

Δυναμική των Αστεροειδών στους συντονισμούς 2:1 και 3:2

Γ. Βουγιατζής και Ι. Χατζηδημητρίου
 Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής
 Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 54006
 email: voyatzis@auth.gr

Περίληψη

Συμπεράσματα για την δυναμική των αστεροειδών στις περιοχές των συντονισμών 2:1 και 3:2 μπορούν να προκύψουν με χαρτογράφηση των ομαλών και χαοτικών τροχιών. Η χαρτογράφηση αυτή γίνεται εφικτή με τη χρήση των συμπλεκτικών απεικονίσεων και της φασματικής ανάλυσης.

1 Εισαγωγή

Οι κινήσεις των αστεροειδών στο πλανητικό σύστημα αποτελούν ένα από τα πιο ενδιαφέροντα προβλήματα της Δυναμικής. Η συσχέτιση των χάσμάτων στην κατανομή των τροχιών τους (Kirkwood gaps) με τους συντονισμούς (δηλ. όπου ο λόγος των περιόδων περιστροφής του αστεροειδή και του πλανήτη Δία είναι ρητός αριθμός) οδήγησε στην πεποίθηση ότι τα παραπάνω χάσματα οφείλονται στην ύπαρξη χαοτικών τροχιών σε αυτές τις περιοχές, οι οποίες επιτρέπουν στους αστεροειδείς να απομακρυνθούν από τις κλασικές ελλειπτικές τους τροχιές.

Χρησιμοποιώντας ως αρχικό μοντέλο το περιορισμένο πρόβλημα των τριών σωμάτων (ΠΠ3Σ) οι εργασίες του Wisdom κατά τη δεκαετία του '80 έδειξαν ότι πράγματι στον συντονισμό 3:1 η χαοτική συμπεριφορά του συστήματος δεν επιτρέπει μακροχρόνια παραμονή αστεροειδών σε αυτή την περιοχή (βλ [1]). Παρόμοια αποτελέσματα προέκυψαν και για τους συντονισμούς 4:1, 5:2 και 7:3 όχι όμως και για τον συντονισμό 2:1 (Hecuba gap) όπου η διάχυση των αστεροειδών, όπως προκύπτει με βάση το ΠΠ3Σ, φαίνεται να είναι πολύ αργή. Ιδιαίτερο επίσης ενδιαφέρον παρουσιάζει ο συντονισμός 3:2 όπου αντί για χάσμα παρατηρείται συσώρευση αστεροειδών (Hilda group). Κατά τη δεκαετία του '90 αρκετές εργασίες αναφέρθηκαν στους συντονισμούς 2:1 και 3:2, με στόχο την εξήγηση της ιδιαίτερης συμπεριφοράς τους μέσω της δυναμικής (βλ [2]).

Όπως αναφέρουμε παραπάνω η μελέτη, των συντονισμών βασίζεται στο ΠΠ3Σ. Λαμβάνοντας υπόψη και τις διαταραχές στην κίνηση του δευτερεύοντος σώματος (του Δία) από εξωτερικούς πλανήτες (κυρίως του Κρόνου) έχουμε ένα μοντέλο που προσεγγίζει με καλή ακρίβεια το φυσικό πρόβλημα. Όμως οι πολλοί βαθμοί ελευθερίας (BE) του συστήματος (4 για την ακρίβεια) κάνουν δύσκολη την εξαγωγή γενικών συμπερασμάτων. Η μελέτη τους στηρίζεται κυρίως είτε σε αριθμητικές ολοκληρώσεις μεμονωμένων τροχιών είτε στη μέθοδο "averaging" για την εξαγωγή ποιοτικών συμπερασμάτων.

