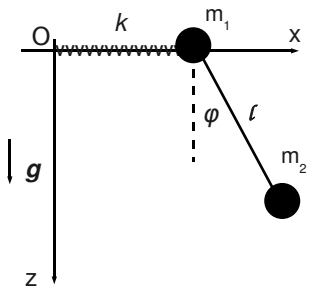
Κεφάλαιο 1

Συστήματα Υλικών Σημείων

Στα προβλήματα αυτού του κεφαλαίου, σκοπός είναι η εύρεση των εξισώσεων κίνησης, ο έλεγχος ύπαρξης ή μη των γνωστών ολοκληρωμάτων της κίνησης (Jacobi και ορμών) και η μελέτη των σημείων ισορροπίας του συστήματος.

Άσκηση 1.1: Η μάζα m_1 κινείται υποχρετικά στον άξονα Ox και η m_2 στο κατακόρυφο επίπεδο Oxz. Οι μάζες συνδέονται με αβαρές μη εκτατό νήμα μήκους l και η m_1 ενώνεται με την αρχή των αξόνων μέσω ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k και φυσικού μήκους l_0.



Υπάρχουν δύο δεσμοί της κίνησης, $z_1 = 0$ και $l =$σταθ. Άρα το σύστημα έχει 2 β.ε. Διαλέγουμε ως γενικευμένες συντεταγμένες τις x_1 και ϕ. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες της m_2 δίνονται τότε από το μετασχηματισμό

$$x_2 = x_1 + l\,\sin\phi \qquad , \qquad z_2 = l\,\cos\phi \tag{1.1}$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο, παίρνουμε

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l\dot{\phi}\cos\phi \quad , \quad \dot{z}_2 = -l\dot{\phi}\sin\phi \tag{1.2}$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_1^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\phi}\cos\phi) \tag{1.3}$$

και η δυναμική ενέργεια ισούται με την ενέργεια λόγω βαρύτητας (για την m_2) και την ενέργεια τάσης του ελατηρίου

$$V = -m_2 g z_2 + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = -m_2 g l\cos\phi + \frac{1}{2}k(x_1 - l_0)^2 \tag{1.4}$$

Η συνάρτηση Lagrange $L = T - V$ έχει τη μορφή

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_1^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\phi}\cos\phi) + m_2 g l\cos\phi - \frac{1}{2}k(x_1 - l_0)^2 \tag{1.5}$$

Αφού έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας, θα υπάρχουν δύο εξισώσεις Lagrange, της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \tag{1.6}$$

Εκτελώντας τις παραγωγίσεις, οι εξισώσεις κίνησης παίρνουν την τελική τους μορφή

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l\ddot{\phi}\cos\phi - m_2 l\dot{\phi}^2\sin\phi + k(x_1 - l_0) &= 0 \\ l\ddot{\phi} + \ddot{x}_1\cos\phi + g\sin\phi &= 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Η συνάρτηση Lagrange δεν περιέχει ρητά το χρόνο, t. Άρα υπάρχει το ολοκλήρωμα του Jacobi. Επειδή οι δεσμοί είναι σκληρόνομοι και ο χρόνος δεν εμφανίζεται στις εξισώσεις μετασχηματισμού, το ολοκλήρωμα αυτό ταυτίζεται με τη μηχανική ενέργεια του συστήματος $\mathcal{J} = T + V$. Καμία από τις συντεταγμένες δεν είναι αγνοήσιμη κι επομένως οι ορμές

$$p_{x_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 l\dot{\phi}\cos\phi \quad , \quad p_\phi \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m_2 l^2\dot{\phi} + m_2 l\dot{x}_1\cos\phi \tag{1.8}$$

δεν παραμένουν σταθερές κατά τη διάρκεια της κίνησης. Θέτοντας μηδέν τις γενικευμένες ταχύτητες και επιταχύνσεις στις εξισώσεις κίνησης και λύνοντας το σύστημα ως προς x_1 και ϕ, τα σημεία ισορροπίας του συστήματος είναι

$$k(x_1 - l_0) = 0 \Rightarrow x_1 = l_0 \quad , \quad g\sin\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0, \pi \tag{1.9}$$

Η θέση ισορροπίας $\phi = 0$ είναι ευσταθής ενώ η θέση $\phi = \pi$ είναι ασταθής. Αυτό φαίνεται αν κάνουμε γραμμικοποίηση των εξισώσεων κίνησης γύρω απ΄ το σημείο $(x_1, \phi) = (l_0, 0)$, όπου σύμφωνα με το θεώρημα του Taylor πρέπει να θεωρήσουμε

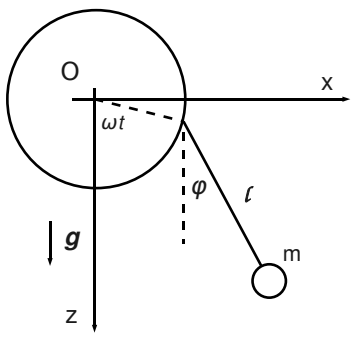
$$\cos\phi = 1 - \phi^2/2 + ... \quad , \quad \sin\phi = \phi + ... \tag{1.10}$$

ενώ γύρω από το $\phi = \pi$ ισχύει

$$\cos\phi = -1 + \phi^2/2 + ... \quad , \quad \sin\phi = -\phi + ... \tag{1.11}$$

Παρατηρήστε ότι για $x_1 = l_0$ το ελατήριο δεν έχει τάση οπότε, για $\phi = 0$, η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι ελάχιστη (άρα, απουσία άλλων δυνάμεων, αντιστοιχεί σε θέση ευσταθούς ισορροπίας)

Άσκηση 1.2: Το σημείο εξάρτησης του εκκρεμούς (l =σταθ.) εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με συχνότητα ω πάνω σε περιφέρεια που βρίσκεται στο κατακόρυφο επίπεδο Oxz. Η μάζα m κινείται υποχρετικά στο κατακόρυφο επίπεδο, υπό την επίδραση του ομογενούς πεδίου βαρύτητας.



Υπάρχει ο δεσμός της κίνησης, l =σταθ. και άρα το σύστημα έχει 1 β.ε. Διαλέγουμε ως γενικευμένη συντεταγμένη τη γωνία ϕ που σχηματίζει το νήμα με τον (σταθερό) κατακόρυφο άξονα. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες της m δίνονται από το μετασχηματισμό

$$x = \alpha \sin\omega t + l\, \sin\phi \quad , \quad z = \alpha \cos\omega t + l\, \cos\phi \tag{1.12}$$

όπου α η ακτίνα της περιφέρειας. Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο, παίρνουμε

$$\dot{x} = \alpha\omega\cos\omega t + l\dot{\phi}\cos\phi \quad , \quad \dot{z} = -\alpha\omega\sin\omega t - l\dot{\phi}\sin\phi \tag{1.13}$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}m[\alpha^2\omega^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2\alpha\omega l\dot{\phi}\cos(\omega t - \phi)] \tag{1.14}$$

και η δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας είναι ίση προς

$$V = -mgz = -mg(\alpha\cos\omega t + l\cos\phi) \tag{1.15}$$

Η συνάρτηση Lagrange $L = T - V$ έχει τη μορφή

$$L = \frac{1}{2}m[\alpha^2\omega^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2\alpha\omega l\dot{\phi}\cos(\omega t - \phi)] + mg(\alpha\cos\omega t + l\cos\phi) \tag{1.16}$$

Αφού έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας, υπάρχει μία εξίσωση Lagrange, της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0 \tag{1.17}$$

Εκτελώντας τις παραγωγίσεις, η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\sin\phi - \frac{\alpha\omega^2}{l}\sin(\omega t - \phi) = 0 \tag{1.18}$$

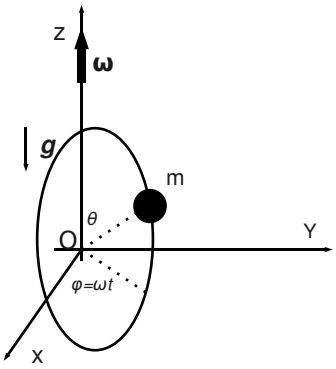
Η συνάρτηση Lagrange περιέχει ρητά το χρόνο, t, σε τριγωνομετρικό όρο. Άρα δεν υπάρχει το ολοκλήρωμα του Jacobi. Επιπλέον η ϕ δεν είναι αγνοήσιμη κι επομένως η ορμή

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = ml^2\dot{\phi} + m\alpha\omega l\cos(\omega t - \phi) \tag{1.19}$$

δεν είναι ολοκλήρωμα της κίνησης. Το σύστημα δεν έχει σημεία ισορροπίας, λόγω της διαρκούς κύκλικης κίνησης του σημείου εξάρτησης.

Άσκηση 1.3: Η μάζα m κινείται υποχρεωτικά πάνω στην περιφέρεια, η οποία περιστρέφεται γύρω από την κατακόρυφο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, ω, υπό την επίδραση του ομογενούς πεδίου βαρύτητας.

