

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΒΟΥΓΙΑΤΖΗΣ & ΕΥΘΥΜΙΑ ΜΕΛΕΤΛΙΔΟΥ



Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά  
Συγγράμματα και Βοηθήματα  
[www.kallipos.gr](http://www.kallipos.gr)

**HEALLINK**  
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ  
*απόκτηση είναι κεντρικός στόχος γνώσης*  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΓΙΩΡΓΟΣ ΒΟΥΓΙΑΤΖΗΣ  
Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, ΑΠΘ

ΕΥΘΥΜΙΑ ΜΕΛΕΤΛΙΔΟΥ  
Επίκουρη Καθηγήτρια, Τμήμα Φυσικής, ΑΠΘ

# *Εισαγωγή στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα*

(έκδοση 1.2, Νοέμβριος 2022)



Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά  
Συγγράμματα και Βοηθήματα  
[www.kallipos.gr](http://www.kallipos.gr)

# Εισαγωγή στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα

## *Συγγραφή*

Γιώργος Βουγιατζής

Ευθυμία Μελετλίδου

## *Κριτικός αναγνώστης*

Τσιγάνης Κλεομένης

## *Συντελεστές έκδοσης*

ΓΡΑΦΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Νικόλαος Κουμαρτζής

Copyright @ ΣΕΑΒ, 2015



Το παρόν έργο αδειοδοτείται υπό τους όρους της άδειας Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Όχι Παράγωγα Έργα 3.0. Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής επισκεφτείτε τον ιστότοπο <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/gr/>

ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

[www.kallipos.gr](http://www.kallipos.gr)

ISBN: 978-960-603-103-8

## Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό αποτελεί μια εισαγωγή στη Μη Γραμμική Δυναμική η οποία γνώρισε πολύ μεγάλη ανάπτυξη τα τελευταία 50 χρόνια κυρίως λόγω της χρήσης των ηλεκτρονικών υπολογιστών και της εφαρμογής τους σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους. Αν και τα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα, εν γένει, περιγράφονται από «απλές εξισώσεις», μπορούν να αναδείξουν την πολύπλοκη συμπεριφορά πολύ απλών φυσικών συστημάτων. Το χάος αποτελεί την κορωνίδα αυτής της πολύπλοκης συμπεριφοράς.

Τα δυναμικά συστήματα αποτελούν στη βάση τους ένα αυστηρό μαθηματικό θέμα. Όμως η χρήση υπολογιστικών μεθόδων και γραφικών κρίνεται πολλές φορές απαραίτητη για την κατανόησή τους. Το βιβλίο αυτό αντιμετωπίζει το θέμα κυρίως σε ένα εφαρμοσμένο πλαίσιο και σε ένα προπτυχιακό ή μεταπτυχιακό επίπεδο κατάλληλο για Φυσικούς, Χημικούς, Βιολόγους, Μηχανικούς κ.ά. Στο πλαίσιο αυτό γίνεται αρκετή χρήση υπολογιστικών τεχνικών. Ως κύριο υπολογιστικό εργαλείο χρησιμοποιείται το Mathematica και η γλώσσα προγραμματισμού C και περιγράφονται οι απαραίτητοι αλγόριθμοι. Οι ασκήσεις που παραθέτονται στο τέλος των περισσότερων παραγράφων μπορούν να αντιμετωπιστούν αναλυτικά ή υπολογιστικά και αυτό επαφίεται στην κρίση του αναγνώστη.

Το βιβλίο αναπτύχθηκε κατά τη διάρκεια των μαθημάτων «Υπολογιστική Φυσική Δυναμικών Συστημάτων» και «Δυναμικά συστήματα και Χάος». Εξετάζει τη βασική θεωρία των δυναμικών συστημάτων από την πλευρά των διαφορικών εξισώσεων. Τα δύο τελευταία κεφάλαια του βιβλίου αναφέρονται σε διακριτά συστήματα (απεικονίσεις) τα οποία μπορούν να μας περιγράψουν πιο κατανοητά αλλά και πιο αυστηρά την πολύπλοκη συμπεριφορά και το χάος. Τα περισσότερα θέματα στα οποία αναφέρεται το παρόν βιβλίο, όπως επίπεδα συστήματα, περιοδικές λύσεις, διακλαδώσεις κλπ., αποτελούν κλασσικά θέματα τα οποία μπορεί ο αναγνώστης να τα βρει και στην αντίστοιχη πλούσια διεθνή βιβλιογραφία αλλά, ενδεχομένως, με έναν αρκετά διαφορετικό τρόπο παρουσίασης. Στο τέλος του κάθε κεφαλαίου παρατίθεται ένα μέρος αυτής της βιβλιογραφίας. Επίσης, σε πολλούς όρους δίνονται συνδέσεις (links) σε συγκεκριμένες ηλεκτρονικές βιβλιοθήκες, όπως η Wikipedia, η Scholarpedia και η Wolfram.

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε ιδιαίτερα όλους τους φοιτητές μας στα μαθήματα της Δυναμικής, οι οποίοι με το ενδιαφέρον τους, τις ερωτήσεις τους και τις εργασίες τους βοήθησαν και εμάς στην βαθύτερη κατανόηση των θεμάτων της Μη Γραμμικής Δυναμικής και στη βελτίωση της διδασκαλίας μας. Επίσης, ευχαριστούμε τον επίκουρο καθηγητή Μένιο Τσιγάνη, κριτικό αναγνώστη του βιβλίου, για τις εύστοχες υποδείξεις του και τα σχόλιά του, τα οποία συνέβαλαν στην βελτίωση του συγγράμματος. Τέλος ευχαριστούμε το πρόγραμμα «Κάλλιπος», που μας έδωσε την ευκαιρία της έκδοσης αυτού του βιβλίου, και τους συντελεστές του για τον έλεγχο του συγγράμματος.

Οκτώβριος 2015

Οι Συγγραφείς

*«Το χάος δεν είναι μια θεωρία αλλά μια εσωτερική ιδιότητα του τρόπου που λειτουργεί η Φύση. Όλες οι επιτυχείς προβλέψεις της επιστήμης αλλά και η νοοτροπία που περνά μέσα από τα σχολικά βιβλία της Φυσικής, μας κάνουν να αντιμετωπίζουμε αυτή την ιδιότητα της Φύσης με δυσφορία. Ίσως νοιώθουμε πως (το χάος) έρχεται σε σύγκρουση με την κοινή αίσθηση που σχηματίζουμε για το σύμπαν, ότι όλα γύρω μας δουλεύουν σαν ρολόι καλά κουρνιασμένο, υπακούοντας σε αυστηρούς μαθηματικούς κανόνες. Οι ίδιοι οι αυστηροί κανόνες αυτοί – οι φυσικοί νόμοι – έχουν μέσα τους το χάος»*

Συμεών Ιχτιάρογλου  
(1950 - 2007)

*«Όπως κάθε μεγάλο άλμα της επιστήμης, έτσι και η θεωρία του χάους έβαλε και νέους περιορισμούς στις ανθρώπινες δυνατότητες. Η θεωρία της σχετικότητας του Einstein επέβαλε τον σοβαρό περιορισμό ότι δεν μπορούμε να υπερβούμε την ταχύτητα του φωτός. Η θεωρία του χάους, που θεωρείται ένα νέο άλμα της επιστήμης, έκανε απαγορευτική την πρόβλεψη ενός φαινομένου για μεγάλα χρονικά διαστήματα.»*

Ιωάννης Χατζηδημητρίου (1937 – 2013)

## Περιεχόμενα

1	Εισαγωγικές έννοιες των δυναμικών συστημάτων.....	9
1.1	Βασικές έννοιες και ορισμοί.....	9
1.2	Συνεχή Δυναμικά συστήματα με Διαφορικές εξισώσεις.....	10
1.2.1	Συστήματα μιας διάστασης .....	11
1.2.2	[M] Αναλυτική επίλυση διαφορικών εξισώσεων με το Mathematica .....	12
1.3	Διανυσματικό πεδίο και σημεία ισορροπίας.....	15
1.3.1	Αυτόνομα συστήματα.....	16
1.3.2	Μη αυτόνομα συστήματα.....	18
1.3.3	Υπολογισμός σημείων ισορροπίας και σχεδίαση διανυσματικού πεδίου στο Mathematica.....	20
1.4	Διατηρητικά και μη διατηρητικά συστήματα.....	23
1.5	Ποιοτική κατηγοριοποίηση τροχιών .....	25
1.6	Βιβλιογραφία.....	29
2	Αριθμητικές Μέθοδοι.....	30
2.1	Αριθμητική επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων.....	30
2.1.1	Εύρεση ριζών Εξίσωσης με τη μέθοδο Newton-Raphson.....	30
2.1.2	Η Newton-Raphson για συστήματα εξισώσεων.....	32
2.2	Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων.....	35
2.2.1	Η έννοια της αριθμητικής λύσης.....	35
2.2.2	Η μέθοδος Runge-Kutta .....	36
2.2.3	Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων με το Mathematica.....	39
2.3	Διακριτοί μετασχηματισμοί Fourier.....	43
2.3.1	Ο μετασχηματισμός Fourier και το φάσμα ισχύος.....	43
2.3.2	Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier.....	43
2.3.3	Υπολογισμός των διακριτών μετασχηματισμών Fourier.....	45
2.4	Βιβλιογραφία.....	48
3	Αυτόνομα μηχανικά συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας.....	49
3.1	Εξισώσεις και γενικά χαρακτηριστικά .....	49
3.1.1	Διαφορικές εξισώσεις $2^{n5}$ τάξης και λύσεις.....	49
3.1.2	Χώρος φάσεων, ολοκληρώματα και σημεία Ισορροπίας .....	51
3.1.3	[M] Σχεδίαση διανυσματικού πεδίου και φασικού διαγράμματος .....	51
3.2	Γραμμικές περιπτώσεις.....	52
3.2.1	Ο αρμονικός ταλαντωτής (harmonic oscillator).....	53
3.2.2	Το απωστικό (υπερβολικό) σύστημα.....	54
3.2.3	Γραμμικός ταλαντωτής με απόσβεση.....	55
3.3	Διατηρητικά συστήματα και δυναμική.....	58
3.3.1	Η συνάρτηση δυναμικού και το ολοκλήρωμα ενέργειας .....	58
3.3.2	Σημεία ισορροπίας και γραμμική ευστάθεια .....	60
3.3.3	Όρια της κίνησης και ταλαντώσεις.....	63

3.3.4	Φασικά διαγράμματα.....	68
3.4	Το απλό εκκρεμές.....	73
3.4.1	Σημεία ισορροπίας - φασικό διάγραμμα.....	73
3.4.2	Σειρά Taylor και προσεγγίσεις.....	78
3.4.3	Η Αναλυτική λύση του εκκρεμούς.....	79
3.5	Απωλεστικά συστήματα.....	82
3.5.1	Σημεία ισορροπίας και γραμμική προσέγγιση.....	83
3.5.2	Δυναμική εξέλιξη στο χώρο φάσεων.....	84
3.6	Βιβλιογραφία.....	87
4	Αυτόνομα συστήματα στο επίπεδο.....	88
4.1	Εισαγωγή. Εξισώσεις, λύσεις και ολοκληρώματα.....	88
4.2	Γραμμικά συστήματα δύο διαστάσεων με σταθερούς συντελεστές (αυτόνομα).....	91
4.2.1	Γενική λύση γραμμικού συστήματος.....	91
4.2.2	Ταξινόμηση λύσεων.....	92
4.2.3	Ο παραμετρικός χώρος ευστάθειας.....	96
4.3	Σημεία ισορροπίας και ευστάθεια.....	99
4.3.1	Σημεία ισορροπίας και γραμμικοποίηση.....	99
4.3.2	Ευστάθεια στο μη γραμμικό σύστημα.....	100
4.3.3	Η συνάρτηση Lyapunov.....	101
4.4	Από το γραμμικό στο μη-γραμμικό σύστημα. Διάγραμμα φάσεων.....	103
4.4.1	Τοπολογική ισοδυναμία και το θεώρημα Harman-Grobman.....	103
4.4.2	Φασικό διάγραμμα στην περιοχή των σημείων ισορροπίας.....	105
4.4.3	Συνολική εικόνα του φασικού διαγράμματος.....	107
4.5	Εφαρμογές.....	113
4.5.1	Αλληλεπιδρώντα είδη σε οικολογικά συστήματα.....	113
4.5.2	Ανταγωνιστικά συστήματα. Ένα στρατιωτικό μοντέλο.....	116
4.6	Βιβλιογραφία.....	119
5	Οριακοί κύκλοι – Περιοδικές Λύσεις.....	121
5.1	Ο οριακός κύκλος σε επίπεδα συστήματα.....	121
5.2	Η εξίσωση Van der Pol.....	125
5.2.1	Αυτό-διεγείρομενες ηλεκτρικές ταλαντώσεις.....	125
5.2.2	Σημεία ισορροπίας.....	126
5.2.3	Περιοδικές λύσεις – μικρές τιμές $\varepsilon$ .....	127
5.2.4	Υπολογιστική μελέτη – μεγάλες τιμές $\varepsilon$ .....	129
5.3	Θεωρήματα ύπαρξης οριακών κύκλων.....	131
5.3.1	Το αρνητικό κριτήριο του Bendixson.....	132
5.3.2	Το θεώρημα ύπαρξης Poincaré-Bendixson.....	133
5.3.3	Τα συστήματα Lienard.....	136
5.4	Βιβλιογραφία.....	137

6	Διακλαδώσεις .....	139
6.1	Βασικές έννοιες και ορισμοί.....	139
6.2	Διακλαδώσεις σημείων ισορροπίας.....	141
6.2.1	Διακλαδώσεις σε διατηρητικά συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας .....	141
6.2.2	Τυπικές διακλαδώσεις στο επίπεδο. ....	146
6.3	Διακλαδώσεις οριακών κύκλων .....	151
6.3.1	Διακλάδωση Hopf .....	151
6.3.2	Διακλάδωση από κέντρο .....	153
6.3.3	Διακλάδωση από ομοκλινικό βρόγχο .....	154
6.4	Εφαρμογές.....	156
6.4.1	Μη γραμμικός ταλαντωτής με ελατήρια .....	156
6.4.2	Χημικές ταλαντώσεις. Το μοντέλο Brusselator.....	159
6.5	Βιβλιογραφία.....	162
7	Μη-αυτόνομα συστήματα. Εξαναγκασμένοι ταλαντωτές .....	164
7.1	Ο γραμμικός εξαναγκασμένος ταλαντωτής.....	164
7.1.1	Το διατηρητικό σύστημα ( $b=0$ ) με εξωτερική διέγερση .....	165
7.1.2	Το απωλεστικό σύστημα ( $b\neq 0$ ) με εξωτερική διέγερση.....	166
7.2	Η στροβοσκοπική απεικόνιση του Poincaré.....	168
7.3	Η απεικόνιση Poincaré των γραμμικών ταλαντώσεων.....	171
7.3.1	Το διατηρητικό γραμμικό σύστημα.....	171
7.3.2	Το γραμμικό σύστημα με απόσβεση .....	177
7.4	Μη γραμμικές ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση.....	178
7.4.1	Το αδιατάρακτο σύστημα .....	178
7.4.2	Το διαταραγμένο σύστημα .....	180
7.4.3	Το διατηρητικό σύστημα Duffing .....	182
7.5	Το σύστημα Duffing με απόσβεση.....	185
7.5.1	Περιοδικές λύσεις.....	185
7.5.2	Ο παράξενος ελκυστής .....	187
7.6	Χάος και ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.....	191
7.6.1	Η ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες .....	191
7.6.2	Ο εκθέτης Lyapunov .....	191
7.6.3	Ο γρήγορος δείκτης Lyapunov (FLI) .....	193
7.7	Βιβλιογραφία.....	194
8	Συστήματα με περισσότερες διαστάσεις .....	196
8.1	Το γραμμικοποιημένο σύστημα .....	196
8.1.1	Γραμμικοποίηση.....	196
8.1.2	Γραμμικοποίηση γύρω από τα σημεία ισορροπίας.....	197
8.2	Δυναμική του μη γραμμικού συστήματος.....	200
8.3	Το σύστημα του Lorenz.....	201



