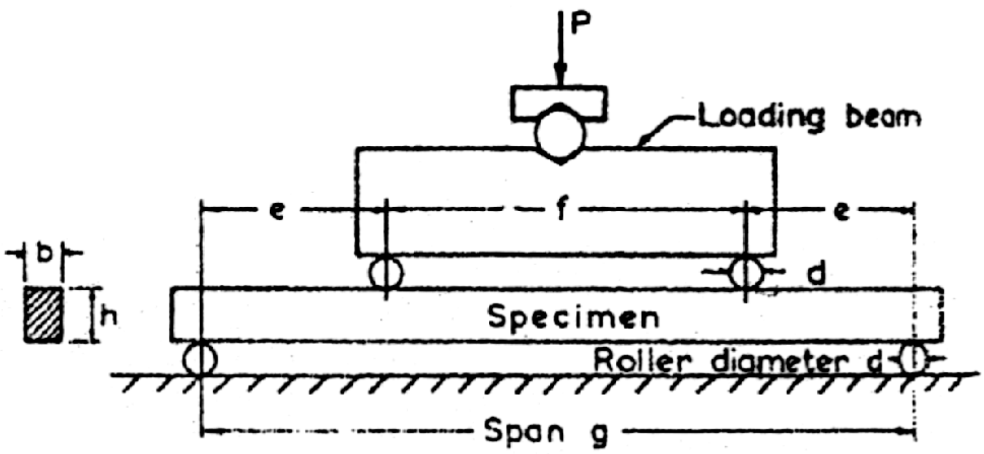
ΠΕΙΡΑΜΑ ΚΑΜΨΗΣ

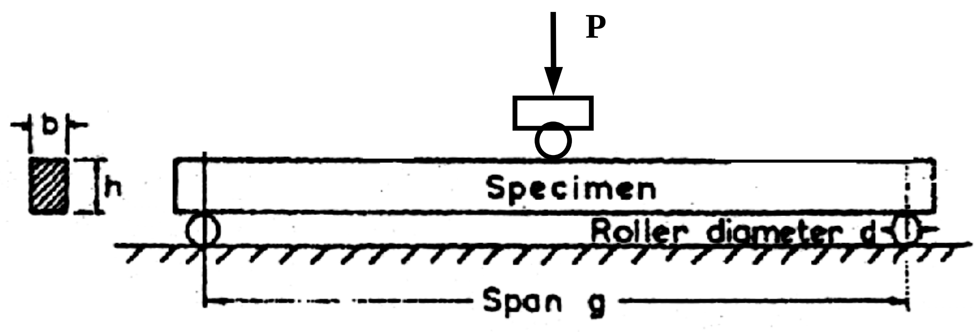
∃ διάφορα είδη πειραμάτων κάμψεως, ανάλογα με την γεωμετρία της φόρτισης. Τα πιο κοινά είναι:

- *Απλή κάμψη (pure bending) ή κάμψη 4 σημείων (Four point bending)*



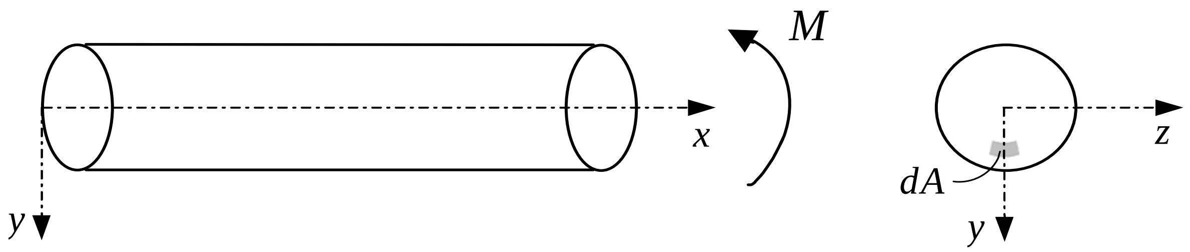
Στο τμήμα f του δοκιμίου (specimen) ασκείται μονό μια χωρικά σταθερή ροπή $M = Pe/2$

