Ασκήσεις

4.1 Υλικό σημείο κινείται επί ευθείας υπό την επίδραση δυνάμεως που προέρχεται από το δυναμικό $V(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}$, $a, b > 0$. Να μελετηθεί η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας, (α) με την ποιοτική μέθοδο, (β) με τη μέθοδο των διαταραχών.

4.2 Να μελετηθεί η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας στην κίνηση υλικού σημείου σε ευθεία, με δυναμικό

$$V(r) = V_o\left(\frac{r}{a} - \frac{a}{r}\right)e^{-r/a},$$

όπου V_o, $a > 0$.

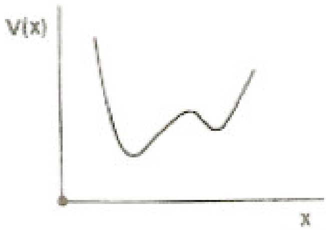
4.3 Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας στην ευθύγραμμη κίνηση υλικού σημείου υπό την επίδραση της δύναμης

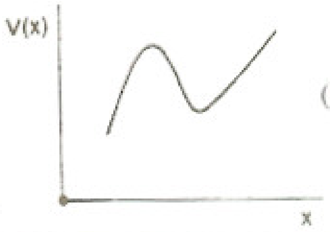
$$F(x) = -\frac{k}{x^2} + \frac{L^2}{x^3}, \quad x > 0$$

και να μελετηθεί η ευστάθειά τους, για $k > 0$.

4.4 Να βρεθούν τα διαγράμματα φάσεως για τα παρακάτω δυναμικά.

(α)





(β)

4.5 Από τα Σχ. 4.4 και 4.7 φαίνεται ότι το εμβαδόν S που περικλείεται από μια κλειστή καμπύλη φάσεως που αντιστοιχεί σε ενέργεια E, εξαρτάται από την ενέργεια, $S = S(E)$. Να αποδειχθεί ότι η περίοδος της μη γραμμικής ταλαντώσεως είναι ίση προς $T = (dS/dE)\, m$.

Ασκήσεις

6.1 Δίνεται πεδίο κεντρικών δυνάμεων με κέντρο την αρχή O συστήματος $Oxyz$. Αν οι αρχικές συνθήκες ενός υλικού σημείου είναι οι $\mathbf{r}_o = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_o = 5\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ να βρεθεί το επίπεδο της κινήσεως. Αν $m=1$ είναι η μάζα του υλικού σημείου, να βρεθεί η σταθερά L της στροφορμής.

6.2 Δίνεται το πεδίο κεντρικών δυνάμεων με δυναμικό $V(r)$. Να βρεθούν οι τιμές της ενέργειας και της στροφορμής για τις παρακάτω αρχικές συνθήκες στο επίπεδο της κινήσεως:

(α) $r=r_o$, $v=v_o$, γωνία $\mathbf{r}_o$ και $\mathbf{v}_o$ ίση προς φ.

(β) $x=x_o$, $y=y_o$, $\dot{x}=v_x$, $\dot{y}=v_y$, οπού x,y καρτεσιανές συντεταγμένες.

(γ) $r=r_o$, $\theta=\theta_o$, $\dot{r}=v_r$, $\dot{\theta}=\theta_o$ όπου r, θ πολικές συντεταγμένες.

(δ) το υλικό σημείο βρίσκεται σε πρακτικά άπειρη απόσταση και έχει ταχύτητα v_o, και η διεύθυνση της ταχύτητας απέχει από το κέντρο των δυνάμεων απόσταση d.

6.3 Να αποδειχθεί ότι αν το δυναμικό είναι συνάρτηση της αποστάσεως μόνο από το σημείο O, οι δυνάμεις είναι κεντρικές με κέντρο το O.

6.4 Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση της κινήσεως σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων $F(r)$ παίρνει τη μορφή

$$\frac{d^2r}{d\theta^2}-\frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r=\frac{mr^4F(r)}{L^2} \quad .$$

6.5 Να αποδειχθεί ότι αν η τροχιά υλικού σημείου σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων είναι ελλειπτική με μια εστία στο κέντρο των δυνάμεων, οι κεντρικές δυνάμεις είναι αντιστρόφως ανάλογοι του τετραγώνου της αποστάσεως.(Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται *αντίστροφο πρόβλημα*, διότι δίδεται η τροχιά και ζητούμε το πεδίο δυνάμεων)

6.6 Να αποδειχθεί ότι αν η τροχιά υλικού σημείου σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων είναι η $r=a\left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}\text{συν}\theta\right)$, όπου r, θ πολικές συντεταγμένες, οι κεντρικές δυνάμεις είναι ανάλογες προς $\left(\frac{1}{r^4}+\frac{a}{3r^5}\right)$.

6.7 Να βρεθεί πεδίο κεντρικών δυνάμεων στο οποίο να είναι δυνατή η ύπαρξη τροχιών της μορφής $r=k\theta^2$. Επίσης της μορφής $r=ke^{a\theta}$, όπου k, a σταθερές και $k>0$.