8.3.1	Το μοντέλο του Lorenz.....	202
8.3.2	Σημεία ισορροπίας και ασυμπτωτική ευστάθεια.....	204
8.3.3	Τροχιές.....	205
8.4	Χαμιλτονιανά Συστήματα .....	208
8.4.1	Βασικές έννοιες και ορισμοί.....	209
8.4.2	Διαταραγμένα Χαμιλτονιανά Συστήματα .....	213
8.4.3	Τροχιές και τομές Poincaré .....	218
8.4.4	Υπολογισμός της τομής Poincaré.....	223
8.5	Βιβλιογραφία.....	226
9	Μονοδιάστατες Απεικονίσεις.....	227
9.1	Γενικές έννοιες και ορισμοί.....	227
9.1.1	Απεικονίσεις.....	227
9.1.2	Μονοδιάστατες απεικονίσεις.....	227
9.1.3	Ευστάθεια σταθερών και περιοδικών σημείων .....	228
9.2	Η λογιστική απεικόνιση .....	229
9.3	Χαοτικές απεικονίσεις.....	233
9.3.1	Ορισμός της χαοτικής απεικόνισης .....	233
9.3.2	Ο εκθέτης Lyapunov .....	236
9.3.3	Συμβολική δυναμική .....	238
9.4	Σύνολα Cantor και δυναμική.....	239
9.4.1	Το σύνολο Cantor.....	239
9.4.2	Η λογιστική απεικόνιση για $R > 4$ .....	241
9.5	Βιβλιογραφία.....	244
10	Δισδιάστατες Απεικονίσεις.....	245
10.1	Εισαγωγικές έννοιες.....	245
10.1.1	Ορισμοί.....	245
10.1.2	Γραμμικές απεικονίσεις στο επίπεδο.....	245
10.2	Σταθερά και περιοδικά σημεία .....	247
10.2.1	Ευστάθεια σταθερών και περιοδικών σημείων .....	247
10.2.2	Τοπολογία-ταξινόμηση σταθερών σημείων .....	249
10.3	Παραδείγματα Απεικονίσεων.....	252
10.3.1	Η απεικόνιση του Hénon.....	252
10.3.2	Η τυπική Απεικόνιση.....	255
10.4	Ομοκλινικό χάος και η απεικόνιση πετάλου του Smale.....	257
10.4.1	Το ομοκλινικό πλέγμα.....	257
10.4.2	Το πέταλο του Smale.....	258
10.5	Βιβλιογραφία.....	263
11	Αγγλοελληνικό Γλωσσάρι - Ευρετήριο.....	265

# 1 Εισαγωγικές έννοιες των δυναμικών συστημάτων

## 1.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί

Έστω ένα φυσικό σύστημα το οποίο μοντελοποιείται έτσι ώστε η κατάστασή του να περιγράφεται πλήρως από έναν πεπερασμένο αριθμό ανεξάρτητων μετρήσιμων ποσοτήτων  $x_i \in R$ ,  $i=1, \dots, n$ . Θεωρούμε επίσης ότι το σύστημα εξελίσσεται στο χρόνο  $t \in R$ , δηλαδή οι ποσότητες  $x_i$  είναι χρόνο-εξαρτώμενες μεταβλητές και ονομάζονται **δυναμικές μεταβλητές**. Ο αριθμός  $n$  των μεταβλητών ορίζει τη **διάσταση** του συστήματος ενώ ο  $n$ -διάστατος χώρος,  $E \subseteq R^n$ , μέσα στον οποίο αντιπροσωπεύονται τα διανύσματα-θέσεις  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  για κάθε χρονική στιγμή  $t$  ονομάζεται **χώρος φάσεων** ([phase space](#)). Κάθε σημείο αυτού του χώρου αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη κατάσταση ή θέση του συστήματος σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Αν έχουμε στη διάθεσή μας έναν κανόνα ο οποίος μας επιτρέπει από τη γνώση μιας οποιασδήποτε θέσης του συστήματος τη χρονική στιγμή  $t$  να αντιστοιχίσουμε τη θέση του συστήματος τη χρονική στιγμή  $t + \delta t$  τότε λέμε ότι ορίζουμε ένα **δυναμικό σύστημα** ([dynamical system](#)). Συμβολικά, λοιπόν, μπορούμε να ορίσουμε ένα δυναμικό σύστημα ως μια ροή (ή απεικόνιση)  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  στο χώρο φάσεων

$$\varphi: R \times E \rightarrow E,$$

η οποία μεταφέρει (ή απεικονίζει) ένα σημείο  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , το οποίο αντιστοιχεί στη θέση του συστήματος τη χρονική στιγμή  $t$ , σε ένα σημείο  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ , το οποίο αντιστοιχεί στη θέση του συστήματος τη χρονική στιγμή  $t'$ ,

$$\mathbf{x}' = \varphi(\mathbf{x}, t).$$

Μια ροή έχει τις ιδιότητες

$$\varphi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$$

$$\varphi(\varphi(\mathbf{x}, t_1), t_2) = \varphi(\mathbf{x}, t_1 + t_2)$$

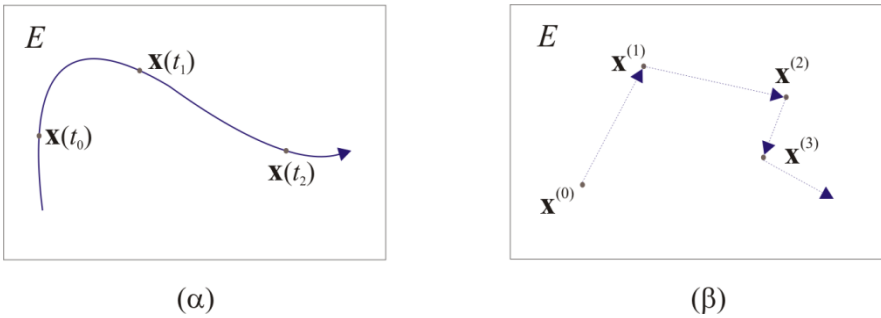
Μπορούμε να ορίσουμε τη θέση  $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$  σε μια χρονική στιγμή  $t_0$  ως την **αρχική θέση** του συστήματος. Αρχική θέση για το σύστημα μπορεί να αποτελεί κάθε σημείο του χώρου των φάσεων και η ροή  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  του δυναμικού συστήματος μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε αρχική θέση του συστήματος. Εν γένει, η εξέλιξη του συστήματος που αντιστοιχεί σε διαφορετική αρχική θέση είναι επίσης διαφορετική. Αν ο κανόνας εξέλιξης που εκφράζεται με την ροή δεν εμπλέκει «τυχαιότητα» τότε το σύστημα ονομάζεται **αιτιοκρατικό** (deterministic). Ένα αιτιοκρατικό σύστημα δίνει πάντα την ίδια εξέλιξη για μια δοθείσα αρχική θέση. Αν η ροή συμπεριλαμβάνει κάποιον βαθμό τυχαιότητας με τον ορισμό πιθανοτήτων στον κανόνα της εξέλιξης τότε το σύστημα ονομάζεται **στοχαστικό** ([stochastic](#)).

Αν και στη φύση ο χρόνος  $t$  αποτελεί μια συνεχή μεταβλητή, σε ένα δυναμικό σύστημα ο χρόνος μπορεί να είναι συνεχής ή διακριτός. Στην πρώτη περίπτωση ο χρόνος μπορεί να πάρει μια οποιαδήποτε πραγματική τιμή και το δυναμικό σύστημα ονομάζεται **συνεχές**. Αν όμως η εξέλιξη του συστήματος περιγράφεται σε χρονικά βήματα ανά  $\Delta t$  τότε ο χρόνος παίρνει τις διακριτές τιμές  $t_k = t_0 + k\Delta t$  και το σύστημα ονομάζεται **διακριτό** (discrete). Για ένα διακριτό σύστημα μια χρονική στιγμή  $t \in (t_k, t_{k+1})$  δεν έχει νόημα.

Αν η ροή  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  ενός αιτιοκρατικού συστήματος δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο  $t$  τότε το σύστημα ονομάζεται **αυτόνομο**. Σε ένα τέτοιο σύστημα, η εξέλιξη του συστήματος είναι ανεξάρτητη από την αρχική χρονική στιγμή. Αντίθετα, σε ένα **μη-αυτόνομο** σύστημα, αν το σύστημα βρεθεί σε ένα σημείο  $\mathbf{x} \in E$ , η εξέλιξή του στο χρόνο εξαρτάται και από την χρονική στιγμή  $t$  στην οποία βρίσκεται στο  $\mathbf{x}$ .

Σε ένα συνεχές σύστημα οι δυναμικές μεταβλητές  $x_i(t)$  αποτελούν συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου και η  $t$ -παραμετρική καμπύλη  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  αποτελεί μια συνεχή καμπύλη μέσα στο χώρο καταστάσεων, με συγκεκριμένη φορά διαγραφής, που ονομάζεται **φασική τροχιά** ή απλά τροχιά (trajectory). Σε ένα διακριτό σύστημα ως τροχιά του συστήματος ορίζεται το αριθμησιμο σύνολο σημείων  $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$  όπου  $x_i^{(k)} = x_i(t_k)$ ,  $k \in Z$ . Το σημείο μιας φασικής τροχιάς που αντιστοιχεί σε κάποιο χρόνο  $t_0$  μπορεί να θεωρηθεί ως η αρχική συνθήκη της τροχιάς (δηλαδή η αρχική θέση του συστήματος). Αν η

στιγμή  $t_0$  αναφέρεται στο παρόν τότε μια χρονική στιγμή  $t > t_0$  αναφέρονται σε μια μελλοντική κατάσταση του συστήματος, ενώ μια χρονική στιγμή  $t < t_0$  αναφέρεται στο παρελθόν.



Σχήμα 1-1. Χρονική εξέλιξη στο χώρο φάσεων (σηματικά) για (α) συνεχές και (β) διακριτό σύστημα.

Στα επόμενα κεφάλαια θα αναφερθούμε αποκλειστικά σε αιτιοκρατικά συστήματα. Αρχικά θα ασχοληθούμε με σε συνεχή συστήματα λίγων διαστάσεων, τα οποία περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις. Τα διακριτά συστήματα θα τα δούμε στα τελευταία κεφάλαια είτε ως συστήματα με συγκεκριμένες εφαρμογές είτε ως ένα εργαλείο για τη μελέτη της δυναμικής των συνεχών συστημάτων.

## 1.2 Συνεχή Δυναμικά συστήματα με Διαφορικές εξισώσεις

Οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (ordinary differential equations) αποτελούν τον πιο κοινό τρόπο περιγραφής μιας συνεχούς δυναμικής ροής. Συγκεκριμένα, ένα συνεχές δυναμικό σύστημα διάστασης  $n$  και με δυναμικές μεταβλητές  $x_i = x_i(t)$ ,  $i=1, \dots, n$ , ορίζεται εν γένει μέσω ενός συστήματος  $n$  διαφορικών εξισώσεων 1<sup>ης</sup> τάξης

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

το οποίο γράφεται συνοπτικά σε διανυσματική μορφή ως

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \triangleq (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Ο τόπος ορισμού  $E^+ = R \times E$  του συστήματος είναι ο τόπος ορισμού των συναρτήσεων  $f_i = f_i(x_j, t)$  και θα τον ονομάζουμε **εκτεταμένο χώρο φάσεων** (extended phase space). Εν γένει, θα θεωρούμε ότι ο τόπος ορισμού του συστήματος είναι ολόκληρο το σύνολο  $R^{n+1}$ .

**Σημείωση.** Οι δείκτες που θα χρησιμοποιούμε παρακάτω θα παίρνουν τιμές από 1 έως  $n$ , εκτός και εάν σαφώς ορίζονται διαφορετικά.

Η γενική λύση του συστήματος (1.1) αποτελείται από μια  $n$ -παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων για την κάθε δυναμική μεταβλητή αποτελούμενη από  $n$  αυθαίρετες σταθερές  $c_i$ , δηλαδή

$$x_i = x_i(t; c_1, c_2, \dots, c_n)$$

Μια συγκεκριμένη (μερική) λύση του συστήματος (1.1) προκύπτει αν θεωρήσουμε αρχικές συνθήκες, οι οποίες αντιστοιχούν σε ένα σημείο του εκτεταμένου χώρου φάσεων και εκφράζουν την κατάσταση του συστήματος σε μια χρονική στιγμή  $t=t_0$ ,

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad (t_0, x_{i0}) \in E^+ \quad (1.2)$$

Αν επιλύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών, το οποίο αποτελείται από τις διαφορικές εξισώσεις (1.1) και τις αρχικές συνθήκες (1.2), οι αυθαίρετες σταθερές προσδιορίζονται ως συναρτήσεις των αρχικών συνθηκών,  $c_i = c_i(x_{j0}, t_0)$ . Έτσι παίρνουμε τη λύση στη μορφή

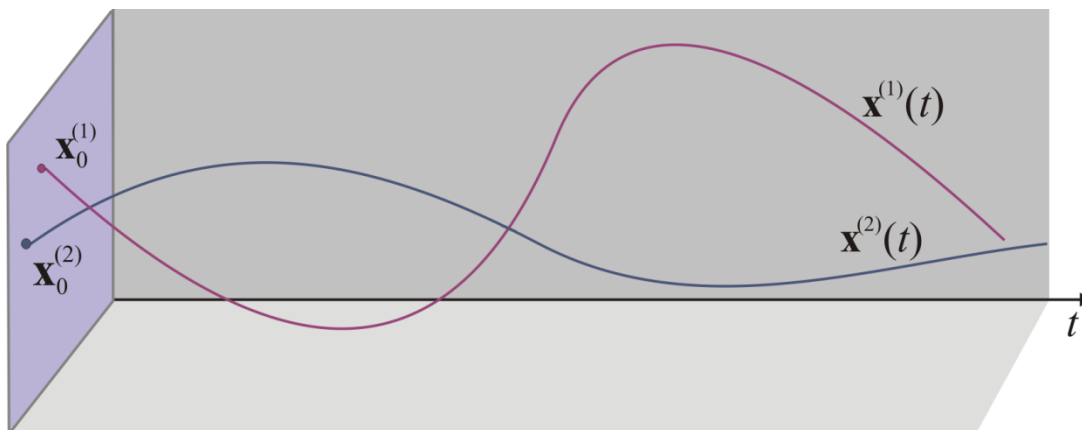
$$x_i = x_i(t; x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, t_0), \quad (1.3)$$

η οποία μας δίνει την εξέλιξη του συστήματος στον χρόνο και αντιστοιχεί στις δοθείσες αρχικές συνθήκες. Τα σημεία  $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) \in E^+$  ορίζουν μια συνεχή καμπύλη μέσα στον  $E^+$ , η οποία ονομάζεται **ολοκληρωτική καμπύλη**.

Η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης (1.3) εγγυάται υπό συγκεκριμένες συνθήκες. Αναφέρουμε τις συνθήκες του θεωρήματος *Peano-Cauchy*:

- Αν οι συναρτήσεις  $f_i(x_j, t)$  είναι συνεχείς σε μια γειτονιά του σημείου  $P_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, t_0) \in E^+$ , τότε το σύστημα (1.1) έχει λύση της μορφής (1.3), η οποία εκφράζεται αναλυτικά σε μια γειτονιά του σημείου  $P_0$ . Αν, επίσης, οι συναρτήσεις  $\partial f_i / \partial x_j$  ορίζονται και είναι συνεχείς στη γειτονιά του  $P_0$  τότε η λύση αυτή είναι μία και μοναδική.

Συνοπώς, από τις συνθήκες του παραπάνω θεωρήματος συμπεραίνουμε ότι από κάθε σημείο του εκτεταμένου χώρου των φάσεων περνάει μία και μοναδική ολοκληρωτική καμπύλη. Δηλαδή, η εξέλιξη του συστήματος είναι προκαθορισμένη αν οριστεί πλήρως η κατάσταση του σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή  $t_0$ . Αν η χρονική στιγμή  $t_0$  αναφέρεται στο παρόν, τότε η λύση (1.3) ισχύει και για  $t < t_0$  (παρελθόν) και για  $t > t_0$  (μέλλον). Δηλαδή τα συνεχή συστήματα (1.1) έχουν την ιδιότητα της *χρονικής αντιστρεψιμότητας* ([time reversibility](#))



Σχήμα 1-2. Ολοκληρωτικές καμπύλες στον εκτεταμένο χώρο φάσεων  $E^+ = E \times \mathbb{R}$ . Αν ισχύουν οι συνθήκες ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων, οι ολοκληρωτικές καμπύλες δεν επιτρέπεται να τέμνονται μεταξύ τους.

