ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ.

ΘΕΜΑ 1. Υλικό σημείο μάζας *m*=1 κινείται στον άξονα $x'Ox$ υπό την επίδραση της δύναμης $F = x^3 - 4x$

α) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας και η ευστάθειά τους

β) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα των φάσεων

γ) Αν το υλικό σημείο βρίσκεται σε θέση *x*=0 με ταχύτητα $\vec{\upsilon} = \sqrt{8}\mathbf{i}$ περιγράψτε (ποιοτικά) την κίνησή του σχεδιάζοντας (πρόχειρα) την γραφική παράσταση του *x*=*x*(*t*)

Λύση

Το δυναμικό που αντιστοιχεί στη δεδομένη δύναμη είναι το $V = -\int F dx = -\dfrac{x^4}{4} + 2x^2$

α) Τα σημεία ισορροπίας (SI) βρίσκονται από τον μηδενισμό της δύναμης, δηλαδή

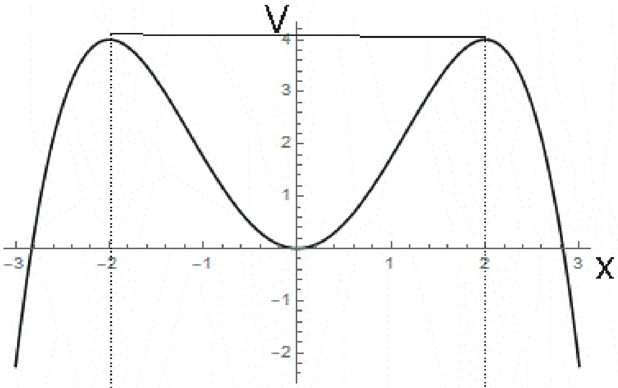
$$F = x^3 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x^2 - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,\, x = \pm 2$$

Τα σημεία ισορροπίας αντιστοιχούν στα ακρότατα του δυναμικού ο τύπος των οποίων προασδιορίζεται από την 2η παράγωγο του δυναμικού

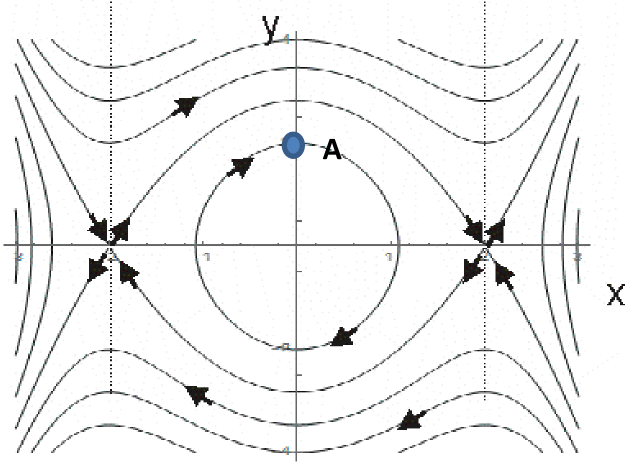
$\dfrac{d^2V}{dx^2} = -\dfrac{dF}{dx} = -3x^2 + 4$, άρα

$\left.\dfrac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=0} = 4 > 0$ ελάχιστο, ευσταθές ΣΙ

$\left.\dfrac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=\pm 2} = -8 < 0$ μέγιστα, ασταθή ΣΙ



β)



γ) Για τις δεδομένες αρχικές συνθήκες αντιστοιχεί ενέργεια Ε=4, δηλαδή η ενέργεια της διαχωριστικής καμπύλης. Άρα το υλικό σημείο θα φτάσει από το *x*=0 στο δεξιό ασταθές σημείο ισορροπίας *x*=2 ασυμπτωτικά ($t \to \infty$)

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ, Σεπτέμβριος 2022

ΘΕΜΑ 2. α) Ένα σύστημα *N* υλικών σημείων κινείται στο χώρο χωρίς δεσμούς υπό την επίδραση του δυναμικού $V = V(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_N, y_N, z_N)$. Δείξτε ότι οι εξισώσεις του Lagrange είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις του Νεύτωνα
β) Δείξτε ότι αν η συνάρτηση του Hamilton, *H*, ενός συστήματος *n* βαθμών ελευθερίας δεν εξαρτάται από το χρόνο τότε αποτελεί ολοκλήρωμα της κίνησης.

Λύση
α) Το σύστημα έχει 3*N* βαθμούς ελευθερίας (επιλέγουμε ως γενικευμένες συντεταγμένες τις καρτεσιανές). Στα σημεία δρουν οι δυνάμεις

$$\mathbf{F}_i = \nabla_i V \quad \Rightarrow \quad F_{i,x} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad F_{i,y} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad F_{i,z} = -\frac{\partial V}{\partial z_i}$$

Η συνάρτηση Lagrange θα είναι $L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + V(x_1, y_1, z_1, ..., x_N, y_N, z_N)$ και οι εξισώσεις κίνησης γράφονται (για i=1…N)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x}_i = F_{i,x}$$

και αντίστοιχα για τις υπόλοιπες συνιστώσες, $m\ddot{y}_i = F_{i,y}, \quad m\ddot{z}_i = F_{i,z}$

β) Είναι $H = H(q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n)$ και $\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right)$. Αν αντικαταστήσουμε με τις κανονικές εξισώσεις του Hamilton, $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ βρίσκουμε $\frac{dH}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad H = \text{σταθ.}$

ΘΕΜΑ 3. α) Να αποδειχθεί ότι αν το δυναμικό είναι συνάρτηση μόνο της απόστασης του υλικού σημείου από ένα σταθερό σημείο Ο, οι δυνάμεις είναι κεντρικές με κέντρο το Ο.
β) Να βρεθεί η κεντρική δύναμη $F = F(r)$ η οποία δίνει επίπεδες τροχιές της μορφής $r = a\theta^2$, όπου (*r,ϑ*) πολικές συντεταγμένες ως προς το κέντρο των δυνάμεων και *a* είναι μια θετική σταθερά.
γ) Βρείτε αν κυκλικές τροχιές του παραπάνω πεδίου δυνάμεων είναι ευσταθείς ή ασταθείς.