6.8 Υλικό σημείο κινείται στο πεδίο κεντρικών δυνάμεων $F(r)=-k/r^n$ όπου $k>0$. Αν η τροχιά του υλικού σημείου είναι κυκλική και διέρχεται από το κέντρο των δυνάμεων, να αποδειχθεί ότι $n=5$.

6.9 Υλικό σημείο κινείται στο πεδίο κεντρικών δυνάμεων $\mathbf{F}=-k\mathbf{r}$ όπου $k>0$. Για $t=0$ βρίσκεται σε απόσταση a από το κέντρο των δυνάμεων και έχει ταχύτητα v_o κάθετη προς την ακτίνα. Να αποδειχθεί ότι η τροχιά είναι έλλειψη με κέντρο το κέντρο των δυνάμεων.

6.10 Υλικό σημείο μάζας m κινείται στο πεδίο κεντρικών δυνάμεων $V(r)=\frac{1}{2}kr^2$ όπου $k>0$. Για ποια τιμή της ενέργειας και της στροφορμής θα είναι η τροχιά κυκλική με ακτίνα a και ποια η συχνότητά της;

6.11 Υλικό σημείο μάζας m κινείται στο πεδίο κεντρικών δυνάμεων $V(r)=\frac{1}{2}kr^2$, όπου $k>0$. Να βρεθούν τα όρια της τροχιάς για διάφορες τιμές της ενέργειας και της στροφορμής. Να βρεθεί επίσης η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που αντιστοιχεί σε μια ορισμένη τιμή L_o της στροφορμής και η συχνότητα της κυκλικής κινήσεως. Να μελετηθεί η ευστάθεια της κυκλικής τροχιάς.

6.12 Δίνεται το πεδίο κεντρικών δυνάμεων $F(r)=-k/r^3$, όπου $k>0$.

(α) Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν τα εξής είδη τροχιών:

$$\frac{1}{r} = A\sigma\upsilon\nu[\beta(\theta-\theta_o)], \qquad \frac{1}{r} = A\cosh[\beta(\theta-\theta_o)],$$

$$\frac{1}{r} = A\sinh[\beta(\theta-\theta_o)], \qquad \frac{1}{r} = A(\theta-\theta_o).$$

Ποια είναι η μορφή των τροχιών αυτών και σε ποιες αρχικές συνθήκες αντιστοιχούν;

(β) Να βρεθούν τα όρια των τροχιών και να συγκριθούν τα συμπεράσματα με τις παραπάνω λύσεις.

6.13 Να βρεθεί η τροχιά στο πεδίο κεντρικών δυνάμεων

$$F(r) = -\left(kr + \frac{k'}{r^2}\right), \qquad \acute{o}\pi o\upsilon \quad k, k' > 0.$$

6.14 Υλικό σημείο βρίσκεται στο πεδίο ελκτικών κεντρικών δυνάμεων $-k/r^n$ $(n > 3)$ σε απόσταση a από το κέντρο των δυνάμεων O και εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $\mathbf{v}_o$ η οποία σχηματίζει γωνία φ με την ακτίνα. Το μέτρο της ταχύτητας v_o είναι τόσο ώστε αν η εκτόξευση γινόταν κατά τη διεύθυνση της ακτίνας, το υλικό σημείο θα απομακρύνονταν σε άπειρη απόσταση (ελάχιστη τιμή του v_o). Να βρεθούν τα όρια της τροχιάς για τυχούσα γωνία φ.

6.15 (α) Να βρεθούν τα όρια της κινήσεως στο πεδίο κεντρικών δυνάμεων $F(r) = -\dfrac{k}{r^2} - \dfrac{k'}{r^3}$, όπου $k > 0$ και $k' > 0$ ή $k' < 0$.

(β) Να αποδειχθεί ότι αν $L^2 > mk'$, η τροχιά είναι η $r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\sigma\upsilon\nu(\beta\theta)}$, οπού a, β, e σταθερές. Τι είδους τροχιά παριστάνει η εξίσωση αυτή και ποια είναι η γεωμετρική σημασία των a, e και β;

6.16 Σωματίδιο μάζας m κινείται στο πεδίο του Yukawa $V(r) = -\dfrac{V_o e^{-r/\beta}}{r/\beta}$ όπου V_o, β σταθερές. (α) Να βρεθούν τα όρια της τροχιάς για διάφορες αρχικές συνθήκες. Είναι δυνατό να έχουμε πεπερασμένη κίνηση για θετική ενέργεια; (β) Να βρεθεί η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς για δοθείσα τιμή της στροφορμής.

6.17 Υλικό σημείο κινείται σε κυκλική τροχιά σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων, με κέντρο ένα σημείο μέσα στην περιφέρεια του κύκλου διαφορετικό του κέντρου του κύκλου. Να αποδειχθεί ότι η περίοδος της κινήσεως είναι ίση προς $\pi a\,(v_1+v_2)/v_1 v_2$, όπου v_1, v_2 η μέγιστη και ελάχιστη ταχύτητα, αντίστοιχα και a η ακτίνα του κύκλου.

