S})_{ij}=T_{im}S_{mj}$$

π.χ.

$$(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S})_{ij}=\hat{\boldsymbol{\imath}}_i\cdot(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S})\hat{\boldsymbol{\imath}}_j=\hat{\boldsymbol{\imath}}_i\cdot\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{S}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}_j\right)=\hat{\boldsymbol{\imath}}_i\cdot\boldsymbol{T}\left(S_{mn}\left(\hat{\boldsymbol{\imath}}_m\otimes\hat{\boldsymbol{\imath}}_n\right)\hat{\boldsymbol{\imath}}_j\right)=$$

$$=\hat{\boldsymbol{\imath}}_i\cdot\boldsymbol{T}\left(S_{mn}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}_m\left(\hat{\boldsymbol{\imath}}_n\cdot\hat{\boldsymbol{\imath}}_j\right)\right)=\hat{\boldsymbol{\imath}}_i\cdot\boldsymbol{T}\left(S_{mn}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}_m\,\delta_{nj}\right)=\hat{\boldsymbol{\imath}}_i\cdot\boldsymbol{T}\left(S_{mj}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}_m\right)=$$

$$=\left(\hat{\boldsymbol{\imath}}_i\cdot\boldsymbol{T}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}_m\right)S_{mj}=T_{im}S_{mj}$$

- **Ιδιότητες :**

$$(\boldsymbol{TS})\boldsymbol{R} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{SR}); \quad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{TS}+\boldsymbol{TR}; \quad (\boldsymbol{S}+\boldsymbol{R})\boldsymbol{T} = \boldsymbol{ST}+\boldsymbol{RT};$$

$$a(\boldsymbol{TS}) = (a\boldsymbol{T})\boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}(a\boldsymbol{S}); \quad \mathbf{1}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}\mathbf{1} = \boldsymbol{T}$$

Όλες οι παραπάνω αποδείχνονται εύκολα με τη χρήση δεικτών. Σημειώνεται επίσης ότι $\boldsymbol{ST} \neq \boldsymbol{TS}$ έν γένει. Αν $\boldsymbol{ST} = \boldsymbol{TS} \rightarrow$ $\boldsymbol{S}$ *και* $\boldsymbol{T}$ αντιμετατίθενται (commute)

Ανάστροφος / Συμμετρικός / Ίχνος / Εσωτερικό Γινόμενο

- Ανάστροφος $\boldsymbol{T}^T$: $\boldsymbol{Tu}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} \ \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$

Συνιστώσες : $T_{ij}^T = T_{ji}$ $\ldots\left(T_{ij}^T = \hat{\boldsymbol{\iota}}_i\cdot\boldsymbol{T}^T\hat{\boldsymbol{\iota}}_j = \hat{\boldsymbol{\iota}}_j\cdot\boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{\iota}}_i = T_{ji}\right)$

- **Συμμετρικός $\boldsymbol{T}$:** $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T$ ή $T_{ij} = T_{ji}$
- Α**ντίσυμμετρικός $\boldsymbol{T}$:** $\boldsymbol{T} = -\boldsymbol{T}^T$ ή $T_{ij} = -T_{ji}$

Θεώρημα :

$$\forall \boldsymbol{T} \ \rightarrow \ \boldsymbol{T} = \boldsymbol{S}+\boldsymbol{W}; \ \boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}^T\right) = \boldsymbol{S}^T, \ \boldsymbol{W} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}^T\right) = -\boldsymbol{W}^T$$

- Ίχνος T, $(tr\boldsymbol{T})$:

  (i) $tr(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S}) = tr\boldsymbol{T} + tr\,\boldsymbol{S}$ και $tr(\alpha\boldsymbol{T}) = \alpha\, tr\,\boldsymbol{T}$

  (ii) $tr(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

  (i), (ii) … ορισμός

  Συνιστώσες :

  $$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T} = T_{ii} \quad \ldots \quad \mathrm{tr}\,\boldsymbol{T} = tr\left(T_{ij}\,\hat{\boldsymbol{\iota}}_i\otimes\hat{\boldsymbol{\iota}}_j\right) = T_{ij}tr\left(\hat{\boldsymbol{\iota}}_i\otimes\hat{\boldsymbol{\iota}}_j\right) = T_{ij}\left(\hat{\boldsymbol{\iota}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{\iota}}_j\right) = T_{ij}\delta_{ij} = T_{ii}$$

- **Εσωτερικό Γινόμενο :** $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S} = tr\left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{T}\right)$

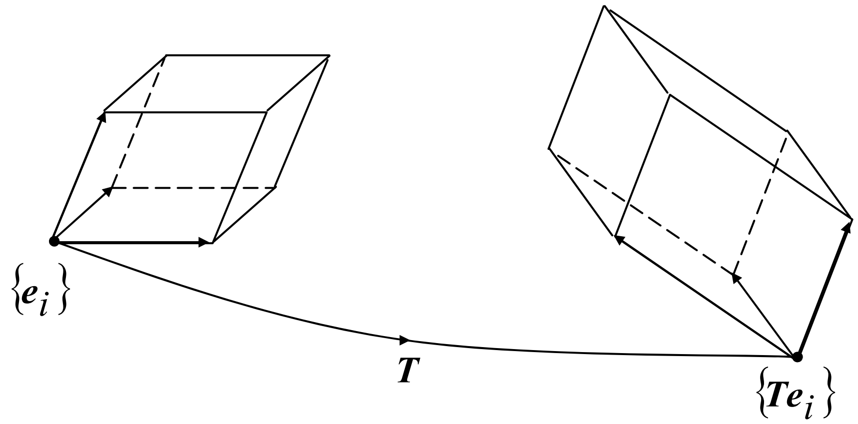
  Συνιστώσες :

  $$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S} = \left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{T}\right)_{ii} = T_{im}S_{mi}^{T} = T_{im}S_{im} = T_{ij}S_{ij} \quad \ldots\left(= \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}\right)$$

  Μέτρο :

  $$|\boldsymbol{T}| = \sqrt{\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}} \quad \ldots\left(= \sqrt{T_{ij}T_{ij}}\right) \quad \ldots \begin{cases} \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S} \leq |\boldsymbol{T}||\boldsymbol{S}| \\ \\ |\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S}| \leq |\boldsymbol{T}| + |\boldsymbol{S}| \end{cases}$$

■ Ορίζουσα και Αντίστροφος



- Ορίζουσα : $\det \mathbf{T} = \dfrac{(\mathbf{Te}_1 \times \mathbf{Te}_2)\cdot \mathbf{Te}_3}{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)\cdot \mathbf{e}_3}$ **...** $|\det \mathbf{T}| = \dfrac{\boldsymbol{όγκος}\ \{\mathbf{Te}_i\}}{\boldsymbol{όγκος}\ \{\mathbf{e}_i\}}$

- Από τον παραπάνω ορισμό μπορεί ν' αποδειχθεί (και όχι ιδιαίτερα εύκολα) ότι

$$(*) \qquad \varepsilon_{rst}(det\,\boldsymbol{T}) = \varepsilon_{ijk} T_{ir} T_{js} T_{kt}$$

$$\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{rst}(det\,\boldsymbol{T}) = \varepsilon_{lmn}\varepsilon_{ijk} T_{ir} T_{js} T_{kt} = \begin{vmatrix} T_{lr} & T_{ls} & T_{lt} \\ T_{mr} & T_{ms} & T_{mt} \\ T_{nr} & T_{ns} & T_{nt} \end{vmatrix}$$

Για $\boldsymbol{T} = \mathbf{1} \ \rightarrow \ \varepsilon_{lmn}\varepsilon_{rst} = \begin{vmatrix} \delta_{lr} & \delta_{ls} & \delta_{lt} \\ \delta_{mr} & \delta_{ms} & \delta_{mt} \\ \delta_{nr} & \delta_{ns} & \delta_{nt} \end{vmatrix}$

Για $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{Q}, \ \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T = 1 \ \rightarrow \ det\,\boldsymbol{Q} = \pm 1 \Rightarrow \varepsilon_{rst} = \pm\varepsilon_{ijk}Q_{ir}Q_{js}Q_{kt}$

Από την $(*)$ μπορεί να παραχθεί μια πιό εύχρηστη σχέση για την $\det \boldsymbol{T}$, δηλ.

$[*] \qquad det\,\boldsymbol{T} = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rst}T_{ir}T_{js}T_{kt}$ … (εναλλακτικός ορισμός της $det\,\boldsymbol{T}$)

Με τη βοήθεια της $[*]$ μπορεί ν' αποδειχθούν σχετικά εύκολα οι σχέσεις

$det(\boldsymbol{TS}) = (det\,\boldsymbol{T})(det\,\boldsymbol{S}), \ \ det\,\boldsymbol{T} = det\,\boldsymbol{T}^T, \ \ det\,\boldsymbol{T}^{-1} = (det\,\boldsymbol{T})^{-1}$

όπου $\boldsymbol{T}^{-1}$ είναι ο αντίστροφος τανυστής του $\boldsymbol{T}$, και ορίζεται παρακάτω

- **Αντίστροφος $\boldsymbol{T}^{-1}$:** $\boldsymbol{Tu} = \boldsymbol{w} \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{w} \ \ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$ (Ορισμός) o **Συνιστώσες :** Δίνονται διευκολυντικά συναρτήσεις του συμπαραγοντα (cofactor) τανυστή $\boldsymbol{T}^C$

$$\boldsymbol{T}^C = T^C_{mi}\, \hat{\boldsymbol{\iota}}_m \otimes \hat{\boldsymbol{\iota}}_n,\; T^C_{mi} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{mst}\varepsilon_{ijk}T_{ir}T_{js}T_{kt}$$

$$\therefore \quad \varepsilon_{rst}\, det\,\boldsymbol{T} = \varepsilon_{ijk}T_{ir}T_{js}T_{kt} \;\rightarrow\; \varepsilon_{mst}\varepsilon_{rst}\, det\,\boldsymbol{T} = \varepsilon_{mst}\varepsilon_{ijk}T_{ir}T_{js}T_{kt}$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\varepsilon_{mst}\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{mr} \quad \rightarrow \quad \delta_{mr}\det\boldsymbol{T} = T^C_{mi}T_{ir} \quad \rightarrow \quad \mathbf{1} = \left(\frac{T^C}{\det T}\right)T$$