Η προβολή του διανύσματος θέσης στο επίπεδο Oxy σηματίζει γωνία $\phi = \omega t$ με τον άξονα Ox. Αυτή η σχέση αποτελεί ρεόνομο δεσμό, αφού η ϕ αποτελεί τη μία από τις 3 σφαιρικές συντεταγμένες της m. Επίσης, $r = a =$σταθ κι επομένως η m έχει 1 β.ε. και η γωνία θ είναι η καταλληλότερη γενικευμένη



συντεταγμένη. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες της m δίνονται από το μετασχηματισμό

$$x = a\sin\theta\cos\omega t \quad , \quad y = a\sin\theta\sin\omega t \quad , \quad z = a\cos\theta \tag{1.20}$$

όπου α η ακτίνα της περιφέρειας. Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a\dot{\theta}\cos\theta\cos\omega t - a\omega\sin\theta\sin\omega t \\ \dot{y} &= a\dot{\theta}\cos\theta\sin\omega t + a\omega\sin\theta\cos\omega t \\ \dot{x} &= -a\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned} \tag{1.21}$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(a^2\dot{\theta}^2 + a^2\omega^2\sin^2\theta) \tag{1.22}$$

και η δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας είναι ίση προς

$$V = mgz = mga\cos\theta \tag{1.23}$$

Άρα, η συνάρτηση Lagrange $L = T - V$ έχει τη μορφή

$$L = \frac{1}{2}m(a^2\dot{\theta}^2 + a^2\omega^2\sin^2\theta) - mga\cos\theta \tag{1.24}$$

Αφού έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας, υπάρχει μία εξίσωση Lagrange, της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \tag{1.25}$$

Εκτελώντας τις παραγωγίσεις, η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{g}{a}\sin\theta = 0 \tag{1.26}$$

Η συνάρτηση Lagrange δεν περιέχει ρητά το χρόνο, t και άρα υπάρχει το ολοκλήρωμα του Jacobi. Όμως, υπάρχει ρεόνομος δεσμός κι έτσι το ολοκλήρωμα του Jacobi **δεν** ταυτίζεται με τη μηχανική ενέργεια, αλλά είναι

$$\mathcal{J} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} - L = \frac{1}{2}m(a^2\dot{\theta}^2 - a^2\omega^2\sin^2\theta) + mga\cos\theta \tag{1.27}$$

Η 'διαφορά' οφείλεται στον όρο $-(m/2)a^2\omega^2\sin^2\theta$ που αντιστοιχεί στο έργο της φυγόκεντρης δύναμης.

Το σύστημα δεν έχει σημεία ισορροπίας, λόγω της διαρκούς περιστροφής γύρω από τον άξονα Oz. Όμως, η m είναι πιθανό να ισορροπήσει σε κάποια σταθερή τιμή της θ, ακολουθώντας έτσι κυκλική τροχιά. Η τροχιά αυτή (αν υπάρχει) αντιστοιχεί σε σημείο ισορροπίας του ισοδύναμου μονοδιάστατου προβλήματος που προκύπτει αν μελετήσουμε την κίνηση ως προς ένα ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα, με συχνότητα ω. Ο ορισμός του συστήματος αναφοράς εμπεριέχεται στη λύση που ήδη βρήκαμε αφού, χρησιμοποιώντας το δεσμό $\phi = \omega t$, προέκυψε διαφορική εξίσωση για το θ, ανεξάρτητη του t. Έτσι, μηδενίζοντας τη $\ddot{\theta}$ στην Εξ. (1.26) και λύνοντας ως προς θ παίρνουμε

$$\sin\theta(\cos\theta + \frac{g}{a\omega^2}) = 0 \tag{1.28}$$

με λύσεις $\theta_{1,2} = 0, \pi$ και $\cos\theta_3 = -g/(a\omega^2)$. Προφανώς η θέση $\theta_1 = 0$ είναι ασταθής ενώ η θέση $\theta_2 = \pi$ ευσταθής. Η λύση θ_3 υπάρχει εφόσον $g/(a\omega^2) < 1$ και αντιστοιχεί σε γωνία μεγαλύτερη της $\pi/2$, δηλαδή κυκλική τροχιά σε $z < 0$.

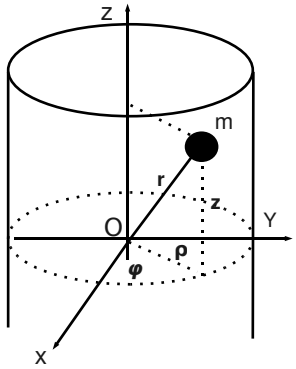
Άσκηση 1.4: Η μάζα m κινείται υποχρεωτικά στην παράπλευρη επιφάνεια ορθού κυκλικού κυλίνδρου υπό την επίδραση της κεντρικής δύναμης $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ $(k > 0)$. Δεν υπάρχει βαρύτητα.

Ο δεσμός της κίνησης εκφράζεται από τη σχέση $\rho = a =$σταθ., όπου ρ η προβολή του διανύσματος θέσης στο επίπεδο Oxy και a η ακτίνα του κυλίνδρου. Το σύστημα επομένως έχει 2 β.ε. Είναι προφανές ότι η καλύτερη επιλογή συντεταγμένων είναι οι κυλινδρικές (ρ, ϕ, z), όπου $\rho = a$. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες της m δίνονται από το μετασχηματισμό

$$x = a\cos\phi \quad , \quad y = a\sin\phi \quad , \quad z \tag{1.29}$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a\dot{\phi}\sin\phi \\ \dot{y} &= a\dot{\phi}\cos\phi \end{aligned} \tag{1.30}$$



Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(a^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) \tag{1.31}$$

και η δυναμική ενέργεια λόγω της δύναμης $\mathbf{F}$ είναι ίση προς

$$V = -\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(a^2 + z^2) \tag{1.32}$$

(Προσοχή! Το διάνυσμα θέσης έχει μέτρο r και όχι ρ). Η συνάρτηση Lagrange $L = T - V$ έχει τη μορφή

$$L = \frac{1}{2}m(a^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(a^2 + z^2) \tag{1.33}$$

Έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας και άρα δύο εξισώσεις Lagrange, της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \tag{1.34}$$

Εκτελώντας τις παραγωγίσεις, οι εξισώσεις κίνησης παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} ma^2\ddot{\phi} &= 0 \\ \ddot{z} + \frac{k}{m}z &= 0 \end{aligned} \tag{1.35}$$

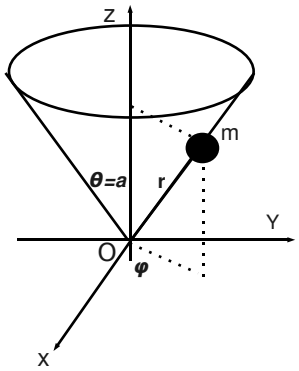
Η πρώτη εξίσωση δίνει $\dot{\phi}$ =σταθ. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η ϕ είναι αγνοήσιμη και άρα η ορμή

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ma^2\dot{\phi} = C$$

είναι ολοκλήρωμα της κίνησης. Επίσης, η συνάρτηση Lagrange δεν περιέχει ρητά το χρόνο και άρα υπάρχει το ολοκλήρωμα του Jacobi, το οποίο ταυτίζεται με τη μηχανική ενέργεια.

Μηδενίζοντας την $\ddot{z}$ στην Εξ.(35β), προκύπτει $z = 0$. Αν $p_\phi = C = 0$, τότε η λύση $z = 0$ $(\forall\phi)$ αποτελεί σημείο ισορροπίας. Αν $p_\phi = C \neq 0$ τότε η λύση $z = 0$ αντιστοιχεί σε ομαλή κυκλική τροχιά, με σταθερή συχνότητα $\dot{\phi} = C/(ma^2)$. Η κυκλική τροχιά είναι ευσταθής, αφού η (ήδη γραμμική) εξίσωση κίνησης έχει συντελεστή $k/m > 0$ και η συχνότητα μικρών ταλαντώσεων γύρω από την κυκλική τροχιά (κατά τη διεύθυνση z) είναι $\Omega_z = \sqrt{k/m}$.

Άσκηση 1.5: Η μάζα m κινείται υποχρεωτικά στην παράπλευρη επιφάνεια του κατακόρυφου κώνου υπό την επίδραση της βαρύτητας.