Θα αναφερθούμε στη μελέτη των συντονισμών 2:1 και 3:2 με την μέθοδο της κατασκευής "συμπλεκτικών απεικονίσεων" και τη μέθοδο εντοπισμού των χαοτικών και τακτικών τροχιών μέσω μιας φασματικής ανάλυσης βραχυπρόθεσμων χρονοσειρών. Με τον παραπάνω συνδυασμό μας δίνεται η δυνατότητα μιας λεπτομερούς χαρτογράφησης των τακτικών και χαοτικών περιοχών σε υποσύνολα του χώρου των φάσεων και την διεξαγωγή συμπερασμάτων για την μακροπρόθεση συμπεριφορά των αστεροειδών. Η εργασία αυτή περιορίζεται στη μελέτη του επίπεδου προβλήματος.

2 Η συμπλεκτική απεικόνιση και η ανάλυση τροχιών

Χρησιμοποιώντας κατάλληλες γενικευμένες συντεταγμένες στην περιοχή ενός συγκεκριμένου συντονισμού $p : q$, μετά από "averaging" ως προς τις γρήγορες γωνίες, προκύπτει η "averaged" Χαμιλτονιανή του συστήματος στις μεταβλητές δράσης-γωνίας S, N, S_z και σ, ν, σ_z (βλ [3]):

$$\hat{H} = -\frac{(1-\mu)^2}{2L^2} - \frac{p}{q}L + \mu R^*(S, N, S_z, \sigma, \nu, \sigma_z; e', i') \quad (1)$$

όπου R^* είναι η συνάρτηση διαταραχής, η οποία μπορεί να γραφεί σε μορφή αναπτύγματος, $\mu \approx 0.001$ η κανονικοποιημένη μάζα του Δία, e', i' η εκκεντρότητα και η κλίση του Δία. Τα τροχιακά χαρακτηριστικά a, e, i του αστεροειδή δηλ. ο μεγάλος ημιάξονας, η εκκεντρότητα και η κλίση, αντίστοιχα, είναι

$$L = \sqrt{(1-\mu)a}, \quad G = L\sqrt{1-e^2}, \quad H = G \cos i \quad (2)$$

όπου L, G, H είναι οι μεταβλητές δράσης Delaunay και $S = L - G, S_z = G - H, N = \frac{p}{q}L - H$.

2.1 Η συμπλεκτική Απεικόνιση

Σύμφωνα με τον Χατζηδημητρίου [4] από την Χαμιλτονιανή (1) μπορεί να προκύψει μια συμπλεκτική απεικόνιση με περίοδο επανάληψης T (=περίοδος περιφοράς του Δία):

$$S^n, N^n, S_z^n, \sigma^n, \nu^n, \sigma_z^n \rightarrow S^{n+1}, N^{n+1}, S_z^{n+1}, \sigma^{n+1}, \nu^{n+1}, \sigma_z^{n+1} \quad (3)$$

από την γενέτειρα συνάρτηση

$$W = S^{n+1}\sigma^n + N^{n+1}\nu^n + S_z^{n+1}\sigma_z^n + T\hat{H}(S^{n+1}, N^{n+1}, S_z^{n+1}, \sigma^n, \nu^n, \sigma_z^n) + H_c \quad (4)$$

Η απεικόνιση που προκύπτει είναι από κατασκευής συμπλεκτική. Ο όρος H_c , που ονομάζεται "διορθωτικός όρος", επιλέγεται έτσι ώστε τα σταθερά σημεία της απεικόνισης (3) να συμπίπτουν ως προς τη θέση και τους δείκτες ευστάθειας με τις περιοδικές τροχιές του αρχικού συστήματος (ΠΠ3Σ). Υπό τις παραπάνω προϋποθέσεις η απεικόνιση (3) περιγράφει την τοπολογία μιας τομής Poincare του χώρου των φάσεων του αρχικού συστήματος.

Για την παρούσα εργασία γίνεται χρήση των συμπλεκτικών απεικονίσεων της εργασίας [5] με $e' = 0.048$ και $i = i' = 0$ (δηλαδή το επίπεδο έλλειπτικό πρόβλημα).