και επειδή μπορεί ν' αποδειχθεί εκ των προτέρων ότι ο $\boldsymbol{T}^{-1}$ είναι ένας και μοναδικός και εξ' ορισμού $\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1} = \mathbf{1} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \frac{\boldsymbol{T}^C}{det\,\boldsymbol{T}},\quad det\,\boldsymbol{T} \neq 0$$

- Παρατηρήσεις :

♦ Για να υπάρχει ο $\boldsymbol{T}^{-1}$ πρέπει $det\,\boldsymbol{T} \neq 0$, δηλ. $\boldsymbol{T}$ να είναι μη απειριζόμενος.(Ορισμός μη-απειριζόμενου : $\boldsymbol{T}\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{u} = \mathbf{0} \;\rightarrow\; \det\boldsymbol{T} \neq 0$)

♦ Απο τον ορισμό του $\boldsymbol{T}^{-1}$ $\rightarrow$

$$\left(\boldsymbol{T}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{T}$$

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T} = \mathbf{1}$$

$$(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S})^{-1} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}$$

♦ $[\boldsymbol{T}] = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix},$

$$T_{23}^{C} \equiv -\left(T_{11}T_{23} - T_{21}T_{13}\right) = -\left(\text{minor του} T_{23}^{T}\right)$$

… (από τη Θεωρία Μητρώων)

♦ $\boldsymbol{T}$ αντιστρεφόμενος $\rightarrow$ $\boldsymbol{T}^{T}$ μη-απειριζόμενος

$\boldsymbol{T}^{T}$ μη-απειριζόμενος $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{T}$ μη-απειριζόμενος

$\boldsymbol{T}$ αντιστρεφόμενος $\Rightarrow$ $\boldsymbol{T}$ μη-απειριζόμενος

... (Βασικό Θεώρημα Ύπαρξης του $\boldsymbol{T}^{-1}$)

■ Ορισμένες Βασικές Κατηγορίες Τανυστών

- **Μονόμετροι (Unimodular)** $\boldsymbol{H} \in U$ **:** $|det\,\boldsymbol{H}| = 1$

δηλ. $\boldsymbol{H}$ είναι μονόμετρος όταν είναι ένας μετασχηματισμός που διατηρεί τον όγκο. Μπορεί ν' αποδειχθεί σχετικά εύκολα ότι το σύνολο U των μονόμετρων τανυστών σχηματίζει μία ομάδα, δηλ.

(i) Είναι "κλειστό" για πολλαπλασιασμό ... $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2 \in U \to \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2 \in U$

(ii) Το U έχει και μοναδιαίο στοιχείο … εδώ το $\mathbf{1} \in U$

- **Ορθογώνιοι (Orthogonal)** $\boldsymbol{Q} \in Q$**:**

$$\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^T \quad \acute{\eta} \quad \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q} = \mathbf{1}$$

♦ $\det\boldsymbol{Q} = \pm 1$: $\det\boldsymbol{Q} = +1 \to \boldsymbol{Q} \in Q^+$ … δεξιόστροφοι,

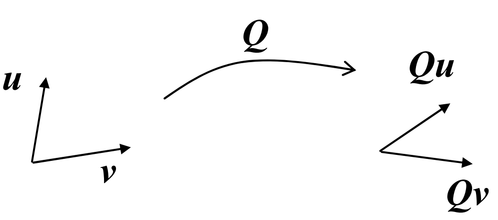
$\det\boldsymbol{Q} = -1 \to \boldsymbol{Q} \in Q^-$ … αριστερόστροφοι

♦ Q σχηματίζει ομάδα

… Απόδειξη εύκολη χρησιμοποιώντας τους ορισμούς για ορθογωνικούς τανυστές και ομάδες

♦ $\boldsymbol{Q}$ είναι ισομετρικός, δηλ. διατηρεί μήκη και γωνίες :

$$\boldsymbol{Qu} \cdot \boldsymbol{Qv} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$$



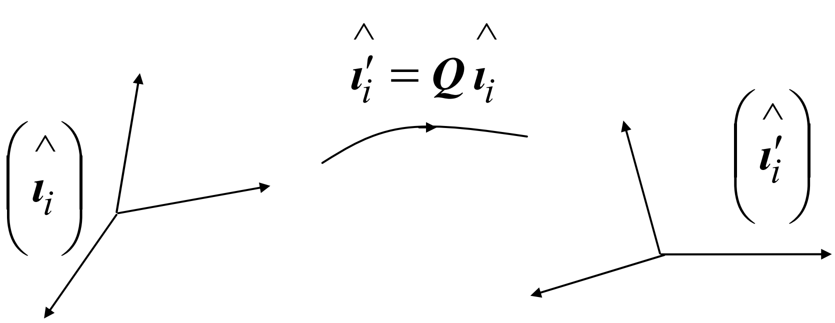
♦ $Q_{ij}Q_{jm} = \delta_{ij}$

$$\varepsilon_{rst} = \varepsilon_{ijk} Q_{ir} Q_{js} Q_{kt} \quad \left(\boldsymbol{Q} \in Q^{+}\right)$$

$$\varepsilon_{rst} = -\varepsilon_{ijk} Q_{ir} Q_{js} Q_{kt} \quad \left(\boldsymbol{Q} \in Q^{-}\right)$$

♦ Αλλαγή Βάσης : Έστω $\left\{ \hat{\boldsymbol{\imath}}_i \right\}$ και $\left\{ \hat{\boldsymbol{\imath}}'_i \right\}$ δύο συστήματα ορθογωνίων βάσεων (τα $\hat{\boldsymbol{\imath}}_i$ και $\hat{\boldsymbol{\imath}}'_i$ συμβολίζουν τα μοναδιαία διανύσματα στα αντίστοιχα συστήματα συντεταγμένων). Τότε υπάρχει ένας και μοναδικός ορθογώνιος τανυστής $\boldsymbol{Q}$ που δίνει το ένα σύστημα συναρτήσει του άλλου, δηλ.

$$\hat{\boldsymbol{\imath}}'_i = \boldsymbol{Q} \hat{\boldsymbol{\imath}}_i \;\rightarrow\; \boldsymbol{Q} = \hat{\boldsymbol{\imath}}'_i \otimes \hat{\boldsymbol{\imath}}_i, \;\; Q_{ij} = \hat{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}}'_j$$



♦Συνιστώσες Διανυσμάτων και Τανυστών Κατόπιν Αλλαγης Βάσης

$$u'_j = u_i Q_{ij} \quad \text{και} \quad u_i = u'_j Q_{ij}$$

$$T'_{mn} = T_{ij} Q_{im} Q_{jn} \quad \text{και} \quad T_{ij} = T'_{mn} Q_{im} Q_{jn}$$

$$T'_{mn\ldots l} = T_{ij\ldots k} Q_{im} Q_{jn} \ldots Q_{kl} \quad \text{και} \quad T_{ij\ldots k} = T'_{mn\ldots l} Q_{im} Q_{jn} \ldots Q_{kl}$$

Οι αποδείξεις των παραπάνω σχέσεων δεν είναι δύσκολες : π.χ.

$$\boldsymbol{T} = T_{ij}\, \hat{\boldsymbol{\iota}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{\iota}}_j = T'_{ij}\, \hat{\boldsymbol{\iota}}'_i \otimes \hat{\boldsymbol{\iota}}'_j \rightarrow T'_{mn} = \hat{\boldsymbol{\iota}}'_m \cdot \boldsymbol{T}\, \hat{\boldsymbol{\iota}}'_n = \hat{\boldsymbol{\iota}}'_m \cdot T_{ij}\, \hat{\boldsymbol{\iota}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{\iota}}_j\, \hat{\boldsymbol{\iota}}'_n =$$

$$= \hat{\boldsymbol{\iota}}'_m \cdot T_{ij}\, \hat{\boldsymbol{\iota}}_i \left(\hat{\boldsymbol{\iota}}_j \cdot \hat{\boldsymbol{\iota}}'_n \right) = T_{ij} \left(\hat{\boldsymbol{\iota}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{\iota}}'_m \right) \left(\hat{\boldsymbol{\iota}}_j \cdot \hat{\boldsymbol{\iota}}'_n \right) = T_{ij} Q_{im} Q_{jn}$$

- **Ισότροποι (Isotropic) $\boldsymbol{C} \in J$:**

$$C'_{mn\ldots l} = C_{mn\ldots l} \quad \ldots \left(Q \in \boldsymbol{Q}^{+}\right) \quad \Rightarrow \quad C_{mn\ldots l} = C'_{ij\ldots k} Q_{im} Q_{jn} \quad \ldots Q_{kl}$$

Η λύση της αλγεβρικής αυτής εξίσωσης δόθηκε από τον Hilbert ως Θεώρημα: Κάθε ισότροπος τανυστής οποιασδήποτε τάξης *n* γράφεται σαν αθροίσματα και γινόμενα από

$$\delta_{ij} \text{ και } \varepsilon_{ijk} \quad \begin{cases} n = \text{άρτιος} \quad \rightarrow \quad \text{μόνο } \delta_{ij} \\ \\ n = \text{περιττός} \quad \rightarrow \quad \text{αμφότερα } \delta_{ij} \text{ και } \varepsilon_{ijk} \end{cases}$$

π.χ.