Ο δεσμός της κίνησης εκφράζεται από τη σχέση $\theta = a =$σταθ., όπου a το γωνιώδες ημιάνοιγμα του κώνου. Η m έχει επομένως 2 β.ε. Είναι προφανές ότι η καλύτερη επιλογή συντεταγμένων είναι οι σφαιρικές (r, ϕ, θ), όπου $\theta = a$. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες δίνονται από το μετασχηματισμό

$$x = r \sin a \cos\phi \quad , \quad y = r \sin a \sin\phi \quad , \quad z = r \cos a \tag{1.36}$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \sin a \cos\phi - r\dot{\phi} \sin a \sin\phi \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin a \sin\phi + r\dot{\phi} \sin a \cos\phi \\ \dot{z} &= \dot{r} \cos a \end{aligned} \tag{1.37}$$

Η κινητική ενέργεια της m είναι

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 a\, \dot{\phi}^2) \tag{1.38}$$

και η δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας είναι

$$V = mgz = mgr \cos a \tag{1.39}$$

Η συνάρτηση Lagrange $L = T - V$ έχει τη μορφή

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 a\, \dot{\phi}^2) - mgr \cos a \tag{1.40}$$

Οι δύο εξισώσεις κίνησης (για τις r και ϕ) παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r \sin^2 a\, \dot{\phi}^2 + g \cos a &= 0 \\ \frac{d\,(mr^2\dot{\phi})}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{1.41}$$

Η δεύτερη εξίσωση δίνει $p_\phi = mr^2\dot{\phi} =$σταθ. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η ϕ είναι αγνοήσιμη και άρα η p_ϕ είναι ολοκλήρωμα της κίνησης. Επίσης, η συνάρτηση Lagrange δεν περιέχει ρητά το χρόνο και άρα υπάρχει το ολοκλήρωμα του Jacobi, το οποίο ταυτίζεται με τη μηχανική ενέργεια. Παρατηρήστε ότι η γενικευμένη ορμή p_ϕ είναι η στροφορμή της m ως προς O. Για $p_\phi = C \neq 0 \Rightarrow \dot{\phi} = C/(mr^2)$, η m εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, εφόσον $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Από την αντίστοιχη εξίσωση κίνησης προκύπτει η θέση της κυκλικής τροχιάς, r_*

$$\frac{\sin^2 aC^2}{m^2 r_*^3} + g \cos a = 0$$

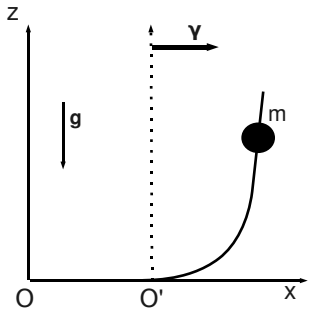
Άσκηση 1.6: Η m κινείται υποχρεωτικά (χωρίς τριβή) πάνω στην καμπύλη $z = bx^2$, η οποία κινείται ως προς το O με σταθερή επιτάχυνση γ.

Ο δεσμός της κίνησης εκφράζεται από τη σχέση $z = bx^2$, η οποία συνδέει τις συντεταγμένες στο επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς. Η m έχει επομένως 1 β.ε. Διαλέγουμε ως συντεταγμένη την απόσταση x από το O'. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες της m ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι

$$X = \frac{1}{2}\gamma t^2 + x \quad , \qquad Z = z = bx^2 \tag{1.42}$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \gamma t + \dot{x} \\ \dot{Z} &= 2bx\dot{x} \end{aligned} \tag{1.43}$$



Η κινητική ενέργεια της m είναι

$$T = \frac{1}{2}m(\gamma^2 t^2 + \dot{x}^2 + 2\gamma\dot{x}t + 4b^2x^2\dot{x}^2) \tag{1.44}$$

και η δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας είναι

$$V = mgZ = mgz = mgbx^2 \tag{1.45}$$

Η συνάρτηση Lagrange $L = T - V$ έχει τη μορφή

$$L = \frac{1}{2}m(\gamma^2 t^2 + \dot{x}^2 + 2\gamma\dot{x}t + 4b^2x^2\dot{x}^2) - mgbx^2 \tag{1.46}$$

Παρατηρήστε ότι η L περιέχει το χρόνο σε δύο όρους. Ο προσθετικός όρος $m\gamma^2t^2/2$ μπορεί να παραλειφθεί άμεσα, αφού δεν συνεισφέρει στις εξισώσεις κίνησης. Ο όρος $m\gamma\dot{x}t$ μπορεί να αντικατασταθεί από έναν όρο ανεξάρτητο του t, αφού

$$\frac{d[m\gamma xt]}{dt} = m\gamma\dot{x}t + m\gamma x \tag{1.47}$$

οπότε $m\gamma\dot{x}t = \frac{d[m\gamma xt]}{dt} - m\gamma x$ και

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - 2\gamma x + 4b^2x^2\dot{x}^2) - mgbx^2 + \frac{d[m\gamma xt]}{dt} = L^* + \frac{d[m\gamma xt]}{dt} \tag{1.48}$$

Σύμφωνα με την αρχή του Hamilton οι συναρτήσεις L και L^* είναι ισοδύναμες, δηλαδή παράγουν τις ίδιες εξισώσεις Lagrange. Όμως η L^* δεν εξαρτάται άμεσα από το χρόνο κι επομένως υπάρχει το ολοκλήρωμα του Jacobi.

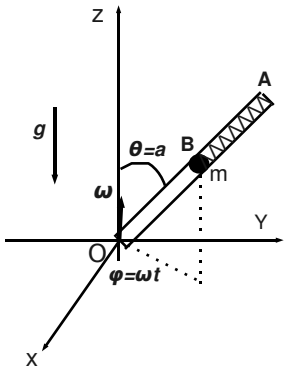
Η εξίσωση κίνησης για την x παίρνει τη μορφή

$$(1+4b^2x^2)\ddot{x} - 4b^2x\dot{x}^2 + 2bgx + \gamma = 0 \tag{1.49}$$

Το σύστημα δεν έχει σημεία ισορροπίας (στο OXZ), αλλά η m μπορεί να ισορροπήσει επάνω στην καμπύλη, διατηρώντας σταθερή την απόσταση $O'x$ (και το z). Η θέση 'ισορροπίας ' προκύπτει θέτοντας $\dot{x} = \ddot{x} = 0$ στην εξίσωση κίνησης και λύνοντας ως προς x, απ' όπου προκύπτει

$$x_0 = -\gamma/(2bg) \tag{1.50}$$

Άσκηση 1.7 Η μάζα m κινείται υποχρεωτικά πάνω στο αβαρές στερεό ραβδί $OA = b$ που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον άξονα Oz, σχηματίζοντας με αυτόν σταθερή γωνία $\theta = a$. Το άκρο Α του ελατηρίου (σταθεράς k) είναι ακλόνητα συνδεδεμένο με τη ράβδο.



Υπάρχουν 2 δεσμοί της κίνησης, οι $\phi = \omega t$ και $\theta = a$. Άρα η m έχει 1 β.ε. και επιλέγουμε ως συντεταγμένη το μέτρο του διανύσματος θέσης $r = OA$. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες της m δίνονται από το μετασχηματισμό

$$x = r\sin a\cos\omega t \quad , \quad y = r\sin a\sin\omega t \quad , \quad z = r\cos a \tag{1.51}$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\sin a\cos\omega t - r\omega\sin a\sin\omega t \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin a\sin\omega t + r\omega\sin a\cos\omega t \\ \dot{z} &= \dot{r}\cos a \end{aligned} \tag{1.52}$$

Η κινητική ενέργεια της m είναι

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 a\, \omega^2) \tag{1.53}$$

η δυναμική ενέργεια είναι

$$V = mgz + V_{\varepsilon\lambda} = mgr\cos a + \frac{1}{2}(\Delta l)^2 \tag{1.54}$$

όπου $l_0 + \Delta l = OA - r \Rightarrow \Delta l = b - r - l_0$. Άρα, η συνάρτηση Lagrange $L = T - V$ έχει τη μορφή

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 a\, \omega^2) - mgr\cos a - \frac{1}{2}k(b - l_0 - r)^2 \tag{1.55}$$

Η εξίσωση κίνησης της r έχει τη μορφή

$$\ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2 a\right) r + g\cos a - \frac{k}{m}(b - l_0) = 0 \tag{1.56}$$

Η εξίσωση είναι γραμμική και η λύση της αναπαριστά απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας (βρίσκεται θέτοντας $\ddot{r} = 0$ στην εξ. κίνησης) με συχνότητα Ω, όπου

$$A = \frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2 a = \Omega^2 \tag{1.57}$$

Αυτό ισχύει βέβαια εφόσον $A > 0 \Rightarrow \omega^2 < k/(m \sin^2 a)$. Δεδομένου ότι η ράβδος περιστρέφεται διαρκώς, η λύση ισορροπίας της (1.56) δεν αντιστοιχεί σε σημείο ισορροπίας αλλά σε κυκλική τροχιά. Η τροχιά αυτή είναι ευσταθής αν $A > 0$. Τέλος, η συνάρτηση Lagrange δεν περιέχει ρητά το χρόνο και άρα υπάρχει το ολοκλήρωμα του Jacobi, το οποίο όμως δεν ταυτίζεται με τη μηχανική ενέργεια, αφού υπάρχει ρεόνομος δεσμός.