**Σχόλιο.** Μια ασθενέστερη συνθήκη για την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων ορίζεται με το θεώρημα του *Picard-Lindelöf*

- Έστω ότι η διανυσματική συνάρτηση  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  του δυναμικού συστήματος ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz σε μια γειτονιά  $D \subseteq E$  του σημείου  $\mathbf{x}_0$ , δηλαδή υπάρχει σταθερά  $L$  έτσι ώστε

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, t_0) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, t_0)\| \leq L \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D.$$

Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών (1.1), (1.2) και για κάποια τιμή  $\varepsilon > 0$  έχει μια και μοναδική λύση σε ένα διάστημα  $t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon$ .

### 1.2.1 Συστήματα μιας διάστασης

Στην περίπτωση όπου  $n=1$ , το δυναμικό μας σύστημα αποτελείται από μια διαφορική εξίσωση μιας δυναμικής μεταβλητής  $x=x(t)$

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{1.4}$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να επιλυθεί εφαρμόζοντας τεχνικές ανάλογα με την μορφή της συνάρτησης  $f(x, t)$  και αποτελεί αντικείμενο όλων των βιβλίων για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις. Προφανώς εξισώσεις της μορφής (1.4) μπορούν να περιγράψουν απλά δυναμικά συστήματα όπως αυτά που παραθέτουμε στα παρακάτω παραδείγματα.

**Παράδειγμα 1.** Έστω το γραμμικό ηλεκτρικό κύκλωμα RL το οποίο τροφοδοτείται από μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης  $U = U(t)$ . Το ρεύμα  $I = I(t)$ , το οποίο διαρρέει το κύκλωμα, δίνεται από το νόμο του Kirchhoff

$$\dot{I} = -\frac{R}{L}I + \frac{U_0}{L}\sin(\omega t) \quad , \quad (1.5)$$

Όπου  $R$  η ωμική αντίσταση,  $L$  η αυτεπαγωγή του πηνίου,  $U_0$  το πλάτος της τάσης και  $\omega$  η συχνότητά της (όλα σταθερές ποσότητες). Η εξίσωση (1.5) είναι γραμμική, μπορεί να επιλυθεί και, για την αρχική συνθήκη  $I(0) = I_0$ , να μας δώσει τελικά τη λύση

$$I(t) = \left( I_0 + \frac{L^2 \omega}{R^2 + L^2 \omega^2} \right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{R^2 + L^2 \omega^2} (R \sin \omega t - L \omega \cos \omega t) \quad (1.6)$$

**Παράδειγμα 2.** Σε δυναμικά συστήματα ανάπτυξης πληθυσμών θεωρούμε εν γένει ως βάση ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού  $x$  κάποιου είδους είναι ανάλογος με τον πληθυσμό σε κάθε χρονική στιγμή. Αν  $k$  ο συντελεστής αναλογίας, τότε

$$\dot{x} = kx, \quad k > 0 \quad (1.7)$$

Στην παραπάνω εξίσωση αντιστοιχούν λύσεις που δίνουν μια εκθετική αύξηση του πληθυσμού

$$x = x_0 e^{kt}, \quad x_0 = x(0) \quad (1.8)$$

Στη φύση μια εκθετική αύξηση της μορφής (1.8) δεν μπορεί να συμβαίνει για μεγάλο χρονικό διάστημα. Εν γένει όταν ο πληθυσμός αυξάνεται σημαντικά τότε υπεισέρχονται παράγοντες οι οποίοι τείνουν να σταθεροποιήσουν τον πληθυσμό ή ακόμα και να τον μειώσουν. Έτσι, για παράδειγμα, μπορούμε να επιβάλλουμε κορεσμό, δηλαδή έναν μέγιστο πληθυσμό για το σύστημα,  $N$ , και να θεωρήσουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού είναι και ανάλογος και με την διαφορά  $N - x$ . Έτσι παίρνουμε την εξίσωση *Verhulst*, που περιγράφει την **λογιστική ανάπτυξη**,

$$\dot{x} = kx(N - x) \quad \text{ή} \quad \dot{x} = ax - bx^2 \quad (a = kN), \quad (1.9)$$

με γενική λύση την

$$x = \frac{ax_0}{(a - bx_0)e^{-at} + bx_0} \quad (1.10)$$

**Παράδειγμα 3.** Η ταχύτητα εξέλιξης μιας χημική αντίδρασης εξαρτάται από τις συγκεντρώσεις των αντιδρώντων και των προϊόντων σε κάθε χρονική στιγμή. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την αντίδραση των χημικών στοιχείων A και B τα οποία παράγουν το χημικό στοιχείο Γ



Αν  $c_A, c_B$  και  $c_\Gamma$  είναι οι συγκεντρώσεις των στοιχείων σε κάθε χρονική στιγμή κατά την διάρκεια της αντίδρασης και  $\alpha_0, \beta_0$  οι αρχικές συγκεντρώσεις των αντιδρώντων A και B, αντίστοιχα, τότε θα είναι  $c_A = \alpha_0 - c_\Gamma$  και  $c_B = \beta_0 - \kappa c_\Gamma$ . Αν θεωρήσουμε ότι ο ρυθμός παραγωγής του προϊόντος Γ είναι ανάλογος με τις συγκεντρώσεις των A και B και θέσουμε  $c_\Gamma = x$ , τότε θα πάρουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\dot{x} = k(\alpha_0 - x)(\beta_0 - \kappa x). \quad (1.11)$$

Η γενική λύση είναι αρκετά περίπλοκη, αλλά αν υποθέσουμε ότι αρχικά έχουμε  $\alpha_0 = \beta_0 = C_0$ , η γενική λύση γράφεται

$$x = \begin{cases} kC_0^2 t / (1 + C_0 k t), & \kappa = 1 \\ C_0 \frac{e^{at} - 1}{\kappa e^{at} - 1}, & a = kC_0(\kappa - 1), \quad \kappa > 1 \end{cases} \quad (1.12)$$

## 1.2.2 [M] Αναλυτική επίλυση διαφορικών εξισώσεων με το Mathematica

Στο περιβάλλον συμβολικού προγραμματισμού του Mathics ή του Mathematica, μια διαφορική εξίσωση για την άγνωστη συνάρτηση  $x = x(t)$  γράφεται χρησιμοποιώντας το συμβολισμό  $x[t]$  για την άγνωστη συνάρτηση και τον συμβολισμό  $x'[t]$  ή  $D[x[t], t]$  για την παράγωγό της. Το πρώτο και το

δεύτερο μέλος της διαφορικής εξίσωσης εξισώνονται μέσω του λογικού τελεστή ισότητας “==” και όλη η παράσταση της εξίσωσης μπορεί να ανατεθεί σε ένα σύμβολο. Έτσι π.χ. η εξίσωση (1.5) μπορεί να γραφεί

```
ode = x'[t] == -(R/L) x[t] + (Uo/L) Sin[ω t]
```

Σημειώνουμε ότι δεν χρησιμοποιούμε για το ρεύμα το σύμβολο  $I$  γιατί είναι δεσμευμένο από την Mathematica.

Η αναλυτική επίλυση της διαφορικής εξίσωσης γίνεται με την εντολή [DSolve](#), η οποία συντάσσεται ως εξής

```
DSolve[εξίσωση, άγνωστη συνάρτηση, ανεξάρτητη μεταβλητή] ,
```

δηλαδή για την εξίσωση ode γράφουμε

```
In[1]:= sol = DSolve[ode, x, t]
```

και παίρνουμε το αποτέλεσμα

```
Out[1]= {{x -> Function[{t}, E^-((R t)/L) C[1] + (L Uo (-L ω Cos[t ω] + R Sin[tω])) / (R^2 + L^2 ω^2)]}}
```

όπου  $C[1]$  η αυθαίρετη σταθερά της λύσης. Αντίστοιχα για ένα πρόβλημα αρχικών τιμών με  $x(0)=x_0$ , έχουμε

```
In[2]:= sol = DSolve[{ode, x[0]==x0}, x, t]
```

```
Out[2]= {{x -> Function[{t}, ((E^-((R t)/L) (x0+L U ω) + Uo (-L ω Cos[t ω] + R Sin[t ω])) / (R^2 + L^2 ω^2)]}}
```

Αντίστοιχα μπορούμε να επιλύσουμε μια ΔΕ ανώτερης τάξης ή ένα αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών, π.χ., για την εξίσωση 2<sup>ης</sup> τάξης του αρμονικού ταλαντωτή  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ , έχουμε

```
In[3]:= DSolve[x''[t] + ω^2 x[t] == 0, x[t], t]
```

```
Out[3]= {{x[t] -> C[1] Cos[t ω] + C[2] Sin[t ω]}}
```

Οι  $C[1]$ ,  $C[2]$  είναι οι δύο αυθαίρετες σταθερές της γενικής λύσης. Για το πρόβλημα αρχικών τιμών με  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = u_0$ , οι αυθαίρετες σταθερές προσδιορίζονται και παίρνουμε

```
In[4]:= DSolve[{x''[t] + ω^2 x[t] == 0, x[0] == x0, x'[0] == u0}, x[t], t]
```

```
Out[4]= {{x[t] -> (x0 ω Cos[t ω] + u0 Sin[t ω]) / ω}}
```

**Σημείωση.** Παρατηρήστε τη διαφορετική μορφή εξόδου της `DSolve` στα δύο παραπάνω παραδείγματα. Στο πρώτο παράδειγμα γράψαμε την άγνωστη συνάρτηση ως  $x$ , ενώ στο δεύτερο παράδειγμα ως  $x[t]$ .

Για ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων η `DSolve` συντάσσεται ως

```
DSolve[{εξίσωση1, εξίσωση2, ...}, {άγνωστες συναρτήσεις}, ανεξάρτητη μεταβλητή]
```

π.χ., για το σύστημα  $\dot{x} = x + y$ ,  $\dot{y} = x - y$ ,

```
In[1]:= deq1 = x'[t] == x[t] + y[t];
deq2 = y'[t] == x[t] - y[t];
sol = DSolve[{deq1, deq2, x[0] == 1, y[0] == 0}, {x, y}, t]
```

Παίρνουμε την λύση

```
Out[1]:={{x -> Function[{t}, 1/4 E^(-Sqrt[2] t) (2 - Sqrt[2] +
2 E^(2 Sqrt[2] t) + Sqrt[2] E^(2 Sqrt[2] t))],
y -> Function[{t}, (E^(-Sqrt[2] t) (-1 + E^(2 Sqrt[2] t))
/(2 Sqrt[2]))]}
```

**Σημείωση.** Η έξοδος της DSolve είναι μια λίστα {...} με στοιχεία υπό-λίστες {...} οι οποίες περιέχουν τις λύσεις που προκύπτουν. Συνήθως αυτή η λύση είναι μία και μοναδική. Στα συστήματα η λύση για όλες τις μεταβλητές περιλαμβάνεται στην ίδια υπό-λίστα της λίστας λύσεων και δίνεται με το σύμβολο αντικατάστασης -> ή ->.

**Παράδειγμα 4.** Θα βρούμε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\dot{x} = x + y, \quad \dot{y} = -x - \frac{y}{4}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0,$$

Θα σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση των συναρτήσεων  $x = x(t)$  και  $y = y(t)$  καθώς και την παραμετρική (φασική) καμπύλη  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$

Συντάσσουμε την DSolve ως

```
In[1]:= deq1= x'[t]==x[t] + y[t]; deq2= y'[t]== -x[t] - y[t]/4;
sol = DSolve[{deq1, deq2, x[0] == 1, y[0] == 0}, {x[t], y[t]}, t]
```

και παίρνουμε τη λύση (στη συμβολική μεταβλητή sol)

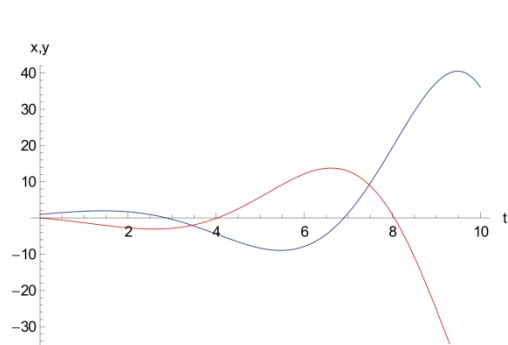
```
Out[1]= {{x[t] -> 1/39 E^(3 t/8) (39 Cos[(Sqrt[39] t)/8] + 5 Sqrt[39]
Sin[(Sqrt[39] t)/8]),
y[t] -> -((8 E^(3 t/8) Sin[(Sqrt[39] t)/8])/Sqrt[39])}}
```

Η παραπάνω λίστα λύσεων (με ένα και μοναδικό στοιχείο) έχει αντιστοιχιστεί στο σύμβολο sol. Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τα  $x(t)$  και  $y(t)$  της παραπάνω λύσης σε σύμβολα επιλογής του χρήστη, π.χ.

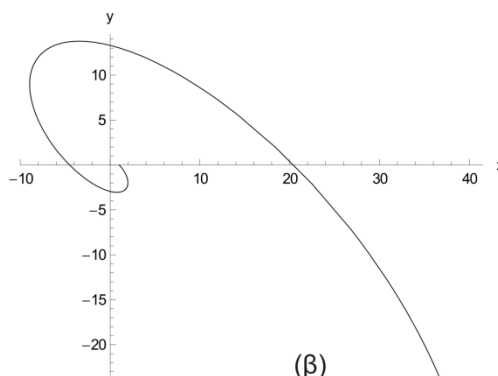
```
Xt = x[t] /. sol[[1]]
Yt = y[t] /. sol[[1]]
```

Σχεδιάζουμε τις λύσεις  $x = x(t)$  και  $y = y(t)$  καθώς και την παραμετρική καμπύλη  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$  σε ένα ενδεικτικό χρονικό διάστημα τιμών με τις εντολές

```
Plot[{Xt, Yt}, {t, 0, 10}, PlotStyle -> {Blue, Red}, AxesLabel -> {"t", "x, y"}]
ParametricPlot[{Xt, Yt}, {t, 0, 10}, AxesLabel -> {"x", "y"}]
```



(α)



(β)

Σχήμα 1-3. Η έξοδος γραφικών του κώδικα του παραδείγματος 4. (α) η λύση  $x=x(t)$  (μπλέ καμπύλη) και  $y=y(t)$  (κόκκινη καμπύλη) και (β) η αντίστοιχη παραμετρική καμπύλη στο επίπεδο  $xy$ .

## Ασκήσεις

**Άσκηση 1.2.1.** Χρησιμοποιήστε την DSolve για να επιλύσετε τα προβλήματα αρχικών τιμών των παραδειγμάτων 2 και 3.

**Άσκηση 1.2.2.** Σε μια πόλη ξεσπά επιδημία. Ο ρυθμός αύξησης των ασθενών είναι ανάλογος του αριθμού τους αλλά και του αριθμού αυτών που δεν έχουν ασθενήσει ακόμη. Γράψτε την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση και βρείτε πως μεταβάλλεται ο αριθμός των ασθενών με το χρόνο. Αν αρχικά ( $t=0$ ) το 10% του πληθυσμού έχει ασθενήσει, ενώ μετά από μέρες έχει ασθενήσει το 50% του πληθυσμού, τότε θα ασθενήσει το 90% του πληθυσμού; Μπορούμε να συμπεράνουμε πότε ξεκίνησε η επιδημία;

**Άσκηση 1.2.3.** Η συγκέντρωση  $x=x(t)$  της γλυκόζης στο αίμα, όταν αυτή εγχέεται ενδοφλέβια με ρυθμό  $G$ , δίνεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} + kx = \frac{G}{100V},$$

όπου  $V$  ο όγκος του αίματος και  $k$  μια σταθερά. Λύστε τη διαφορική εξίσωση και σχεδιάστε το  $x=x(t)$  για διάφορες αρχικές συνθήκες  $x_0 = x(0)$ . Ποιος είναι ο ρόλος της σταθεράς  $k$ ;

**Άσκηση 1.2.4.** Λύστε με την DSolve τη διαφορική εξίσωση  $\ddot{x} + \omega^2 x = \sin(\Omega t)$  (απλοποιήστε το αποτέλεσμα). Ποια η λύση αν  $\Omega = \omega$ ;

**Άσκηση 1.2.5.** Λύστε με την DSolve το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\dot{x} = \frac{x}{2} + y, \quad \dot{y} = -x - \frac{y}{2}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1$$

και σχεδιάστε τις λύσεις  $x = x(t)$  και  $y = y(t)$  καθώς και την φασική καμπύλη  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$

**Άσκηση 1.2.5.** Το ίδιο με την προηγούμενη άσκηση για το μη-αυτόνομο σύστημα

$$\dot{x} = \frac{x}{2} + y, \quad \dot{y} = -x - \frac{y}{2} + \frac{1}{4} \sin t, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1$$

**Άσκηση 1.2.6.** Για τη διαφορική εξίσωση

$$y''(x) = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'(x)}, \quad a \in \mathbb{R}$$

α) να βρεθεί η γενική λύση

β) να σχεδιαστούν μερικές λύσεις που περνούν από το σημείο  $(0,0)$  για  $a=1$

γ) Να σχεδιαστούν οι λύσεις για  $a=1$  που περνούν από το  $(0,0)$  με κλίση 0

**Άσκηση 1.2.7.** Για τη διαφορική εξίσωση

$$y''(x) + y'/2 + y = 0$$

α) να βρεθεί η γενική λύση

β) να σχεδιαστούν μερικές λύσεις με αρχικές συνθήκες  $y(0)=1$  και  $y'(0)=0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1$ .