Λύση
α) Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες *r*, *ϑ*, *φ*, έχουμε *V*=V(*r*) και

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi = -\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{e}_r = F(r)\mathbf{e}_r$$

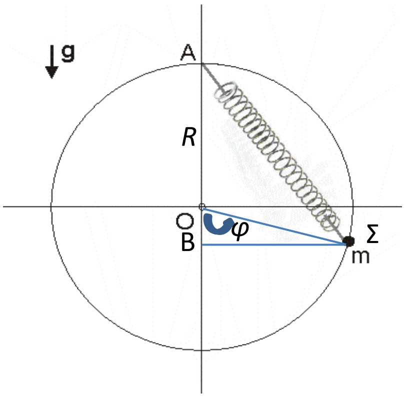
β) Για ένα πεδίο κεντρικών δυνάμεων η διαφορική εξίσωση της τροχιάς σε πολικές συντεταγμένες είναι η (από τυπολόγιο) $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mr^2}{L^2}F$, όπου $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a\theta^2}$. Αντικαθιστώντας και λύνοντας ως προς *F* βρίσκουμε ότι $F = -\frac{L^2}{m}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{6a}{r^4}\right)$. Αφού *L, a* σταθερές είναι *F=F(r).*

γ) Οι κυκλικές τροχιές είναι ευσταθείς αν $\frac{dF/dr}{F}+\frac{3}{r}>0$ (δες τυπολόγιο).

Βρίσκουμε αντικαθιστώντας την *F* του προηγούμενου ερωτήματος

$\frac{dF/dr}{F}+\frac{3}{r}=-\frac{6a^2}{6a^2r+r^2}<0 \quad \forall r$, άρα οι κυκλικές τροχιές είναι ασταθείς

ΘΕΜΑ 3. Υλικό σημείο μάζας *m* μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε κατακόρυφη κυκλική περιφέρεια ακτίνας R. Το σημείο συνδέεται με το ανώτατο σημείο της περιφέρειας Α με ελατήριο σταθεράς *k* και φυσικού μήκους ίσου με την ακτίνα της περιφέρειας (l_0=*R*). α) Να βρεθεί η συνάρτηση του Lagrange β) τα σημεία ισορροπίας του



α)

Το σύστημα αποτελείται από ένα σημείο στο επίπεδο και έχει έναν δεσμό (κινείται πάνω στον κύκλο) και χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες (*r,φ*) ο δεσμός γράφεται *r*=*R*=σταθ. Άρα έχουμε 1 βαθμό ελευθερίας. και ως γενικευμένη συντεταγμένη επιλέγουμε την γωνία *φ*.

Η κινητική ενέργεια είναι

$T=\frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 \quad (1)$

Η δυναμική ενέργεια θα είναι $V=mgz+\frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2$ (2)

Είναι $z=-OB=-R\cos\varphi$

Η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι η $\Delta\ell=\mathrm{A\Sigma}-\ell_0=\mathrm{A\Sigma}-R$, όπου

$\mathrm{A\Sigma}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{B\Sigma}^2=(R^2+R^2\cos^2\varphi)+R^2\sin^2\varphi \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A\Sigma}=R\sqrt{2(1+\cos\varphi)}$ και

$\Delta\ell=R\left(\sqrt{2+2\cos\varphi}-1\right)$, οπότε

$(2) \quad \Rightarrow \quad V=-mgR\cos\varphi+\frac{1}{2}kR^2\left(\sqrt{2+2\cos\varphi}-1\right)^2 \quad (3)$

Από την (1) και (3) έχουμε την συνάρτηση Lagrange *L*=*T*-*V*.

β) Από την εξίσωση του Lagrange βρίσκουμε $mR^2\ddot{\varphi}=-\frac{\partial V}{\partial\varphi}=-R\sin\varphi\left(mg+kR^2\frac{1-\sqrt{2(1+\cos\varphi)}}{\sqrt{2(1+\cos\varphi)}}\right)$.

Για τα σημεία ισορροπίας πρέπει το 2ο μέλος να είναι μηδέν, άρα

$\sin\varphi=0 \quad \Rightarrow \quad \varphi=0 \quad \eta' \quad \varphi=\pi$ (απορρίπτεται αφού το ελατήριο αποκτά μηδενικό μήκος!)

ή

$$mg+kR^2\frac{1-\sqrt{2(1+\cos\varphi)}}{\sqrt{2(1+\cos\varphi)}}=0 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi=\frac{k^2R^2}{2(kR-mg)^2}-1$$

Αν $\left|\dfrac{k^2R^2}{2(kR-mg)^2}-1\right|>1$ δεν υπάρχει άλλο σημείο ισορροπίας, αλλιώς έχουμε

$\varphi=\cos^{-1}\left(\dfrac{k^2R^2}{2(kR-mg)^2}-1\right)$ (δύο λύσεις για τη γωνία, συμμετρικές γύρω από το φ=0).