

ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΡΟΧΙΩΝ ΣΕ ΔΙΑΤΑΡΑΓΜΕΝΑ ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΑ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Ν ΒΑΘΜΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ.

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΒΟΓΙΑΤΖΗΣ & ΣΙΜΟΣ ΙΧΤΙΑΡΟΓΛΟΥ  
Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 54006 Θεσσαλονίκη

**ΠΕΡΙΛΗΨΗ:** Μελετώνται ιδιότητες των τροχιών Χαμιλτονιανών συστημάτων  $H_0 + \varepsilon H_1$  μέσω των φασμάτων ισχύος των ολοκληρωμάτων κίνησης της  $H_0$ . Δείχεται ότι στις ομαλές τροχιές τα φάσματα συγκλίνουν εκθετικά στο μηδέν για χαμηλές συχνότητες.

### 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η φασματική ανάλυση τροχιών Χαμιλτονιανών συστημάτων έχει χρησιμοποιηθεί ευρύτατα από την δεκαετία του '70 με στόχο την διάκριση μεταξύ ομαλών και χαοτικών τροχιών. Οι ομαλές τροχιές (περιοδικές ή ημιπεριοδικές) χαρακτηρίζονται από φάσματα ισχύος με διακριτές φασματικές γραμμές<sup>1</sup> ενώ οι χαοτικές τροχιές παρουσιάζουν μια ανώμαλη κατανομή φασματικών γραμμών με ένα συνεχές υπόβαθρο που φαίνεται να είναι ανάλογο με τον εκθέτη Liapounov της χαοτικής περιοχής<sup>2</sup> και σε πολλές περιπτώσεις με μια τάση υπερβολικής απόκλισης στις χαμηλές συχνότητες ( $1/f^{\alpha}$  noise)<sup>3</sup>.

Στην εργασία αυτή αναφερόμαστε σε τροχιές διαταραγμένων χαμιλτονιανών συστημάτων  $n$  βαθμών ελευθερίας που περιγράφονται από χαμιλτονιανές της μορφής

$$H(p_i, q_i) = H_0(p_i, q_i) + \varepsilon H_1(p_i, q_i) \quad (1)$$

όπου  $p_i, q_i$  ( $i=1 \dots n$ ) οι γενικευμένες ορμές και συντεταγμένες αντίστοιχα και  $\varepsilon$  μικρή παράμετρος. Η  $H_0(p_i, q_i)$  είναι το ολοκληρώσιμο κομμάτι της χαμιλτονιανής, δηλαδή υπάρχουν  $n$  ανεξάρτητες συναρτήσεις  $I_i = I_i(p_i, q_i)$  (ολοκληρώματα της κίνησης) που παραμένουν σταθερές κατά μήκος μιάς τροχιάς της  $H_0$  και βρίσκονται σε ενέλιξη

(involutions) μεταξύ τους. Κάθε τροχιά εξελίσσεται στο χώρο φάσης πάνω σε έναν  $n$ -διάστατο δακτύλιο ( $n$ -torus) και η κίνηση είναι γενικά ημιπεριοδική.

Σύμφωνα με το θεώρημα KAM, όταν προστεθεί η διαταραχή  $\varepsilon H_1$ , οι περισσότερες τροχιές συνεχίζουν να εξελίσσονται πάνω σε  $n$ -δακτύλιους που έχουν παραμορφωθεί ελαφρά. Οι συναρτήσεις  $I_i(p_i, q_i)$  δεν αποτελούν πλέον ολοκληρώματα της κίνησης αλλά μεταβάλλονται με τον χρόνο. Σε μία πρόσφατη εργασία<sup>4</sup> δείχνουμε ότι για τροχιές πάνω σε διαταραγμένους  $n$ -δακτύλιους, η χρονική εξέλιξη των μεταβλητών δράσης χαρακτηρίζεται από φάσματα που συγκλίνουν εκθετικά στις χαμηλές συχνότητες. Όμως σε φυσικά προβλήματα που περιγράφονται από χαμιλτονιανές της μορφής 1 οι μεταβλητές δράσης της  $H_0$  δεν υπολογίζονται γενικά αναλυτικά ενώ αντίθετα είναι γνωστά στην αναλυτική τους μορφή τα ολοκληρώματα της κίνησης. Στην εργασία αυτή δείχνουμε ότι η εκθετική σύγκλιση του φάσματος χαρακτηρίζει κάθε ποσότητα που είναι ολοκλήρωμα της  $H_0$ .