$$C_{ij} = c\delta_{ij}, \quad C_{ijk} = c\varepsilon_{ijk}, \quad C_{ijkl} = c_1\delta_{ij}\delta_{kl} + c_2\delta_{ik}\delta_{jl} + c_3\delta_{il}\delta_{jk},$$

$$\begin{aligned} C_{ijklm} &= c_1\delta_{ij}\varepsilon_{klm} + c_2\delta_{ik}\varepsilon_{jlm} + c_3\delta_{il}\varepsilon_{jkm} + c_4\delta_{im}\varepsilon_{jkl} + c_5\delta_{jk}\varepsilon_{ilm} + \\ &\quad + c_6\delta_{jl}\varepsilon_{ikm} + c_7\delta_{jm}\varepsilon_{ikl} + c_8\delta_{kl}\varepsilon_{ijm} + c_9\delta_{km}\varepsilon_{ijl} + c_{10}\delta_{lm}\varepsilon_{ijk} \end{aligned}$$

Παρατήρηση : Αν ο 4^{ου} βαθμού ισότροπος τανυστής C_{ijkl} είναι επίσης συμμετρικός

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad \text{ή} \quad C_{ijkl} = C_{ijlk} \Rightarrow C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \qquad (+)$$

Εφαρμογή (Νόμος Hooke) : $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{CE} \quad \rightarrow \quad T_{ij} = C_{ijkl}E_{kl}$ και επειδή

$T_{ij} = T_{ji}$ και $E_{kl} = E_{lk} \quad \rightarrow \quad C_{ijkl}$ δίνεται από την (+)

$T_{ij} = \lambda E_{mm}\delta_{ij} + 2\mu E_{mn}$ ή $\boldsymbol{T} = \lambda tr\, \boldsymbol{E}\boldsymbol{1} + 2\mu\boldsymbol{E}$

■ Ιδιοτιμές / Ιδιοδιανύσματα / Τετραγωνική Ριζα / Πολική Αναπαράσταση

- **Ιδιοτιμές / Ιδιοδιανύσματα** $\left(t_i, \boldsymbol{e}_i\right)$ του $\boldsymbol{T}$ **:**

Ορισμός $(\boldsymbol{T}-t\mathbf{1})\boldsymbol{e}=0 \;\Rightarrow\; det(\boldsymbol{T}-t\mathbf{1})=0$

Αναπτύσσοντας την *det* χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$det(\boldsymbol{T}-t\mathbf{1})=\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}(\boldsymbol{T}-t\mathbf{1})_{il}(\boldsymbol{T}-t\mathbf{1})_{jm}(\boldsymbol{T}-t\mathbf{1})_{kn}$$

παίρνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$-t^3+I_T t^2-II_T t+III_T=0;$$

$$I_T=tr\boldsymbol{T}, \quad II_T=\frac{1}{2}\left(I_T^2-tr\boldsymbol{T}^2\right), \quad III_T=det\,\boldsymbol{T}$$

♦ Αν με $\left(t_1, t_2, t_3\right)$ συμβολίσουμε τις ρίζες του παραπάνω πολυωνύμου

$$I_T=t_1+t_2+t_3, \quad II_T=t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3, \quad III_T=t_1t_2t_3$$

♦ Από τη θεωρία του κυβικού πολυωνύμου $\rightarrow$ τουλάχιστο μία t_i είναι πραγματική και δύο συζυγείς μιγαδικές

♦ Θεώρημα : Κάθε συμμετρικός τανυστής $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T$ έχει τρεις πραγματικές ιδιοτιμές $\{t_i\}$ και τρία πραγματικά (ορθογώνια και μοναδιαία) ιδιοδιανύσματα $\left\{\hat{\boldsymbol{e}}_i\right\}$ ... $\left(\hat{\boldsymbol{e}}_i = \dfrac{\boldsymbol{e}_i}{|\boldsymbol{e}_i|}\right)$

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος χρησιμοποιούνται τα εξής δύο λήμματα

Λήμμα 1 : $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T \quad \rightarrow$ οι ιδιοτιμές $\{t_i\}$ είναι πραγματικές

Λήμμα 2 : $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T \quad \rightarrow$ διακριτές ιδιοτιμές $(t_1 \neq t_2)$ αντιστοιχούν σε ορθογώνια διανύσματα $(\boldsymbol{e}_1 \perp \boldsymbol{e}_2)$

♦ Συνιστώσες :

$$\boldsymbol{T} = \hat{T}_{ij}\, \hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_j \quad \ldots \hat{T}_{ij} = \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{T}\, \hat{\boldsymbol{e}}_j = t_j\, \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j = t_j \delta_{ij}$$

$\ldots j$ δεν αθροίζεται

δηλ.

$$\hat{T}_{ij} = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{T} = t_1\, \hat{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_1 + t_2\, \hat{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_2 + t_3\, \hat{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_3$$

♦ Θεώρημα Cayley-Hamilton : $-\boldsymbol{T}^3 + I_T \boldsymbol{T}^2 - II_T \boldsymbol{T} + III_T \mathbf{1} = 0$

- **Τετραγωνική ρίζα $\sqrt{\boldsymbol{T}}$:** Ορίζεται για "θετικό" δηλ. "θετικά ορισμένο" συμμετρικό (positive definite symmetric) τανυστή

  δηλ. $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T$ είναι "θετικός" αν $\boldsymbol{Tu} \cdot \boldsymbol{u} > 0 \;\; \forall \boldsymbol{u}$

♦ Θεώρημα : $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T$ είναι θετικός αν και μόνο αν t_i>0

♦ $\sqrt{\boldsymbol{T}} = \sqrt{t_1}\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_1 + \sqrt{t_2}\,\hat{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_2 + \sqrt{t_3}\,\hat{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_3 \quad \rightarrow$

$$\sqrt{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} \sqrt{t_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{t_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{t_3} \end{pmatrix}$$

• **Πολική Αναπαράσταση ή αποσύνθεση (Polar Decomposition) :**

♦Θεώρημα : Αν $\boldsymbol{F}$ είναι μη-απειριζόμενος τανυστής $\left(\det \boldsymbol{F} \neq 0\right) \rightarrow \boldsymbol{F}$ λαμβάνει την εξής μοναδική αναπαράσταση (αποσύνθεση)

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R} \qquad (*)$$

όπου $\boldsymbol{R} \in Q;\quad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^T,\quad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^T \quad \textit{και} \quad \left(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}\right)$ είναι θετικοί και συγκεκριμένα $\boldsymbol{U} = \sqrt{\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}},\ \boldsymbol{V} \equiv \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}^T$

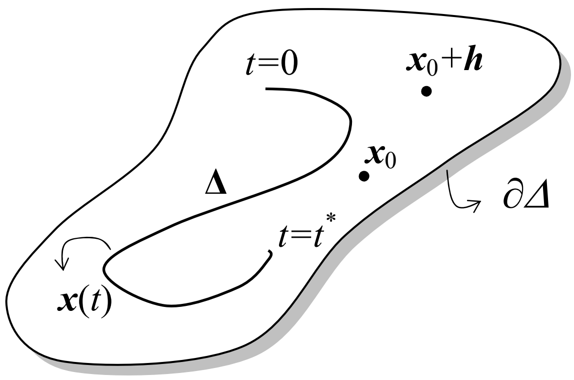
♦Για την απόδειξη του παραπάνω βασικού θεωρήματος παρατηρούμε ότι $\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$ είναι θετικός συμμετρικός. Ορίζουμε $\boldsymbol{U} = \sqrt{\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}}$ και παρατηρούμε ότι $\boldsymbol{U}$ είναι θετικός συμμετρικός και μη-απειριζόμενος. Επίσης ορίζουμε $\boldsymbol{R} \equiv \boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1}$ και παρατηρούμε ότι

$$\boldsymbol{R} \in Q \;\Rightarrow\; \boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{U}$$

Η μοναδικότητα αποδεικνύεται ως συνήθως

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{R}_2\boldsymbol{U}_2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U}_1^2 = \boldsymbol{U}_2^2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_2 \quad \text{κ.λ.π.}$$

3. ΠΕΔΙΑ: ΒΑΘΜΩΤΑ\ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ\ ΤΑΝΥΣΤΙΚΑ



$\varDelta$ ... ανοικτή περιοχή στον Ευκλείδιο χώρο E ($\partial\varDelta$ ... όριο της $\varDelta$)

$\boldsymbol{x}(t)$ ... μονοπαραμετρική διανυσματική μεταβλητή

$\boldsymbol{x} \in \varDelta$ ... αν μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε μία σφαίρα γύρω από το $\boldsymbol{x}$ που να περιέχεται στο $\varDelta$

■ **Βαθμωτό Πεδίο** $\varphi(x): V \to \boldsymbol{R}$

(V = σύνολο διανυσμάτων στον τριδιάστατο ή Ευκλείδιο χώρο E
$\boldsymbol{R}$ = σύνολο πραγματικών αριθμών)

- Παραγώγιση :

$\varphi(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - \varphi(\boldsymbol{x}_0) = \varphi_x(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{h} + O(|\boldsymbol{h}|) \quad \forall \boldsymbol{h} \in V$ και

$$\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h} \in \varDelta \quad \ldots \frac{O(|\boldsymbol{h}|)}{|\boldsymbol{h}| \to 0} \;\to\; 0$$

$\varphi_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0) \equiv grad\,\varphi \in V$ ... κλίση του φ

(Αποδεικνύεται εύκολα ότι $grad\varphi$ είναι “μοναδικό” διάνυσμα)

- Σύνθετη παραγώγιση : $\dot{\varphi} = grad\varphi \cdot \dot{\boldsymbol{x}}$

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}(t)) = \overline{\varphi}(t) \;\; \rightarrow \;\; \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi_{\boldsymbol{x}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}$$

- Συνιστώσες : $grad\varphi = \varphi_{,i}\, \hat{\boldsymbol{\iota}}_i \quad ... \varphi_{,i} \equiv \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$

■ **Διανυσματικό Πεδίο $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : V \rightarrow V$**

- Παραγώγιση :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0) = \Big[\, \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0) \,\Big] \boldsymbol{h} + O(|\boldsymbol{h}|) \;\; \forall \boldsymbol{h} \in V \quad \text{και} \quad \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h} \in \Delta$$

$$\Big[\, \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0) \,\Big] = grad\, \boldsymbol{u} \in V \otimes V$$