6.18 Υλικό σημείο κινείται σε κυκλική τροχιά στο πεδίο κεντρικών ελκτικών δυνάμεων $F(r) = -e^{-r/a}/r^2$. Να αποδειχθεί ότι η τροχιά είναι ευσταθής ή ασταθής καθ' όσον η ακτίνα του κύκλου είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη του a, αντίστοιχα.

6.19 Να μελετηθεί η ευστάθεια των κυκλικών τροχιών στο πεδίο των κεντρικών δυνάμεων δυναμικού $V(r) = \dfrac{-1}{r} e^{-r/a}$ όπου k, a σταθερές.

6.20 Να βρεθεί η συχνότητα των μικρών ακτινικών ταλαντώσεων κοντά σε κυκλική τροχιά, σε πεδίο ελκτικών κεντρικών δυνάμεων αντιστρόφως αναλόγων του τετραγώνου της αποστάσεως και να αποδειχθεί ότι είναι ίση προς τη συχνότητα της κυκλικής τροχιάς.

6.21 Υλικό σημείο κινείται στο πεδίο κεντρικών δυνάμεων με δυναμικό $V(r)=kr^4$, όπου $k > 0$. Για ποια τιμή της ενέργειας και της στροφορμής η τροχιά είναι κυκλική ακτίνας a; Αν το υλικό σημείο διαταραχθεί από την κυκλική τροχιά του, να βρεθεί η περίοδος των μικρών ακτινικών ταλαντώσεων γύρω από την τιμή $r=a$. Να σχεδιασθεί η διαταραγμένη τροχιά.

6.22 Να μελετηθεί η ευστάθεια των κυκλικών τροχιών στο πεδίο των κεντρικών ελκτικών δυνάμεων $F(r)$ με τη θεωρία των διαταραχών στη διαφορική εξίσωση (6.21) και να επαληθευθεί ότι ισχύουν οι συνθήκες (6.46) και (6.47).

6.23 Υλικό σημείο μάζας m βρίσκεται σε απόσταση a από το κέντρο O του πεδίου των κεντρικών δυνάμεων $F(r)=-k/r^2$, όπου $k>0$, και εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα v_o κάθετα προς την ακτίνα. Για ποια τιμή του v_o η τροχιά είναι κυκλική και για ποια παραβολική, και ποια η σχέση μεταξύ τους; Να σχεδιάσετε τις τροχιές για διάφορες τιμές της αρχικής ταχύτητας v_o από 0 μέχρι ∞.

6.24 Υλικό σημείο κινείται σε ελλειπτική τροχιά στο πεδίο $F(r)= - k/r^2$, $k > 0$. Να αποδειχθεί ότι η ταχύτητα στο περίκεντρο είναι μεγαλύτερη της ταχύτητας της κυκλικής τροχιάς με ακτίνα την απόσταση του περικέντρου και η ταχύτητα στο απόκεντρο μικρότερη της ταχύτητας της κυκλικής τροχιάς με ακτίνα την απόσταση του απόκεντρου.

6.25 Υλικό σημείο μάζας m εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα v_o κάθετα προς την ακτίνα στο πεδίο κεντρικών δυνάμεων $F(r)= - k/r^2$, $k > 0$. Αν η ενέργεια είναι αρνητική να αποδειχθεί ότι το αρχικό σημείο εκτοξεύσεως είναι περίκεντρο ή απόκεντρο. Πως βρίσκεται ποιο από τα δύο σημεία είναι, για δοθείσα ταχύτητα v_o;

6.26 Υλικό σημείο κινείται σε κυκλική τροχιά στο πεδίο των κεντρικών δυνάμεων $F(r)= - k/r^2$, $k > 0$. Αν απότομα η σταθερά k ελαττωθεί στο μισό, να δειχθεί ότι η τροχιά γίνεται παραβολική.

6.27 Υλικό σημείο κινείται σε ελλειπτική τροχιά στο πεδίο κεντρικών δυνάμεων $F(r)= - k/r^2$, $k > 0$. Σε ποια σημεία της τροχιάς έχουμε τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της γραμμικής ταχύτητας και σε ποια της γωνιακής ταχύτητας;

6.28 Υλικό σημείο μάζας m κινείται σε ελλειπτική τροχιά με μεγάλο ημιάξονα a, στο πεδίο των κεντρικών δυνάμεων $F(r)= - mk/r^2$, $k>0$. Να αποδειχθεί ότι η μέση τιμή του $1/r$ ως προς το χρόνο για μια πλήρη περιστροφή είναι ίση προς $1/a$ και η μέση τιμή του τετραγώνου της ταχύτητας ίση προς k/a (η μέση τιμή συναρτήσεως $f(t)$ στο χρονικό διάστημα T ορίζεται ως ίση προς