γ) Παρατηρήστε ότι οι παραπάνω λύσεις περνούν για  $x=x^*$  και πάλι όλες μαζί από την ίδια τιμή  $y^*$ . Ποιο είναι αυτό το σημείο  $(x^*, y^*)$ ;

## 1.3 Διανυσματικό πεδίο και σημεία ισοροπίας

Τα δεξιά μέλη των εξισώσεων (1.1) ορίζουν το **διανυσματικό πεδίο** του συστήματος

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = (f_1, f_2, \dots, f_n) \quad (1.13)$$

για το οποίο θα θεωρούμε στη συνέχεια ότι ορίζεται μονότιμα σε όλο το  $E^+$ , είναι συνεχές και επίσης και όλες οι παράγωγες  $\partial f_i / \partial x_j$  είναι επίσης συνεχείς συναρτήσεις. Σε κάθε σημείο λοιπόν του χώρου φάσεων και σε



για μια δεδομένη χρονική στιγμή ορίζεται και ένα διάνυσμα  $\mathbf{f}$  το οποίο δείχνει την *τάση* της εξέλιξης του συστήματος την δεδομένη χρονική στιγμή και για την δεδομένη κατάσταση.

### 1.3.1 Αυτόνομα συστήματα

Για ένα αυτόνομο σύστημα έχουμε

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = 0, \quad \forall i \quad \text{ή} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = 0,$$

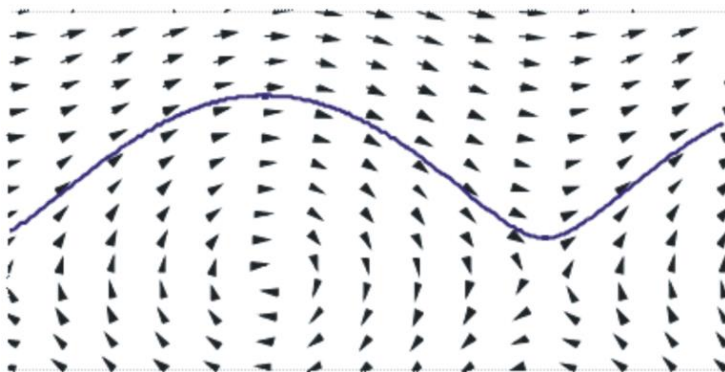
δηλαδή

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{1.14}$$

και, άρα το διανυσματικό πεδίο θα παραμένει σταθερό στο χρόνο. Επίσης, οι διαφορικές εξισώσεις παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από μια σταθερή χρονική μετατόπιση. Πράγματι, αν θέσουμε μια άλλη μεταβλητή χρόνου  $t' = t + t_0$ , τα δεξιά μέλη των διαφορικών εξισώσεων (δηλαδή το διανυσματικό πεδίο) δεν αλλάζει αφού δεν εξαρτάται από το  $t$  και επίσης για τα αριστερά μέλη θα είναι  $d^2 x_i / dt^2 = d^2 x_i / dt'^2$ . Άρα για τις αρχικές συνθήκες  $x_i(t_0) = x_{i0}$  μπορούμε πάντα να θέτουμε  $t_0 = 0$

Κάθε φασική καμπύλη  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  οφείλει να εφάπτεται στο διανυσματικό πεδίο του συστήματος. Πράγματι το στοιχειώδες διάνυσμα  $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$  των φασικών καμπύλων είναι παράλληλο στο διανυσματικό πεδίο αφού, όπως προκύπτει από τις διαφορικές εξισώσεις (1.14) του συστήματος, είναι

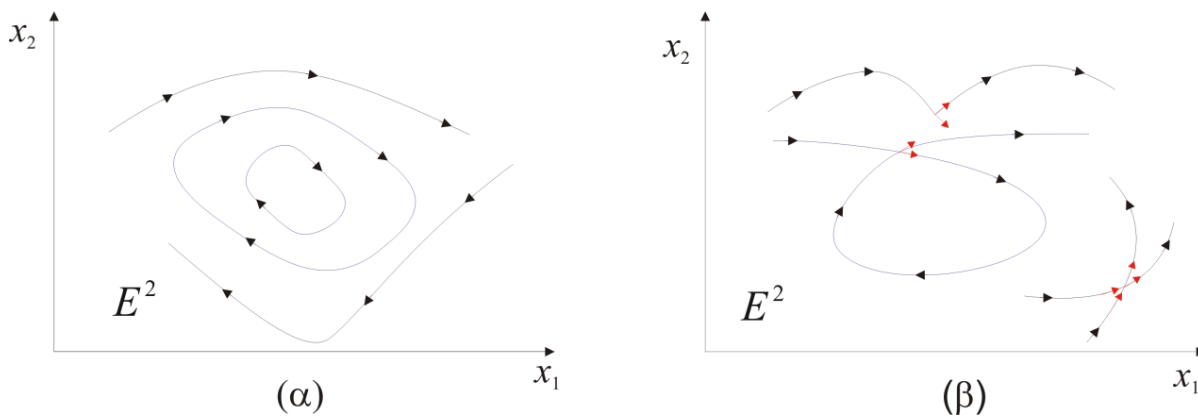
$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \tag{1.15}$$



Σχήμα 1-4. Διανυσματικό πεδίο και φασική τροχιά.

Συνεπώς προκύπτει άμεσα ότι δύο φασικές καμπύλες δεν μπορούν να τέμνονται εγκάρσια και μια φασική καμπύλη δεν μπορεί να τέμνει εγκάρσια τον εαυτό της, διότι στα σημεία της τομής θα έπρεπε να ορίζονται δύο διαφορετικά διανύσματα  $\mathbf{f}$ , πράγμα άτοπο αφού το διανυσματικό πεδίο ορίζεται μονότιμα σε κάθε σημείο. Επίσης δεν επιτρέπεται ούτε να εφάπτονται διότι οι ιδιότητες που θεωρήσαμε για το διανυσματικό πεδίο ικανοποιούν τις συνθήκες ύπαρξης και μοναδικότητας του θεωρήματος *Peano-Cauchy*. Άρα, από κάθε σημείο του χώρου των φάσεων (το οποίο αποτελεί μια αρχική συνθήκη για τις διαφορικές εξισώσεις του συστήματος για  $t_0=0$ ) περνάει μία και μοναδική λύση.

Το σύνολο όλων των τροχιών ή φασικών καμπύλων ονομάζεται **φασικό διάγραμμα** (ή φασικό πορτρέτο). Η κατανομή και η ποιοτική μορφή των τροχιών στο φασικό χώρο δημιουργούν μια «τοπολογική εικόνα» η οποία είναι χαρακτηριστική για το σύστημα. Μόνο στην περίπτωση ενός συστήματος 2 διαστάσεων έχουμε άμεση εποπτεία του φασικού χώρου. Στις τρεις διαστάσεις ο φασικός χώρος προβάλλεται ουσιαστικά στο επίπεδο και η κατανόησή του γίνεται δυσχερής.



Σχήμα 1-5. (α) επιτρεπτές και (β) μη επιτρεπτές μορφές φασικών καμπύλων.

**Σχόλιο.** Η παράσταση (1.15) εκφράζει ένα σύστημα  $n-1$  διαφορικών εξισώσεων, η αναλυτική λύση του οποίου (αν υπάρχει!) θα μας δώσει

$$\Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (1.16)$$

όπου  $c_i$  αυθαίρετες σταθερές που εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες. Καθεμιά από τις σχέσεις (1.16), για δεδομένες σταθερές  $c_i$ , εκφράζει μία υπερ-επιφάνεια, διάστασης  $n-1$  μέσα στον  $n$ -διάστατο χώρο φάσεων. Η τομή όλων αυτών των υπερ-επιφανειών εν γένει αποτελεί μια μονοδιάστατη καμπύλη και αποτελεί την φασική καμπύλη. Οι συναρτήσεις  $\Phi_i = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ονομάζονται ολοκληρώματα του συστήματος (1.1).

Σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση της τοπολογίας του χώρου φάσεων αποτελούν τα **σημεία ισορροπίας** του συστήματος (equilibrium points), τα οποία αποτελούν ειδικές λύσεις του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων. Ένα σημείο  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  του χώρου φάσεων καλείται σημείο ισορροπίας αν

$$f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.17)$$

δηλαδή, τα σημεία ισορροπίας είναι τα **κρίσιμα σημεία** του διανυσματικού πεδίου.

Για αρχικές συνθήκες  $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  θα έχουμε

$$\dot{x}_i = 0 \Rightarrow x_i = \text{σταθ.} = x_{i0} \quad (i = 1, \dots, n)$$

δηλαδή, η κατάσταση του συστήματος παραμένει σταθερή στο χρόνο. Τα σημεία ισορροπίας υπολογίζονται ως οι πραγματικές λύσεις του αλγεβρικού συστήματος (1.17) και αποτελούν, εν γένει, διακριτά ή μεμονωμένα (isolated) σημεία στο χώρο φάσεων  $E$ .

**Παράδειγμα.** Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος

$$\dot{x}_1 = x_1 - 2x_2, \quad \dot{x}_2 = kx_1 - x_1x_2^2$$

Θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος

$$x_1 - 2x_2 = 0 \quad \text{και} \quad kx_1 + x_1x_2^2 = 0$$

Προκύπτουν οι λύσεις

$$(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$$

$$(x_1^*, x_2^*) = (2\sqrt{k}, \sqrt{k}), (-2\sqrt{k}, -\sqrt{k})$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα έχει ένα σημείο ισορροπίας για  $k < 0$  και τρία σημεία για  $k > 0$ . Η κρίσιμη τιμή της παραμέτρου  $k$  για την οποία παρουσιάζεται αλλαγή στον αριθμό των σημείων ισορροπίας ονομάζεται **σημείο διακλάδωσης** (δες Κεφάλαιο 6).

**Σχόλιο.** Σε ένα σημείο ισορροπίας αποδίδουμε την *ιδιότητα της ευστάθειας*. Ένα σημείο ισορροπίας θα λέγεται **ευσταθές**, αν  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  τέτοιο ώστε  $\forall \mathbf{x}: d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) < \delta$  και  $\forall t \geq 0$  ισχύει ότι  $d(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*) < \varepsilon$ , όπου  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  είναι η συνηθισμένη απόσταση στον  $R^n$ , δηλαδή

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Δηλαδή, κατά τον παραπάνω ορισμό, όλες οι λύσεις του συστήματος με αρχικές συνθήκες σε μια γειτονιά του σημείου ισορροπίας θα παραμένουν κοντά στο σημείο ισορροπίας για κάθε  $t$ . Ένα σημείο ισορροπίας που δεν είναι ευσταθές,

ονομάζεται **ασταθές**. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει έστω και μια τροχιά (με αρχικές συνθήκες στη γειτονιά του σημείου ισορροπίας) που απομακρύνεται από το σημείο ισορροπίας. Μια υποπερίπτωση της ευστάθειας είναι η ασυμπτωτική ευστάθεια. Ένα σημείο ισορροπίας  $\mathbf{x}^*$  ονομάζεται **ασυμπτωτικά ευσταθές** αν  $\exists \delta > 0$  τέτοιο ώστε  $\forall \mathbf{x} : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) < \delta$  να ισχύει ότι  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ . Στα επόμενα κεφάλαια θα ορίσουμε και θα αναφερόμαστε κυρίως στην ιδιότητα της *γραμμικής ευστάθειας*. Τα παραπάνω περιγράφονται αναλυτικά στο κεφάλαιο 4.

### 1.3.2 Μη αυτόνομα συστήματα

Σε ένα μη αυτόνομο σύστημα το διανυσματικό πεδίο μεταβάλλεται με το χρόνο

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \neq 0$$

Όπως και στα αυτόνομα συστήματα η φασική τροχιά οφείλει να εφάπτεται στιγμιαία στο διανυσματικό πεδίο όπως αυτό ορίζεται τη δεδομένη χρονική στιγμή. Στα δυναμικά συστήματα θεωρούμε περιοδικές εξαρτήσεις ως προς το χρόνο, δηλαδή έχουμε ροές για τις οποίες

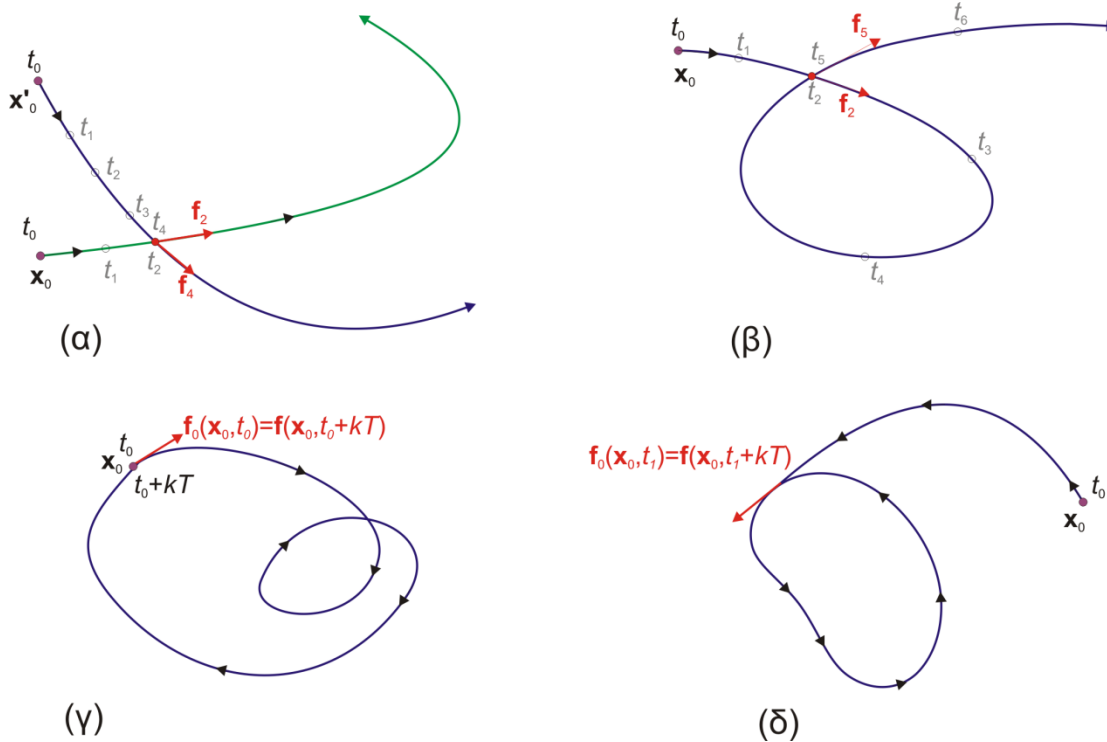
$$\varphi(\mathbf{x}_0, t) \equiv \varphi(\mathbf{x}_0, t + T),$$

όπου  $T$  η περίοδος του συστήματος. Τα πιο συνηθισμένα συστήματα που μελετώνται είναι οι εξαναγκασμένοι ταλαντωτές που θα δούμε και στο κεφάλαιο 7.