…“κλίση” του $\boldsymbol{u}$

… ($grad\, \boldsymbol{u}$ = “μοναδικός” τανυστής)

- Σύνθετη Παραγώγιση : $\dot{\boldsymbol{u}} = [grad\, \boldsymbol{u}]\dot{\boldsymbol{x}}$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(t)) = \overline{\boldsymbol{u}}(t) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = [\mathrm{grad}\, \boldsymbol{u}] \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}$$

- Συνιστώσες : $grad\,\boldsymbol{u} = u_{i,j}\,\hat{\boldsymbol{\iota}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{\iota}}_j$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i} = grad\,\boldsymbol{u}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x_i} = [grad\,\boldsymbol{u}]\hat{\boldsymbol{\iota}}_i,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial u_m \hat{\boldsymbol{\iota}}_m}{\partial x_i} = \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\hat{\boldsymbol{\iota}}_m$$

$$[grad\,\boldsymbol{u}]\hat{\boldsymbol{\iota}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{\iota}}_j = \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\hat{\boldsymbol{\iota}}_m \cdot \hat{\boldsymbol{\iota}}_j = \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\delta_{mj} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad \rightarrow \quad u_{j,i} = \hat{\boldsymbol{\iota}}_j \cdot [grad\,\boldsymbol{u}]\hat{\boldsymbol{\iota}}_i$$

- Διαφορικοί Τελεστές : $div\boldsymbol{u} \equiv tr[\mathrm{grad}\,\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{u}_{i,i}$

... “απόκλιση” του $\boldsymbol{u}$ (βαθμωτό)

$curl\,\boldsymbol{u} \equiv \varepsilon_{ijk} u_{k,j}\,\hat{\boldsymbol{\iota}}_i$ ... “περιστροφή” του $\boldsymbol{u}$ διάνυσμα

$$\nabla^2 \equiv \Delta \equiv div\,grad \quad \ldots \begin{cases} \nabla^2\varphi = \varphi_{,ii} & \text{... Λαπλασιανή του } \varphi \text{ (βαθμωτό)} \\ \varphi_{,ii} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} & \\ \nabla^2 u & \text{... Λαπλασιανή του } \boldsymbol{u} \text{ (διανυσμα)} \end{cases}$$

♦ Ταυτότητες / Παραδείγματα :

$$\left.\begin{aligned} div(\varphi\boldsymbol{u}) &= \varphi div\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} grad\varphi \\ curl\,curl\boldsymbol{u} &= grad\,div\boldsymbol{u} - \nabla^2\boldsymbol{u} \end{aligned}\right\} \text{... Απόδειξη χρησιμοποιώντας δείκτες}$$

- **Τανυστικό Πεδίο :** $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) : V \rightarrow V \otimes V$

- Παραγώγιση :

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_0) = \left[\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0)\right]\boldsymbol{h} + O(|\boldsymbol{h}|) \;\; \forall \boldsymbol{h} \in V \;\; \text{και} \;\; \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h} \in \varDelta$$

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0) \equiv grad\, \boldsymbol{T} \in V \otimes V \otimes V$$

… "κλίση" του $\boldsymbol{T}$

… ($grad\, \boldsymbol{T}$ = "μοναδικός" τανυστής $3^{ης}$ τάξης)

- Σύνθετη Παραγώγιση : $\dot{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x}) = [grad\, \boldsymbol{T}]\, \dot{\boldsymbol{x}}$

- Συνιστώσες : $\mathrm{grad\, T} = \mathrm{T}_{ij,k}\, \hat{\iota}_i \otimes \hat{\iota}_j \otimes \hat{\iota}_k$

- Απόκλιση : $div\, \boldsymbol{T} = T_{ij,j}\, \hat{\boldsymbol{\iota}}_i = (T_{i1,1} + T_{i2,2} + T_{i3,3})\hat{\boldsymbol{\iota}}_i$

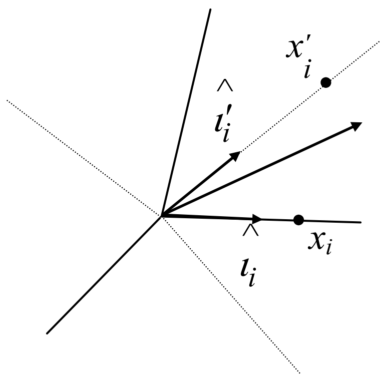
... διάνυσμα με συνιστώσες $\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{T}_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \mathrm{T}_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \mathrm{T}_{13}}{\partial x_3}, & i = 1 \\ \dfrac{\partial \mathrm{T}_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \mathrm{T}_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \mathrm{T}_{23}}{\partial x_3}, & i = 2 \\ \dfrac{\partial \mathrm{T}_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \mathrm{T}_{32}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \mathrm{T}_{33}}{\partial x_3}, & i = 3 \end{cases}$

όπου,

$$T_{i1,1} + T_{i2,2} + T_{i3,3} = \frac{\partial T_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{i3}}{\partial x_3}$$

■ Αλλαγή Συντεταγμένων / Αναλλοίωτες / Θεωρήματα Απόκλισης και Stokes

- Αλλαγή Συντεταγμένων :



$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} + x_i\,\hat{\boldsymbol{\iota}}_i = \boldsymbol{o} + x'_i\,\hat{\boldsymbol{\iota}}'_i;$$

$$\hat{\boldsymbol{\iota}}'_i = \boldsymbol{Q}\,\hat{\boldsymbol{\iota}}_i\,, \quad \boldsymbol{Q} \in O^+ \quad \ldots\left(Q_{ij} = \hat{\boldsymbol{\iota}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{\iota}}'_j \right)$$

$$x'_j = x_i Q_{ij}\,, \quad x_i = x'_j Q_{ij}$$

… ίδιες σχέσεις όπως και για τις συνιστώσες διανυσμάτων

($\boldsymbol{x}$ … διάνυσμα θέσης)

$$\left(\begin{array}{l} \boldsymbol{x} = x'_m\,\hat{\boldsymbol{\iota}}'_m = x_i\,\hat{\boldsymbol{\iota}}_i \;\rightarrow\; x'_m\,\hat{\boldsymbol{\iota}}'_m \cdot \hat{\boldsymbol{\iota}}'_j = x_i\,\hat{\boldsymbol{\iota}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{\iota}}'_j \\ \\ x'_m \delta_{mj} = x_i Q_{ij} \rightarrow x'_j = x_i Q_{ij} \end{array} \right)$$

- Αναλλοίωτες : $div\,\boldsymbol{u},\;\; curl\,\boldsymbol{u},\;\; div\,\boldsymbol{T}$

… έχουν τις ίδιες τιμές σ' όλα τα συστήματα συντεταγμένων. Π.χ.

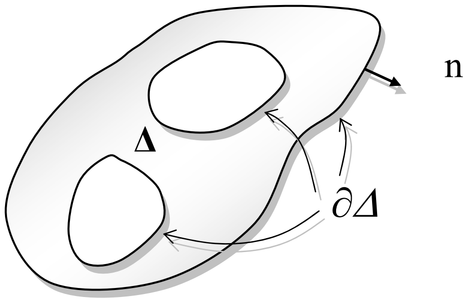
$$div\,\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u'_j Q_{ij}\right) = Q_{ij}\,\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} = Q_{ij}\,\frac{\partial u'_j}{\partial x'_m}\frac{\partial x'_m}{\partial x_i} = Q_{ij}Q_{im}\,\frac{\partial u'_j}{\partial x'_m} =$$

$$= \delta_{jm}\,\frac{\partial u'_j}{\partial x'_m} = \frac{\partial u'_j}{\partial x'_j} = div'\,\boldsymbol{u} \quad \ldots\left(Q_{ij}Q_{im} = \delta_{jm}\right)$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $curl\,\boldsymbol{u} = curl'\,\boldsymbol{u},\; div\,\boldsymbol{T} = div'\,\boldsymbol{T}$

- Θεώρημα Απόκλισης :

  Έστω $\varphi(\cdot)$, $\boldsymbol{u}(\cdot)$, $\boldsymbol{T}(\cdot)$ συνεχή στο $\overline{\Delta} = \Delta + \partial\Delta$ και C^1 (πρώτες παράγωγοι συνεχείς) στο Δ



  ◆ $\int_{\Delta} grad\varphi \, dv = \int_{\partial\Delta} \varphi \boldsymbol{n} \, da$

  ◆ $\int_{\Delta} grad\, \boldsymbol{u} \, dv = \int_{\partial\Delta} \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{n} \, da$

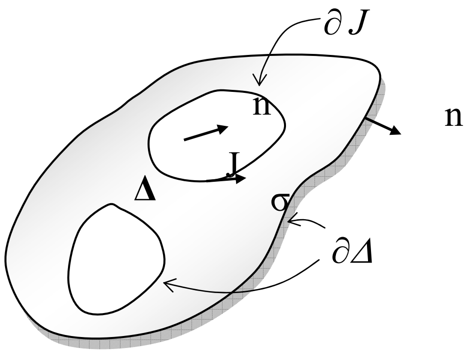
  ◆ $\int_{\Delta} div\, \boldsymbol{u} \, dv = \int_{\partial\Delta} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \, da$

  ◆ $\int_{\Delta} curl\, \boldsymbol{u} \, dv = \int_{\partial\Delta} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} \, da$

  ◆ $\int_{\Delta} div\, \boldsymbol{T} \, dv = \int_{\partial\Delta} \boldsymbol{T} \boldsymbol{n} \, da$

  Οι παραπάνω πέντε ταυτότητες συνιστούν το "Γενικευμένο Θεώρημα της Απόκλισης"

- Θεώρημα Stokes : Έστω Δ πεπερασμένη κλειστή περιοχή στο E και η $\boldsymbol{u}(\cdot)$ είναι C^1



$$\rightarrow \begin{cases} \mathit{\Delta},\ \ \partial \mathit{\Delta},\ \ \boldsymbol{n} & \text{... όπως πριν} \\ J & \text{... συνεχής επιφάνεια στο } \mathit{\Delta} \\ \partial J & \text{... σύνορο του } J \\ \boldsymbol{\sigma} & \text{... μοναδ. εφαπτόμενο στο } \partial J \end{cases}$$