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt \, .$$

6.29 Τεχνητός δορυφόρος εκτοξεύεται στο επίπεδο του ισημερινού της Γης σε κυκλική τροχιά σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης. Πόσο πρέπει να είναι το ύψος h ώστε ο δορυφόρος να είναι σε στατική τροχιά; Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας για την κίνηση αυτή; Ποια είναι η σχετική ταχύτητα του δορυφόρου ως προς την επιφάνεια της Γης αν το ύψος είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο του ύψους h που αντιστοιχεί σε στατική τροχιά;

6.30 Τεχνητός δορυφόρος τοποθετείται σε τροχιά γύρω από τη Γη εκτοξευόμενος από ύψος *500 km* από την επιφάνεια της Γης με ταχύτητα *8km/s* παράλληλα προς την επιφάνεια. Να βρεθούν (α) η εκκεντρότητα της τροχιάς, (β) Το μέγιστο και το ελάχιστο ύψος του δορυφόρου από την επιφάνεια της Γης (απόγειο και περίγειο, αντίστοιχα) (γ) η περίοδος της κινήσεως, (δ) Το αρχικό σημείο εκτοξεύσεως είναι περίγειο ή απόγειο και γιατί;

6.31 Πύραυλος εκτοξεύεται από σημείο του ισημερινού, στο επίπεδο του ισημερινού, για να πλήξη το εκ διαμέτρου αντίθετο σημείο της επιφάνειας της Γης. Να βρεθεί η ταχύτητα και η γωνία βολής ώστε το μέγιστο ύψος από την επιφάνεια της Γης να είναι *80km* (Να ληφθεί υπόψη η περιστροφή της Γης).

6.32 Πύραυλος εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης με αρχική ταχύτητα υ_o. Να αποδειχθεί ότι αν $\upsilon_o \geq 11.2 km/s$, ο πύραυλος θα απομακρυνθεί σε άπειρη απόσταση. Ποια η ταχύτητα του στο άπειρο αν $\upsilon_o = 11.2$ *km/s* και αν $\upsilon_o > 11.2$ *km/s;*

6.33 Να βρεθεί η ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνεια της Σελήνης. Δίνεται ότι η μάζα της Σελήνης είναι ίση προς 0.0123 μάζες της Γης και η ακτίνα της είναι ίση προς *0.273* ακτίνες Γης και ότι η ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνεια της Γης είναι *11.2 km/s*.

6.34 Κομήτης κινείται σε ελλειπτική τροχιά ως προς τον Ήλιο και η ταχύτητά του αυξάνει απότομα κατά $\Delta\upsilon$ τη στιγμή που βρίσκεται στο αφήλιο (μέγιστη απόσταση). Να αποδειχθεί ότι η εκκεντρότητα της τροχιάς μεταβάλλεται κατά $\Delta e = -2\Delta\upsilon\sqrt{p/\mu}$, όπου p η παράμετρος της ελλειπτικής τροχιάς και $\mu = GM_H$.

6.35 Υλικό σημείο μάζας $m=1$ βρίσκεται σε πρακτικά άπειρη απόσταση και κινείται σε ευθεία γραμμή η οποία απέχει απόσταση $\sqrt{2}\,b$ από το ελκτικό κέντρο O πεδίου κεντρικών δυνάμεων $F(r)= - k/r^3$ $k>0$. Αν η στροφορμή είναι ίση προς $\sqrt{k}/b$ να αποδειχθεί ότι η τροχιά έχει εξίσωση $r=b\coth(\theta/\sqrt{2})$.

6.36 Θεωρήσατε το σύνολο των τροχιών σε πεδίο ελκτικών κεντρικών δυνάμεων με την ίδια τιμή της ενέργειας. Να αποδειχθεί ότι αν υπάρχει μία ευσταθής κυκλική τροχιά, η στροφορμή της είναι μέγιστη ως προς τη στροφορμή των *άλλων* τροχιών του συνόλου.

Ασκήσεις

7.1 Να βρεθούν τα κέντρα μάζας των εξής στερεών σωμάτων:
(α) ομογενής ορθός κώνος με ακτίνα βάσεως a και ύψος h.
(β) ομογενές ημικύκλιο ακτίνας a.
(γ) ράβδος μήκους l με πυκνότητα ανάλογη της αποστάσεως από το ένα άκρο της.

7.2 Δίνεται σύστημα N υλικών σημείων τα οποία κινούνται στο επίπεδο Oxy και έστω $\mathbf{v}_k \neq 0$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας του. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε χρονική στιγμή t υπάρχει ευθεία ε στο επίπεδο Oxy ώστε η στροφορμή του συστήματος ως προς τυχόν σημείο της ε να είναι ίση προς μηδέν. Επίσης να αποδειχθεί ότι αν στο σύστημα δεν επιδρούν εξωτερικές δυνάμεις η ευθεία ε είναι σταθερή για κάθε t.

7.3 Να αποδειχθεί ότι η στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας συστήματος υλικών σημείων είναι ίση προς τη σχετική στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας.