Η γενικευμένη ορμή p_r είναι ίση με την ακτινική συνιστώσα της γραμμικής ορμής

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

Η συνάρτηση Hamilton μπορεί να βρεθεί με βάση τον ορισμό

$$\mathcal{H} = p_r\, \dot{r}(p_r) - L(r, \dot{r}(p_r))$$

κάνοντας δηλαδή την αντικατάσταση $\dot{r} = p_r/m$. Έτσι, παίρνουμε

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m\omega^2 \sin^2 a}{2} r^2 + mgr\cos a + \frac{k}{2}(b - l_0 - r)^2 \tag{1.58}$$

Οι κανονικές εξισώσεις του Hamilton δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \dot{r} = & \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \quad p_r/m \\ \dot{p}_r = & \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \quad mr\omega^2 \sin^2 a - mg\cos a + k(b - l_0 - r) \end{aligned} \tag{1.59}$$

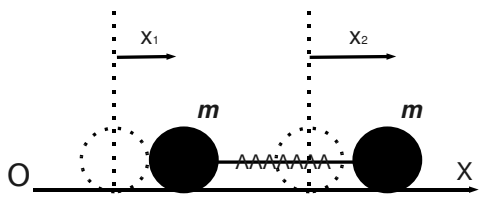
Το σύστημα των παραπάνω δύο διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης είναι πλήρως ισοδύναμο με την εξίσωση 2ης τάξης του Lagrange.

Κεφάλαιο 2

Μικρές Ταλαντώσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε δύο περιπτώσεις συστημάτων με 2 β.ε. που παρουσιάζουν ευσταθείς ταλαντώσεις γύρω από κάποια κατάσταση ισορροπίας. Έτσι, εκτός των εξισώσεων κίνησης, θα υπολογίσουμε τις συχνότητες ταλάντωσης, κάνοντας χρήση της θεωρίας των μικρών ταλαντώσεων.

Άσκηση 2.1: Οι δύο μάζες είναι ίσες και συνδέονται μεταξύ τους με αβαρές ελατήριο σταθεράς k και φυσικού μήκους l_0. Η κίνηση γίνεται κατά μήκος του άξονα Ox και για $t = 0$ το ελατήριο δεν έχει τάση.



Το σύστημα έχει 2 β.ε. (το ελατήριο δεν εισάγει δεσμό). Αφού για $t = 0$ το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, επιλέγω ως συντεταγμένες τις μετατοπίσεις x_1 και x_2 των δύο μαζών από τις αρχικές τους θέσεις. Τότε, το μήκος του ελατηρίου κάθε χρονική στιγμή είναι ίσο με $l = l_0 + x_2 - x_1$ και η επιμήκυνσή του ίση με

$$\Delta l = x_2 - x_1$$

Έτσι η συνάρτηση Lagrange έχει τη μορφή

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2 \tag{2.1}$$

και οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 - k(x_2 - x_1) &= 0 \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Η συνάρτηση Lagrange δεν εξαρτάται από το χρόνο και το ολοκλήρωμα του Jacobi ταυτίζεται με τη μηχανική ενέργεια του συστήματος. Παρατηρήστε ότι αν προσθέσουμε κατά μέλη τις εξισωσεις κίνησης, προκύπτει

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow m\dot{x}_1 + m\dot{x}_2 = C \tag{2.3}$$

δηλαδή η ολική ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή (ολοκλήρωμα της ορμής). Αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος ότι στο σύστημα ασκούνται μόνο οι *εσωτερικές δυνάμεις* επαναφοράς του ελατηρίου.
Οι εξισώσεις κίνησης είναι ήδη γραμμικές και μπορούν να γραφούν υπό μορφή πινάκων

$$M\,\ddot{X} + B\,X = 0 \tag{2.4}$$

όπου M και B οι πίνακες των συντελεστών, $X = (x_1, x_2)$ και $\ddot{X} = (\ddot{x}_1, \ddot{x}_2) = -\omega^2 X$, όπου ω η συχνότητα της ταλάντωσης που θέλουμε να υπολογίσουμε (θεωρούμε $X = De^{i\omega t}$). Πρέπει

$$|B - \omega^2 M| = 0 \Rightarrow (k - m\omega^2)^2 - k^2 = 0$$

απ΄ όπου προκύπτει

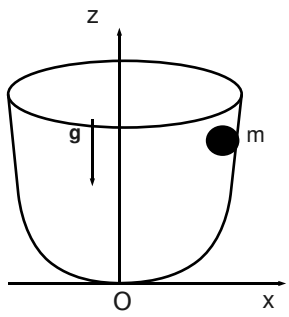
$$\omega^2(m^2\omega^2 - 2k) = 0$$

και οι δύο λύσεις είναι

$$\omega_1 = 0 \quad , \quad \omega_2 = \pm\sqrt{\frac{2k}{m}} \tag{2.5}$$

Η λύση $\omega_1 = 0$ αντιστοιχεί σε μετατόπιση του συστήματος ως στερεό σώμα, με το ελατήριο να διατηρεί σταθερό το μήκος του και ίσο με l_0 (εμφανίζεται αν $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0)$).

Άσκηση 2.2: Η μάζα m κινείται υποχρεωτικά στην επιφάνεια του ελλειπτικού παραβολοειδούς, με εξίσωση $z = x^2 + a^2y^2$, υπό την επίδραση του ομογενούς πεδίου βαρύτητας.



Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας, αφού υπάρχει ένας σκληρόνομος δεσμός. Επιλέγω τις (x, y) ως συντεταγμένες. Ισχύει

$$z = x^2 + a^2y^2 \Rightarrow \dot{z} = 2x\dot{x} + 2a^2y\dot{y} \tag{2.6}$$

Η κινητική ενέργεια είναι

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 4x^2\dot{x}^2 + 4a^4y^2\dot{y}^2 + 8a^2xy\dot{x}\dot{y}) \tag{2.7}$$

και η δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας είναι

$$V = mgz = mg(x^2 + a^2y^2) \tag{2.8}$$

Επομένως,

$$L = \frac{m}{2}[\,(1 + 4x^2)\dot{x}^2 + (1 + 4a^4y^2)\dot{y}^2 + 8a^2xy\dot{x}\dot{y}\,] - mg(x^2 + a^2y^2) \tag{2.9}$$

Οι εξισώσεις Lagrange είναι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\,m(1 + 4x^2)\dot{x} + 4ma^2xy\dot{y}\,] - 4mx\dot{x}^2 - 4ma^2y\dot{x}\dot{y} + 2mgx &= 0 \\ \frac{d}{dt}[\,m(1 + 4a^4y^2)\dot{y} + 4ma^2xy\dot{x}\,] - 4ma^4y\dot{y}^2 - 4ma^2x\dot{x}\dot{y} + 2mga^2y &= 0 \end{aligned}$$

και δε χρειάζεται να προχωρήσουμε τις πράξεις αν θέλουμε μόνο να μελετήσουμε τις μικρές ταλαντώσεις. Η θέση ισορροπίας (θέτουμε $\dot{x} = \dot{y} = \ddot{x} = \ddot{y} = 0$) είναι η προφανής, $x = y = 0$. Η μόνη δεδομένη δύναμη είναι το βάρος του σώματος και η δυναμική ενέργεια είναι πάντοτε $V(x, y) \geq 0$. Για $x = y = 0$, παίρνουμε την ελάχιστη τιμή της, $V(x = 0, y = 0) = 0$ κι επομένως έχουμε ευσταθή ισορροπία. Άρα, η λύση στη γειτονιά της θέσης ισορροπίας είναι γραμμικός συνδυασμός απλών αρμονικών ταλαντώσεων.

Οι συχνότητες των ταλαντώσεων βρίσκονται με βάση τη γνωστή θεωρία, εφόσον πρώτα γραμμικοποιήσουμε τις εξισώσεις κίνησης. Αυτό επιτυγχάνεται πιο εύκολα αν θέσουμε

$$\xi = x - 0 \quad , \quad \eta = y - 0 \tag{2.10}$$

οπότε $\dot{\xi} = \dot{x}$, $\ddot{\xi} = \ddot{x}$, $\dot{\eta} = \dot{y}$ και $\ddot{\eta} = \ddot{y}$, και αναπτύξουμε τη συνάρτηση Lagrange σύμφωνα με το θεώρημα του Taylor, κρατώντας όρους μέχρι 2ης τάξης ως προς τις μικρές ποσότητες. Σύμφωνα με τη θεωρία, οι συναρτήσεις που πολλαπλασιάζονται με τις γενικευμένες ταχύτητες στην T (που είναι τετραγωνική μορφή ως προς τα $\dot{x}$ και $\dot{y}$) αντικαθίστανται απλά από τις σταθερές τιμές τους για $(x, y) = (0, 0)$. Έτσι, η L είναι προσεγγιστικά ίση με

$$L^* = \frac{m}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - mg(\xi^2 + a^2\eta^2) \tag{2.11}$$

αφού οι υπόλοιποι όροι είναι τουλάχιστον 3ου βαθμού ως προς τα (ξ, η) και $(\dot{\xi}, \dot{\eta})$. Οι νέες (γραμμικοποιημένες) εξισώσεις κίνησης είναι