Σε αντίθεση με τα αυτόνομα συστήματα, μια κατάσταση ή θέση  $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$  του συστήματος αντιστοιχεί σε μια μελλοντική εξέλιξη η οποία εξαρτάται από τον χρόνο  $t_0$ , στον οποίο αντιστοιχεί η αρχική θέση. Πράγματι, αν θεωρήσουμε ότι το σύστημα βρίσκεται στη θέση την θέση  $\mathbf{x}_0$  τη χρονική στιγμή  $t_1$ , τότε θα εξελιχθεί στο χώρο φάσεων προς την διεύθυνση του  $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t_1)$ , ενώ αν βρεθεί στην ίδια θέση τη χρονική στιγμή  $t_2 \neq t_1$  τότε θα εξελιχθεί προς την διεύθυνση του  $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t_2)$ . Και επειδή, εν γένει,  $\mathbf{f}_1 \neq \mathbf{f}_2$  η εξέλιξη που αντιστοιχεί στις δύο περιπτώσεις θα είναι διαφορετική. Αυτό έχει ως άμεση συνέπεια ότι

- Δύο διαφορετικές φασικές τροχιές στο χώρο φάσεων μπορούν να τέμνονται
- Μια φασική τροχιά μπορεί να τέμνει τον εαυτό της.

Οι παραπάνω τομές δεν παραβιάζουν την μοναδικότητα των λύσεων, εφόσον σημειώνονται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Αν το μη αυτόνομο σύστημα είναι περιοδικό με περίοδο  $T$  και μια φασική τροχιά, η οποία ξεκινάει από το θέση  $\mathbf{x}_0$  τη χρονική  $t_0$ , βρεθεί ξανά στην ίδια θέση  $\mathbf{x}_0$  τη χρονική  $t = t_0 + kT$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ , τότε η εξέλιξή του στο διάστημα  $(t_0 + kt, t_0 + (k+1)T)$  θα είναι η ίδια με αυτήν του αρχικού χρονικού διαστήματος  $(t_0, t_0 + kT)$ , δηλαδή θα έχουμε **περιοδική εξέλιξη** με περίοδο ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου του συστήματος.



Σχήμα 1-6. Σε ένα μη αυτόνομο σύστημα (α) οι φασικές τροχιές μπορούν να τέμνονται εγκάρσια σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, (β) μια τροχιά μπορεί να τέμνει τον εαυτό της, (γ) σε ένα περιοδικό σύστημα μπορούμε να έχουμε περιοδική εξέλιξη. Η περίπτωση (δ) δεν αντιστοιχεί σε τροχιά που μπορεί να υπάρξει για ένα σύστημα στο οποίο ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος του Cauchy.

Αν υπάρχουν σταθερά σημεία  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  του χώρου φάσεων για τα οποία έχουμε

$$f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{και} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.18)$$

τότε τα σημεία αυτά αποτελούν κρίσιμα σημεία του διανυσματικού πεδίου ή σημεία ισορροπίας του μη αυτόνομου συστήματος.

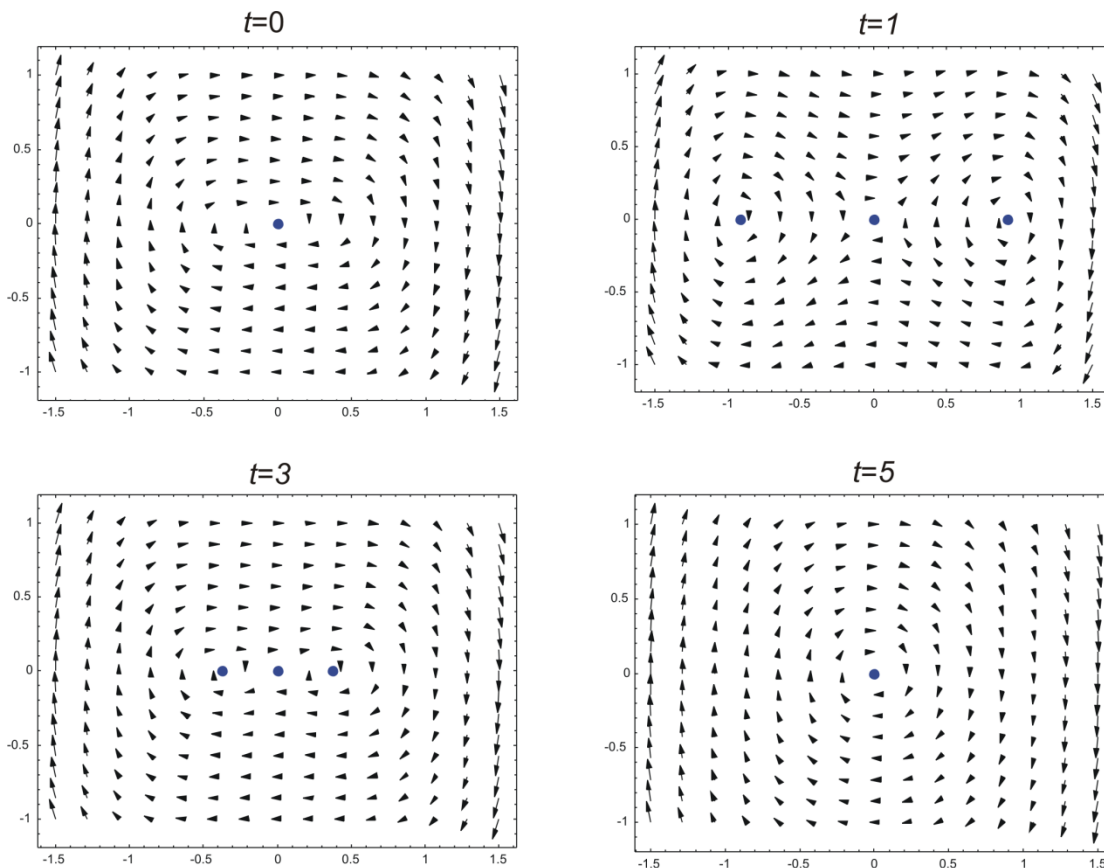
**Παράδειγμα.** Ας θεωρήσουμε το μη αυτόνομο σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x^3 + x \sin t \end{aligned} \quad (1.19)$$

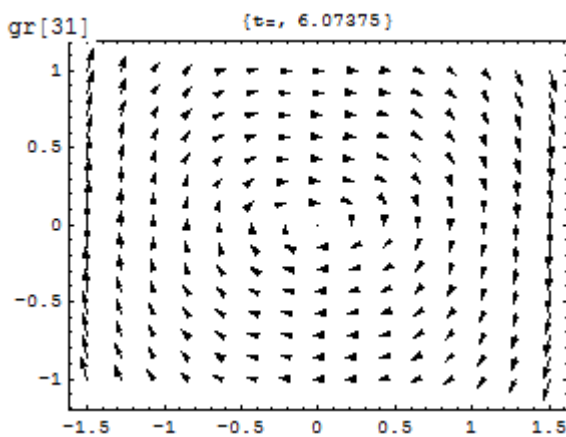
το οποίο παρουσιάζει περιοδικότητα με περίοδο  $2\pi$ . Το σύστημα έχει ένα σημείο ισορροπίας, το  $(0,0)$ . Σε κάθε χρονική στιγμή στο διάστημα  $t_0 \leq t \leq t_0 + 2\pi$ , το διανυσματικό πεδίο παρουσιάζει διαφορετική μορφή. Μάλιστα στα διαστήματα  $2k\pi < t < (2k+1)\pi$ ,  $k=1,2,3,\dots$  παρουσιάζονται τρία (στιγμιαία) κρίσιμα σημεία για το διανυσματικό πεδίο, στις θέσεις

$$(0,0) \quad \text{και} \quad (\pm\sqrt{\sin t}, 0)$$

Στα διαστήματα  $(2k+1)\pi < t < 2(k+1)\pi$  έχουμε μόνο κρίσιμο σημείο το  $(0,0)$ . Συνεπώς το  $(0,0)$  αποτελεί κρίσιμο σημείο για κάθε  $t$  και άρα είναι σημείο ισορροπίας.



Σχήμα 1-7. Το διανυσματικό πεδίο του περιοδικού συστήματος (1.19) για διάφορες χρονικές στιγμές. Τα στιγμιαία κρίσιμα σημεία του πεδίου σημειώνονται με την μπλε κουκίδα. Το σημείο  $(0,0)$  είναι σταθερό κρίσιμο σημείο του πεδίου και αποτελεί σημείο ισοροπίας.



Κινούμενη εικόνα 1-1<sup>1</sup>. Το μεταβαλλόμενο διανυσματικό πεδίο του συστήματος (1.19).

### 1.3.3 Υπολογισμός σημείων ισοροπίας και σχεδίαση διανυσματικού πεδίου στο Mathematica.

<sup>1</sup> Η κινούμενη εικόνα nonautonVecField.gif είναι διαθέσιμη στην ιστοσελίδα του παρόντος συγγράμματος/κεφαλαίου στον Ελληνικό Συσσωρευτή Ακαδημαϊκών Ηλεκτρονικών Βιβλίων (<http://repfiles.kallipos.gr/file/14090>)

Όπως είδαμε, τα σημεία ισορροπίας προκύπτουν ως λύσεις ενός αλγεβρικού συστήματος εξισώσεων  $f=0$ . Η αναλυτική επίλυση μιας αλγεβρικής εξίσωσης ή ενός συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων υλοποιείται στο Mathematica με την εντολή [Solve](#), η οποία συντάσσεται ως εξής

$$\text{Solve}[\text{εξίσωση, άγνωστη μεταβλητή}]$$

$$\text{Solve}[\{\text{σύστημα εξισώσεων}, \{\text{άγνωστες μεταβλητές}\}]$$

Η γραφή μιας εξίσωσης γίνεται με τον λογικό τελεστή ισότητας “=” και μπορεί να περιέχει διάφορα σύμβολα που αντιστοιχούν σε παραμέτρους. Το σύμβολο της άγνωστης μεταβλητής, ως προς την οποία θα λυθεί η εξίσωση, δηλώνεται ρητά στην εντολή Solve.

### Παράδειγμα 1. Εξίσωση μιας μεταβλητής

```
In[1]:= Solve[a x + b == 0, x]
```

```
Out[1]= {{x -> -(b/a)}}
```

### Παράδειγμα 2. Σύστημα εξισώσεων

Τα αποτελέσματα δίνονται με το σύμβολο της αντιστοιχίας  $\rightarrow$  και ως στοιχεία μιας λίστας. Αν υπάρχουν περισσότερες λύσεις, η κάθε μια δίνεται ως ένα στοιχείο της λίστας.

```
In[2]:= Solve[{2 x + 3 y == 1, 5 x - y == 0}, {x, y}]
```

```
Out[2]= {{x -> 1/17, y -> 5/17}}
```

### Παράδειγμα 3. Πολλές λύσεις

```
In[1]:= Solve[{x^2 + 2 y == 1, 4 x - y == 0}, {x, y}]
```

```
Out[1]= {{y -> 4 (-4 - Sqrt[17]), x -> -4 - Sqrt[17]}, {y -> 4 (-4 + Sqrt[17]), x -> -4 + Sqrt[17]}}
```

Στο παραπάνω παράδειγμα έχουμε δύο λύσεις του συστήματος, οι οποίες δίνονται σε ακριβή μορφή. Γενικά αν οι εξισώσεις γράφονται με ακριβείς αριθμούς τότε το αποτέλεσμα προκύπτει με ακριβείς παραστάσεις. Η NSolve δίνει αριθμητικές προσεγγίσεις των λύσεων

```
In[4]:= NSolve[{x^2 + 2 y == 1, 4 x - y == 0}, {x, y}, 20]
```

```
Out[4]= {{x -> -8.123105625617660550, y -> -32.492422502470642199},
{x -> 0.12310562561766054982, y -> 0.49242250247064219929}}
```

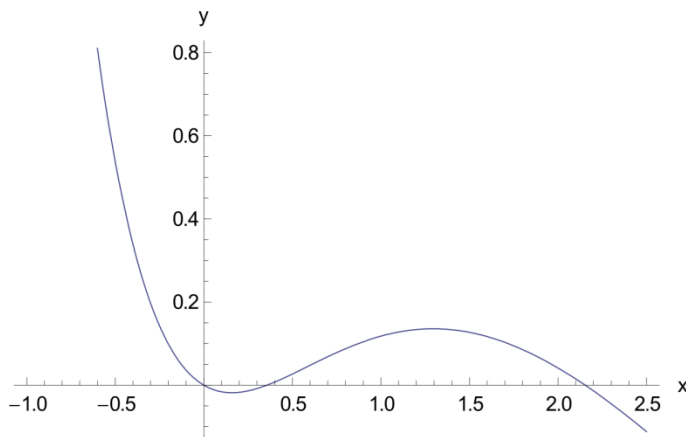
Το τρίτο όρισμα της NSolve αποτελεί τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων με τα οποία δίνονται οι λύσεις – αν δεν χρησιμοποιηθεί τότε τα αποτελέσματα δίνονται στην ακρίβεια μηχανής.

**Σημείωση.** Η Solve μπορεί και επιλύει αποδοτικά γραμμικές και πολυωνυμικές εξισώσεις (ή συστήματα). Μπορεί να επιλύσει και πιο σύνθετες εξισώσεις όταν έχει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσει αντίστροφες συναρτήσεις. Όμως σε αυτές τις περιπτώσεις υπάρχει περίπτωση να μην βρεθούν όλες οι λύσεις.

### Παράδειγμα 4. Για την εξίσωση

$$y = x^2 e^{-x} - \frac{x}{4} = 0$$

η Solve βρίσκει μόνο την λύση  $x=0$ , ενώ όπως φαίνεται από παρακάτω σχήμα υπάρχουν επιπλέον τουλάχιστον άλλες δύο πραγματικές λύσεις.



Σχήμα 1-8. Η συνάρτηση του παραδείγματος 4. Εκτός του  $x=0$  η συνάρτηση φαίνεται να έχει άλλες δύο ρίζες στο  $x \approx 0.35$  και  $x=2.15$ .

**Σημείωση.** Η `NSolve` χρησιμοποιεί αναλυτικούς αλγορίθμους για την εύρεση ριζών, παρόμοιους με αυτούς της `Solve`.

Για τις πολυωνυμικές εξισώσεις επιτυγχάνεται εν γένει η εύρεση όλων των λύσεων, και των πραγματικών και των μιγαδικών

**Παράδειγμα 5.** Για το σύστημα του παραδείγματος της §1.3.1 έχουμε

```
In[1]:= Solve[{x1 - 2 x2 == 0, k x1 - x1 x2^2 == 0}, {x1, x2}]
```

```
Out[1]= {{x1 -> 0, x2 -> 0}, {x1 -> -2 Sqrt[k], x2 -> -Sqrt[k]}, {x1 -> 2 Sqrt[k], x2 -> Sqrt[k]}}
```

ή για  $k=-1$

```
In[2]:= NSolve[{x1 - 2 x2 == 0, - x1 - x1 x2^2 == 0}, {x1, x2}]
```

```
Out[2]= {{x1 -> 0. + 2. I, x2 -> 0. + 1. I}, {x1 -> 0. - 2. I, x2 -> 0. - 1. I}, {x1 -> 0., x2 -> 0.}}
```

Σημειώνουμε ότι  $I=(-1)^{1/2}$ . Άλλες εντολές που σχετίζονται με την διαχείριση αλγεβρικών εξισώσεων και εύρεση ριζών είναι οι `Root`, `Reduce`, `Eliminate` κ.ά.