## 2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΧΡΟΝΙΚΗΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Εστω ένας  $n$ -δακτύλιος πάνω στον οποίο εξελίσσεται η τροχιά ενός ολοκληρώσιμου συστήματος και όπου  $I_i = c_i$  σταθερές για κάθε χρονική στιγμή. Οι  $n$  ποσότητες  $I_i$  μπορούν να συμπληρωθούν με άλλες  $n$  ανεξάρτητες ποσότητες, τις γωνίες  $\phi_i \pmod{2\pi}$  που μεταβάλλονται σύμφωνα με την σχέση  $\dot{\phi}_i = \omega_i t + \phi_{i0}$  έτσι ώστε να αποτελέσουν ένα σύστημα συντεταγμένων πάνω σε κάθε  $n$ -δακτύλιο του συστήματος<sup>5</sup>. Από τις συντεταγμένες  $I_i, \phi_i$  μπορούμε να περάσουμε στις κανονικές συντεταγμένες  $J_i, \psi_i$  (μεταβλητές δράσης - γωνίας) όπου η ολοκληρώσιμη χαμιλτονιανή εξαρτάται μόνο από τις μεταβλητές δράσης. Οι μεταβλητές  $I_i$  είναι συνεχείς, διαφορίσιμες και αντιστρέψιμες συναρτήσεις των  $J_i$  ενώ οι γωνίες  $\psi_i$  αντιστοιχούν μία προς μία στις γωνίες  $\phi_i$  αφήνοντας αναλλοίωτες τις γωνιακές συχνότητες  $\omega_i$ , έχουμε δηλαδή

$$\begin{aligned} I_i &= I_i(J_j) \quad \text{ή} \quad J_i = J_i(I_j) \\ \psi_i &= \phi_i + F(J_j) \end{aligned} \quad (2)$$

Η διαταραγμένη Χαμιλτονιανή 1 γράφεται

$$H(J, \psi) = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \psi) \quad (3)$$

Διαφορίζοντας την 2 και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από την 3 έχουμε

$$\dot{I}_i = \frac{\partial I_i}{\partial J_k} \dot{J}_k = c_{ik} \left\{ -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \psi_k} \right\} = -\varepsilon c_{ik} \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_k} \quad (4)$$

όπου θεωρούμε άθροιση ως προς το διπλό δείκτη και  $c_{ij} = \partial I_i / \partial J_j$ .

Επίσης έχουμε

$$\dot{\psi}_i = \omega_i + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I_i} = \omega_i + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I_k} c_{ki} \quad (5)$$

Μπορούμε να γράψουμε  $\psi_i = \phi_i + g_i(I)$  όπου  $g_i(I) = f_i(J)$ . Διαφορίζοντας τα  $\psi_i$  και παίρνοντας υπόψη τις σχέσεις 4 και 5 παίρνουμε

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \varepsilon \left\{ b_{ik} c_{ks} \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_s} + \frac{\partial H_1}{\partial I_k} c_{ki} \right\} \quad (6)$$

όπου  $b_{ij} = \partial g_i / \partial I_j$ . Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό  $c_{ij}^{-1} = \partial J_i / \partial I_j$  και έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις

$$c_{kj} c_{js}^{-1} = c_{jk}^{-1} c_{sj} = c_{kj}^{-1} c_{js} = \delta_{ks} \quad (\delta \text{έλτα του Kronecker})$$

$$b_{ij} = d_{ik} c_{kj}^{-1} \quad \text{όπου} \quad d_{ik} = \partial f_i / \partial J_k$$

από τις οποίες βρίσκουμε

$$b_{ik} c_{ks} \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_s} = d_{iq} \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_q} \quad (7)$$

Αντικαθιστώντας την 7 στην 6 και αλλάζοντας τον βουβό δείκτη  $q$ , έχουμε τελικά

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \varepsilon \left( d_{ik} \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial H_1}{\partial I_k} c_{ki} \right) \quad (8)$$

Οι εξισώσεις 5 και 8 μπορούν να περιγράψουν την χρονική εξέλιξη των ολοκληρωμάτων στο διαταραγμένο σύστημα 4. Η κίνηση τώρα εξελίσσεται γενικά σε ένα διαταραγμένο  $n$ -δακτύλιο που διαφέρει λίγο από τον αδιατάρακτο  $n$ -δακτύλιο έτσι ώστε οι ποσότητες  $c_{ij}$ ,  $d_{ij}$  να μπορούν να θεωρηθούν σταθερές σε όρους μηδενικής τάξης και να θεωρήσουμε τις εξισώσεις 5 και 8 ακριβείς μέχρι και όρους  $O(\varepsilon)$ .

Αν εισάγουμε τις περιστρεφόμενες γωνίες (rotating phases)  $z_i = \phi_i - \omega_i t$  οι εξισώσεις 5 και 8 παίρνουν την "πρότυπη μορφή" (standard form)

$$\dot{I}_i = -\varepsilon c_{ik} \frac{\partial H_1}{\partial z_k} \quad (9\alpha)$$

$$\dot{z}_i = \varepsilon \left( d_{ik} \frac{\partial H_1}{\partial z_k} + \frac{\partial H_1}{\partial I_k} c_{ki} \right) \quad (9\beta)$$

Οι ποσότητες λοιπόν  $I_i = I_i(t)$  μεταβάλλονται γενικά αργά με ρυθμό μεταβολής ανάλογο της μικρής παραμέτρου  $\varepsilon$ .