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + 2g\xi &= 0 \\ \ddot{\eta} + 2ga^2\eta &= 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις μπορούν να λυθούν ανεξάρτητα η μία από την άλλη και οι συχνότητες των μικρών ταλαντώσεων είναι οι ρίζες των συντελεστών του ξ και του η, δηλαδή

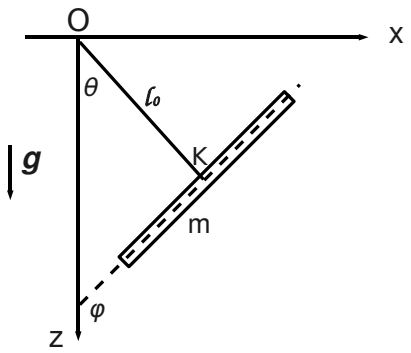
$$\Omega_\xi = \sqrt{2g} \quad , \quad \Omega_\eta = a\sqrt{2g} \tag{2.13}$$

Κεφάλαιο 3

Συστήματα Στερεών Σωμάτων

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την κίνηση στερεών σωμάτων και σύνθετων συστημάτων (υλικά σημεία και στερεά σώματα). Η μελέτη θα εστιαστεί στα ίδια σημεία με αυτά των προβλημάτων του 1ου κεφαλαίου (εξισώσεις Lagrange, ολοκληρώματα της κίνησης, σημεία ισορροπίας και ευστάθεια).

Άσκηση 3.1: Το κέντρο μάζας K της ομογενούς ράβδου μάζας m και μήκους $2l$ συνδέεται με την αρχή των αξόνων μέσω αβαρούς, μη εκτατού, νήματος μήκους l_0. Η κίνηση γίνεται στο κατακόρυφο επίπεδο, υπό την επίδραση του ομογενούς πεδίου βαρύτητας.



Υπάρχει ένας δεσμός ($OK = r = l_0$) κι επομένως η ράβδος έχει 2 β.ε. Δεδομένου ότι κανένα σημείο της ράβδου δεν είναι ακλόνητο, επιλέγω ως σημείο

αναφοράς για τη μελέτη του στερεού το κέντρο μάζας K.

Αν επιλέξω πολικές συντεταγμένες για να περιγράψω την κίνηση του K, τότε είναι $r = a =$ σταθ. και θ η άγνωστη συντεταγμένη. Για να εκφράσω την περιστοφή της ράβδου χρειάζομαι μία επιπλέον γωνία, που να σχηματίζεται από μια σταθερή ευθεία του στερεού (έστω, τον μεγάλο άξονα της ράβδου) και κάποια σταθερή διεύθυνση στον αδρανειακό χώρο (έστω, την Oz). Η γωνία ϕ είναι κατάλληλη επιλογή, αφού $\dot{\phi} = |\vec{\omega}|$. Έτσι η κινητική ενέργεια παίρνει τη μορφή

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}I_K\dot{\phi}^2 \tag{3.1}$$

όπου I_K η ροπή αδρανείας της ράβδου για άξονα που διέχεται από το K και είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος (δηλαδή $\hat{\omega} = \pm\mathbf{j}$). Για ομογενή ράβδο μήκους $2l$, η ροπή ως προς το άκρο (π.χ. A) είναι $I_A = m(2l)^2/3$ και το θεώρημα του Steiner δίνει

$$I_K = I_A - ml^2 \Rightarrow I_K = \frac{ml^2}{3}$$

οι καρτεσιανές συντεταγμένες του K δίνονται από τις σχέσεις

$$x_K = l_0 \sin\theta \quad , \quad y_K = l_0 \cos\theta \tag{3.2}$$

οπότε η T γίνεται

$$T = \frac{1}{2}ml_0^2\dot{\theta}^2 + \frac{ml^2}{6}\dot{\phi}^2$$

ενώ η δυναμική ενέργεια είναι $V = -mgz_K = -mgl_0\cos\theta$. Έτσι, ίσχύει

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml_0^2\dot{\theta}^2 + \frac{ml^2}{6}\dot{\phi}^2 + mgl_0\cos\theta \tag{3.3}$$

Παρατηρήστε ότι, αφού η L δεν περιέχει ρητά το χρόνο και ο δεσμός είναι σκληρόνομος, υπάρχει το ολοκλήρωμα της μηχανικής ενέργειας. Επίσης, η ϕ είναι αγνοήσιμη συντεταγμένη και άρα η γενικευμένη ορμή

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{ml^2}{3}\dot{\phi}$$

αποτελεί επίσης ολοκλήρωμα της κίνησης $p_\phi = C$, που αντιστοιχεί στην στροφορμή της ιδιοπεριστροφής της ράβδου. Από τον ορισμό της p_ϕ προκύπτει ότι η περιστροφική κίνηση της ράβδου γίνεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα

$$\dot{\phi} = \frac{3C}{ml^2}$$

Η εξίσωση κίνησης για τη θ έχει την παρακάτω μορφή

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l_0}\sin\theta = 0 \tag{3.4}$$

και είναι όμοια με αυτή του απλού εκκρεμούς. Το σύστημα μπορεί να έχει σημεία ισορροπίας μόνο αν $C = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = 0$. Για $C \neq 0$ οι πιθανές λύσεις ισορροπίας της θ αντιστοιχούν σε στάση του K αλλά ομαλή κυκλική κίνηση των άκρων της ράβδου. Οι θέσεις στάσης του K βρίσκονται αν θέσουμε $\ddot{\theta} = 0$ στην εξίσωση κίνησης και λύσουμε ως προς θ

$$\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta_{1,2} = 0\ ,\ \pi$$

Είναι προφανές ότι η θ_1 αποτελεί ευσταθή λύση ισορροπίας, ενώ η θ_2 ασταθή. Αυτό αποδεικνύεται αν γραμμικοποιήσουμε την εξίσωση κίνησης (θέτοντας $\theta = \xi - \theta_{1,2}$ και άρα $\ddot{\theta} = \ddot{\xi}$), παίρνοντας το ανάπτυγμα Taylor του $\sin\theta$ γύρω από την αντίστοιχη θέση ισορροπίας. Η γραμμικοποιημένη εξίσωση είναι

$$\ddot{\xi} \pm \frac{g}{l_0}\xi = 0$$

με το $(+)$, που συνεπάγεται απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα $\Omega_\xi = \sqrt{g/l_0}$ για την $\xi(t)$, να αντιστοιχεί στη θέση $\theta_1 = 0$.

Η ορμή p_θ δίνεται από τη σχέση

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l_0^2 \dot{\theta}$$

Έτσι, η συνάρτηση Hamilton του συστήματος είναι

$$\mathcal{H} = \dot{\phi}\, p_\phi + \dot{\theta}\, p_\theta - L = \frac{3p_\phi^2}{2ml^2} + \frac{p_\theta^2}{2ml_0^2} - mgl_0\cos\theta \tag{3.5}$$

και ισούται (αριθμητικά) με το ολοκλήρωμα του Jacobi, το οποίο στην περίπτωσή μας ταυτίζεται με τη μηχανική ενέργεια, $\mathcal{H} = \mathcal{J} = T + V$. Οι κανονικές εξισώσεις είναι

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \ \ \tfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} \ \ &= p_\theta/(ml_0^2) \\ \dot{p}_\theta &= -\tfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \ \ &= -mgl_0\sin\theta \end{aligned} \tag{3.6}$$

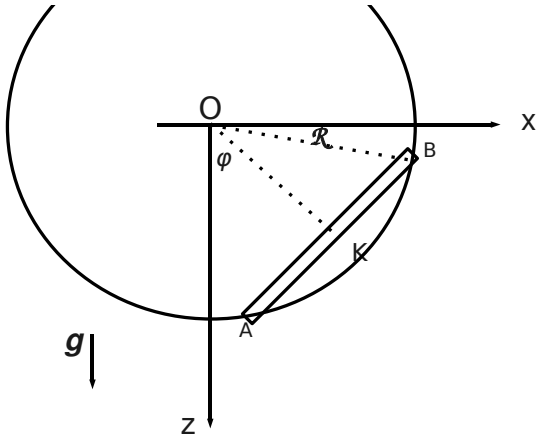
και

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \ \ \tfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi} \ \ &= 3p_\phi/(ml^2) \\ \dot{p}_\phi &= -\tfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \ \ &= 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Οι τέσσερις κανονικές εξισώσεις (1ης τάξης) είναι πλήρως ισοδύναμες με τις δύο εξισώσεις Lagrange (2ης τάξης). Έτσι, αν θέσουμε ίσα με μηδέν τα δεξιά

μέλη και των τεσσάρων εξισώσεων του Hamilton και λύσουμε ως προς τα θ και ϕ, θα προκύψουν τα σημεία ισορροπίας που βρήκαμε και προηγουμένως.

Άσκηση 3.2: Η ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους $2l$ κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο υπό την επίδραση της βαρύτητας, έτσι ώστε τα άκρα της να γλυστρούν επάνω στην περιφέρεια, ακτίνας R.