2.2 Η φασματική ανάλυση τροχιών

Το αρχικό σύστημα, και κατ' επέκταση η απεικόνιση, περιγράφουν ένα διαταραγμένο χαμιλτονιανό σύστημα $H = H_0 + \varepsilon H_1$. Η εξέλιξη στο χώρο φάσεων γίνεται είτε πάνω σε αναλλοίωτους τόρους είτε μέσα σε χαοτικές ζώνες οι οποίες μπορούν να επικαλύπτονται ή να επικοινωνούν, δίνοντας τη δυνατότητα αργής ή γρήγορης διάχυσης προς διάφορες διευθύνσεις. Ο διαχωρισμός των παραπάνω περιπτώσεων μπορεί να μελετηθεί με τη βοήθεια της μεθόδου της "φασματικής ανάλυσης των ολοκληρωμάτων" [6] την οποία περιγράφουμε συνοπτικά παρακάτω.

Έστω $F = F(J_1, J_2, \dots)$, με J_i τις μεταβλητές δράσης, είναι ένα ολοκλήρωμα της H_0 . Υπό την επίδραση της διαταραχής εH_1 η F μεταβάλλεται με το χρόνο κατά μήκος μιας τροχιάς, οπότε $F = F(t)$. Έστω $P(f)$ η φασματική πυκνότητα της $F(t)$ για το χρονικό διάστημα $[0, T_0]$, $T_0 \gg 1$. Αν η $F(t)$ υπολογίζεται σε τροχιά που εξελίσσεται πάνω σε αναλλοίωτο τόρο τότε

$$P(f) < (\gamma/f) \exp\left(\frac{-\alpha}{f^k}\right) \quad \text{για } f \in (0, f_0), f_0 = O(\varepsilon) \quad (5)$$

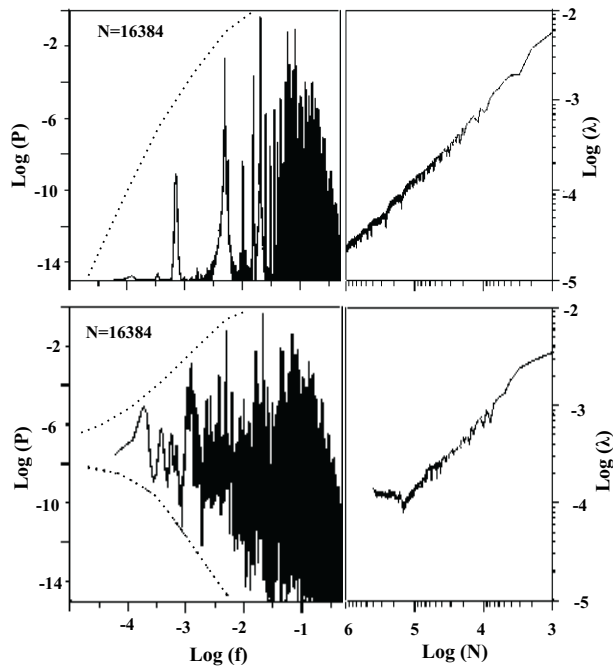
όπου γ, k, α θετικές σταθερές. Δηλαδή για τακτικές τροχιές έχουμε $\lim_{f \rightarrow 0} P(f) = 0$, ενώ διαφορετικά η $P(f)$ τείνει (για $f \rightarrow 0$) είτε σε μια θετική τιμή διάφορη του μηδενός είτε φαίνεται να αποκλίνει ως θόρυβος $1/f$. Έτσι η ύπαρξη σημαντικών και συνεχόμενων φασματικών γραμμών στις χαμηλές συχνότητες υποδηλώνει χαοτική συμπεριφορά.