[$(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\sigma})$ … δεξιόστροφα μοναδιαία διανύσματα, (da, ds) ... στοιχειώδεις επιφάνεια και μήκος]

$$\int_J curl\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,da = \oint_{\partial J}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,ds \quad \text{... Αν } J \text{ κλειστή } \rightarrow \int_J curl\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,da = 0$$

- Διανυσματικές Αναπαραστάσεις : Έστω $\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\varphi$ διαφορίσιμα και συνεχή (σε όποιο βαθμό χρειάζεται) και $\mathit{\Delta}$ πεπερασμένο χωρίς οπές. Τότε ισχύουν τα παρακάτω

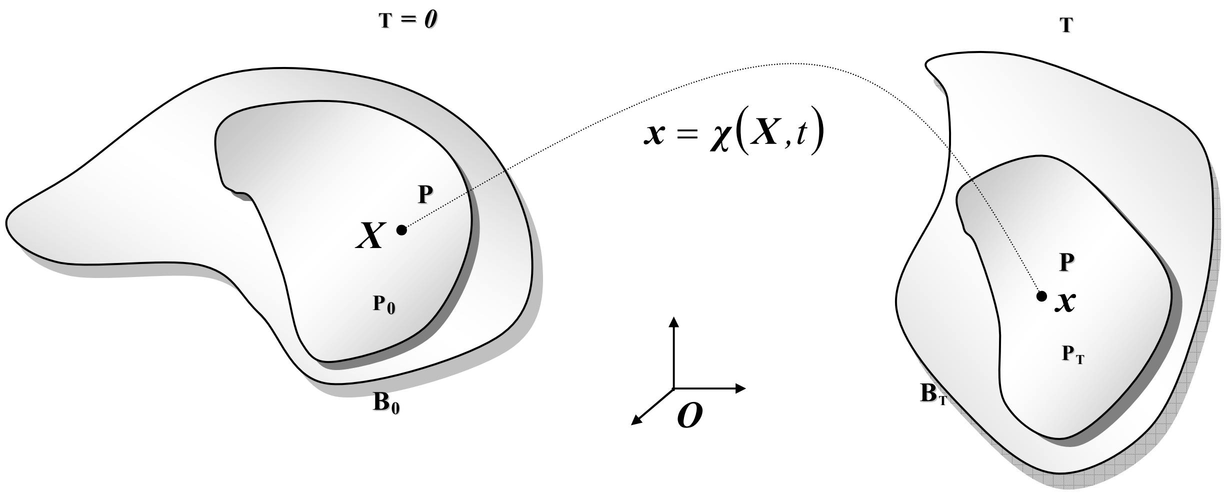
$$curl\,\boldsymbol{u} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{u} = grad\,\varphi$$

$$div\,\boldsymbol{u} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{u} = curl\,\boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{u} = grad\,\varphi + curl\,\boldsymbol{w} \quad \text{... (Helmholtz)}$$

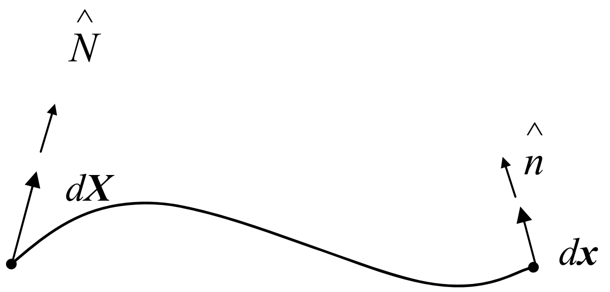
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

1. ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ



- Κίνηση : $x = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X},t)$; $\boldsymbol{x} \in C^1$, $\boldsymbol{x}^{-1}$ υπάρχει, $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},0) = \boldsymbol{X}$

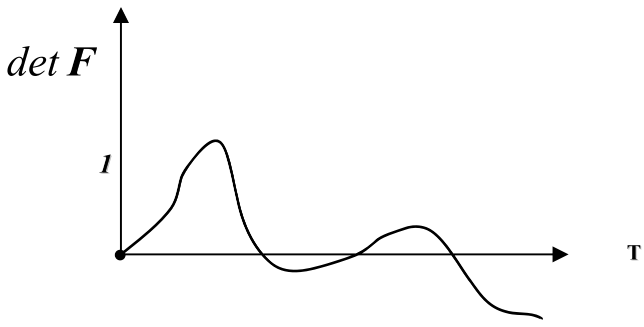
- Παραμόρφωση : $\boldsymbol{F} = \dfrac{\partial \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X},t)}{\partial \boldsymbol{X}} = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}}$; $d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} d\boldsymbol{X}$ $(t$ σταθ.$)$



$$\hat{N} = \frac{d\boldsymbol{X}}{|d\boldsymbol{X}|}, \quad \hat{n} = \frac{d\boldsymbol{x}}{|d\boldsymbol{x}|} \quad \text{(μοναδιαία διανύσματα)}$$

$$\boldsymbol{F}\big|_{t=0} = \mathbf{1} \;\rightarrow\; det\boldsymbol{F}\big|_{t=0} = 1, \quad det\,\boldsymbol{F} = \frac{vol\{dx_i\}}{vol\{dX_i\}} = \frac{d\upsilon}{dV} \neq (0,\infty)$$

$$\Rightarrow det\,\boldsymbol{F} > 0$$



$$\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X}',t) - \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X},t) = [\nabla\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X},t)]\boldsymbol{h} + O(|\boldsymbol{h}|); \quad |\boldsymbol{h}| \to 0 \ \ (\boldsymbol{h} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}')$$

$$\boldsymbol{F} = \nabla\boldsymbol{\chi} \quad ...\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}, \ grad \equiv \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}$$

- Ταχύτητα : $\boldsymbol{v} = \dfrac{\partial\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X},t)}{\partial t} = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} \equiv \dot{\boldsymbol{x}}$

- Επιτάχυνση : $\boldsymbol{a} = \dfrac{\partial^2\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X},t)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \equiv \ddot{\boldsymbol{x}}$

- Μετατόπιση : $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X},t) - \boldsymbol{X}$

$$\nabla\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F} - \mathbf{1}, \quad grad\boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} = \mathbf{1} - \boldsymbol{F}^{-1}$$

- Γραφή με δείκτες :

$$x_i = x_i\left(X_j, t\right)$$

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

$$dx_i = F_{ij} dX_j$$

$$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$a_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}$$

$$u_i = x_i - X_i, \quad u_{i,j} = F_{ij} - \delta_{ij}$$

$$\left(\begin{array}{l} \nabla \boldsymbol{u} = \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{X}} = \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} = \left(grad\ \boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{F}; \\ \\ \left(\nabla \boldsymbol{u}\right)_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial X_j} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_m} \dfrac{\partial x_m}{\partial X_j} = \left(grad\ \boldsymbol{u}\right)_{im} F_{mj} \end{array}\right)$$

$$det\, \boldsymbol{F} = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} F_{il} F_{jm} F_{kn}$$

- Υλική (Lagrangean) και Χωρική (Eulerian) Παράγωγος-Παρατήρηση:

$$f = f(\boldsymbol{X},t) = f\left(\boldsymbol{\chi}^{-1}(\boldsymbol{x},t)\right) = \overline{f}(\boldsymbol{x},t)$$

$(\boldsymbol{X},t)$ ... παρατήρηση κατά Lagrange (Υλική)

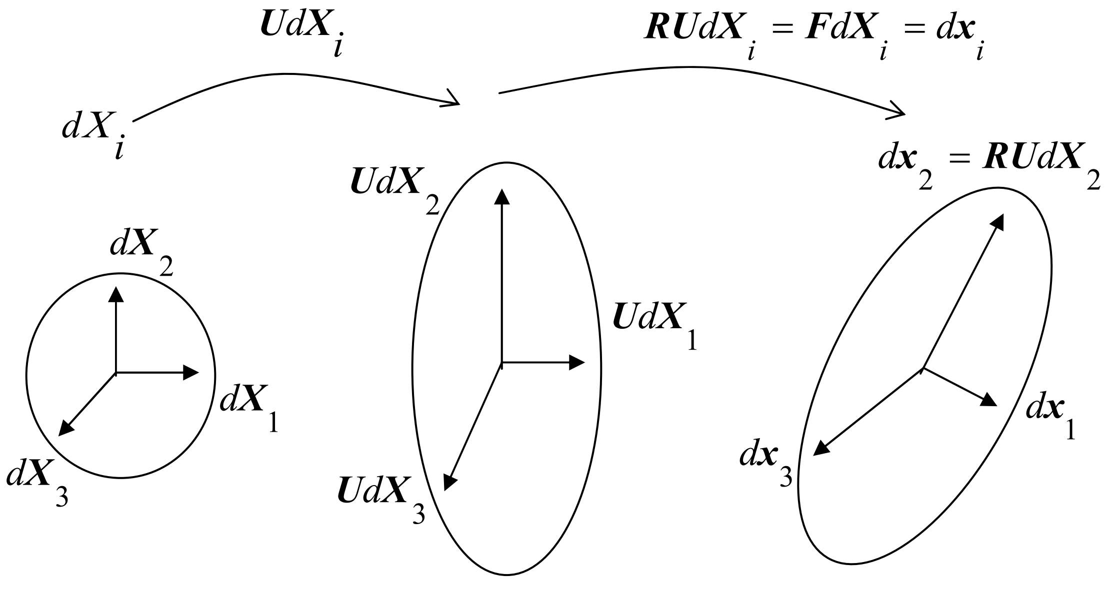
$(\boldsymbol{x},t)$ ... παρατήρηση κατά Euler (Χωρική)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Υλική παράγωγος:} & \dot{f} \equiv \dfrac{\partial f(\boldsymbol{X},t)}{\partial t} \\[2ex] \text{Χωρική παράγωγος :} & \dfrac{\partial f}{\partial t} \equiv \dfrac{\partial \overline{f}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{f} = \dfrac{\partial f}{\partial t} + (grad\, f)\cdot \boldsymbol{v} \\[2ex] \dot{f} = \dfrac{\partial f}{\partial t} + f_{,i} v_i \end{array}\right.$$