7.4 Δίνεται κλειστό σύστημα N υλικών σημείων με μάζες $m_1, m_2, \ldots m_N$ τα οποία έλκονται μεταξύ τους με δυνάμεις ανάλογες των μαζών και τις μεταξύ τους αποστάσεις. Να αποδειχθεί ότι η σχετική κίνηση του κάθε υλικού σημείου ως προς οποιοδήποτε άλλο ή ως προς το κέντρο μάζας είναι ελλειπτική.

7.5 Να βρεθεί το δυναμικό το οποίο οφείλεται σε δύο σταθερά ελκτικά κέντρα με μάζες m_1 και m_2, αντίστοιχα. Υπάρχουν σημεία ισορροπίας;

7.6 Η δύναμη έλξεως μεταξύ δύο υλικών σημείων είναι ίση προς

$$\mathbf{F}_{12} = a\left[(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \frac{r}{\upsilon_o}(\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1)\right],$$

όπου a, υ_o σταθερές, r η απόσταση μεταξύ των σημείων και $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ τα διανύσματα θέσεως των υλικών σημείων ως προς σταθερό σημείο O. Να βρεθεί η ροπή των εσωτερικών δυνάμεων ως προς O. Γιατί δεν μηδενίζεται;

7.7 Να αποδειχθεί ότι αν το δυναμικό των εσωτερικών δυνάμεων συστήματος N υλικών σημείων εξαρτάται μόνο από τις σχετικές θέσεις των υλικών σημείων, $V^{(\varepsilon\sigma)} = V^{(\varepsilon\sigma)}(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n)$, $m < n = 1,2,\ldots N$, τότε οι εσωτερικές δυνάμεις επαληθεύουν το τρίτο αξίωμα του Νεύτωνα, $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$.

7.8 Δύο υλικά σημεία με μάζες m_1 και m_2 βρίσκονται αρχικά σε ηρεμία και κινούνται υπό την επίδραση της αμοιβαίας έλξεως τους. Ποια είναι η σχετική και ποια η απόλυτη ταχύτητα τους για κάθε χρονική στιγμή;

7.9 Δύο υλικά σημεία που έλκονται μεταξύ τους με δυνάμεις βαρύτητας εκτοξεύονται ως προς αδρανειακό σύστημα με ταχύτητες $\mathbf{v}_1$ και $\mathbf{v}_2$, αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι η ευθεία η οποία τα συνδέει είναι πάντοτε παράλληλη προς σταθερό επίπεδο. Πώς βρίσκεται το επίπεδο αυτό από τις αρχικές συνθήκες; Πώς κινείται το κέντρο μάζας του συστήματος; Ποια είναι η σχετική τροχιά των δύο σημείων;

7.10 Δύο υλικά σημεία Σ_1 και Σ_2 έλκονται μεταξύ τους με δυνάμεις παγκοσμίου έλξεως. Για $t=0$ οι αρχικές συνθήκες είναι $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{10}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{20}$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{10}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{20}$. Να βρεθεί η κίνηση του κέντρου μάζας και η σχετική τροχιά του κάθε σώματος ως προς το κέντρο μάζας.

7.11 Δύο υλικά σημεία Σ_1 και Σ_2 βρίσκονται σε αδρανειακό σύστημα και το πρώτο ηρεμεί αρχικά. (α) Ποια ταχύτητα πρέπει να δώσουμε στο Σ_2, το οποίο βρίσκεται σε απόσταση a από το Σ_1, ώστε η σχετική κίνηση να είναι κυκλική; (β) Ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας; (γ) Ποια η τροχιά του κάθε υλικού σημείου ως προς το κέντρο μάζας;

7.12 Σε ένα σύστημα δύο αστέρων βρέθηκε φασματοσκοπικά ότι οι δύο αστέρες έχουν την ίδια μάζα και κινούνται σε κυκλικές τροχιές γύρω από το κέντρο μάζας τους, με ταχύτητα μέτρου υ και περίοδο T. Να βρεθεί πόση είναι η μάζα του κάθε αστέρα.

7.13 Δύο υλικά σημεία με μάζες m_1 και m_2 βρίσκονται αρχικά σε απόσταση r_o και ηρεμούν. Αν αφεθούν ελεύθερα να αποδειχθεί ότι οι ταχύτητές τους (ως προς το αδρανειακό σύστημα στο οποίο το κέντρο μάζας είναι ακίνητο), όταν βρεθούν σε απόσταση r, είναι

$$v_1 = m_2\left[\frac{2G}{m_1+m_2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_o}\right)\right]^{1/2},$$

$$v_2 = m_1\left[\frac{2G}{m_1+m_2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_o}\right)\right]^{1/2}.$$

7.14 Να αποδειχθεί ότι ο τύπος (7.95) για την κίνηση σώματος με μεταβαλλόμενη μάζα επαληθεύει την ειδική αρχή της σχετικότητας.