Η σχεδίαση διανυσματικού πεδίου υλοποιείται επίσης στην `Mathematica` με κατάλληλες εντολές και ορίσματα, οι οποίες όμως διαφέρουν στις διάφορες εκδόσεις. Για την έκδοση 7.0, ένα διανυσματικό πεδίο σχεδιάζεται με την εντολή `VectorPlot`, η οποία συνοδεύεται με διάφορες παραμέτρους, π.χ. για το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{f}=(y, y+x^2)$  γράφουμε

```
vfield = VectorPlot[{y, y + x^2}, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, VectorPoints -> 15, VectorScale -> {0.02, 1.5, None}, VectorStyle -> Gray]
```

**Σημείωση.** Στην έκδοση 5 της `Mathematica` θα πρέπει πρώτα να εισαχθεί η συνάρτηση από την κατάλληλη βιβλιοθήκη `<<Graphics`PlotField``. Στη συνέχεια χρησιμοποιείται η συνάρτηση `PlotVectorField`

## Ασκήσεις

**Άσκηση 1.3.1.** Υπολογίστε τα πέντε σημεία ισορροπίας του συστήματος

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1^2 x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_1 x_2^2$$

**Άσκηση 1.3.2.** Οι πληθυσμοί  $x_1$  και  $x_2$  δύο αλληλεπιδρώντων ειδών σε ένα οικοσύστημα εξελίσσονται σύμφωνα με τις εξισώσεις

$$\dot{x}_1 = x_1(3 - x_1 - 2x_2), \quad \dot{x}_2 = x_2(3 - 2x_1 - x_2) \quad (x_1, x_2 \geq 0)$$

Βρείτε για ποιες τιμές των πληθυσμών το σύστημα ισορροπεί. Δείξτε ότι η  $x_1 = x_2$  είναι μια φασική καμπύλη του συστήματος.

## 1.4 Διατηρητικά και μη διατηρητικά συστήματα

Έστω ένα  $n$ -διάστατο σύστημα

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, t), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.20)$$

και  $D$  ένα φραγμένο και συνεχές υποσύνολο του χώρου φάσεων  $E$  με όγκο  $V_D$

$$V_D = \iiint_{D \subset \mathbb{R}^n} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Κάθε σημείο  $\mathbf{x} \in D$  συνιστά για τη χρονική στιγμή  $t_0$  μια αρχική συνθήκη  $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ . Ξεκινώντας με αφετηρία το σημείο αυτό, κάτω από την ροή του συστήματος (1.20) σε χρόνο  $t = t_0 + \tau$ ,  $\tau > 0$ , το σύστημα θα βρεθεί στη θέση  $\mathbf{x}_\tau = (x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_n(\tau)) \in E$  ή, με άλλα λόγια, λέμε ότι το σημείο  $\mathbf{x}_0$  απεικονίζεται στο σημείο  $\mathbf{x}_\tau$  κάτω από τη ροή  $f_\tau = f(\mathbf{x}, t_0 + \tau)$

$$\mathbf{x}_0 \xrightarrow{f_\tau} \mathbf{x}_\tau$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω απεικόνιση για κάθε σημείο του  $D$  θα πάρουμε την απεικόνισή του, το σύνολο  $D'$ , κάτω από τη ροή  $f_\tau$

$$D \xrightarrow{f_\tau} D'$$

Επειδή το  $D$  είναι ένα συνεχές σύνολο, το  $D'$  θα πρέπει να είναι επίσης συνεχές αφού η ροή  $f(\mathbf{x}, t)$  είναι συνεχής.

Αν για κάθε  $D \subset \mathbb{R}^n$  και για κάθε  $t$  ισχύει  $V_D = V_{D'}$ , δηλαδή ο όγκος του χώρου των φάσεων διατηρείται κάτω από την ροή του δυναμικού συστήματος, το σύστημα ονομάζεται **διατηρητικό** (area preserving). Αν  $V_D < V_{D'}$ , δηλαδή ο όγκος φθίνει με το χρόνο, το σύστημα ονομάζεται **σύστημα με απώλειες** (dissipative) ενώ αν  $V_D > V_{D'}$ , δηλαδή ο όγκος αυξάνει με το χρόνο, το σύστημα ονομάζεται **«εκρηκτικό»** (explosive).

Η χρονική εξέλιξη ενός όγκου  $V$  σημείων του χώρου φάσεων μπορεί αντιστοιχιστεί στη ροή ενός ρευστού. Αν ορίσουμε την πυκνότητα  $\rho = N/V$  (αρχικές συνθήκες ανά μονάδα όγκου), κατά αναλογία με τον ορισμό πυκνότητας μάζας των σωματιδίων του ρευστού, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση συνέχειας ([continuity equation](#)) που εκφράζει την διατήρηση του αριθμού  $N$  των αρχικών συνθηκών

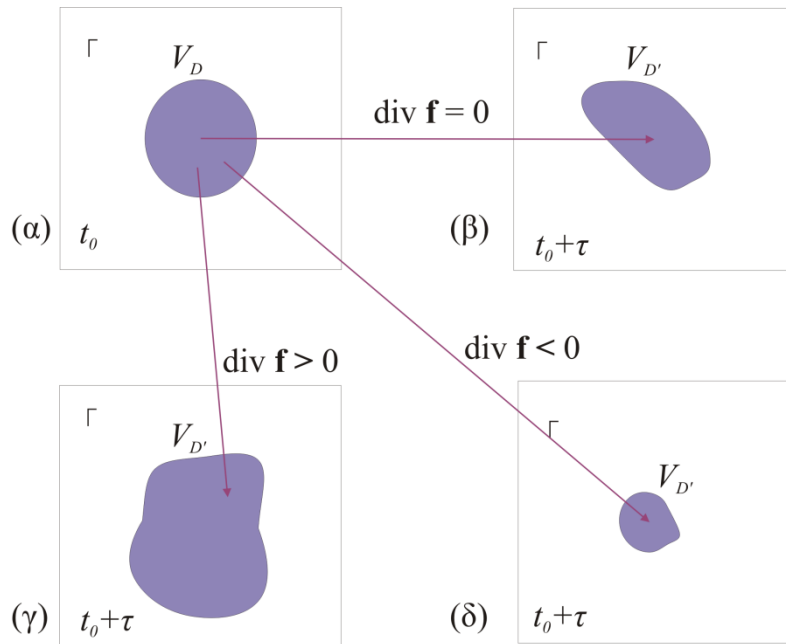
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{f} = 0, \quad (1.21)$$

όπου  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  το διανυσματικό πεδίο (ή πεδίο ταχυτήτων) του συστήματος (1.20). Έτσι η διατήρηση ή όχι των όγκων στο χώρο των φάσεων εξαρτάται από την τιμή της απόκλισης του διανυσματικού πεδίου του συστήματος σε όλο το χώρο φάσεων:

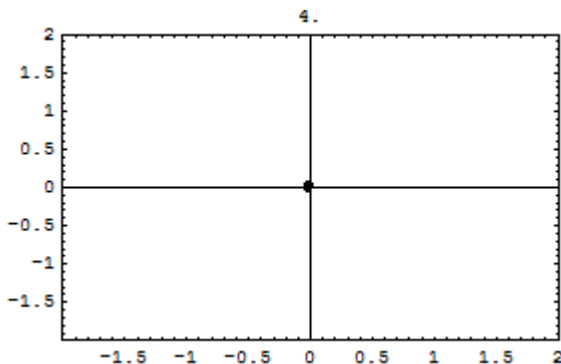
- $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 0$  : διατηρητικό σύστημα (area preserving)
- $\operatorname{div} \mathbf{f} < 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} > 0 \Rightarrow \frac{dV}{dt} < 0$  : σύστημα με απώλειες ή απωλεστικό (dissipative)
- $\operatorname{div} \mathbf{f} > 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} < 0 \Rightarrow \frac{dV}{dt} > 0$  : εκρηκτικό σύστημα (explosive)

Τα εκρηκτικά συστήματα οδηγούν σε λύσεις που τείνουν στο άπειρο και δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Αντίθετα τα συστήματα με απώλειες οδηγούν το σύστημα προς ένα ελκτικό σύνολο μικρότερης διάστασης από αυτήν του συστήματος και έτσι η μελέτη της εξέλιξης των τροχιών ανάγεται στην μελέτη των ιδιοτήτων αυτού του ελκτικού υποσυνόλου.





Σχήμα 1-9. Όγκος αρχικών συνθηκών ( $t=t_0$ ) στο χώρο φάσεων και η απεικόνισή του μετά από χρόνο  $\tau$  για (β) ένα διατηρητικό σύστημα, (γ) εκρηκτικό σύστημα (δ) και ένα σύστημα με απώλειες.



Κινούμενη εικόνα 1-2<sup>2</sup>. Συρρίκνωση εμβαδών σε ένα σύστημα με απώλειες.

Τα διατηρητικά συστήματα επίσης παρουσιάζουν ξεχωριστό ενδιαφέρον και σ' αυτά περιλαμβάνονται τα μηχανικά συντηρητικά συστήματα που διατηρούν την ενέργεια (conservative systems) και, γενικότερα, τα Χαμιλτονιανά συστήματα (βλ. §8.3), τα οποία περιγράφονται από εξισώσεις της μορφής

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H(x_i, y_i)}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H(x_i, y_i)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

όπου  $H = H(x_i, y_i, t)$  η συνάρτηση Hamilton. Το  $2n$  διαστάσεων διανυσματικό Χαμιλτονιανό πεδίο

$$f = \left( \frac{\partial H}{\partial y_1}, \frac{\partial H}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, -\frac{\partial H}{\partial x_2}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x_n} \right)$$

έχει απόκλιση

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial^2 H}{\partial y_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 H}{\partial y_2 \partial x_2} + \dots + \frac{\partial^2 H}{\partial y_n \partial x_n} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial y_1} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial y_2} - \dots - \frac{\partial^2 H}{\partial x_n \partial y_n} = 0$$

<sup>2</sup> Η κινούμενη εικόνα voldissipation.gif είναι διαθέσιμη στην ιστοσελίδα του παρόντος συγγραμματος/κεφαλαίου στον Ελληνικό Συσσωρευτή Ακαδημαϊκών Ηλεκτρονικών Βιβλίων (<http://repfiles.kallipos.gr/file/14091>)

Γενικά, η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου μπορεί να είναι συνάρτηση των δυναμικών μεταβλητών και να έχουμε περιοχές του χώρου φάσεων όπου  $\text{div} \mathbf{f} < 0$  και περιοχές όπου  $\text{div} \mathbf{f} > 0$  (μικτά συστήματα). Και στα συστήματα αυτά μας ενδιαφέρουν οι τροχιές που εξελίσσονται σε ένα περατωμένο υποσύνολο του χώρου των φάσεων. Αν υπάρχουν τέτοιες τροχιές τότε και τα συστήματα αυτά συνηθίζουμε να τα χαρακτηρίζουμε *απωλεστικά*.

## Ασκήσεις

**Άσκηση 1.4.1.** Δείξτε ότι το σύστημα του Lorenz

$$\dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1), \quad \dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1x_3, \quad \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3$$

όπου  $\sigma, r, b$  σταθερές, είναι σύστημα με απώλειες για κάθε θετική τιμή των παραμέτρων του

**Άσκηση 1.4.2.** Για το σύστημα Van der Pol

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + (1 - x^2)y$$

σκιαγραφίστε την περιοχή του επιπέδου  $Oxy$  όπου το σύστημα έχει απώλειες.

## 1.5 Ποιοτική κατηγοριοποίηση τροχιών

Όπως αναφέραμε παραπάνω μια **φασική καμπύλη**, ή απλά **τροχιά** (trajectory) στη συνέχεια, περιγράφεται παραμετρικά από τις σχέσεις

$$x_1 = x_1(t; x_{i_0}, t_0), \quad x_2 = x_2(t; x_{i_0}, t_0), \quad \dots \quad x_n = x_n(t; x_{i_0}, t_0), \quad (1.22)$$

οι οποίες προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (1.20) με αρχικές συνθήκες  $x_i(t_0) = x_{i_0}$ .

Αν οι σχέσεις (1.22) υπολογιστούν αναλυτικά και μπορέσουμε να απαλείψουμε το χρόνο  $t$ , τότε περιγράφουμε την τροχιά με αναλυτικό τρόπο, και εν γένει σε πλεγμένη μορφή, με συναρτήσεις – ολοκληρώματα

$$\Phi_i = \Phi_i(x_j, t), \quad i, j = 1, \dots, n$$

Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 1.3.1, για ένα αυτόνομο σύστημα τα ολοκληρώματα μπορούν να προκύψουν από τη λύση του συστήματος (1.15).

**Σχόλιο.** Στην Υπολογιστική Δυναμική, όπου γίνεται χρήση του συμβολικού ή κλασσικού προγραμματισμού, οι τροχιές περιγράφονται γενικά με την παραμετρική μορφή (1.22) για τους παρακάτω λόγους

1. Οι σχέσεις (1.22) είναι άμεσα διαθέσιμες είτε από την αναλυτική είτε από την αριθμητική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων.
2. Οι διαφορικές εξισώσεις εν γένει δεν λύνονται ή δίνονται από πολύπλοκες συναρτήσεις και η απαλοιφή του χρόνου δεν είναι πρακτικά εφικτή.
3. Ο συμβολικός προγραμματισμός δεν μπορεί να διαχειριστεί, προς το παρόν, άμεσα εξισώσεις της μορφής (1.15) ή, γενικότερα, δεν μπορεί να βρει **τα ολοκληρώματα** των διαφορικών εξισώσεων (αν υπάρχουν) από τα οποία προκύπτει μια αναλυτική περιγραφή των τροχιών.

Μια τροχιά θα ονομάζεται **περιοδική** αν υπάρχει ένα χρονικό διάστημα  $T$  τέτοιο ώστε για κάθε χρονική στιγμή  $t$  να ισχύει

$$x_i(t+T; x_{j_0}, t_0) = x_i(t; x_{j_0}, t_0) \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (1.23)$$

Το  $T$  ονομάζεται **περίοδος** της τροχιάς και δηλώνει ένα τακτό χρονικό διάστημα στο οποίο το σύστημα επανέρχεται ξανά στην αρχική του θέση στο χώρο των φάσεων. Οι περιοδικές τροχιές συχνά ονομάζονται **κύκλοι** (cycles) γιατί αποτελούν κλειστές καμπύλες στο χώρο φάσεων και **διαφορομορφικές** με έναν γεωμετρικό κύκλο.

Μια τροχιά θα ονομάζεται **περατωμένη** ή φραγμένη αν εξελίσσεται σε ένα φραγμένο υποσύνολο του φασικού χώρου, δηλαδή υπάρχει  $M > 0$  τέτοιο ώστε

$$|x_i(t; x_{j_0}, t_0)| < M \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

Προφανώς, μια περιοδική τροχιά είναι περατωμένη αλλά δεν ισχύει αναγκαστικά το αντίθετο.

Αν

$$\exists i \in [1, \dots, n], \quad x_i(t; x_{j_0}, t_0) \rightarrow \pm\infty \quad \text{για } t \rightarrow +\infty \text{ και } -\infty$$

η τροχιά ονομάζεται μη-περατωμένη ή **ανοιχτή** (unbounded). Μπορεί να υπάρχουν και **ιδιάζουσες** (singular) τροχιές όπου μια δυναμική μεταβλητή απειρίζεται σε περατωμένο χρόνο. Μπορούμε επίσης να ορίσουμε **ημι-περατωμένες** ή **ημι-ανοιχτές** τροχιές, οι οποίες είναι περατωμένες για  $t \rightarrow +\infty$  και ανοιχτές για  $t \rightarrow -\infty$  (ή το αντίστροφο). Συνήθως στα δυναμικά συστήματα μελετούμε την εξέλιξη σε χρονικά διαστήματα  $[t_0, +\infty)$  και μια τροχιά καλείται περατωμένη αν παραμένει περατωμένη στο διάστημα αυτό.

Αν υπάρχει σημείο  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  του χώρου φάσεων, τέτοιο ώστε

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t; x_{j_0}, t_0) = x_i^* \quad \text{ή} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x_i(t; x_{j_0}, t_0) = x_i^*, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

η τροχιά ονομάζεται **ασυμπτωτική** προς το σημείο  $\mathbf{x}^*$ . Στην περίπτωση αυτή το σύστημα τείνει προς μια σταθερή κατάσταση ή προέρχεται από μια συγκεκριμένη κατάσταση. Μπορούμε να έχουμε και **διπλά** ασυμπτωτικές τροχιές για τις οποίες

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t; x_{j_0}, t_0) = x_i^* \quad \text{και} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x_i(t; x_{j_0}, t_0) = x_i^{**}, \quad \text{όπου } x^* \neq x^{**}$$

Η έννοια της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς έχει και γενικότερη έννοια αν αντί του σημείου  $\mathbf{x}^*$  ορίσουμε ένα υποσύνολο  $U^*$  του χώρου φάσεων με διάσταση  $0 < m < n$  προς το οποίο τείνει η τροχιά. Τέτοιου τύπου ασυμπτωτικές τροχιές είναι π.χ. οι οριακοί κύκλοι και οι χαοτικοί ελκυστές που θα γνωρίσουμε στα επόμενα κεφάλαια.