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}, \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}$$ … σύνθετη παραγώγιση

- Ανηγμένη Παραμόρφωση :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{RU} = \boldsymbol{VR} \begin{cases} \boldsymbol{U} & \text{... δεξιός τανυστής “επιμήκυνσης”} \\ \boldsymbol{V} & \text{... αριστερός τανυστής “εντατικοποίησης ”} \\ & \text{(Stretch)} \\ \boldsymbol{R} & \text{... (ορθογώνιος) τανυστής στροφής} \end{cases}$$



“σφαίρα” “ελλειψοειδές” “περιστραμένο ελλειψοειδές”

$\boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{C}$ … δεξιά Cauchy-Green παραμόρφωση

$\boldsymbol{V}^2 = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T \equiv \boldsymbol{B}$ … αριστερή Cauchy-Green παραμόρφωση

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \mathbf{1}) \qquad \text{… Green-St. Venant παραμόρφωση}$$

$$\ldots\ \frac{1}{2}\left[\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T + (\nabla \boldsymbol{u})^T \nabla \boldsymbol{u}\right]$$

$$\widetilde{\boldsymbol{e}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} - \boldsymbol{B}^{-1}\right) \qquad \text{… Almansi-Hamel παραμόρφωση}$$

$$\ldots\ \frac{1}{2}\left[grad\,\boldsymbol{u} + (grad\,\boldsymbol{u})^T - (grad\,\boldsymbol{u})^T\, grad\,\boldsymbol{u}\right]$$

- Φυσική Ερμηνεία των Ορισμών των $\boldsymbol{E}$ και $\widetilde{\boldsymbol{e}}$:

Η φυσική ερμηνεία των $\boldsymbol{E}$ και $\widetilde{\boldsymbol{e}}$ δόθηκε παραπάνω με τη χρήση των $\boldsymbol{U}$ και $\boldsymbol{V}$. Εδώ εξηγούνται περαιτέρω οι $\boldsymbol{E}$ και $\widetilde{\boldsymbol{e}}$. Αναφορά γίνεται στο σχήμα της σημείωσης (∗) και του συνήθους μονοδιάστατου ορισμού

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

που γενικεύεται στη 3- διάστατη μηχανική Σ. Μ. σαν

$$\frac{|\mathrm{dx}| - |\mathrm{dX}|}{|\mathrm{dX}|} = \frac{\left(|\mathrm{dx}| - |\mathrm{dX}|\right)\left(|\mathrm{dx}| + |\mathrm{dX}|\right)}{|\mathrm{dX}|\left(|\mathrm{dx}| + |\mathrm{dX}|\right)} \cong \frac{|\mathrm{dx}|^2 - |\mathrm{dX}|^2}{|\mathrm{dX}|^2} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{X}|^2} = \frac{\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X} - \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{X}|^2} =$$

$$=\frac{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}-\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{X}|^2}=\frac{\boldsymbol{C}\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{X}|^2}-1=\boldsymbol{C}\hat{N}\cdot\hat{N}-1=$$

$$=(\boldsymbol{C}-\mathbf{1})\hat{N}\cdot\hat{N}=2\boldsymbol{E}\,\hat{N}\cdot\hat{N}$$

… $\hat{N}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{X}|}$ … μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση $\mathrm{d}\boldsymbol{X}\rightarrow(*)$

Παρόμοια βρίσκουμε $\dfrac{|\mathrm{d}\boldsymbol{x}|^2-|\mathrm{d}\boldsymbol{X}|^2}{|\mathrm{d}\boldsymbol{X}|^2}=2\tilde{e}\,\hat{n}\cdot\hat{n}$

... $\hat{n}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{x}|}$ … μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση $\mathrm{d}\boldsymbol{x}\rightarrow(*)$

$\boldsymbol{E}\rightarrow$ “engineering strain” και $\tilde{\boldsymbol{e}}\rightarrow$ “true strain”

- Γραμμικοποίηση :

Υποθέτουμε ότι $|\nabla\boldsymbol{u}|=\sqrt{tr\left\{(\nabla\boldsymbol{u})(\nabla\boldsymbol{u})^T\right\}}=O(\varepsilon<<1)\Rightarrow\ grad\,\boldsymbol{u}\doteq\nabla\boldsymbol{u}$,

$$\boldsymbol{E}\doteq\tilde{\boldsymbol{e}}\doteq\frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{u}+\nabla\boldsymbol{u}^T\right),\ \boldsymbol{U}\doteq\boldsymbol{V}\doteq\mathbf{1}+\frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{u}+\nabla\boldsymbol{u}^T\right)\ \ldots\left\{\nabla\boldsymbol{u}^T\equiv(\nabla\boldsymbol{u})^T\right\}$$

$\boldsymbol{R}\doteq\mathbf{1}-\dfrac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{u}-\nabla\boldsymbol{u}^T\right)$, όπου $O(\varepsilon)=$ σταθ. ε, $0<\varepsilon<<1$ και $\doteq$ σημαίνει $+O(\varepsilon^2)$

Ορίζουμε : $\boldsymbol{e} = \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T\right), \quad \boldsymbol{w} = \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{u} - \nabla \boldsymbol{u}^T\right)$

… δηλ. $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{w})$ είναι οι τανυστές ανηγμένης παραμόρφωσης και στροφής για ‘‘μικρές’’ παραμορφώσεις

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) = e_{ji} \qquad \text{… συμμετρικός}$$

$$w_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right) = -w_{ji} \qquad \text{… αντισυμμετρικός}$$

Επίσης προκύπτει ότι : Διόγκωση $\equiv \dfrac{\mathrm{d}\upsilon - \mathrm{d}V}{\mathrm{d}V} = tr\boldsymbol{e}$,

$$III_{\boldsymbol{C}} \doteq III_{\boldsymbol{B}} = 1 + 2tr\boldsymbol{e} \quad \begin{cases} \boldsymbol{C} \doteq \boldsymbol{B} \doteq \underset{\sim}{1} + 2\boldsymbol{e} \\ I_C \doteq I_B \doteq 3 + 2tr\boldsymbol{e} \\ II_{\boldsymbol{C}} \doteq II_{\boldsymbol{B}} \doteq 3 + 4tr\boldsymbol{e} \end{cases}$$

- Εντατικοποίηση ή τέντωμα (Stretching) και Περιστροφή (Spin) – Τανυστές :

Έστω : $\hat{n} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{x}|}, \quad \hat{N} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{X}|}, \quad \lambda = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{X}|}$ … τέντωμα

Αποδεικνύεται ότι $\lambda = \sqrt{\boldsymbol{C}\,\hat{N}\cdot\hat{N}}$ … και διαφορίζοντας ως προς χρόνο

$$\dot{\overline{\log\lambda}} = \boldsymbol{D}\,\hat{n}\cdot\hat{n},\quad \boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\left[grad\,\boldsymbol{v} + (grad\,\boldsymbol{v})^T\right],\quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^T$$

$$\ldots\; D_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right)$$

όπου το $\boldsymbol{D}$ είναι ο τανυστής ρυθμού τεντώματος ή παραμόρφωσης (Stretching Tensor ή Strain Rule). Παίζει για τα υγρά και τα ιξωελαστικά στερεά τον ίδιο ρόλο που το $\boldsymbol{e}$ παίζει για τα ελαστικά και ιξωελαστικά στερεά, δηλ. υπεισέρχεται σαν η κύρια μεταβλητή στις αντίστοιχες καταστατικές εξισώσεις. Αποδεικνύονται σχετικά εύκολα οι παρακάτω βασικές σχέσεις

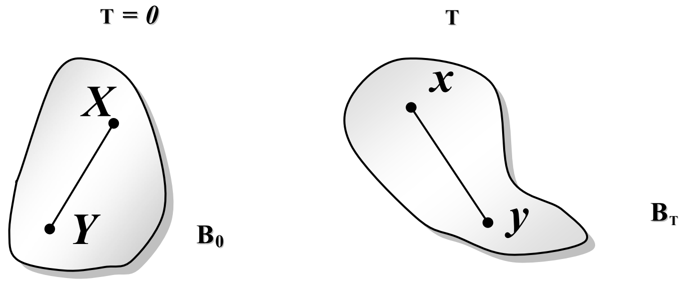
$$\dot{\boldsymbol{C}} = 2\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{F} \quad \text{και} \quad \dot{\boldsymbol{F}} = \nabla\boldsymbol{v} = (grad\,\boldsymbol{v})\boldsymbol{F}$$

Επίσης ορίζεται ο τανυστής περιστροφής (Vorticity ή Spin Tensor) σαν

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{2}\left[grad\,\boldsymbol{v} - (grad\,\boldsymbol{v})^T\right] = -\boldsymbol{W}^T,\quad W_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} - v_{j,i}\right) = -W_{ji}$$

● Ειδικές Περιπτώσεις Κίνησης :

◆ Κίνηση μη-παραμορφωσίμου σώματος : $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}|$, δηλ. η απόσταση μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημείων $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ στη θέση αναφοράς B_0 παραμένει η ίδια σε κάθε άλλη θέση $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ B_t



Θεώρημα Euler : $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X},t) + \boldsymbol{Q}(t)(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0), \quad \boldsymbol{Q} \in Q^+$

… (προκύπτει ότι $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q}$)

Εναλλακτικός τρόπος γραφής :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{X}; \quad \boldsymbol{c}(t) \equiv \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X}^0, t) - \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{X}_0$$

◆ Ισόχωρη Κίνηση : $\int_{p_0} \mathrm{d}V = \int_{p_t} \mathrm{d}\upsilon \ \ \forall p_0$ … διατήρηση όγκου