7.15 Πύραυλος εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης κατακόρυφα προς τα άνω. Η αρχική μάζα του είναι ίση προς m_1, η ταχύτητα εξόδου των αερίων είναι σταθερή, ίση προς u, και η παράγωγος $\dot{m}$ της μάζας είναι σταθερή, ίση προς $-a$, όπου $a>0$. Αν η μάζα των καυσίμων είναι ίση προς Δm, να αποδειχθεί ότι όσο μεγαλύτερο είναι το a (για σταθερά m, Δm και u) τόσο μεγαλύτερο είναι το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φθάσει ο πύραυλος. Να θεωρηθεί ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι σταθερή και να αγνοηθεί η αντίσταση του αέρα.

7.16 Σε ένα διώροφο πύραυλο δίνονται τα εξής στοιχεία: Ταχύτητα εξόδου των αερίων ίση προς u (σταθερή) και για τα δύο στάδια, ολική μάζα του πυραύλου ίση προς m_1, ολική μάζα μόλις τελειώσει η καύση στον πρώτο όροφο ίση προς m_3 και τελική μάζα ίση προς m_4. Αν η ταχύτητα καύσεως είναι σταθερή ($\dot{m}$=σταθερό) και για τα δύο στάδια, να βρεθεί η τελική ταχύτητα κατά τη στιγμή εξαντλήσεως των καυσίμων στο δεύτερο στάδιο. Ποια θα ήταν η ταχύτητα αν δεν απορρίπτονταν ο πρώτος όροφος; (Να θεωρηθεί ότι η κίνηση γίνεται μακρυά από πεδίο δυνάμεων βαρύτητας).

7.17 Σώμα μάζας m ολισθαίνει χωρίς τριβή σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας a. Το σώμα συνδέεται με αλυσίδα η οποία είναι συγκεντρωμένη στην αρχή του κεκλιμένου επιπέδου (ανώτατο σημείο). Αν λ είναι η γραμμική πυκνότητα της αλυσίδας, να βρεθεί η ταχύτητα για κάθε θέση του σώματος αν για $t=0$ το σώμα βρίσκεται στην αρχή του κεκλιμένου επιπέδου.

7.18 Σώμα μάζας m_o, το οποίο είναι δεμένο με αλυσίδα γραμμικής πυκνότητας λ εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα v_o. Να βρεθεί το μέγιστο ύψος.

7.19 Ομοιόμορφη αλυσίδα είναι συγκεντρωμένη στο άκρο τραπεζιού με το ένα άκρο της μόλις να κρέμεται. Να αποδειχθεί ότι το μήκος x της αλυσίδας, καθώς πέφτει, είναι ίσο προς

$$x = \frac{1}{6}gt^2.$$

7.20 Μικρή σταγόνα πέφτει σε ακίνητο νέφος και αυξάνεται η μάζα της με ρυθμό km, όπου k σταθερά. Η σταγόνα ξεκινάει με ταχύτητα ίση προς μηδέν. Αν δεν ληφθεί υπόψη η αντίσταση του αέρα να βρεθεί η ταχύτητα συναρτήσει της θέσεως και να αποδειχθεί ότι για $k << 1$ είναι, κατά προσέγγιση,

$$v^2 = 2gx\left(1-\frac{2}{3}k\sqrt{\frac{2x}{g}}\right).$$

7.21 Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 βρίσκονται κοντά το ένα στο άλλο και συνδέονται με αβαρές νήμα μήκους l. Αν το πρώτο σώμα εκτοξευθεί κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα v_o, να βρεθεί το μέγιστο ύψος.

7.22 Να υπολογισθεί η απώλεια ενέργειας σε μετωπική κρούση μεταξύ δύο σωμάτων από τα οποία το ένα έχει ταχύτητα υ_1 και μάζα m_1 και το άλλο έχει μάζα m_2 και ταχύτητα ίση προς μηδέν, αν ο συντελεστής κρούσεως είναι ίσος προς e.

7.23 Σφαίρα μάζας m συγκρούεται με επίπεδο σώμα πολύ μεγαλύτερης μάζας (άπειρη πρακτικά). Αν η κρούση είναι τελείως ελαστική να αποδειχθεί ότι για μετωπική κρούση η ταχύτητα μετά την κρούση είναι αντίθετη της αρχικής. Επίσης να αποδειχθεί ότι στην περίπτωση που η κρούση είναι πλάγια τα διανύσματα της αρχικής και τελικής ταχύτητας έχουν το ίδιο μέτρο και σχηματίζουν ίσες γωνίες με την κάθετο στο επίπεδο.

7.24 Υλικό σημείο μάζας m_1 με κινητική ενέργεια T_1 συγκρούεται ελαστικά με υλικό σημείο μάζας m_2 το οποίο αρχικά ηρεμεί. Αν η γωνία εκτροπής του δεύτερου σώματος ως προς την αρχική διεύθυνση κινήσεως του πρώτου είναι ίση προς θ_2, να βρεθεί η κινητική ενέργεια T_2' του δεύτερου υλικού σημείου μετά την κρούση. Να δειχθεί ότι η T_2' είναι μέγιστη στην μετωπική κρούση και ότι στην περίπτωση αυτή η απώλεια ενέργειας του πρώτου υλικού σημείου είναι ίση προς

$$T_1 - T_1' = \frac{4m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} T_1.$$

7.25 Υλικό σημείο μάζας m_1 και ορμής $\mathbf{p}_1$ συγκρούεται ελαστικά με σημείο μάζας m_2 και ορμής $\mathbf{p}_2$ το οποίο κινείται με αντίθετη φορά. Αν η γωνία εκτροπής του πρώτου σώματος είναι ίση προς θ_1, να βρεθεί η τελική ορμή του μετά την κρούση.