- *Κάμψη 3 σημείων (Three point bending)*

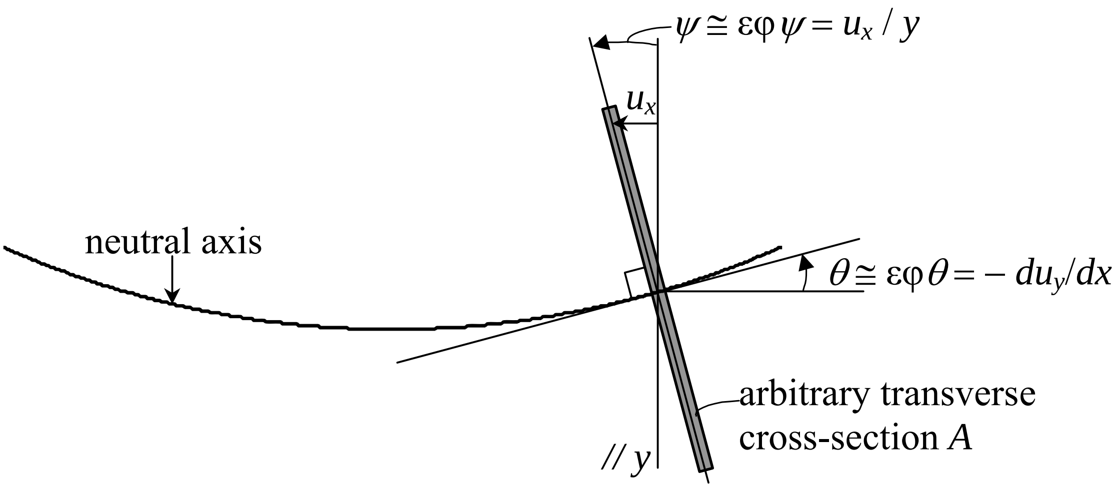


- Σε κάθε εγκάρσια διατομή του τμήματος g του δοκιμίου (specimen) ασκείται μια χωρικά σταθερή διατμητική δύναμη $Q = P/2$

- ***Bending Geometry***



-- *Euler-Bernoulli Bending Theory*



(a) All the points of a normal cross-section have the same $u_y \Rightarrow u_y = u_y(x)$

(b) Plane cross-sections remain plane $\Rightarrow$ each transverse cross-section (x = const.) $\rightarrow$ small rotation of an angle $\psi(x)$, such that $u_x = \psi(x)y$

(c) Cross-sections normal to the neutral axis remain normal

$$\Rightarrow \psi(x) = \theta \cong \varepsilon\varphi\,\theta = -\,du_y/dx$$

- ***Implications on the Strain Field***

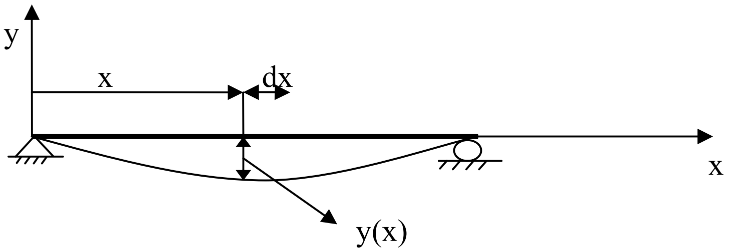
Axial strain: $\varepsilon = \kappa y$ ($\kappa = d\psi/dx$ ... beam curvature)

- ***Basic Relations***

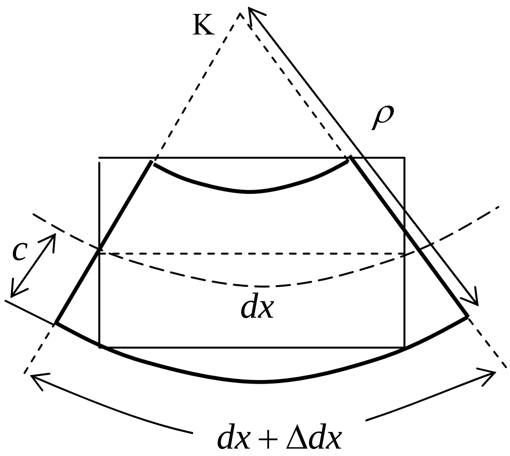
Applied Torque: $M = \int_A \sigma y \, dA = 2 \int_{-d/2}^{d/2} \int_0^{\sqrt{(d^2/4)-z^2}} \sigma y \; dy\, dz$