Υπάρχουν δύο ανεξάρτητοι σκληρόνομοι δεσμοί, $OA = R$ και $OB = R$. Επομένως η ράβδος έχει 1 β.ε. και η γωνία ϕ που σχηματίζει ο άξονας OK του στερεού με την κατακόρυφο Oz είναι μια κατάλληλη γενικευμένη συντεταγμένη. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες του K δίνονται από τις σχέσεις

$$x_K = OK \sin\phi = b \sin\phi \quad , \quad z_K = OK \cos\phi = b \cos\phi \tag{3.8}$$

όπου $b = OK = \sqrt{R^2 - l^2}$ το σταθερό μήκος της μεσοκάθετης. Η κινητική ενέργεια είναι

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}_K^2 + \dot{z}_K^2) + \frac{1}{2} I_K \dot{\phi}^2 = \left(\frac{mb^2}{2} + \frac{ml^2}{6} \right) \dot{\phi}^2 \tag{3.9}$$

και η δυναμική ενέργεια είναι $V = -mgz_K = -mgb\cos\phi$. Άρα

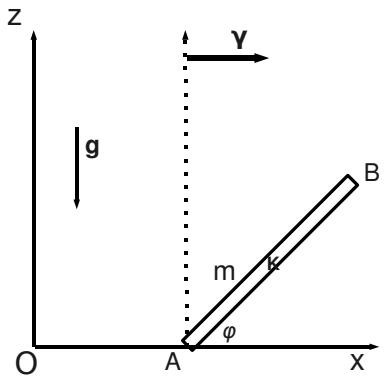
$$L = \left(\frac{mb^2}{2} + \frac{ml^2}{6} \right) \dot{\phi}^2 + mgb\cos\phi \tag{3.10}$$

και η εξίσωση κίνησης είναι

$$\ddot{\phi} + \left(\frac{3gb}{3b^2 + l^2} \right) \sin\phi = 0 \tag{3.11}$$

Οι λύσεις ισορροπίας ($\dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0$) αντιστοιχούν σε $\sin\phi = 0 \Rightarrow \phi_{1,2} = 0, \pi$, με προφανή ευσταθή λύση την $\phi_1 = 0$ και συχνότητα μικρών ταλαντώσεων ίση με $\Omega = \sqrt{3gb/(3b^2 + l^2)}$. Παρατηρήστε, τέλος, ότι υπάρχει το ολοκλήρωμα της μηχανικής ενέργειας, αφού $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ και οι δεσμοί είναι σκληρόνομοι.

Άσκηση 3.3: Η ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους $2l$ κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο υπό την επίδραση της βαρύτητας. Το άκρο A επιταχύνεται ως προς το O με σταθερή επιτάχυνση γ και είναι υποχρεωμένο να βρίσκεται πάντοτε στον άξονα OX.



Οι δεσμοί $X(A) = 0$ και $Z(A) = 0$ μειώνουν τους βαθμούς ελευθερίας σε έναν. Έστω ϕ η γενικευμένη συντεταγμένη. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες του K **στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς** OXZ είναι

$$\begin{aligned} X &= \tfrac{1}{2}\gamma t^2 + l\cos\phi \quad &\Rightarrow \dot{X} = \gamma t - l\dot{\phi}\sin\phi \\ Z &= \quad l\sin\phi \quad &\Rightarrow \dot{Z} = l\dot{\phi}\cos\phi \end{aligned} \tag{3.12}$$

Η κινητική ενέργεια παίρνει τη μορφή

$$T = \frac{m\gamma^2 t^2}{2} + \frac{ml^2\dot{\phi}^2}{2} - m\gamma l t\dot{\phi}\sin\phi + \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{3}\right)\dot{\phi}^2 \tag{3.13}$$

και η δυναμική ενέργεια είναι $V = mgz = mgl\sin\phi$. Άρα

$$L = \frac{m\gamma^2 t^2}{2} + \frac{4ml^2\dot{\phi}^2}{6} - m\gamma l t\dot{\phi}\sin\phi - mgl\sin\phi \tag{3.14}$$

Ο πρώτος όρος της T μπορεί να παραλειφθεί, αφού δεν συνεισφέρει στις εξισώσεις κίνησης. Επίσης, ο όρος $-m\gamma l t\dot{\phi}\sin\phi$ μπορεί να γραφεί ως

$$-m\gamma lt\dot{\phi}\sin\phi = \frac{d}{dt}[m\gamma lt\cos\phi] - m\gamma l\cos\phi \tag{3.15}$$

Παραλείποντας την ολική παράγωγο του χρονοεξαρτημένου όρου, η νέα συνάρτηση Lagrange παίρνει τη μορφή

$$L^* = \frac{4ml^2\dot{\phi}^2}{6} - m\gamma l\cos\phi - mgl\sin\phi \tag{3.16}$$

Σύμφωνα με την αρχή του Hamilton, οι L και L^* είναι απολύτως ισοδύναμες. Παρατηρήστε ότι $\frac{\partial L^*}{\partial t} = 0$ κι επομένως υπάρχει το ολοκλήρωμα του Jacobi, το οποίο βέβαια δεν είναι ίσο με τη μηχανική ενέργεια του συστήματος, αφού ο χρόνος εμφανίζεται ρητά στο μετασχηματισμό των συντεταγμένων.

Η εξίσωση κίνησης είναι

$$\frac{4l}{3}\ddot{\phi} - \gamma\sin\phi + g\cos\phi = 0 \tag{3.17}$$

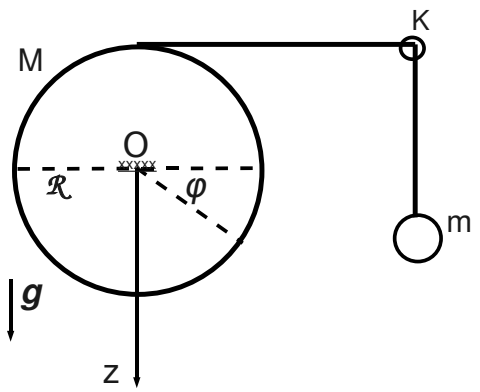
Το σύστημα δεν έχει σημεία ισορροπίας στον αδρανειακό χώρο (λόγω της $\vec{\gamma}$). Η ράβδος όμως μπορεί να ισορροπήσει σε σταθερή γωνία ϕ, ώστε το K (και κάθε σημείο της ράβδου) να εκτελεί ευθύγραμμη, ομαλά επιταχυνόμενη, κίνηση. Θέτοντας $\ddot{\phi} = 0$ στην εξίσωση κίνησης, προκύπτει η λύση ισορροπίας

$$\tan\phi = \frac{g}{\gamma}$$

Προσοχή: Η ράβδος δέχεται (εκτός του βάρους της) και τη δύναμη αδρανείας που αντιστοιχεί στην επιτάχυνση γ. Επομένως, αν προσπαθούσαμε να βρούμε τα σημεία ισορροπίας ως τα ελάχιστα της V θα ήταν λάθος! Η σωστή λύση μπορεί να βρεθεί από τα ελάχιστα του *γενικευμένου δυναμικού* $V' = V - m\gamma x$, του οποίου η παράγωγος δίνει τη συνισταμένη δύναμη (με αντίθετο πρόσημο).

Άσκηση 3.4: Η ομογενής τροχαλία, μάζας M και ακτίνας R, περιστρέφεται γύρω από το ακλόνητο σημείο O, ενώ η m κινείται κατά την κατακόρυφο υπό την επίδραση της βαρύτητας και είναι συνδεδεμένη με την τροχαλία μέσω αβαρούς, μη εκτατού, νήματος, το οποίο μπορεί να τυλίγεται ομαλά στην τροχαλία. Το στήριγμα K θεωρείται ιδανικό.

Η μάζα m έχει 1 β.ε. και η τροχαλία επίσης 1 β.ε. (μόνο περιστρέφεται). Όμως οι κινήσεις των δύο σωμάτων δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αν το νήμα είναι μη εκτατό, τότε κάθε σημείο του έχει την ίδια (κατά μέτρο) ταχύτητα με την m, δηλαδή $\dot{z}$. Αν τώρα το νήμα τυλίγεται ομαλά στην τροχαλία (δεν ολισθαίνει και δεν υπάρχουν τριβές), τότε κάθε σημείο της περιφέρειας της



τροχαλίας πρέπει να έχει επίσης την ίδια *γραμμική* ταχύτητα (πάλι, κατά μέτρο). Επομένως, η συνθήκη ομαλής κύλησης του νήματος επί της τροχαλίας επιβάλει τον δεσμό

$$\dot{z} = R\dot{\phi} \Rightarrow z = R\phi + z_0 \tag{3.18}$$

όπου $R\dot{\phi}$ η γραμμική ταχύτητα τυχαίου σημείου της τροχαλίας. Αν για $t = 0$ ισχύει $(\phi_0, z_0) = (0, 0)$ τότε η συνθήκη κύλησης σημαίνει ότι η απομάκρυνση της m από την αρχική της θέση είναι ίση με το τόξο που βαίνει στη γωνία ϕ (βλ. σχήμα).