Στην πράξη, η φασματική πυκνότητα υπολογίζεται με τη χρήση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT) πάνω σε μια διακριτή χρονοσειρά F_1, F_2, \dots, F_{2N} , όπου $F_i = F(i \cdot \Delta t)$, παρέχοντας μια διακριτή συνάρτηση φασματικής πυκνότητας P_1, P_2, \dots, P_N ($P_i = P(f_i)$) και η ύπαρξη ή όχι σημαντικών φασματικών γραμμών στις χαμηλές συχνότητες μπορεί να εκτιμηθεί με τον δείκτη "χαμηλής ισχύος" $\beta_{(K)} < 0$ που ορίζεται ως:

$$\beta_{(K)} = \log\left(\sum_{i=1}^K P_i\right) - \log \bar{P}, \quad \bar{P} = \sum_{i=1}^N P_i \quad (6)$$

όπου $0 < K \ll N$. Γενικά μπορούμε να ξεχωρίσουμε τρεις περιοχές για τον δείκτη $\beta_{(K)}$:

- $\beta_{(K)} < \beta_0$: τακτικές τροχιές (υποθέτοντας σύγκλιση)
- $\beta_0 < \beta_{(K)} < \beta_c$: τροχιές πάνω σε ισχυρά διαταραγμένους τόρους ή σε πολύ στενές χαοτικές ζώνες



Σχήμα 1: Η φασματική πυκνότητα και ο εκθέτης Liapounov για μια ομαλή τροχιά με $\beta_{(8)} \approx -14$ (επάνω) και μια ασθενή χαοτική τροχιά με $\beta_{(8)} \approx -6$ (κάτω). N είναι ο αριθμός επαναλήψεων (11,858 έτη ανά επανάληψη)

- $\beta_{(K)} > \beta_c$: χαοτικές τροχιές.

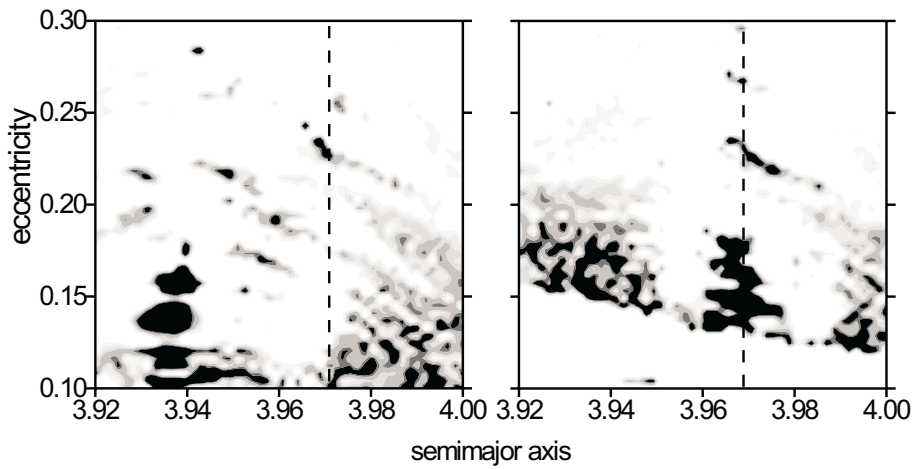
Καθώς $T \rightarrow \infty$ ο δείκτης $\beta_{(K)}$ τείνει ή στην πρώτη περιοχή ή στην τρίτη περιοχή. Έτσι η διακριτότητα της μεθόδου αυξάνει καθώς αυξάνει το χρονικό διάστημα ολοκλήρωσης της χρονοσειράς. Ενδεικτικές τιμές μπορούν να θεωρηθούν οι $\beta_o \approx -10$ και $\beta_c \approx -5$. Στο σχήμα 1, παρουσιάζονται δύο φάσματα (υπολογισμένα πάνω σε χρονοσειρές της εκκεντρότητας) καθώς και η συμπεριφορά του μέγιστου εκθέτη Liapounov για μια ομαλή και μια σχετικά ασθενή χαοτική τροχιά. Από την δεύτερη περίπτωση είναι φανερό ότι ο χαοτικός χαρακτήρας εντοπίζεται από πολύ μικρό αριθμό επαναλήψεων ($N = 16384$) σε σχέση με αυτόν ($N = 180000$) που απαιτείται για τον κορεσμό του εκθέτη Liapounov σε μια σταθερή θετική τιμή.