**Σημείωση.** Στο Mathematica ο υπολογισμός των τροχιών γίνεται με αριθμητική επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων του συστήματος, την οποία παρουσιάζουμε στην επόμενη παράγραφο. Οι δυναμικές μεταβλητές  $x_i$  μπορούν πάντοτε να παρασταθούν σε ένα διάγραμμα  $t-x_i$  για κάθε μια ξεχωριστά. Αντίθετα οι φασικές τροχιές μπορούν να παρασταθούν γραφικά μόνο για συστήματα 2 και 3 διαστάσεων. Για περισσότερες διαστάσεις χρησιμοποιούμε προβολή των φασικών καμπύλων σε επίπεδα  $x_i-x_j$  όπου όμως δεν μπορούμε εύκολα να αντιληφτούμε την μορφολογία του χώρου φάσεων.

Παρακάτω δίνονται μερικά παραδείγματα διαφόρων τύπων τροχιών

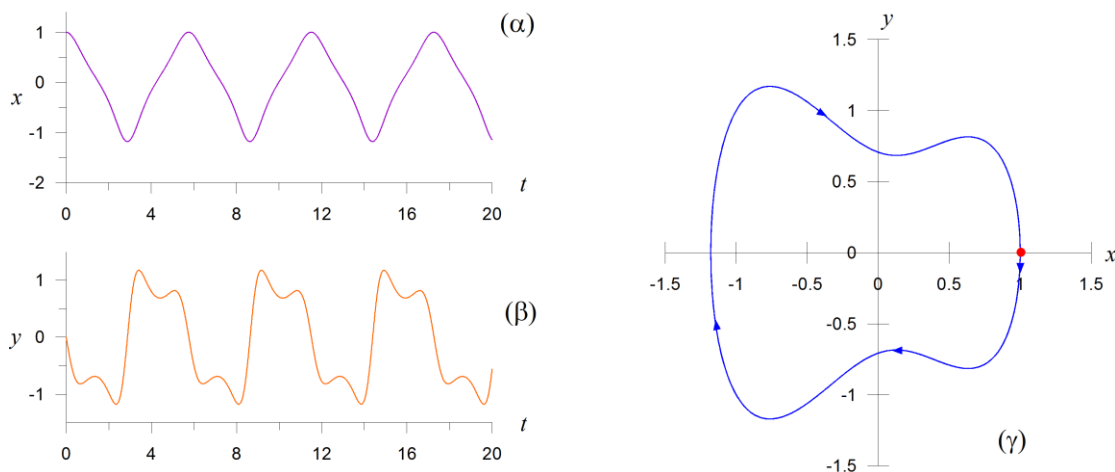
**Παράδειγμα 1.** Θεωρούμε το αυτόνομο σύστημα δύο διαστάσεων

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\frac{1}{4} + 2x - 4x^3.$$

Το σύστημα είναι και διατηρητικό,

$$\text{div} \mathbf{f} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial (-1/4 + 2x - 4x^3)}{\partial y} = 0$$

Για αρχικές συνθήκες  $x(0)=1, y(0)=0$ , προκύπτει μετά από αριθμητική ολοκλήρωση η τροχιά στο Σχήμα 1-10. Παρατηρούμε περιοδικές ταλαντώσεις των δυναμικών μεταβλητών που αντιστοιχούν στην κλειστή φασική καμπύλη του σχήματος.

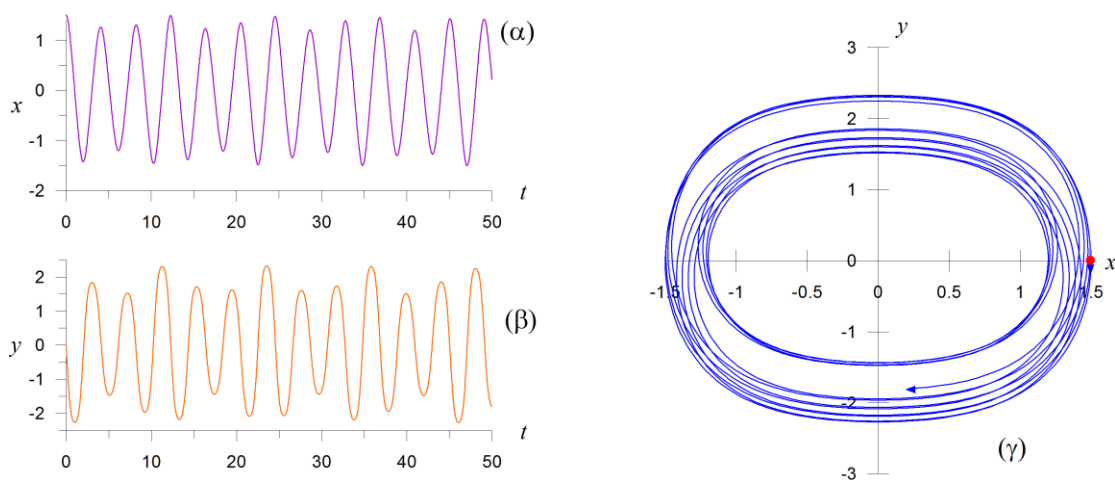


Σχήμα 1-10. Περιοδική τροχιά για το σύστημα του παραδείγματος 1. Οι αρχικές συνθήκες είναι  $x(0)=1, y(0)=0$ .

**Παράδειγμα 2.** Για το μη αυτόνομο αλλά διατηρητικό σύστημα

$$\dot{x} = y + \frac{1}{4} \sin(t), \quad \dot{y} = -x - x^3$$

παίρνουμε γενικά ταλαντώσεις για τις μεταβλητές  $x(t)$  και  $y(t)$ , οι οποίες όμως δεν είναι περιοδικές αφού η εξέλιξη σε ένα οποιοδήποτε διάστημα  $[t_1, t_1 + T]$  δεν είναι ακριβώς ίδια με την χρονική εξέλιξη της μεταβλητής στο διάστημα  $[t_1 + T, t_1 + 2T]$ . Τα πλάτη όμως των ταλαντώσεων παραμένουν περατωμένα και μας δίνουν την φασική καμπύλη που παρουσιάζεται στο Σχήμα 1-11. Παρατηρούμε ότι είναι φραγμένη σε ένα τόπο του επιπέδου  $xy$ , και συγκεκριμένα περιορίζεται σε ένα δακτύλιο οβάλ σχήματος. Η τροχιά αυτή ονομάζεται *ημιπεριοδική* και θα την μελετήσουμε στο κεφάλαιο 7.

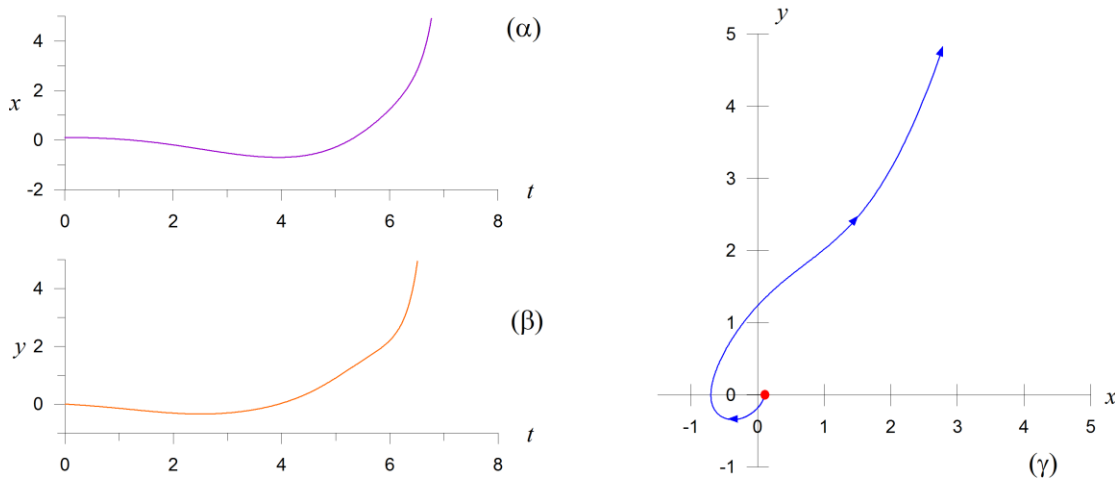


Σχήμα 1-11. Περατωμένη (ημι-περιοδική) τροχιά για το σύστημα του παραδείγματος 2. Οι αρχικές συνθήκες είναι  $x(0)=1, y(0)=0$ .

**Παράδειγμα 3.** Το αυτόνομο σύστημα

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \frac{1}{2} x^3 + y$$

είναι εκρηκτικό ( $\text{div} \mathbf{f} = 1 > 0$ ) και οι τροχιές του δεν είναι περατωμένες. Είναι σνήθης η αύξηση των μεταβλητών να είναι εκθετική και οι τροχιές να φεύγουν πολύ γρήγορα στο άπειρο δημιουργώντας πρόβλημα στις αριθμητικές ολοκληρώσεις. Όμως τέτοιου τύπου τροχιές δεν παρουσιάζουν ενδιαφέρον ως προς την δυναμική τους συμπεριφορά.



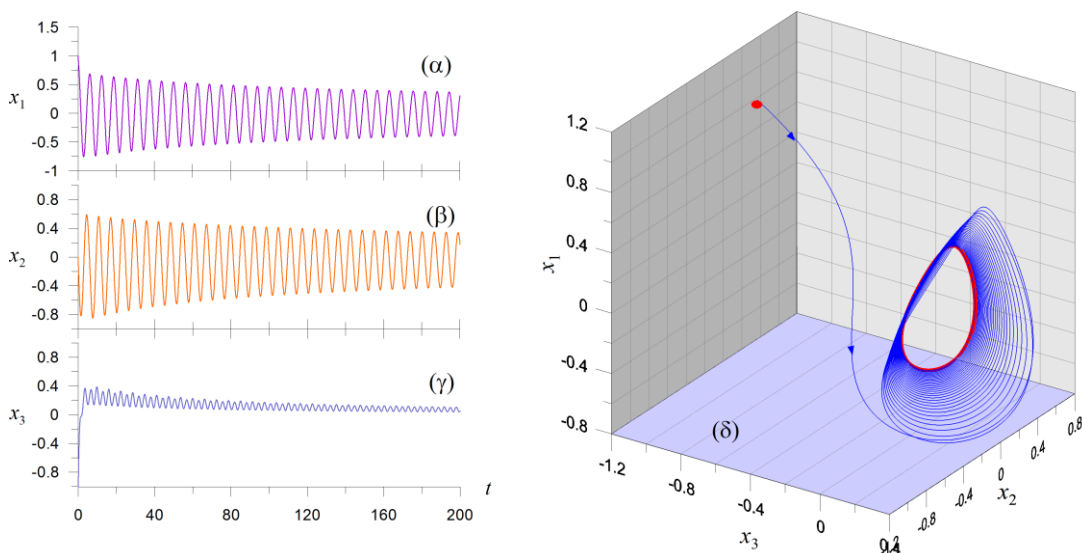
Σχήμα 1-12. Ανοιχτή τροχιά για το εκρηκτικό σύστημα του παραδείγματος 3. Οι αρχικές συνθήκες είναι  $x(0)=0.1$ ,  $y(0)=0$ .

**Παράδειγμα 4.** Έστω το αυτόνομο σύστημα τριών διαστάσεων

$$\dot{x}_1 = x_2 + \frac{1}{2}x_3, \quad \dot{x}_2 = -x_1, \quad \dot{x}_3 = -x_3 + x_1^2$$

Η εξέλιξη μιας τροχιάς του συστήματος, για συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες  $x_{i0} = x_i(0)$ , βρίσκεται με την αριθμητική επίλυση του συστήματος για ένα χρονικό διάστημα  $[t_1, t_2]$ . Ένα παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 1-13. Στο παράδειγμα αυτό οι μεταβλητές του συστήματος φαίνεται να ταλαντώνονται με μειούμενο σταδιακά πλάτος. Όμως παρατηρούμε ότι το πλάτος των ταλαντώσεων τείνει ασυμπτωτικά να σταθεροποιηθεί σε μη μηδενική τιμή. Η συμπεριφορά αυτή περιγράφεται από την αντίστοιχη φασική τροχιά με την περιέλιξή της να καταλήγει τελικά γύρω από μια κλειστή καμπύλη του τρισδιάστατου φασικού χώρου. Η κλειστή αυτή καμπύλη ονομάζεται **οριακός κύκλος** και θα την μελετήσουμε στο κεφάλαιο 5.

**Σχόλιο.** Η τροχιά που παρουσιάζεται στο Σχήμα 1-13 δεν τέμνει τον εαυτό της, αφού το σύστημα είναι αυτόνομο. Η εξέλιξη αυτήν του συστήματος αναφέρεται στις συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες. Ξεκινώντας το σύστημα από κάποια άλλη θέση η συμπεριφορά του μπορεί να είναι τελείως διαφορετική. Η εποπτεία του φασικού πορτρέτου, δηλαδή η παράσταση πολλών τροχιών στον τρισδιάστατο φασικό χώρο, δεν είναι πρακτικά ωφέλιμη.



Σχήμα 1-13. Χρονική εξέλιξη των δυναμικών μεταβλητών του παραδείγματος 4. Ο χώρος φάσεων μέσα στον οποίο εξελίσσεται η φασική τροχιά είναι τριών διαστάσεων (πάνελ δ). Η τροχιά τείνει ασυμπτωτικά σε μια κλειστή φασική καμπύλη (κόκκινη). Οι αρχικές συνθήκες είναι  $x_1(0)=1$ ,  $x_2(0)=0$ ,  $x_3(0)=-1$ .

## 1.6 Βιβλιογραφία

- Abell, M.L. & Braselton, J.P., 1997. *Differential equations with Mathematica*. 2nd ed. Academic Press.
- Arrowsmith, D.K. & Place, C.M., 1990. *An Introduction to Dynamical Systems*. New York: Cambridge University Press.
- Hilborn, R.C., 1994. *Chaos and Nonlinear Dynamic*. New York: Oxford University Press.
- Guckenheimer, J. & Holmes, P., 1997. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. 3rd ed. New York: Springer-Verlag.
- Lichtenberg, A. and Lieberman, M., 1994. *Regular and Stochastic Motion*. 2nd ed. New York: Springer-Verlag.
- Ott, E., 2002. *Chaos in Dynamical Systems*. 2nd ed. New York: Cambridge University Press.
- Sagdeev, R.Z. & Usikov, D.A. & Zaslavsky, G.M., 1988. *Nonlinear Physics: from pendulum to turbulence and chaos*. Chur-Switzerland: Harwood Academic publ.
- Tabor M., 1989. *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: An Introduction*. New York: Wiley.
- Wiggins, S., 1990. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. New York: Dover.
- Βουγιατζής, Γ.Β. & Μπόζης, Γ.Δ. & Παπαδόπουλος, Δ.Β., 2012. *Διαφορικές Εξισώσεις και εφαρμογές*, Αθήνα: Κλειδάριθμος.
- Πνευματικός, Σπ., 2006. *Κλασική Μηχανική*. Αθήνα: Γ.Α. Πνευματικού.
- Σούρλας, Δ., 2012. *Δυναμικά συστήματα και εφαρμογές με τη χρήση του Maple*. Σημειώσεις. Διαθέσιμο στη: [http://www.physics.upatras.gr/UploadedFiles/course\\_182\\_1516.pdf](http://www.physics.upatras.gr/UploadedFiles/course_182_1516.pdf). Πανεπιστήμιο Πάτρας.

## 2 Αριθμητικές Μέθοδοι

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε αριθμητικές μεθόδους οι οποίες είναι χρήσιμες για την ύλη που ακολουθεί. Για τις μεθόδους αυτές θα παραθέσουμε είτε κώδικες σε γλώσσα προγραμματισμού C ή θα περιγράψουμε την υλοποίησή τους σε Mathematica. Θα παρουσιαστεί η μέθοδος Newton-Raphson για την εύρεση ριζών εξισώσεων ή συστημάτων εξισώσεων, την οποία θα εφαρμόζουμε για την εύρεση σημείων ισορροπίας. Επίσης, όπως γνωρίζουμε σήμερα, οι διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης ή τα συστήματα διαφορικών εξισώσεων εν γένει δεν επιδέχονται αναλυτικές λύσεις. Έτσι καταφεύγουμε σε αριθμητικές λύσεις, τις οποίες θα περιγράψουμε σε αυτή την παράγραφο επίσης, και θα προτείνουμε την μέθοδο Runge-Kutta. Τέλος θα παρουσιάσουμε τους Διακριτούς μετασχηματισμούς Fourier ως ένα εργαλείο μελέτης της εξέλιξης περατωμένων δυναμικών μεταβλητών.