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = T_M + T_m = \frac{1}{2}I_o\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + m\right)R^2\dot{\phi}^2 \tag{3.19}$$

και $V = -mgz = -mgR\phi$. Άρα

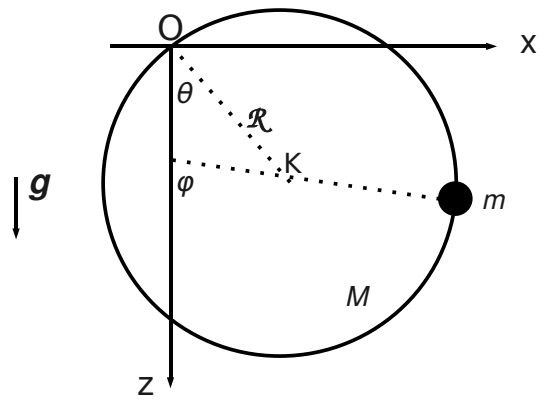
$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + m\right)R^2\dot{\phi}^2 + mgR\phi \tag{3.20}$$

Η εξίσωση κίνησης έχει τη μορφή

$$\ddot{\phi} = \frac{m}{M/2 + m}\,g \tag{3.21}$$

δηλαδή η m εκτελεί πτώση με σταθερή επιτάχυνση. Η πτώση δεν είναι 'ελεύθερη' ($\ddot{\phi} < g$), αφού μέρος της ολικής ενέργειας (που διατηρείται σταθερή) χρησιμεύει στην περιστροφή της τροχαλίας, η οποία έχει μη μηδενική αδράνεια.

Άσκηση 3.5: Ομογενές κυκλικό καλώδιο, μάζας M και ακτίνας R, περιστρέφεται γύρω από άξονα κατακόρυφο στο επίπεδό του, που περνάει από το O. Η m κινείται χωρίς τριβή επάνω στην περιφέρεια του καλωδίου.



Το καλώδιο έχει 1 β.ε. και η θ περιγράφει την κίνησή του (περιστροφή) γύρω από το ακλόνητο σημείο O. Η m έχει επίσης 1 β.ε. αφού η απόστασή της από το K είναι σταθερή και ίση με R. Επιλέγουμε ως δεύτερη γενικευμένη συντεταγμένη τη γωνία που σχηματίζει η ακτίνα Km με την κατακόρυφο Oz. Η ροπή αδρανείας του κυκλικού καλωδίου ως προς το O είναι $I_o = 2MR^2$. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες της m είναι

$$x = R\sin\theta + R\sin\phi \quad , \quad z = R\cos\theta + R\cos\phi \tag{3.22}$$

οπότε η κινητική ενέργεια είναι

$$T = T_M + T_m = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I_o}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{mR^2}{2}[\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi)] + MR^2\dot{\theta}^2 \tag{3.23}$$

και η δυναμική ενέργεια είναι

$$V = V_M + V_m = -mgz - Mgz_K = -mgR(\cos\theta + \cos\phi) - MgR\cos\theta \tag{3.24}$$

Επομένως, η συνάρτηση Lagrange έχει τη μορφή

$$L = \frac{mR^2}{2}[\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi)] + MR^2\dot{\theta}^2 + mgR(\cos\theta + \cos\phi) + MgR\cos\theta \tag{3.25}$$

και οι δύο εξισώσεις κίνησης είναι

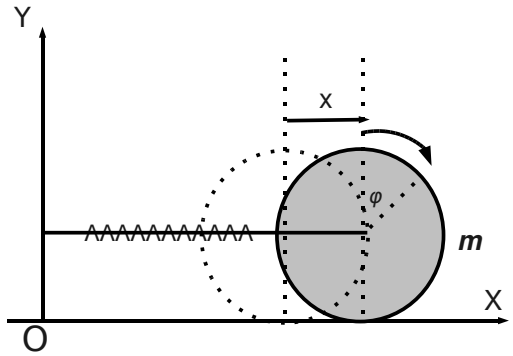
$$(m+2M)^2\ddot{\theta} + mR^2\ddot{\phi}\cos(\theta-\phi) + mR^2\dot{\phi}^2\sin(\theta-\phi) + (m+M)gR\sin\theta = 0$$
$$\ddot{\phi} + \ddot{\theta}\cos(\theta-\phi) - \dot{\theta}^2\sin(\theta-\phi) + (g/R)\sin\phi = 0 \qquad (3.26)$$

Προφανώς, η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται (ολοκλήρωμα της ενέργειας). Από τις εξισώσεις κίνησεις προκύπτουν τα σημεία ισορροπίας (για $\dot{\phi} = \ddot{\phi} = \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$), ως λύσεις του συστήματος

$$\sin\theta = 0 \quad , \quad \sin\phi = 0$$

Το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις, τα σημεία $(\phi_1 = 0, \theta_1 = 0)$, $(\phi_2 = 0, \theta_2 = \pi)$, $(\phi_3 = \pi, \theta_3 = 0)$ και $(\phi_4 = \pi, \theta_4 = \pi)$. Από αυτά μόνο το (ϕ_1, θ_1) αντιστοιχεί σε ευσταθή ισορροπία (αποδείξτε το!).

Άσκηση 3.6: Ο ομογενής κυκλικός δίσκος, μάζας m και ακτίνας R, κυλίεται ομαλά πάνω στον άξονα Ox, ενώ το κέντρο μάζας του συνδέεται με τον άξονα Oz (σε ύψος R) με ιδανικό ελατήριο (σταθεράς k και φυσικού μήκους l_0). Για $t = 0$ το ελατήριο δεν έχει τάση.



Ο δίσκος έχει 1 β.ε., αφού $z_K = R =$σταθ. και $\dot{x} = R\dot{\phi}$ (συνθήκη ομαλής κύλησης), όπου x η απομάκρυνση από την αρχική θέση ισορροπίας. Επομένως

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_K\dot{\phi}^2 = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{mR^2}{4}\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 = \frac{3m}{4}\dot{x}^2 \qquad (3.27)$$

και η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι απλά $V = \frac{k}{2}x^2$. Άρα

$$L = \frac{3m}{4}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \tag{3.28}$$

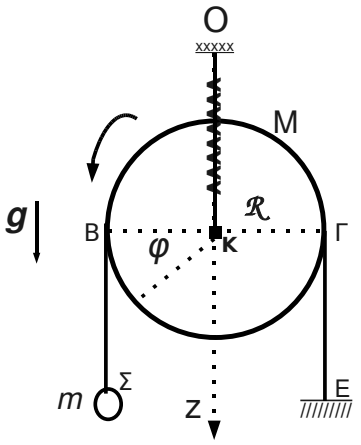
Η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3m}x = 0 \tag{3.29}$$

με $2k/(3m) > 0$. Η εξίσωση είναι γραμμική και η λύση της αναπαριστά απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας ($x_0 = 0$), με συχνότητα

$$\Omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

Άσκηση 3.7: Η ομογενής τροχαλία, μάζας M και ακτίνας R, περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας της K, το οποίο κινείται κατά την κατακόρυφο και συνδέεται με το ακλόνητο σημείο O με ιδανικό ελατήριο (σταθεράς k και φυσικού μήκους l_0). Η m κινείται κατά την κατακόρυφο και είναι συνδεδεμένη με την τροχαλία μέσω αβαρούς, μη εκτατού, νήματος (μήκους l_ν), το οποίο μπορεί να κινείται ομαλά επάνω στην τροχαλία. Το νήμα στηρίζεται στο ακλόνητο σημείο E.



Η τροχαλία περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας της, το οποίο κινείται κατακόρυφα (άρα 2 β.ε., έστω z_K και ϕ). Η m κινείται κατά τον άξονα Oz (1 β.ε., έστω z). Υπάρχουν δύο δεσμοί της κίνησης: (α) το σταθερό μήκος

του νήματος και (β) η ομαλή κύληση του νήματος πάνω στην τροχαλία. Άρα, τελικά, το σύστημα έχει 1 β.ε. και επιλέγουμε την z της m ως γενικευμένη συντεταγμένη.