Εφαρμόζοντας στο σύστημα 9 το θεώρημα "general averaging"<sup>6</sup> προκύπτει επίσης ότι

$$|I_i(t) - \langle I_i \rangle(t)| < \sqrt{\varepsilon} \quad \text{για} \quad t < \frac{1}{\varepsilon}$$

όπου

$$\langle \dot{I}_i \rangle = \varepsilon F_i(\langle I_j \rangle) \quad (10\alpha)$$

$$F_i(\langle I_j \rangle) = (2\pi)^{-n} \oint_{T^n} f_i(I_j, \varphi_j) d\varphi_1 \dots d\varphi_n \quad (10\beta)$$

$$\dot{I}_i = \varepsilon f_i(I_j, \varphi_j) \quad (10\gamma)$$

Αν στην θέση της 10γ χρησιμοποιήσουμε τη σχέση 5 προκύπτει ότι  $\langle \dot{I}_i \rangle = 0$  ή  $\langle I_i \rangle = I_i(t=0)$ . Άρα στο διαταραγμένο σύστημα τα ολοκληρώματα εκτελούν ταλαντώσεις γύρω από μία σταθερή τιμή και με πλάτος τάξης  $\varepsilon^{1/2}$  τουλάχιστον για χρόνο τάξης  $1/\varepsilon$ .

### 3. ΤΟ ΦΑΣΜΑ ΙΣΧΥΟΣ ΤΩΝ $I_i(t)$

Αν αναπτύξουμε την διαταραχή  $H_1$  σε πολλαπλή σειρά Fourier δηλαδή

$$H_1(I_i, \varphi_i) = \sum_m h_m e^{-i(m_1\varphi_1 + \dots + m_n\varphi_n)} \quad (11)$$

όπου  $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ , και την αντικαταστήσουμε στην εξίσωση 5, η χρονική εξέλιξη των ολοκληρωμάτων θα δίνεται από την εξίσωση

$$\dot{I}_i = -\varepsilon i c_{ik} \sum_m m_k h_m(I_j) e^{-i(m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n)}$$

και ολοκληρώνοντας έχουμε

$$I_i = I_{i0} + \varepsilon \sum_m \frac{(c_{ik} m_k) h_m e^{-i(m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n)t}}{m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n} + O(\varepsilon^2) \quad (12)$$

Παρατηρούμε ότι εμφανίζονται μικροί διαιρέτες που καθιστούν την σύγκλιση της παραπάνω σειράς αμφίβολη. Το θεώρημα KAM εγγυάται την σύγκλιση της σειράς, για μικρές διαταραχές, στο μεγαλύτερο μέρος του χώρου των φάσεων, εξαιρώντας μικρές

περιοχές κοντά σε συντονισμένους δακτύλιους όπου  $m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n = 0$ .

Το φάσμα ισχύος της 12 θα είναι

$$P_i(\Omega) = \sum_m \left| e \frac{(c_{ik} m_k) h_m}{m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n} \right|^2 \delta(m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n - \Omega) + O(\varepsilon^3) \quad (13)$$

όπου  $\delta$  η συνάρτηση δέλτα του Dirac. Στην πράξη επειδή η ολοκλήρωση γίνεται για πεπερασμένο χρόνο, η συνάρτηση  $\delta$  έχει πεπερασμένο πλάτος και μη μηδενικό εύρος και αντιστοιχεί στις φασματικές γραμμές της 13 που εμφανίζονται στις συχνότητες  $\Omega = m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n$ . Παρατηρούμε ότι οι μικροί διαιρέτες συνεισφέρουν στην ύπαρξη σημαντικών φασματικών γραμμών στις χαμηλές συχνότητες του φάσματος ( $\Omega \ll 1$ ). Η σύγκλιση όμως της σειράς 12 εξασφαλίζει και την σύγκλιση του φάσματος καθώς  $\Omega \rightarrow 0$ .

Θεωρούμε ότι η διαταραχή  $H_1$  είναι αναλυτική και ότι η τροχιά εξελίσσεται πάνω σε ένα λίγο διαταραγμένο δακτύλιο. Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις<sup>7</sup>

$$|m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n| \geq k |m|^{-p} \quad (14\alpha)$$

$$|h_m| < M e^{-|m|^p} \quad (14\beta)$$

όπου  $k, M, p$  θετικές σταθερές,  $|m| = |m_1| + \dots + |m_n|$  και  $p = n + 1$ . Η  $G_i(m_j) = c_{ik} m_k$  είναι μια γραμμική συνάρτηση και μπορεί να δειχτεί<sup>4</sup> ότι μπορούμε να βρούμε ακέραιο  $m_0$  ( $\delta > 0$ ) έτσι ώστε  $|G_i(m_j)| < \exp(|m|\delta)$  για κάθε  $|m| > |m_0|$  ή ισοδύναμα σε μία περιοχή συχνοτήτων  $0 < \Omega < \Omega_0(m_0)$ .