7.26 Δίνονται δύο όμοια εκκρεμή με μήκος νήματος l και μάζα του σώματος m, για το κάθε ένα, με κοινό σημείο αναρτήσεως το O. Αρχικά το πρώτο εκκρεμές ισορροπεί στην κατακόρυφη θέση και το δεύτερο εκτρέπεται κατά γωνία θ και αφήνεται, με αρχική ταχύτητα ίση προς μηδέν, να κινηθεί. Τι κίνηση θα έχουμε, μετά τη σύγκρουσή του με το σώμα του πρώτου εκκρεμούς (α) αν η κρούση είναι τελείως ελαστική, (β) αν η κρούση είναι πλαστική;

7.27 Υλικό σημείο μάζας m_2 βρίσκεται σε πρακτικά άπειρη απόσταση από υλικό σημείο μάζας m_1 και κινείται με ταχύτητα υ ενώ αρχικά το υλικό σημείο μάζας m_1 είναι ακίνητο. Η διεύθυνση της ταχύτητας του σημείου μάζας m_2 στο άπειρο απέχει απόσταση d από το σημείο μάζας m_1. Να αποδειχθεί ότι η ταχύτητα του σημείου μάζας m_1 όταν το άλλο σημείο απομακρυνθεί πάλι στο άπειρο, είναι ίση προς

$$\upsilon_1 = \frac{2Gm_2\upsilon}{(G^2(m_1+m_2)^2 + d^2\upsilon^4)^{1/2}}.$$

Ασκήσεις

9.1 Σύστημα αναφοράς Oxy κινείται με σταθερή επιτάχυνση γ κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox, ως προς αδρανειακό σύστημα. Να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις της κινήσεως υλικού σημείου ως προς το επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς.

9.2 Υλικό σημείο μάζας m κινείται (χωρίς τριβή) σε οριζόντια ράβδο η οποία περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$ γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από σημείο O της ράβδου. Αν για $t=0$ το υλικό σημείο βρίσκεται σε απόσταση a από το O και έχει ταχύτητα ίση προς μηδέν (ως προς τη ράβδο), να βρεθεί η κίνηση και οι αντιδράσεις της ράβδου.

9.3 Το ίδιο με την προηγούμενη άσκηση, αν η περιστρεφόμενη ράβδος σχηματίζει γωνία θ με τον κατακόρυφο άξονα.

9.4 Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου της ασκήσεως 9.2 αν επί πλέον το υλικό σημείο είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου φυσικού μήκους $l(l \neq a)$ και σταθεράς k και το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο στην αρχή O του άξονα περιστροφής.

9.5 Υλικό σημείο μάζας m κινείται σε κατακόρυφη περιφέρεια κύκλου η οποία περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφη διάμετρό της με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$. Να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις της κινήσεως και τα ολοκληρώματα της κινήσεως. Επίσης να βρεθούν τα όρια της κινήσεως στην περιφέρεια και οι αντιδράσεις.

9.6 Υλικό σημείο Σ μάζας m μπορεί να ολισθαίνει σε οριζόντια περιφέρεια κύκλου χωρίς τριβή. Αρχικά το Σ βρίσκεται στη θέση A και το σύστημα ηρεμεί. Τη στιγμή $t=0$ η περιφέρεια αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από σημείο O της περιφέρειας που είναι εκ διαμέτρου αντίθετο με το A, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Να βρεθεί η κίνηση του υλικού σημείου Σ στην περιφέρεια και να αποδειχθεί ότι το Σ τείνει ασυμπτωτικά προς το σημείο O.

9.7 Υλικό σημείο μάζας m αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα από ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης. Να αποδειχθεί ότι μετά από χρόνο t το υλικό σημείο αποκλίνει από την κατακόρυφο προς Ανατολάς κατά $y = \frac{1}{3}\omega g t^3 συν\varphi$, όπου φ το πλάτος του τόπου και ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης. Επίσης να αποδειχθεί ότι η απόκλιση αυτή εκφράζεται συναρτήσει του ύψους υπό τη μορφή $y = \frac{1}{3}\omega συν\varphi (2h)^{3/2} g^{-1/2}$ (Να αγνοηθούν όροι τάξεως ω^2).

9.8 Σφαίρα κυλίεται ελεύθερα χωρίς τριβή σε οριζόντιο επίπεδο στην επιφάνεια της Γης. Να αποδειχθεί ότι στο Βόρειο ημισφαίριο γράφει περιφέρεια κύκλου με σταθερή ταχύτητα v κατά τη φορά των δεικτών του ωρολογίου, με ακτίνα $r = v / 2\omega ημ\varphi$, όπου φ το πλάτος του τόπου και ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης.