Θεώρημα : $det\,\boldsymbol{F} = 1$ ή $div\,\boldsymbol{v} = 0$

Απόδειξη : $\int\limits_{p_0} \mathrm{d}V = \int\limits_{p_t} det\,\boldsymbol{F}\mathrm{d}\upsilon$ … δια μετασχηματισμού

$$\boldsymbol{X}(p_0) \to \boldsymbol{x}(p_t), \;\; det\,\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}V}$$ … Ιακωβιανή,

και επειδή $\int\limits_{p_0} \mathrm{d}V = \int\limits_{p_t} \mathrm{d}\upsilon \Rightarrow det\,\boldsymbol{F} = 1$ … Lagrangean

Η αντίστοιχη Eulerian $\to \dot{\overline{det\,\boldsymbol{F}}} = 0$ και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\dot{\overline{det\,\boldsymbol{F}}} = (det\,\boldsymbol{F})tr\left(\boldsymbol{F}^{-1}\dot{\boldsymbol{F}}\right)$$

Απόδειξη : $\dot{\overline{det\,\boldsymbol{F}}} = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\left(\dot{F}_{il}F_{jm}F_{kn} + F_{il}\dot{F}_{jm}F_{kn} + F_{il}F_{jm}\dot{F}_{kn}\right) = \ldots$

$$\ldots = \frac{1}{3}(\cdot) + \frac{1}{3}(\cdot) + \frac{1}{3}(\cdot), \;\; (\cdot) \equiv \left(det\,\boldsymbol{F}\right)\, tr\left(\boldsymbol{F}^{-1}\,\dot{\boldsymbol{F}}\right)$$

και την

$$\dot{\boldsymbol{F}} = (grad\,\boldsymbol{v})\boldsymbol{F} \Rightarrow \dot{\overline{det\,\boldsymbol{F}}} = (det\,\boldsymbol{F})tr\left\{\boldsymbol{F}^{-1}\dot{\boldsymbol{F}}\,grad\,\boldsymbol{v}\right\} = 0 \Rightarrow$$

$$tr\{grad\,\boldsymbol{v}\} = div\,\boldsymbol{v} = 0$$

2. ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΜΑΖΑΣ

$m(p_t) = \int\limits_{p_t} \rho(\boldsymbol{X},t)\mathrm{d}\upsilon\,, \quad \rho(\boldsymbol{X},t) > 0$ ... πυκνότητα (μάζα / μον. όγκου)

$m(p_t) = m(p_0)$ … Αξίωμα Διατήρησης Μάζας

$$\int\limits_{p_t} \rho(\boldsymbol{X},t)\mathrm{d}\upsilon = \int\limits_{p_0} \rho_0 \mathrm{d}V, \quad \rho_0 = \rho(\boldsymbol{X},0) > 0$$

… πυκνότητα αναφοράς (t=0)

$$\int\limits_{p_t} \rho(\boldsymbol{X},t)\mathrm{d}\upsilon \overset{det\,\boldsymbol{F}=\frac{d\upsilon}{dV}}{\longrightarrow} \int\limits_{p_t} \rho(\boldsymbol{X},t)\,det\,\boldsymbol{F}\mathrm{d}V \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \int\limits_{p_t} (\rho\,det\,\boldsymbol{F} - \rho_0)\mathrm{d}V = 0 \;\; \forall p_0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho(\boldsymbol{X},t) = \frac{\rho_0}{det\,\boldsymbol{F}}$$

… Lagrangean

$$\rho\,det\,\boldsymbol{F} = \rho_0 \;\rightarrow\; \dot{\overline{\rho\,det\,\boldsymbol{F}}} = 0 \;\rightarrow\; \dot{\rho}(det\,\boldsymbol{F}) + \rho\left(\dot{\overline{det\,\boldsymbol{F}}}\right) = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \dot{\rho}(det\,\boldsymbol{F}) + \rho(det\,\boldsymbol{F})tr\left(\boldsymbol{F}^{-1}\dot{\boldsymbol{F}}\right) = 0$$

όμως

$$det\,\boldsymbol{F} \neq 0, \quad \dot{\boldsymbol{F}} = (grad\,\boldsymbol{v})\boldsymbol{F}$$

$$\rightarrow \quad tr\left(\boldsymbol{F}^{-1}\dot{\boldsymbol{F}}\right) = tr\left[\boldsymbol{F}^{-1}(grad\,\boldsymbol{v})\boldsymbol{F}\right] =$$

$$= tr\left[\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-1}(grad\,\boldsymbol{v})\right] = tr(grad\,\boldsymbol{v})$$

$$\rightarrow \quad \dot{\rho} + \rho tr(grad\,\boldsymbol{v}) = 0$$

αλλά

$$tr(grad\,\boldsymbol{v}) = div\,\boldsymbol{v}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\rho} + \rho\,\mathrm{div}\,\mathrm{v} = 0 \quad \ldots \text{ Eulerian}$$

Σημείωση :

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v}\,grad\,\rho = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\boldsymbol{v}\,grad\,\rho + \rho\,grad\,\boldsymbol{v}}_{div(\rho\boldsymbol{v})} = 0$$

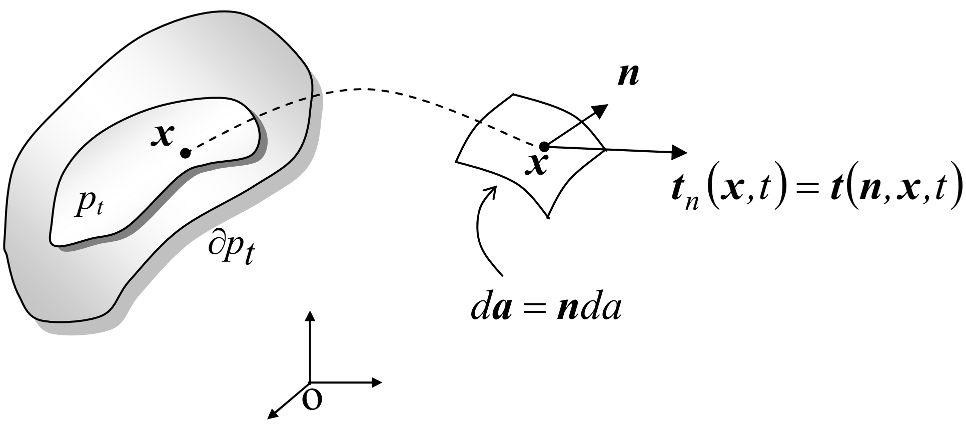
$$\ldots\; div\,(\rho\boldsymbol{v}) = (\rho v_i)_{,i} = \rho_{,i}v_i + \rho v_{i,i} = (grad\,\rho)\cdot\boldsymbol{v} + \rho\,div(\boldsymbol{v}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \quad \ldots \text{ Eulerian, εναλλακτικός τρόπος γραφής}$$

3. ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΟΡΜΗΣ

■ Ορισμοί

- Δύναμη :



$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, t)$

… “σημειακή” δύναμη πεδίου (δύναμη / μονάδα μάζας)

Οφείλεται στον εξωτερικό κόσμο και δίνεται

$\boldsymbol{t}_n = \boldsymbol{t}_n(\boldsymbol{x}, t)$

… “επιφανειακή” δύναμη συνοχής (δύναμη / μονάδα επιφανείας)

Οφείλεται στις ενδομοριακές δυνάμεις και ζητείται να προσδιοριστεί

$d\boldsymbol{a}$ ... στοιχειώδης επιφάνεια γύρω από το $\boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{n}$ ... μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο $d\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{t_n}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x},t)$

... διάνυσμα τάσης στο $\boldsymbol{x}$, εξαρτάται από το $(\boldsymbol{x},t)$ και το διάνυσμα $\boldsymbol{n}$ που χαρακτηρίζει κάθε τυχαία επιφάνεια $d\boldsymbol{a}$ που περνάει από το $\boldsymbol{x}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f}(p_t)=\boldsymbol{f}_C(p_t)+\boldsymbol{f}_B(p_t)=$$

$$=\int_{\partial p_t}\boldsymbol{t_n}(\boldsymbol{x},t)da+\int_{p_t}\rho b(\boldsymbol{x},t)d\upsilon \quad \text{... ολική δύναμη στο } p_t$$

- Ροπή : (Ροπή $\boldsymbol{b}$ ως προς $\boldsymbol{o}$ + ροπή $\boldsymbol{t}_n$ ως προς $\boldsymbol{o}$)

$$\Rightarrow \boldsymbol{m}(p_t;\boldsymbol{o})=\boldsymbol{m}_C(p_t;\boldsymbol{o})+\boldsymbol{m}_B(p_t;\boldsymbol{o})=$$

$$=\int_{\partial p_t}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{o})\times\boldsymbol{t_n}(\boldsymbol{x},t)da+\int_{p_t}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{o})\times\rho b(\boldsymbol{x},t)d\upsilon$$

... ολική ροπή του p_t ως προς $\boldsymbol{o}$

- Ορμή :

$$\ell(p_t)=\int_{p_t}\rho\boldsymbol{v}d\upsilon \quad \text{... ολική (γραμμική) ροπή του } p_t$$

- Στροφορμή :

$\boldsymbol{h}(p_t; \boldsymbol{o})$ ... ροπή της ορμής ή στροφορμή του p_t ως προς $\boldsymbol{o}$

$\boldsymbol{h}(p_t; \boldsymbol{o}) = \int_{p_t} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{o}) \times \rho \boldsymbol{v} d\upsilon$ ... ολική στροφορμή του p_t

Σημείωση : Η σχέση $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t_n}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{n})$ υποδεικνύει ότι το διάνυσμα τάσης εξαρτάται εκτός από το $(\boldsymbol{x}, t)$ και το μοναδιαίο διάνυσμα $\boldsymbol{n}$ κάθετο στη στοιχειώδη επιφάνεια που περνάει από το $\boldsymbol{x}$ και που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό του $\boldsymbol{t}$ (δύναμη / μονάδα επιφανείας). Η σχέση (ή αξίωμα) είναι γνωστή σαν “Αρχή του Cauchy”

