Ασκήσεις

1.1 Να βρεθεί η επιτρόχια και η κεντρομόλος επιτάχυνση υλικού σημείου το οποίο κινείται στην τροχιά $\mathbf{r} = 3t\mathbf{i}+4t^2\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$, όπου t ο χρόνος.

1.2 Υλικό σημείο κινείται σε παραβολική τροχιά που έχει εξίσωση $y^2=4p^2-4px$ όπου p σταθερό, με σταθερό μέτρο ταχύτητας. Να βρεθούν τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιταχύνσεως σε καρτεσιανές και σε πολικές συντεταγμένες.

1.3 Υλικό σημείο κινείται στην τροχιά $y = A\eta\mu(\beta x)$, όπου A και β σταθερά. Η συνιστώσα της ταχύτητας κατά τον άξονα x είναι σταθερή. Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση.

1.4. Υλικό σημείο κινείται στο επίπεδο με ταχύτητα σταθερού μέτρου. Να αποδειχθεί ότι το διάνυσμα της ταχύτητας είναι κάθετο στο διάνυσμα της επιταχύνσεως.

1.5 Υλικό σημείο κινείται στο επίπεδο έτσι ώστε το μέτρο της ταχύτητάς του και το μέτρο της επιταχύνσεώς του να είναι σταθερά. Να αποδειχθεί ότι η τροχιά είναι περιφέρεια κύκλου.

1.6 Υλικό σημείο κινείται σε ελλειπτική τροχιά με ταχύτητα σταθερού μέτρου. Σε ποια σημεία της τροχιάς η επιτάχυνση είναι μέγιστη και σε ποια ελάχιστη;

1.7 Θεωρούμε περιφέρεια κύκλου κέντρου O και ακτίνας α και ευθεία $\Gamma\Delta$ που περνάει από το O. Μια ράβδος AB, μήκους λ, κινείται έτσι ώστε το άκρο της B να κινείται στην περιφέρεια με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ενώ το άκρο της A κινείται στην ευθεία $\Gamma\Delta$. Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου A.

1.8 Υλικό σημείο εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις κατά τους άξονες x και y, αντίστοιχα και είναι $x = A\eta\mu\omega t$ και $y = B\eta\mu(\omega t+\alpha)$. Να βρεθεί η τροχιά του. Πότε είναι ευθεία γραμμή και πότε περιφέρεια κύκλου;

Ασκήσεις

2.1 Υλικό σημείο κινείται υπό την επίδραση της δυνάμεως $\mathbf{F} = 12t^2\mathbf{i}+(18t - 8)\mathbf{j} - 6t\mathbf{k}$. Αν για $t = 0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $\mathbf{r}_o = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ και έχει αρχική ταχύτητα $\mathbf{v}_o=6\mathbf{i} - 5\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, να βρεθεί η θέση και η ταχύτητα του σε κάθε χρονική στιγμή.

2.2 Να βρεθεί το έργο της δυνάμεως $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ για μετατόπιση επί ευθείας που είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}=3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ σε απόσταση $s = 10$.

2.3 Να βρεθεί ποιο από τα παρακάτω πεδία δυνάμεων προέρχεται από δυναμικό και να βρεθεί το δυναμικό (όπου υπάρχει):

(α) $\mathbf{F} = (y^2z^3 - 6xz^2)\mathbf{i}+2xyz^3\mathbf{j}+(3xy^2z^2 - 6x^2z)\mathbf{k}$

(β) $\mathbf{F} = 3x^2y\mathbf{i}+(zy^2+z^2y)\mathbf{j} - 5xyz\mathbf{k}$

(γ) $\mathbf{F} = (2xy+z^3)\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+3xz^2\mathbf{k}$

(δ) $\mathbf{F} = (y^2 - 2xyz^3)\mathbf{i}+(3+2xy-x^2z^3)\mathbf{j}+(6z^3-3x^2yz^2)\mathbf{k}$

2.4 Υλικό σημείο κινείται σε περιφέρεια κύκλου με κέντρο O στο επίπεδο Oxy και ακτίνα $\rho = 3$. Αν στο υλικό σημείο επιδρά η δύναμη $\mathbf{F} = (2x-y+z)\mathbf{i} +(x+y-z^2)\mathbf{j}+$ $+(3x-2y+4z)\mathbf{k}$ να βρεθεί το παραγόμενο έργο για μια πλήρη περιστροφή.