2.3 Υποσύνολα αρχικών συνθηκών και χαρτογράφηση

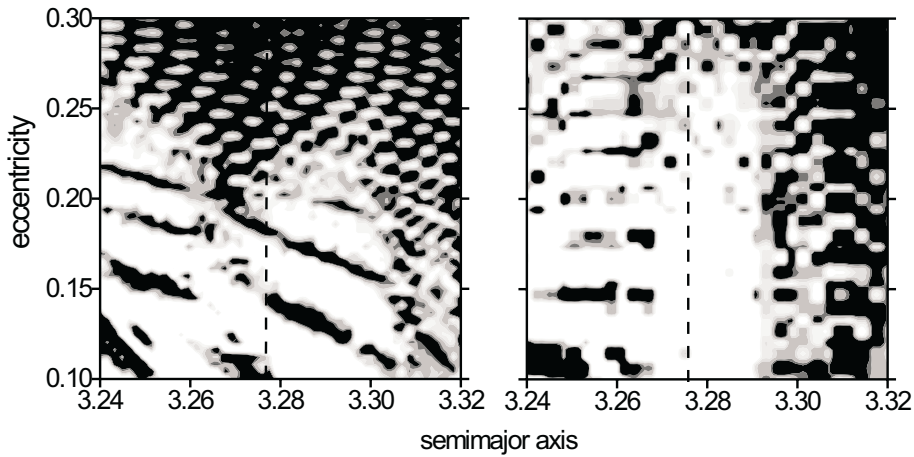
Η συμπλεκτική απεικόνιση (3) περιγράφει μια τομή Poincaré έξι διαστάσεων. Στην περίπτωση του επίπεδου προβλήματος ($S_z = 0$) έχουμε μια τετραδιάστατη απεικόνιση. Στο χώρο αυτόν ορίζουμε διδιάστατες επιφάνειες που αντιστοιχούν σε σταθερές τιμές για τις μεταβλητές γωνίας. Χαρακτηριστικά επίπεδα αρχικών συνθηκών που χρησιμοποιούνται στη βιβλιογραφία είναι τα επίπεδα "μεγάλου ημιάξονα - εκκεντρότητας" που ορίζονται ως:

$$(a(S, N), e(S, N)), \quad \sigma = \sigma_0, \quad \nu = \nu_0 \quad (7)$$

Το κάθε σημείο της παραπάνω επιφάνειας (πρακτικά σε ένα πλέγμα της επιφάνειας) αντιστοιχεί σε συγκεκριμένο σημείο του χώρου φάσεων και ο χαρακτήρας της τροχιάς στην οποία αντιστοιχεί εντοπίζεται από τον δείκτη $\beta_{(K)}$. Για την ανάλυση που ακολουθεί χρησιμοποιήθηκε πλέγμα 50×50 και για το κάθε σημείο υπολογίστηκε ο δείκτης $\beta = \beta_{(8)}$ για χρονοσειρές μήκους 16384 επαναλήψεων της απεικόνισης ή 195 Kyears. Η τιμή $\beta_{(K)}$ που υπολογίζεται αντιστοιχίζεται σε μια κλίμακα χρωμάτων του γκρι. Το μαύρο χρώμα αντιστοιχεί σε πολύ μικρούς δείκτες (τακτικές τροχιές) ενώ το λευκό αντιστοιχεί σε ισχυρά χαοτικές τροχιές οι οποίες οδηγούν σε μεγάλες εκκεντρότητες (διαφυγή του αστεροειδή) μέσα σε μικρά χρονικά διαστήματα της τάξης των χιλιάδων ή μερικών εκατομμυρίων ετών.



Σχήμα 2: Χάρτες με βάση τον φασματικό δείκτη β για τον συντονισμό 3:2 (αριστερά για $\nu_0 = 0$, δεξιά για $\nu_0 = \pi$). Η διακεκομμένη γραμμή δηλώνει τη θέση του συντονισμού και οι μαύρες περιοχές αντιστοιχούν σε τακτικές τροχιές.