9.9 Βλήμα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω από σημείο της επιφάνειας της Γης, στο Β ημισφαίριο, σε τόπο πλάτους φ. Να αποδειχθεί ότι όταν το βλήμα ξαναγυρίσει στη Γη θα προσκρούσει σε σημείο που βρίσκεται Δυτικά του αρχικού σημείου εκτοξεύσεως σε απόσταση ίση προς

$$\frac{4}{3}\omega \frac{v^3}{g^2} συν\varphi \, .$$

(Να αγνοηθούν όροι δευτέρας τάξεως ως προς ω και επίσης να αγνοηθεί η αντίσταση του αέρα).

9.10 Βλήμα εκτοξεύεται από σημείο της επιφάνειας της Γης πλάτους φ, στο Β ημισφαίριο, με κατεύθυνση προς Α. Η αρχική ταχύτητα είναι υ_o και σχηματίζει γωνία α με το οριζόντιο επίπεδο. Να αποδειχθεί ότι το βλήμα αποκλίνει πλευρικά και το σημείο πτώσεως του στο οριζόντιο επίπεδο απέχει από την αρχική διεύθυνση εκτοξεύσεως απόσταση ίση προς

$$d = \frac{4\upsilon_o^3}{g^2}\,\omega\eta\mu\varphi\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha\ .$$

9.11 Σιδηρόδρομος έχει μάζα 100 τόνων και κινείται προς Α στο Β ημισφαίριο σε τόπο πλάτους $\varphi = 45^{\circ}$ με σταθερή ταχύτητα *100Km/h*. Να βρεθεί η κοριόλειος δύναμη. Πόση είναι η οριζόντια συνιστώσα της και ποια η φορά της;

9.12 Η διαφορική εξίσωση της κινήσεως ηλεκτρονίου μάζας *m* και φορτίου *e* το οποίο κινείται σε ηλεκτρικό πεδίο **Ε** και μαγνητικό πεδίο **Η** είναι η

$$m\gamma = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\,\mathbf{\upsilon}\times\mathbf{H}\,,$$

όπου *c* η ταχύτητα του φωτός. Να βρεθεί η μορφή της εξισώσης αυτής ως προς ένα νέο σύστημα *Oxyz* του οποίου ο άξονας *Oz* είναι παράλληλος προς το διάνυσμα **Η** και περιστρέφεται γύρω από τον *Oz* με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = (-e/2mc)\,H$. Να αποδειχθεί ότι αν αγνοήσουμε όρους τάξεως H^2, η διαφορική εξίσωση της κινήσεως στο *Oxyz* είναι η $m\gamma_o = e\mathbf{E}$ όπου γ_o η σχετική επιτάχυνση στο περιστρεφόμενο σύστημα. (Αυτό είναι γνωστό ως *θεώρημα του Larmor* και είναι βασικό στη μελέτη της επιδράσεις μαγνητικού πεδίου σε άτομο).

9.13 Σωματίδιο μάζας *m* και φορτίου *e* εισέρχεται σε μαγνητικό πεδίο με σταθερή μαγνητική επαγωγή **Β**, με ταχύτητα υ κάθετα προς τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές. Η δύναμη που εξασκείται στο σωματίδιο είναι ίση προς $\mathbf{F} = \frac{e}{c}\,\mathbf{\upsilon}\times\mathbf{B}$ όπου *c* η ταχύτητα του φωτός. Να αποδειχθεί ότι η τροχιά του σωματιδίου είναι περιφέρεια κύκλου ακτίνας $a = \upsilon/\omega_1$ όπου $\omega_1 = eB/mc$ (Η ω_L ονομάζεται *συχνότητα του Larmor*).

9.14 Να βρεθεί η κίνηση φορτισμένου σωματιδίου με φορτίο *q*, το οποίο κινείται σε σταθερό ηλεκτρικό πεδίο εντάσεως **Ε** και σε σταθερό μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής **Β** (Να εκλεγεί ο άξονας *Oz* συστήματος *Oxyz* κατά τη διεύθυνση του **Β** και το επίπεδο *Oyz* ώστε το διάνυσμα **Ε** να είναι παράλληλο προς αυτό).

9.15 Ηλεκτρόνιο ξεκινάει από την κάθοδο παράλληλου πυκνωτή με αρχική ταχύτητα ίση προς μηδέν. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των πλακών είναι ίση προς *V*. Αν υπάρχει επί πλέον σταθερό μαγνητικό πεδίο με δυναμικές γραμμές παράλληλες προς τις πλάκες του πυκνωτή, να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της μαγνητικής επαγωγής ώστε το ηλεκτρόνιο να μη φθάσει στην άνοδο. Ποια είναι η τροχιά του ηλεκτρονίου; (Η απόσταση μεταξύ των πλακών είναι ίση προς D και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ίση προς $E = V/D$).