2.5 Υλικό σημείο μάζας m κινείται στο επίπεδο υπό την επίδραση της δυνάμεως $\mathbf{F}=\alpha(\text{ημ}\omega t\mathbf{i} + \text{συν}\omega t\mathbf{j})$. Αν για $t=0$ το υλικό σημείο ηρεμεί στην αρχή O των αξόνων, να αποδειχθεί ότι το παραγόμενο έργο σε χρόνο t είναι ίσο προς $(\alpha^2/m\omega^2)$ $(1\text{-συν}\omega t)$

2.6 Να βρεθούν οι τύποι μετασχηματισμού του Γαλιλαίου μεταξύ δύο αδρανειακών συστημάτων $Oxyz$ και $O'x'y'z'$ στη γενική περίπτωση όπου το δεύτερο αδρανειακό σύστημα κινείται ως προς το πρώτο με ταχύτητα $\mathbf{v} =v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}+v_z\mathbf{k}$. Να υποτεθεί ότι για $t=0$ το σημείο O' συμπίπτει με το O.

2.7 Να αποδειχθεί ότι κατά την κίνηση σημείου στο ομογενές πεδίο βαρύτητας διατηρείται μόνο η συνιστώσα της ορμής κατά τον άξονα x και τον άξονα y ($\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$).

2.8 Να βρεθεί το ολοκλήρωμα της ενέργειας για υλικό σημείο μάζας m που κινείται στο ομογενές πεδίο βαρύτητας $V = mgz$. Ποια είναι η σταθερή τιμή της ενέργειας για την κίνηση που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες: (α) $x_o = 0$, $y_o = 0$, $z_o = 0$, $\dot{x}_o = 1$, $\dot{y}_o = 0$, $\dot{z}_o = 0$ και (β) $x_o = 0$, $y_o = 0$, $z_o = 2$, $\dot{x}_o = 0$, $\dot{y}_o = 0$, $\dot{z}_o = -2$;

2.9 Υλικό σημείο κινείται στο χώρο υπό την επίδραση της δυνάμεως $\mathbf{F} = -(x^2+y^2)\mathbf{k}$. Να αποδειχθεί ότι διατηρείται η συνιστώσα της στροφορμής κατά τον άξονα Oz μόνο. Τι συμπέρασμα βγάζετε για την κίνηση της προβολής του υλικού σημείου στο επίπεδο Oxy;

Ασκήσεις

3.1 Υλικό σημείο με μάζα m εκτοξεύεται κατά την κατακόρυφη διεύθυνση, προς τα πάνω, με αρχική ταχύτητα v_o τη στιγμή $t = 0$. Εκτός από το βάρος του υπάρχει και η αντίσταση του αέρα που είναι ανάλογη της ταχύτητας. Να βρεθεί η ταχύτητα και η διανυθείσα απόσταση σε χρόνο t.

3.2 Υλικό σημείο πέφτει ελεύθερα στην ατμόσφαιρα με αρχική ταχύτητα ίση προς μηδέν. Αν η αντίσταση είναι ανάλογη της ταχύτητας να βρεθεί η οριακή ταχύτητα.

3.3 Βλήμα εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα v_o η οποία σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Αν η αντίσταση του αέρα είναι ίση προς bv, όπου v η ταχύτητα, να βρεθεί: (α) η θέση και η ταχύτητα σε κάθε χρονική στιγμή t, (β) το οριζόντιο βεληνεκές και (γ) η λύση για την περίπτωση $b<<1$, ώστε να παραλειφθούν όροι τάξεως b^2.

3.4 Υλικό σημείο μάζας m πέφτει ελεύθερα στην ατμόσφαιρα. Αν η αντίσταση του αέρα είναι ίση προς kmv^2, όπου k σταθερά, να αποδειχθεί ότι η απόσταση μεταξύ δύο σημείων με ταχύτητες v_o και v_1 είναι ίση προς $\dfrac{1}{2k}\ln\dfrac{g-kv_0^2}{g-kv_1^2}$ οπού g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

3.5 Μία βάρκα έχει αρχική ταχύτητα v_o και επιβραδύνεται από αντίσταση $be^{a|v|}$. Να βρεθεί η θέση συναρτήσει του χρόνου και το διάστημα που θα διανύσει η βάρκα μέχρι να σταματήσει.