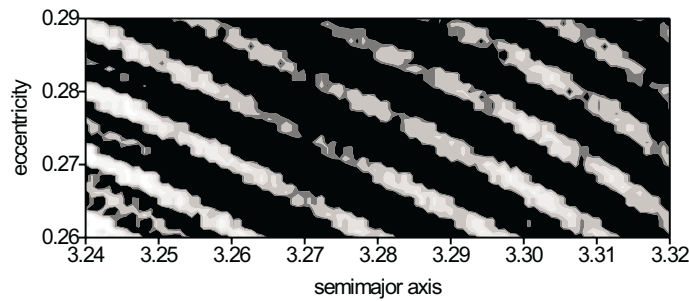
Σχήμα 3: Όπως το σχήμα 2 για τον συντονισμό 2:1

3 Αποτελέσματα στις περιοχές συντονισμών 2:1 και 3:2

Το κυκλικό ΠΠ3Σ (στο περιστρεφόμενο σύστημα) μας δίνει και για τον 2:1 και για τον 3:2 συντονισμό δύο οικογενειών περιοδικών τροχιών, μιας ευσταθούς (για $\sigma = 0$) και μιας ασταθούς (για $\sigma = \pi$). Πάνω στις ευσταθείς οικογένειες έχουμε σημείο διακλάδωσης από το οποίο συνεχίζονται δύο οικογένειες περιοδικών τροχιών και στο ελλειπτικό πρόβλημα. Τόσο το σημείο διακλάδωσης όσο και όλη η οικογένεια περιοδικών τροχιών του ελλειπτικού προβλήματος αντιστοιχεί σε μεγάλες εκκεντρότητες. Για τις περιοχές κοντά στις ευσταθείς τροχιές έχουμε "λίκνιση" ως προς την γωνία σ και περιστροφή ως προς την γωνία ν . Ο συντονισμοί αυτών των δύο συνιστωσών αποτελούν τους *δευτερεύοντες συντονισμούς* του συστήματος που χαρακτηρίζουν τον χώρο φάσεων. Η περιοχή γύρω από τις ασταθείς περιοδικές τροχιές χαρακτηρίζεται από χαοτικές τροχιές και για το λόγο αυτό εστιάζουμε τη μελέτη μας στην "ευσταθή" περιοχή ($\sigma = 0$).

Στο σχήμα 2 παρουσιάζεται το επίπεδο αρχικών συνθηκών $(a, e; \sigma = 0)$ για τον συντονισμό 3:2 και για γωνίες $\nu_0 = 0$ και $\nu_0 = \pi$. Παρατηρούμε ότι δεσπόζουν οι χαοτικές περιοχές (λευκή περιοχή, $\beta > -5$) αλλά υπάρχουν και τακτικές τροχιές (μαύρες περιοχές, $\beta < -10$) που εντοπίζονται σε χαμηλές εκκεντρότητες και πολλές από αυτές βρίσκονται ακριβώς πάνω στο συντονισμό. Στις λευκές περιοχές η διαφυγή των αστεροειδών συμβαίνει μέσα σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα (λίγες χιλιάδες χρόνια). Στις ανοιχτές γκριζες περιοχές η κίνηση επίσης είναι χαοτική αλλά η διαφυγή του αστεροειδή γίνεται μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα (10^7 με 10^9 έτη).

Για τον συντονισμό 2:1 (σχήμα 3) έχουμε την ύπαρξη πολλών τακτικών τροχιών και οι χαοτικές τροχιές αντιστοιχούν σε μικρές εκκεντρότητες. Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό, σε αυτή την περίπτωση,



Σχήμα 4: Ζώνες αστάθειας (γκρίζες) από δευτερεύοντες συντονισμούς στην περιοχή του 2:1 (Μια υποπεριοχή του σχήματος 3 υπολογισμένη σε πυκνότερο πλέγμα)