■ Αξιώματα Euler

E$_1$: $\boldsymbol{f}(p_t) = \dot{\ell}(p_t)$ … (Δύναμη = μεταβολή ορμής)

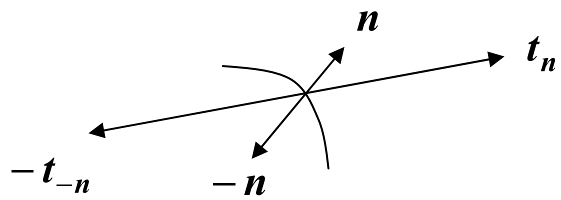
E$_2$: $\boldsymbol{m}(p_t;\boldsymbol{o}) = \dot{h}(p_t;\boldsymbol{o})$ … (Ροπή = μεταβολή στροφορμής)

■ Θεωρήματα Cauchy

Σαν αποτελέσματα των E$_1$ και E$_2$ και των ορισμών για τα $\boldsymbol{f}$, ℓ, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{h}$ παίρνουμε τα παρακάτω βασικά θεωρήματα της Μηχανικής Συνεχούς Μέσου

- 1.Θεώρημα Δράσης-Αντίδρασης (Cauchy's Reciprocal Theorem):

$$\boldsymbol{t_n}(\boldsymbol{x},t) = -\boldsymbol{t_{-n}}(\boldsymbol{x},t)$$



- 2.Θεώρημα Ύπαρξης του Τανυστού Τάσης, της Συμμετρικότητάς του ή Τοπικής Διατήρησης Ορμής και Στροφορμής (Cauchy) :

(i) Υπάρχει ένας τανυστής $\boldsymbol{T}$ (τανυστής τάσης):

(a) $\boldsymbol{t_n} = \boldsymbol{T}^T(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{n}$

(b) $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{T}^T(\boldsymbol{x},t)$

(ii) $div\boldsymbol{T}^T + \rho\boldsymbol{b} = \rho\dot{\boldsymbol{v}}$

- Το (ia) υποδεικνύει ότι το διάνυσμα τάσης $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x},t)$ εξαρτάται γραμμικά από το μοναδιαίο διάνυσμα $\boldsymbol{n}$ που ορίζει τον προσανατολισμό της στοιχειώδους επιφανείας που περνάει από το $\boldsymbol{x}$ κι ο συντελεστής γραμμικότητας $\boldsymbol{T}^T(\boldsymbol{x},t)$ είναι ο τανυστής τάσης (απόδειξη ύπαρξης του τανυστού τάσης). Το (ib) είναι απόρροια του E_2 δηλ. της διατήρησης της στροφορμής κι υποδεικνύει ότι ο τανυστής τάσης είναι συμμετρικός. Τέλος, το (ii) είναι η διαφορική εξίσωση της διατήρησης της (γραμμικής) ορμής

Απόδειξη της (ii) : $E_1 \rightarrow \underbrace{\int_{\partial p_t} \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x},t)da}_{(1)} + \int_{p_t} \rho \boldsymbol{b}\, d\upsilon = \underbrace{\overline{\int_{p_0} \rho \boldsymbol{v}\, d\upsilon}^{\,\cdot}}_{(2)} \quad (*)$

$$(1) = \int_{\partial p_t} \boldsymbol{T}^T(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{n}\, da = \int_{p_t} div\, \boldsymbol{T}^T\, d\upsilon \quad \text{... Θεώρημα Απόκλισης}$$

$$(2) = \overline{\int_{p_0} \rho \boldsymbol{v}(det\, \boldsymbol{f})dV}^{\,\cdot} = \overline{\int_{p_0} \rho_0 \boldsymbol{v}\, dV}^{\,\cdot} = \int_{p_0} \rho_0 \dot{\boldsymbol{v}}\, dV =$$

$$= \int_{p_t} \rho_0 \dot{\boldsymbol{v}}(det\, \boldsymbol{f})d\upsilon = \int_{p_t} \rho \dot{\boldsymbol{v}}\, d\upsilon$$

$$(*) \rightarrow \int_{p_t} \left(div\, \boldsymbol{T}^T + \rho \boldsymbol{b}\right)d\upsilon = \int_{p_t} \rho \dot{\boldsymbol{v}}\, d\upsilon \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{p_t} \left(div\, \boldsymbol{T}^T + \rho \boldsymbol{b} - \rho \dot{\boldsymbol{v}}\right)d\upsilon = 0 \;\; \forall p_t \;\; \Rightarrow \;\; \text{(ii)}$$

- Προκύπτει ότι η “Lagrangean” μορφή διατήρησης (γραμμικής) ορμής είναι

(ii) $Div\,\boldsymbol{S}^T + \rho_0 \boldsymbol{b} = \rho_0 \dot{\boldsymbol{v}}, \quad S = (det\,\boldsymbol{F})\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{T}$

… “Piola-Kirchoff” τανυστής τάσης και $Div \equiv \dfrac{\partial}{\partial X} \ldots \left(Div\,\boldsymbol{S} = \dfrac{\partial S_{ij}}{\partial X_j} \hat{\boldsymbol{\iota}}_i \right)$

(iii) $\boldsymbol{FS} = \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{F}^T \quad \ldots \left(\boldsymbol{T} = \dfrac{1}{det\,\boldsymbol{F}} \boldsymbol{FS} \quad \ldots \text{“Cauchy” τανυστής τάσης} \right)$

Ανακεφαλαιώνοντας, αποδείξαμε ότι

$\dot{\rho} + \rho\, div\,\boldsymbol{v} = 0$ ή $\dfrac{\partial \rho}{\partial \tau} + div(\rho \boldsymbol{v}) = 0$ … Eulerian

$\rho = \dfrac{\rho_0}{det\,\boldsymbol{F}}$ … Lagrangean

$div\,\boldsymbol{T}^T + \rho \boldsymbol{b} = \rho \dot{\boldsymbol{v}}$ … Eulerian

$Div\,\boldsymbol{S}^T + \rho_0 \boldsymbol{b} = \rho_0 \dot{\boldsymbol{v}}$ … Lagrangean

$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T$ … Eulerian

$\boldsymbol{FS} = \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{F}^T$ … Lagrangean

(Γραφή με δείκτες : $\dot{\rho} + \rho\, v_{i,i} = 0, \quad T_{ij,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i, \quad T_{ij} = T_{ji}$)

■ **Καταστατικές ή Συντακτικές Εξισώσεις :**

Οι παραπάνω μερικές διαφορικές εξισώσεις ισχύουν για όλα τα συνεχή (στερεά, υγρά κ.λ.π.) και είναι 7 στον αριθμό. Από τ' άλλο μέρος οι άγνωστοί μας είναι 13, δηλ. ρ, $\boldsymbol{x}_i \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{v}_i \end{Bmatrix}$, T_{ij}. Συνεπώς, όπως και στη μονοδιάστατη μηχανική Σ.Μ. χρειαζόμαστε επιπλέον εξισώσεις για τις ενδομοριακές δυνάμεις $\boldsymbol{T}$, γνωστές σαν καταστατικές ή συντακτικές (constitutive) εξισώσεις. Αύτές είναι οι εξισώσεις που διαφοροποιούν το ένα υλικό από το άλλο

- Γραμμικό Ελαστικό Στερεό (Ισότροπο) :

$$\boldsymbol{T} = \lambda(tr\,\boldsymbol{e})\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{e} \quad \text{ή} \quad T_{ij} = \lambda e_{mm}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

… λ και μ είναι οι σταθερές Lamé.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\mathrm{e_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{u_{i,j}} + \mathrm{u_{j,i}}\right)$ και $\mathrm{v_i} = \dot{\mathrm{u}}_\mathrm{i}$ και αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στην εξίσωση της ορμής έχουμε

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{u} + (\lambda + \mu)grad\; div\,\boldsymbol{u} + \rho_0\boldsymbol{b} = \rho_0\ddot{\boldsymbol{u}}$$

… εξισώσεις Navier για τη μετατόπιση $\boldsymbol{u}$ γραμμικά ελαστικού στερεού.

Η παραπάνω σχέση αποδεικνύεται εύκολα με τη χρήση δεικτών κι είναι η γενίκευση στις τρεις διαστάσεις της εξίσωσης κύματος που είδαμε για το μονοδιάστατο ελαστικό στερεό. Η παραπάνω εξίσωση γράφεται με δείκτες σαν $\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{i,ij} + \rho_0 b_i = \rho_0\ddot{u}_i$ κι η επίλυσή της ουσιαστικά αποτελεί τη "Θεωρία Ελαστικότητας" (Γραμμική)

- Γραμμικό Νευτώνειο Υγρό :

$$\boldsymbol{T} = -p(\rho)\mathbf{1} + \lambda(tr\boldsymbol{D})\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{D} \quad \text{ή} \quad T_{ij} = -p(\rho)\delta_{ij} + \lambda D_{mm}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

… λ και μ σταθερές

$\boldsymbol{T} = -p(\rho)\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{D}$ … ασυμπίεστο $\left(tr\,\boldsymbol{D} = div\,\boldsymbol{v} = 0\right)$, $\mu \equiv$ ιξώδες.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση ορμής κι ενθυμούμενοι ότι

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right) \rightarrow$$

$$-\,grad\;p + (\lambda + \mu)grad\;div\,\boldsymbol{v} + \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{b} = \rho\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial \mathrm{t}} + [grad\;\boldsymbol{v}]\boldsymbol{v}\right)$$

… (εξισώσεις Navier-Stokes) ή

$$-p_{,i} + (\lambda + \mu)v_{j,ji} + \mu v_{i,jj} + \rho b_i = \rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j}v_j\right)$$

και η επίλυσή της ουσιαστικά αποτελεί τη "Θεωρία Ρευστομηχανικής"