3.6 Υλικό σημείο κινείται υπό την επίδραση αντιστάσεως ίσης προς $mk(v^3+\alpha^2 v)$, όπου k, α σταθερές. Να αποδειχθεί ότι ανεξάρτητα από την τιμή της αρχικής ταχύτητας το υλικό σημείο δεν μπορεί να απομακρυνθεί σε απόσταση μεγαλύτερη από $\pi/2k\alpha$ και ότι το υλικό σημείο θα ηρεμήσει μετά από άπειρο χρόνο.

3.7 Υλικό σημείο μάζας m κινείται σε ευθεία υπό την επίδραση της δυνάμεως $F(x) = -kx + \dfrac{a}{x^3}, k > 0$. Να βρεθούν: (α) Το δυναμικό, (β) τα όρια της κινήσεως για τυχούσες αρχικές συνθήκες, (γ) η λύση $x(t)$ και (δ) τα σημεία ισορροπίας.

3.8 Υλικό σημείο κινείται σε ευθεία υπό την επίδραση δυνάμεων προερχομένων από το δυναμικό $V(x)=\frac{a}{x^6}+\frac{b}{x^{12}}$, όπου a, b θετικές σταθερές. (α) Να βρεθούν τα όρια των τροχιών. (β) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας.

3.9 Πύραυλος εκτοξεύεται κατακόρυφα από την επιφάνεια της Γης με αρχική ταχύτητα υ_o. Ποια θα είναι η ταχύτητά του όταν θα απομακρυνθεί σε άπειρη απόσταση από τη Γη (α) όταν $\upsilon_o=\upsilon_p$, (β) όταν $\upsilon_o>\upsilon_p$, όπου υ_p η ταχύτητα διαφυγής;

3.10 Υλικό σημείο μάζας m κινείται στον άξονα Ox υπό την επίδραση της ελκτικής δυνάμεως $F(x)=-k/x^2,(k>0)$. Αν τη στιγμή $t=0$ βρίσκεται στη θέση $x=a$ με ταχύτητα $\dot{x}=0$, να δειχθεί ότι θα φθάσει στην αρχή O σε χρόνο $t=\frac{1}{2}\pi a\sqrt{ma/2k}$.

3.11 Υλικό σημείο μάζας m κινείται στον άξονα Ox και έλκεται από το O με δύναμη $F(x)=-k/x$. Αν τη στιγμή $t=0$ βρίσκεται στη θέση $x=a$ με ταχύτητα $\dot{x}=0$, να αποδειχθεί ότι θα φθάσει στο σημείο O μετά από χρόνο $t=a^2\sqrt{m/k}$.

3.12 Ελατήριο φυσικού μήκους l και αμελητέας μάζας είναι τοποθετημένο κατακορύφως. Το ένα άκρο του είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο A και στο άλλο άκρο είναι στερεωμένο σώμα μάζας m. Αν η σταθερά του ελατηρίου είναι ίση προς k, να βρεθεί η θέση ισορροπίας. Επίσης να βρεθεί η κίνηση που θα προκύψει αν το σώμα εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας κατά απόσταση a και αφεθεί ελεύθερο.

3.13 Υλικό σημείο μάζας m είναι στερεωμένο στο ένα άκρο ελατηρίου ίσης μάζας και σταθεράς k. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ακίνητο σημείο. Να αποδειχθεί ότι η συχνότητα ταλαντώσεως είναι ίση προς $\omega=\sqrt{3}\omega_o/2$, όπου ω_o η συχνότητα της ταλαντώσεως στην περίπτωση που η μάζα του ελατηρίου είναι αμελητέα.

3.14 Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε ευθεία γραμμή. Σε ποια θέση είναι μέγιστη η ταχύτητα και σε ποια η επιτάχυνση;

3.15 Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση υπό την επίδραση της δυνάμεως $F(x)=-kx$. Να βρεθεί η κίνηση για τις αρχικές συνθήκες: (α) $x=0$, $\dot{x}=\upsilon_o$, (β) $x=D$, $\dot{x}=0$, (γ) $x=a$, $\dot{x}=\upsilon_o$.

3.16 Να αποδειχθεί ότι στη φθίνουσα αρμονική ταλάντωση η οποία καθορίζεται από την εξίσωση $m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=0$ τα χρονικά διαστήματα μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων απομακρύνσεων είναι όλα ίσα προς $2\pi/\omega_1$, όπου το ω_1 δίνεται από την (3.39).

3.17 Να βρεθεί η κίνηση όταν στη φθίνουσα αρμονική ταλάντωση που περιγράφεται από την εξίσωση της προηγούμενης ασκήσεως επιδρά και μια σταθερή δύναμη F_o. Να αποδειχθεί ότι η επίδραση της F_o είναι η μετατόπιση του σημείου ισορροπίας ενώ η φθίνουσα ταλάντωση δεν επηρεάζεται.