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει ότι

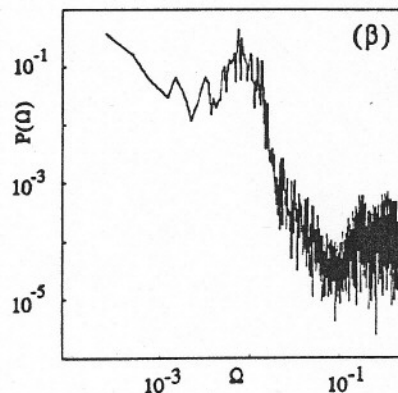
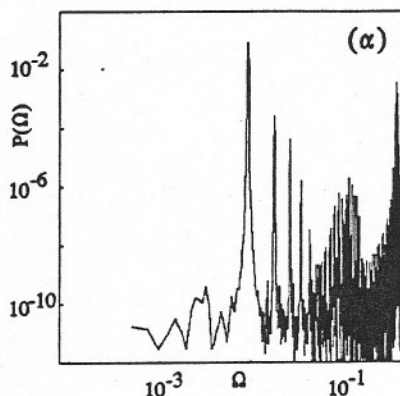
$$P(\Omega) \leq \left[ \varepsilon M \Omega^{-1} \exp(-\alpha \Omega^{-\frac{1}{p}}) \right]^2 \quad (15)$$

όπου  $\alpha = k^{1/p}(\rho - \delta) > 0$ . Το δεξιό μέλος της 15 αποτελεί ένα άνω πέρασ για το φάσμα ισχύος που συγκλίνει εκθετικά στο μηδέν καθώς  $\Omega \rightarrow 0$ .

Σε μια χαοτική περιοχή που εμφανίζεται στις περιοχές συντονισμένων δακτυλίων, σειρά 12 δεν συγκλίνει. Οι μικροί διαιρέτες παίρνουν πολύ μικρές τιμές που οδηγούν στην απόκλιση και ως προς τους όρους τάξης  $O(\varepsilon)$  και ως προς τους όρους ανώτερης τάξης. Η απόκλιση αυτή έχει σαν αποτέλεσμα την παρουσία μιας ανώμαλης κατανομής φασματικών γραμμών με πολύ μεγάλα πλάτη στην περιοχή των χαμηλών συχνοτήτων όπου  $\Omega = m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n \ll 1$ .

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται δύο τυπικά φάσματα ισχύος ενός μοντέλου της μορφής 1 που περιγράφει την κίνηση των αστεροειδών κοντά στον συντονισμό 3:1<sup>8</sup>. Στην πρώτη περίπτωση το φάσμα αντιστοιχεί σε μια τροχιά έξω από την περιοχή του συντονισμού

και συγκλίνει γρήγορα καθώς  $\Omega \rightarrow 0$  δηλώνοντας την παρουσία ομαλών ημιπεριοδικών κινήσεων σ' αυτή τη περιοχή. Αντίθετα πολύ κοντά στο συντονισμό 3:1 (περίπτωση (β)) το φάσμα δείχνει μια ανώμαλη και αποκλίνουσα κατανομή φασματικών γραμμών που δηλώνει χαοτική κίνηση.



### Βιβλιογραφία

1. D.W.Noid, M.L.Koszykowski, R.A.Marcus (1977), *J.Chem.Phys.* 67, 404 ; G.E.Powell, I.C.Persival (1979), *J.Phys. A* 12, 2053 ; R.Roy, B.G.Sumpter, G.A.Pfeffer, S.K.Gray, D.W.Noid (1991) *Phys.Rep.* 205(3).
2. M.A.Sepulveda, R.Badii, E.Pollak (1989), *Phys.Rev.Lett.* 63, 1226.
3. T.Geisel, A.Zacherl, G.Radons (1987), *Phys.Rev.Lett* 59, 2503.
4. G.Voyatzis, S.Ichtiaroglou (1992), θα δημοσιευτεί στο *J.Phys. A*.
5. V.I.Arnold (1988), *Dynamical systems III*, (New York : Springer)
6. J.A.Sanders, F.Verhulst (1985), *Averaging methods in nonlinear dynamical systems* (New York : Springer)
7. V.I.Arnold (1963), *Russian Math. Surveys* 18:6, 85.
8. J.Hadjidemetriou, G.Voyatzis (1992), θα δημοσιευτεί στο *Celestial Mech.*