Η ομαλή κύληση του νήματος συνεπάγεται ότι η ταχύτητα κάθε σημείου του νήματος θα είναι ίση (κατά μέτρο) με τη γραμμική ταχύτητα τυχόντος σημείου στην περιφέρεια της τροχαλίας (πάντα ως προς το K). Με άλλα λόγια, ο ρυθμός μεταβολής του μήκους ΒΣ

$$\frac{d(B\Sigma)}{dt} = \dot{z} - \dot{z}_K$$

(δηλαδή, η σχετική ταχύτητα της m ως προς το K) πρέπει να είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής του τόξου που βαίνει στη γωνία ϕ

$$\dot{z} - \dot{z}_K = R\dot{\phi} \tag{3.30}$$

Ο δεύτερος δεσμός της κίνησης είναι ότι το μήκος του νήματος, l_ν, είναι σταθερό. Αν h είναι το συνολικό ύψος OE, τότε

$$l_\nu = z + \pi R + h - z_K \Rightarrow z_K = \frac{z-b}{2} \tag{3.31}$$

όπου $b = l_\nu - h - \pi R$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που εκφράζουν τους δύο δεσμούς, η κινητική ενέργεια γράφεται

$$T = T_m + T_M = \frac{m}{2}\dot{z}^2 + \frac{M}{2}\dot{z}_K^2 + \frac{I_K}{2}\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{3M}{8}\right)\dot{z}^2 \tag{3.32}$$

όπου $I_K = MR^2/2$. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} V = V_m + V_M + V_{\varepsilon\lambda} = & \quad -mgz - Mgz_K + \tfrac{k}{2}(z_K - l_0)^2 \\ = & \quad -\left(m + \tfrac{M}{2}\right)gz + \tfrac{k}{2}\left(\tfrac{z-b}{2} - l_0\right)^2 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Άρα

$$L = \frac{1}{2}\left(m + \frac{3M}{8}\right)\dot{z}^2 + \left(m + \frac{M}{2}\right)gz - \frac{k}{2}\left(\frac{z-b}{2} - l_0\right)^2 \tag{3.34}$$

και η εξίσωση κίνησης είναι

$$\left(m + \frac{3M}{8}\right)\ddot{z} - \left(m + \frac{M}{2}\right)g + \frac{k}{2}\left(\frac{z}{2} - \frac{b}{2} - l_0\right) = 0 \tag{3.35}$$

Θέτοντας $\ddot{z} = 0$, προκύπτει η λύση ισορροπίας

$$z_* = b + 2l_0 + 2(2m + M)g/k$$

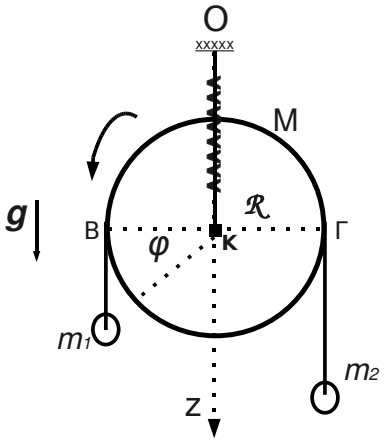
και αν ορίσουμε την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας ως $x = z - z_*$, η εξίσωση εξέλιξης του x είναι

$$\left(m\frac{3M}{8}\right)\ddot{x} + \frac{k}{4}x = 0 \tag{3.36}$$

και η λύση της είναι απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{4(m + 3M/8)}}$$

Άσκηση 3.8: Η ομογενής τροχαλία, μάζας M και ακτίνας R, περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας της K, το οποίο κινείται κατά την κατακόρυφο και συνδέεται με το ακλόνητο σημείο O με ιδανικό ελατήριο (σταθεράς k και φυσικού μήκους l_0). Οι m_1 και m_2 κινούνται κατά την κατακόρυφο και είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους με αβαρές, μη εκτατό, νήμα (μήκους l_ν), το οποίο μπορεί κινείται ομαλά στην τροχαλία.



Το σύστημα έχει επιπλέον ένα β.ε., που αντιστοιχεί στην κατακόρυφη κίνηση της m_2 (δηλαδή, την z_2). Όπως και στην προηγούμενη άσκηση, υπάρχουν οι δεσμοί του σταθερού μήκους του νήματος, l_ν και της ομαλής κύλησης του νήματος, που εκφράζονται από τις εξισώσεις

$$l_\nu = (z_1 - z_K) + \pi R + (z_2 - z_K) \tag{3.37}$$

και

$$\dot{z}_1 - \dot{z}_K = R\dot{\phi} \tag{3.38}$$

Συνδυάζοντας τις δύο εξισώσεις προκύπτει ότι, για την m_2, ισχύει $\dot{z}_2 - \dot{z}_K = -R\dot{\phi}$. Το αποτέλεσμα είναι λογικό, αφού οι m_1 και m_2 οφείλουν να κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις.
Με βάση τα παραπάνω, επιλέγουμε ως γενικευμένες συντεταγμένες τις z_1 και z_K. Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2}\dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{z}_2^2 + \frac{M}{2}\dot{z}_K^2 + \frac{I_K}{2}\dot{\phi}^2 \\ &= \frac{m_1}{2}\dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2}(2\dot{z}_K - \dot{z}_1)^2 + \frac{M}{2}\dot{z}_K^2 + \frac{I_K}{2R^2}(\dot{z}_1 - \dot{z}_K)^2 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Η δυναμική ενέργεια έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} V &= -m_1 g z_1 - m_2 g z_2 - M g z_K + \frac{k}{2}(z_K - l_0)^2 \\ &= -m_1 g z_1 - m_2 g(2z_K - z_1) + M g z_K - \frac{1}{2}k(z_K - l_0)^2 \end{aligned} \tag{3.40}$$

και $L = T - V$. Προφανώς, η μηχανική ενέργεια αποτελεί ολοκληρώμα της κίνησης. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $I_K = MR^2/2$, οι εξισώσεις κίνησης παίρνουν τη μορφή

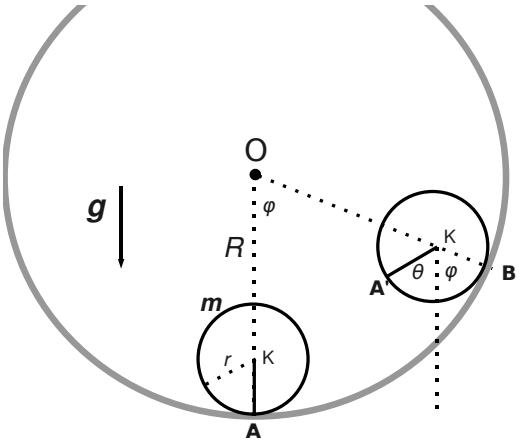
$$\begin{aligned} m_1\ddot{z}_1 - m_2(2\ddot{z}_K - \ddot{z}_1) + M(\ddot{z}_1 - \ddot{z}_K)/2 - (m_1 - m_2)g &= 0 \\ 2m_2(2\ddot{z}_K - \ddot{z}_1) + M\ddot{z}_K - M(\ddot{z}_1 - \ddot{z}_K)/2 - (2m_2 + M)g + k(z_K - l_0) &= 0 \end{aligned}$$

Μηδενίζοντας τις επιταχύνσεις, προκύπτει ότι σημείο ισορροπίας υπάρχει μόνο αν $m_1 = m_2 = m$. Σε αυτή την περίπτωση, η θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση

$$z_K = l_0 + (2m + M)\frac{g}{k}$$

Άσκηση 3.9: Η ομογενής σφαίρα, μάζας m και ακτίνας r, κυλίεται ομαλά, υπό την επίδραση του βάρους της, στο εσωτερικό της κυκλικής περιφέρειας (ακτίνας R). Η κίνηση γίνεται στο κατακόρυφο επίπεδο που περνάει από τα O και K.

Ομαλή κύληση της m σημαίνει ότι το τόξο AB που διαγράφει το σημείο επαφής θα είναι ίσο με το τόξο BA′ που διαγράφει η σταθερή ακτίνα KA. Έτσι, ενώ AB$= R\phi$, η ακτίνα KA διανύει τόξο $r(\phi + \theta)$. Επομένως,



$$\dot{\theta} = \left(\frac{R-r}{r}\right)\dot{\phi}$$

Η σφαίρα έχει επομένως ένα βαθμό ελευθερίας (έστω τη ϕ). Η ροπή αδρανείας της σφαίρας είναι $I_K = 2mr^2/5$. Η κινητική ενέργεια είναι

$$T = \frac{m}{2}(R-r)^2\dot{\phi}^2 + \frac{2mr^2}{10}\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\dot{\phi}^2 = \frac{7m(R-r)^2}{10}\dot{\phi}^2 \tag{3.41}$$

και η δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας είναι

$$V = -mgz_K = -mg(R-r)\cos\phi \tag{3.42}$$

Άρα

$$L = \frac{7m(R-r)^2}{10}\dot{\phi}^2 + mg(R-r)\cos\phi \tag{3.43}$$

και η εξίσωση κίνησης είναι

$$\ddot{\phi} + \frac{5g}{7(R-r)}\sin\phi = 0 \tag{3.44}$$

Παρατηρήστε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι όμοια με αυτή του απλού εκκρεμούς. Το σημείο ευσταθούς ισορροπίας αντιστοιχεί σε $\phi = 0$. Στη γειτονιά του σημείου ισορροπίας ισχύει $\sin\phi \approx \phi$ και η γραμμικοποιημένη εξίσωση κίνησης έχει τη μορφή

$$\ddot{x} + \frac{5g}{7(R-r)}x = 0$$

που αναπαριστά απλή αρμονική ταλάντωση, με συχνότητα $\Omega = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$.