ΚΑΜΨΗ ΔΟΚΩΝ – ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

- Σαν ελαστική γραμμή δοκού ορίζεται ο παραμορφωμένος ουδέτερος άξονας της δοκού ή αλλιώς η γραμμή των βυθίσεων της δοκού



- Απειροστό τμήμα της δοκού μεταξύ x και dx



ρ ακτίνα καμπυλότητας

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}} \simeq y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\left.\begin{aligned} dx &= \rho d\theta \\ dx + \Delta dx &= (\rho + c)d\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dx+\Delta dx}{dx} = \frac{\rho + c}{\rho}$$

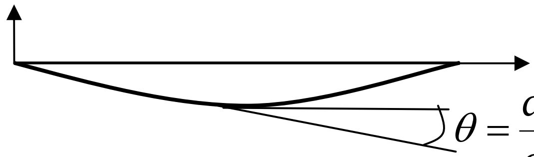
$$\Rightarrow \frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon_c = \frac{c}{\rho} \Rightarrow \frac{\sigma_c}{E} = \frac{1}{\rho}c \Rightarrow \frac{Mc}{EI_z} = \frac{d^2y}{dx^2}c$$

$$\Rightarrow \therefore \frac{M}{EI_z} = \frac{d^2y}{dx^2}$$ Εξισωση ελαστικης γραμμης

- $M > 0 \rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} > 0 \Rightarrow$ Η ελαστική γραμμή στρέφει τα κοίλα άνω.
- $M < 0 \rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} < 0 \Rightarrow$ Η ελαστική γραμμή στρέφει τα κοίλα κάτω.

ΚΑΜΨΗ ΔΟΚΩΝ – ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

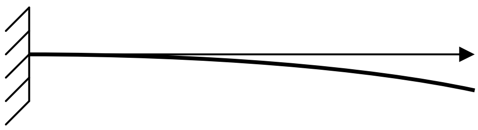
- Κοίλα άνω:  Κοίλα κάτω: 

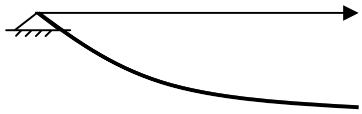
- Κλίση ελαστικής γραμμής:  $\theta = \dfrac{dy}{dx}$

- Υπολογισμός ελαστικής γραμμής

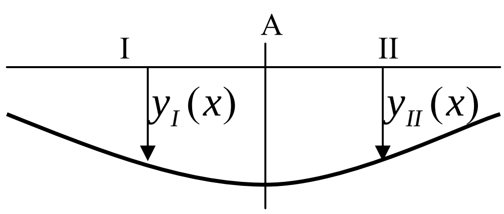
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI_z} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \int \frac{M}{EI_z} dx + c_1 \Rightarrow y(x) = \int \left[\int \frac{M}{EI_z} dx \right] dx + c_1 x + c_2$$

Οι c_1 και c_2 προσδιορίζονται από οριακές συνθήκες:

- Πάκτωση:  $y(0) = \dfrac{dy}{dx}(0) = 0$

- Άρθρωση ή κύλιση:  $y(0) = 0$

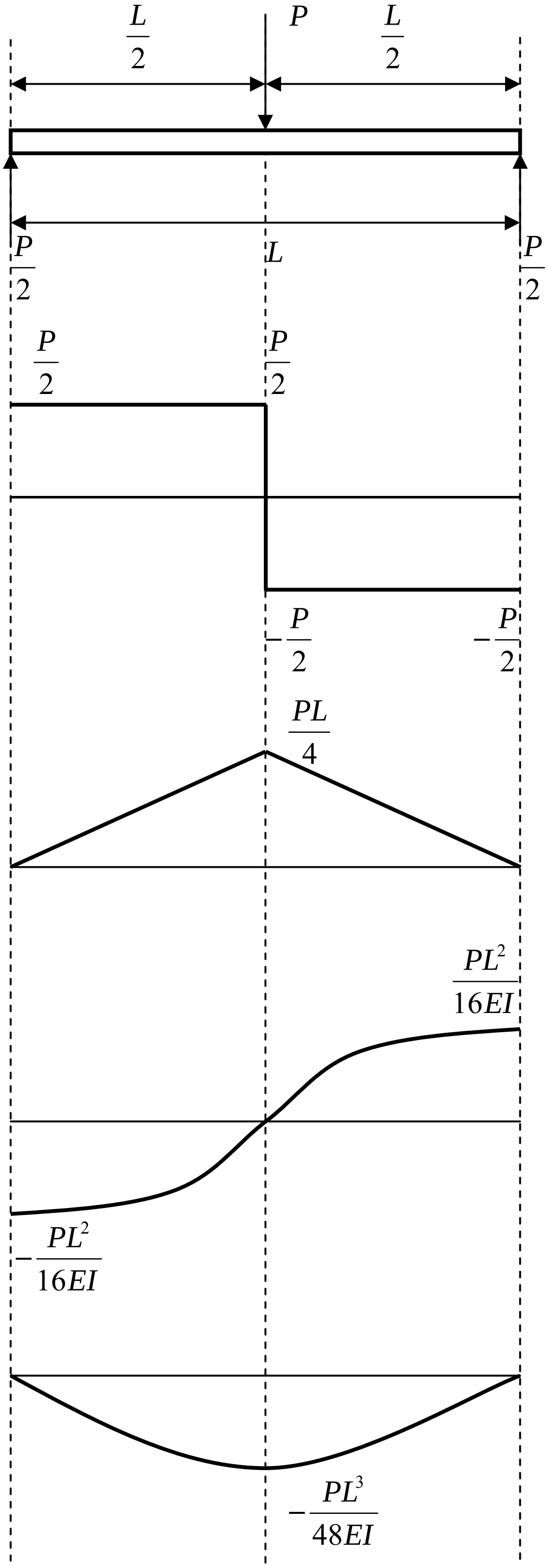
- Αν δυο τμήματα της δοκού έχουν διαφορετικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά ή φυσικές ιδιότητες, τότε η βύθιση υπολογίζεται για τα επιμέρους τμήματα και οι πρόσθετες σταθερές ολοκλήρωσης προσδιορίζονται από τις συνθήκες συνέχειας στα κοινά σημεία.



Πρέπει: $y_I(A) = y_{II}(A)$ και $\dfrac{dy_I}{dx}(A) = \dfrac{dy_{II}}{dx}(A)$

ΚΑΜΨΗ ΔΟΚΩΝ – ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

Παράδειγμα 1:



P

EI σταθερό

- Φορτίο: $-w \equiv \frac{dV}{dx} = EI\,\frac{d^4y}{dx^4}$
- Διάτμηση: $V = \frac{DM}{dx} = EI\,\frac{d^3y}{dx^3}$
- Ροπή: $M = EI\,\frac{d^2y}{dx^2}$
- Κλίση: $\theta = \frac{dy}{dx}$
- Παραμόρφωση (Βύθιση): y

ΚΑΜΨΗ ΔΟΚΩΝ – ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

- Υπολογισμός βύθισης y

$$M = \frac{P}{2}x \Rightarrow EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{2}x \Rightarrow$$

$$\because EI\frac{dy}{dx} = \frac{P}{4}x^2 + c_1 \Rightarrow$$

$$\therefore EIy = \frac{P}{12}x^3 + c_1x + c_2$$

Συνοριακές συνθήκες: $\begin{cases} y(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \\ \frac{dy}{dx}(\frac{L}{2}) = 0 \rightarrow c_1 = -\frac{PL^2}{16} \end{cases}$

Τελικά:

$$\because\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left(\frac{P}{4}x^2 - \frac{PL^2}{16}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 0, \frac{dy}{dx}(0) = -\frac{PL^2}{16EI} \\ x = \frac{L}{2}, \frac{dy}{dx}(\frac{L}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$\therefore\Rightarrow y = \frac{1}{EI}\left(\frac{P}{12}x^3 - \frac{PL^2}{16}x\right) \rightarrow \begin{cases} x = 0, y(0) = 0 \\ x = \frac{L}{2}, y(\frac{L}{2}) = -\frac{PL^3}{48EI} \end{cases}$$