3.18 Να βρεθεί η κίνηση αν στη φθίνουσα αρμονική ταλάντωση προστεθεί και μία ακόμα δύναμη, η $F=F_oe^{-at}$.

3.19 Το ίδιο με την προηγούμενη άσκηση, αν η δύναμη είναι η $F = F_o e^{-at}$συνωt.

3.20 Μία διαταρακτική δύναμη F_oσυν$(\omega t + \theta_o)$ επιδρά σε φθίνοντα αρμονικό ταλαντωτή από τη στιγμή $t = 0$. (α) Αν για $t = 0$ είναι $x = 0$, $\dot{x} = 0$ να βρεθεί το πλάτος D και η φάση θ των παροδικών όρων συναρτήσει των F_o, θ_o. (β) Για ποιες τιμές των αρχικών συνθηκών x_o, υ_o δεν εμφανίζονται καθόλου παροδικοί όροι;

3.21 Αρμονικός ταλαντωτής χωρίς αντίσταση, με φυσική συχνότητα ω_o, ηρεμεί αρχικά τη στιγμή $t = 0$ στην αρχή O του άξονα Ox, οπότε του δίνεται αρχική ταχύτητα υ_o και εκτελεί ταλαντώσεις μέχρι τη στιγμή $t = 3\pi/2\omega_o$. Στη συνέχεια αρχίζει να επιδρά μία διαταρακτική δύναμη $F=B$συν$(\omega t + \theta)$, όπου B, ω, θ σταθερές και $\omega < \omega_o$. Να βρεθούν οι τιμές των B και θ ώστε η κίνηση μετά χρόνο $t=3\pi/2\omega_o$ να είναι απλή αρμονική ταλάντωση.

3.22 Η διαφορική εξίσωση που δίνει την κίνηση υλικού σημείου είναι η $m\ddot{x} + kx = 5$συν$\omega t + 2$συν$3\omega t$. Αν για $t=0$ είναι $x=0$, $\dot{x} = \upsilon_o$, να βρεθεί η κίνηση. Για ποιες τιμές του ω έχουμε συντονισμό;

3.23 Να εξηγήσετε για ποιες αρχικές συνθήκες έχουμε την κίνηση που αντιστοιχεί στην καμπύλη I ή στην καμπύλη II του Σχ. 3.9.

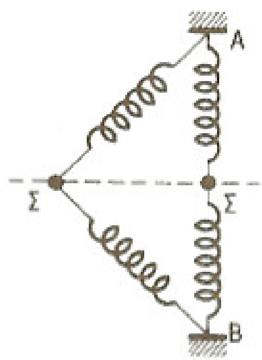
3.24 Να αποδειχθεί ότι η περίοδος των μη γραμμικών ταλαντώσεων του απλού εκκρεμούς $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\eta\mu\theta = 0$ είναι ίση προς

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\eta\mu^2\varphi}} \quad ,$$

όπου $k=\eta\mu(\theta_o/2)$ και θ_o το μέγιστο πλάτος ταλαντώσεως. Επίσης να αποδειχθεί ότι η περίοδος T εκφράζεται υπό μορφή σειράς ως

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \ldots\right\}.$$

3.25 Να αποδειχθεί ότι οι μέσες τιμές ως προς το χρόνο, για μια πλήρη περίοδο, της κινητικής ενέργειας και της δυναμικής ενέργειας στην απλή αρμονική ταλάντωση είναι ίσες μεταξύ τους, και ίσες προς $m\pi^2 D^2/T^2$ όπου D το πλάτος ταλαντώσεως και T η περίοδος.



3.26 Να μελετηθεί η κίνηση του μη γραμμικού συστήματος που φαίνεται στο σχήμα (μη γραμμικές ταλαντώσεις). Τα ελατήρια έχουν το ίδιο φυσικό μήκος και την ίδια σταθερά k και η κίνηση γίνεται στη μεσοκάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα AB. Ποιά είναι η κίνηση για μικρές μετατοπίσεις;

3.27 Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση της κίνησης του απλού εκκρεμούς και να υπολογισθεί η τάση του νήματος (αντίδραση δεσμού). Πότε το νήμα παύει να είναι τεταμένο;

3.28 Υλικό σημείο κινείται σε σταθερή καμπύλη χωρίς τριβή. Να βρεθούν οι αντιδράσεις.