είναι οι δευτερεύοντες συντονισμοί μέσα στις περιοχές ευστάθειας οι οποίοι δημιουργούν λεπτές ζώνες αστάθειας (σχήμα 4). Οι ζώνες αυτές συμφωνούν με εκείνες που επισημάνθηκαν και από τους Nesvorny & Ferraz-Mello [7] χρησιμοποιώντας το αρχικό σύστημα του ΠΠ3Σ και την φασματική μέθοδο του Lascar . Αυτό επιβεβαιώνει την ακρίβεια προσέγγισης της απεικόνισης στο αρχικό πρόβλημα καθώς και τα αποτελέσματα της φασματικής μεθόδου που χρησιμοποιούμε. Έχει παρατηρηθεί μια ασθενής διάχυση των τροχιών μέσα σε αυτές τις περιοχές η οποία όμως δεν οδηγεί σε μεγάλες εκκεντρότητες για χρονικά όρια που αγγίζουν την ηλικία του πλανητικού συστήματος. Όταν, μέσω της παραπάνω διάχυσης προσεγγιστεί η χαοτική θάλασσα στις μικρές εκκεντρότητες, η εκκεντρότητα του αστεροειδή αυξάνει απότομα και ξεπερνάει το όριο διαφυγής.

4 Συμπεράσματα

Η δυναμική η οποία παρουσιάζει το σύστημά μας, και η οποία αποτυπώνεται στους χάρτες των σχημάτων 2 και 3, αποτελεί μια πρώτη προσέγγιση για την πραγματική εικόνα των αστεροειδών. Οι λίγες περιοχές ευστάθειας που εμφανίζονται στον συντονισμό 3:2 υποδηλώνουν την ύπαρξη κάποιας ομάδας αστεροειδών σε εκκεντρότητες $e < 0.2$ (η ομάδα Hilda εκτείνεται για εκκεντρότητες έως και 0.3). Στο συντονισμό 2:1 παρατηρούνται και περιοχές ευστάθειας που δεν δικαιολογούν το παρατηρούμενο χάσμα Hecuba. . Όμως αυτές οι τακτικές περιοχές φαίνεται να τεμαχίζονται αρκετά πυκνά από ζώνες αστάθειας εξαιτίας των δευτερευόντων συντονισμών. Βέβαια στην εργασία αυτή αναφερόμαστε στο επίπεδο πρόβλημα. Για ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και την τρίτη διάσταση κίνησης (κλίση) καθώς και τη μεταβλητότητα των τροχιακών χαρακτηριστικών του Δία εξαιτίας του πλανήτη Κρόνου. Οι παραπάνω παράγοντες εκφράζουν επιπρόσθετες διαταραχές στο αρχικό δυναμικό σύστημα, οι οποίες θα πρέπει να δημιουργήσουν περισσότερο χάος στην περιοχή του 2:1 αλλά και περισσότερη τάξη στην περιοχή του 3:2.

Αναφορές

- [1] Moons, M. 1997. Review of the dynamics in Kirkwood gaps, *Celest.Mech*,**65**, pp 175-204.
- [2] Ferraz-Mello, S. 1999, Slow and Fast Diffusion in Asteroid-Belt Resonances: A review, *Celest.Mech*, **73**, pp. 25-37.
- [3] Murray, C.D. and Dermott, S.F., Solar system Dynamics, Cambridge Univ. Press, 1999
- [4] Hadjidemetriou, J. 1996, Symplectic Mappings, in *Dynamics Ephemerides and Astrometry of the Solar System*, (Ferraz-Mello, Morando, Arlot, eds), Kluwer, Dordrecht, pp 255-266.
- [5] Hadjidemetriou, D. and Voyatzis, G. 2000, The 2:1 and 3:2 resonant asteroid motion - A symplectic mapping approach, *Celest.Mech.*, in press
- [6] Voyatzis, G. and Ichtiaroglou, S. 1992, On the spectral analysis of trajectories in Hamiltonian systems, *J.Phys.A:Math.Gen*, **25**, p.5931.
- [7] Nesvorny, D. and Ferraz-Mello S.,1997, Chaotic diffusion in the 2:1 asteroidal resonance: An application of the frequency map analysis, *Astron.Astrophys.*, **320**, pp. 672-680.