### 2.1 Αριθμητική επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων

#### 2.1.1 Εύρεση ριζών Εξίσωσης με τη μέθοδο Newton-Raphson

Η μέθοδος Newton-Raphson αποτελεί μια ταχύτατα συγκλίνουσα μέθοδο η οποία προσεγγίζει σε κάθε εφαρμογή της μια ρίζα της εξίσωσης

$$f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Η μέθοδος αλγεβρικά προκύπτει από τη σειρά Taylor της συνάρτησης  $f(x)$  γύρω από κάποια αρχική τιμή  $x = x_0$

$$f(x_0 + \delta) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \delta + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_0} \delta^2 + \dots$$

Αν θεωρήσουμε ότι  $f(x_0) \neq 0$  αλλά η  $x^* = x_0 + \delta$  είναι ρίζα της (2.1), τότε σε προσέγγιση 1<sup>ης</sup> τάξης (δηλαδή, θέτοντας τους όρους  $\delta^k$ , με  $k \geq 2$ , ίσους με μηδέν) θα πάρουμε

$$\delta = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad \text{όπου} \quad f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \quad (2.2)$$

Η τιμή  $x_1 = x_0 + \delta$ , με το  $\delta$  που προκύπτει από την (2.2) δεν αποτελεί βέβαια μια ακριβή τιμή για τη ρίζα  $x^*$  αφού παραλήφθηκαν οι όροι ανώτερης τάξης. Όμως ο υπολογισμός (2.2) μπορεί να επαναληφθεί για την τιμή  $x_1$  και να προκύψει μια νέα διόρθωση  $x_2 = x_1 + \delta$ . Έχουμε λοιπόν την επαναληπτική διαδικασία που εκφράζεται με την αναδρομική σχέση

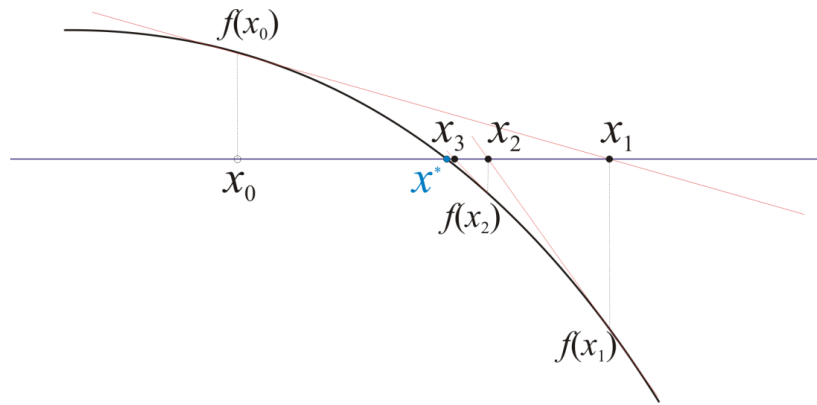
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (2.3)$$

Στην πράξη, η διαδικασία σταματάει όταν

$$|f(x_{i+1})| < acc$$

όπου  $acc$  η επιθυμητή ακρίβεια μηδενισμού της συνάρτησης.

Η (2.3) συγκλίνει γρήγορα προς την ρίζα  $x^*$  αρκεί η απόσταση της *αρχικής πρόβλεψης*  $x_0$  να μην είναι πολύ μακριά από την  $x^*$  έτσι ώστε οι όροι ανώτερης τάξης να είναι σημαντικότεροι από αυτούς της πρώτης τάξης. Στην περίπτωση περισσότερων ριζών, η σύγκλιση της μεθόδου μπορεί να μας δώσει μια άλλη ρίζα, η οποία βρίσκεται σε μεγαλύτερη απόσταση από την  $x^*$ , την οποία επιδιώκουμε να προσεγγίσουμε. Προφανώς η μέθοδος λειτουργεί εφόσον η  $x^*$  είναι μια απλή ρίζα. Στην περίπτωση διπλής ή ανώτερης πολλαπλότητας ρίζα έχουμε  $f'(x^*) = 0$ , και συνεπώς, η (2.3) θα αποκλίνει. Η γεωμετρική παράσταση της μεθόδου παρουσιάζεται στο Σχήμα 2-1.



Σχήμα 2-1. Η γεωμετρική παράσταση της μεθόδου Newton-Raphson. Από το σημείο  $(x_0, f(x_0))$  φέρνουμε την εφαπτομένη και την επεκτείνουμε μέχρι να τμήσει τον άξονα  $Ox$ , έστω στο σημείο  $x_1$ . Επαναλαμβάνουμε το ίδιο από το σημείο  $(x_1, f(x_1))$ . Η διαδικασία συγκλίνει προς την ρίζα  $x^*$ .

[C] Στη γλώσσα C, η μέθοδος Newton-Raphson μπορεί να υλοποιηθεί με μια συνάρτηση (NR1 ( )), η οποία χρησιμοποιεί τις συναρτήσεις  $f$  και  $df$  που υπολογίζουν και επιστρέφουν την τιμή της συνάρτησης της εξίσωσης και της παραγώγου της, αντίστοιχα

```
double f(double x) { return f(x); }
double df(double x) { return df(x)/dx; }
```

Η συνάρτηση που επιστρέφει τη ρίζα θα δέχεται ως όρισμα την αρχική πρόβλεψη  $x_0$ , ενώ το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων  $K_{max}$  και την ακρίβεια προσέγγισης  $Acc$  τις θεωρούμε σταθερές.

```
double NR1(double x0) {
int k=0; double x1;
do{ x1=x0-f(x0)/df(x0); k++; }while( fabs(f(x0))>Acc && k<=Kmax );
if(k<=Kmax) return x1; else return -999
}
```

Η επιστρεφόμενη τιμή  $-999$  αναφέρεται στην περίπτωση μη σύγκλισης της μεθόδου (βλέπε κώδικα codeNR1.c<sup>3</sup>)

Στο παράδειγμα 4 της παραγράφου §1.3.3 ζητάμε τη λύση της εξίσωσης  $x^2 e^{-x} - x/4 = 0$ . Ο παραπάνω κώδικας υλοποιείται με τις συναρτήσεις

```
double f(double x) { return x*x*exp(-x) - x / 4; }
double df(double x) { return x*exp(-x)*(2-x) - 1.0 / 4; }
```

Για  $Acc=10^{-12}$  και κάποιες αρχικές τιμές  $x_0$ , που παρουσιάζονται στο παρακάτω πίνακα, παίρνουμε τα αποτελέσματα

$x_0$	0.1	0.2	1.5	5.0	10.0
$x^*$	0.000000000000	0.357402956181	2.15329236411	2.15329236411	0.357402956181
$k$	6	5	6	5	7

Προσδιορίστηκαν, λοιπόν, και οι τρεις ρίζες της εξίσωσης, όπως φαίνονται και στη γραφική παράσταση της  $f(x) = x^2 e^{-x} - x/4$ .

**Σημείωση.** Σημειώστε ότι δεν προσδιορίζεται πάντα η ρίζα που βρίσκεται πιο κοντά στην αρχική προβλεπόμενη τιμή.

<sup>3</sup> Ο κώδικας codeNR1.c είναι διαθέσιμος στην ιστοσελίδα του παρόντος συγγράμματος/κεφαλαίου στον Ελληνικό Συσσωρευτή Ακαδημαϊκών Ηλεκτρονικών Βιβλίων (<http://repfiles.kallipos.gr/file/14092>).



**[M]** Στο Mathematica ο αριθμητικός υπολογισμός ριζών γίνεται με την συνάρτηση FindRoot, η οποία πέρα από τη χρήση της Newton-Raphson συνδυάζει και άλλες μεθόδους. Η βασική της σύνταξη είναι η εξής

$$\text{FindRoot}[\text{εξίσωση } f(x)=0, \{x, x_0\}]$$

και η έξοδός της είναι μια λίστα όπως της NSolve, αλλά τώρα με ένα μόνο στοιχείο, την συγκλίνουσα ρίζα π.χ.

```
In[1]:= FindRoot[x^2-Exp[x]==0, {x, 1}]
Out[1]= {x-> -0.703467}
```

## Ασκήσεις

**Άσκηση 2.1.1** Χρησιμοποιώντας τον κώδικα NR1.c λύστε την εξίσωση του Kepler

$$a - x + e \sin x = 0$$

όπου οι σταθερές  $e$  και  $a$  μπορούν να πάρουν τιμές στα διαστήματα  $0 \leq e < 1$ ,  $0 \leq a < 2\pi$ . Θεωρήστε  $x_0 = a$ .

**Άσκηση 2.1.2** Αναζητήστε με τον κώδικα gnc1NR1.c όλες τις λύσεις της εξίσωσης

$$x \arctan(x) - \frac{x^2}{2} = a, \quad \text{για } a = -1, 0, 1$$

στο διάστημα  $-5 < x < 5$

**Άσκηση 2.1.3** Βρείτε τις λύσεις των εξισώσεων των παραπάνω ασκήσεων με την FindRoot.

**Άσκηση 2.1.4** Βρείτε όλες τις πραγματικές λύσεις των εξισώσεων

$$x \sin(2x) - x^2/4 = 0, \quad \frac{1}{2}\sqrt{x} - \sin(\pi x^2) = 0$$

## 2.1.2 Η Newton-Raphson για συστήματα εξισώσεων

Έστω το σύστημα  $n$  εξισώσεων με  $n$  αγνώστους  $x_i$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{ή} \quad f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

Παρόμοια με την περίπτωση της μιας εξίσωσης, θεωρούμε το ανάπτυγμα Taylor των συναρτήσεων γύρω από μια τιμή  $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ , η οποία είναι στη γειτονιά μιας ρίζας του συστήματος  $\mathbf{x}^*$  (δηλαδή η  $\mathbf{x}_0$  είναι μια αρχική πρόβλεψη)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{J}\delta\mathbf{x} + O(\delta\mathbf{x}^2), \quad \mathbf{J} = (J_{ij}), \quad J_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}_0}$$

Ο πίνακας  $\mathbf{J}$  είναι ο ιακωβιανός πίνακας του συστήματος υπολογισμένος στο σημείο  $\mathbf{x}_0$ .

Αν η διορθωμένη τιμή  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}$  είναι η ζητούμενη ρίζα του συστήματος, δηλαδή  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}) = 0$ , τότε η διόρθωση  $\delta\mathbf{x}$  θα είναι σε όρους πρώτης τάξης

$$\delta\mathbf{x} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \quad (2.5)$$

όπου  $\mathbf{J}^{-1}$  ο αντίστροφος πίνακας. Επειδή το  $\delta\mathbf{x}$  προκύπτει από το ανάπτυγμα, όπου περιέχονται μόνο οι όροι πρώτης τάξης, δεν θα είναι ακριβές. Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία, με αρχική πρόβλεψη το  $\mathbf{x}_1$ , στη συνέχεια το  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \delta\mathbf{x}$  κοκ, συγκλίνουμε προς την ζητούμενη ρίζα  $\mathbf{x}^*$ .

**Σχόλιο.** Ο προσδιορισμός των αναγκαίων συνθηκών για σύγκλιση της διαδικασίας στην ζητούμενη λύση είναι ένα δύσκολο θέμα για ένα σύστημα πολλών διαστάσεων και μελετάται σε βιβλία αριθμητικής ανάλυσης. Στην περίπτωση μας θα αναφέρουμε μόνο ότι για τον προσδιορισμό μιας ρίζας  $\mathbf{x}^*$  θα πρέπει να ξεκινήσουμε από μια αρχική θέση  $\mathbf{x}_0$  αρκούντως κοντά στην  $\mathbf{x}^*$ . Φυσικά, αναγκαία συνθήκη για την σύγκλιση είναι η σχέση  $\det \mathbf{J} \neq 0$  σε κάθε βήμα της διαδικασίας.

[C] Παρακάτω παραθέτουμε τον κώδικα `codeNR2.c`<sup>4</sup> για την προσέγγιση ριζών σε ένα σύστημα δύο εξισώσεων

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0 \quad (2.6)$$

Στο πρόγραμμα δηλώνουμε τις συναρτήσεις

$$f, g, dfdx, dfdy, dgdx, dgdy$$

με ορίσματα  $x_0$  και  $y_0$ , οι οποίες επιστρέφουν τις τιμές των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  του συστήματος καθώς και των παραγώγων  $\partial f/\partial x$ ,  $\partial f/\partial y$ ,  $\partial g/\partial x$  και  $\partial g/\partial y$ , αντίστοιχα. Η συνάρτηση NR2 υλοποιεί την επαναληπτική διαδικασία της Newton- Raphson, δέχεται τα ίδια ορίσματα, ενημερώνει τις μεταβλητές  $x_r$  και  $y_r$  με την τελευταία προσέγγιση (την ρίζα της εξίσωσης) και επιστρέφει τον αριθμό των επαναλήψεων  $k$  που έγιναν. Φυσικά αν  $k > k_{max}$ , δεν έχουμε ικανοποιητική σύγκλιση στη ρίζα. Η ακρίβεια της προσέγγισης μετράται τώρα με την μεταβλητή

$$dcorrection = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}$$

και κρίνεται ικανοποιητική εφόσον  $dcorrection < Acc$ .

Στον κώδικα `gvNR2.c` επιλύουμε το σύστημα (δες συναρτήσεις  $f$  και  $g$ )

$$-x + e^y = 0, \quad y + e^{-xy} = 0 \quad (2.7)$$

```

/*code codeNR2.c*/
/*Newton-Raphson root approximation for two equations of two variables f(x)=0,
g(x)=0 */
#include <math.h>
#include <stdio.h>
#define Kmax 100 /* max number of iterations */
#define Acc 1.0E-12 /*accuracy*/

/*****
/*Example -x+Exp(y)=0, y+Exp(-xy)==0 */
*****/

double f(double x, double y){ return -x + exp(y); }
double g(double x, double y){ return y+exp(-x*y); }
double dfdx(double x, double y) { return -1; }
double dfdy(double x, double y) { return exp(y); }
double dgdx(double x, double y) { return -y*exp(-x*y); }
double dgdy(double x, double y) { return 1.0 - x*exp(-x*y); }

double NR2(double x0, double y0, double *xr, double *yr)
{
double x1, y1, f0, g0, det,dx,dy,dcorrection;
double J11, J12, J21, J22; /*Jacobian*/
double J_11, J_12, J_21, J_22; /* inverse of Jacobian*/
int k = 0;
do
{
f0 = f(x0, y0); g0 = g(x0, y0);
J11 = dfdx(x0, y0); J12 = dfdy(x0, y0); J21 = dgdx(x0, y0); J22 = dgdy(x0, y0);
det = J11*J22 - J12*J21;
J_11 = J22 / det; J_12 = -J12 / det; J_21 = -J21 / det; J_22 = J11 / det;
dx = -(J_11*f0 + J_12*g0); dy = -(J_21*f0 + J_22*g0);
x0 += dx; y0 += dy; k++;
dcorrection = sqrt(dx*dx + dy*dy);
} while (dcorrection > Acc&&k <= Kmax);
*xr = x0; *yr = y0;

```

<sup>4</sup> Ο κώδικας `codeNR2.c` είναι διαθέσιμος στην ιστοσελίδα του παρόντος συγγράμματος/κεφαλαίου στον Ελληνικό Συσσωρευτή Ακαδημαϊκών Ηλεκτρονικών Βιβλίων (<http://repfiles.kallipos.gr/file/14093>).

```

return k;
}

void main()
{
double x0,y0, xroot, yroot;
printf("Initial value x0="); scanf("%lf", &x0);
printf("Initial value y0="); scanf("%lf", &y0);
flushall();
int k = NR2(x0,y0,&xroot, &yroot);
printf("Root : x=%13.12f y=%13.12f (after %d iterations)\n", xroot,yroot,k);
getchar();
}

```

Αν στο παραπάνω παράδειγμα θέσουμε  $x_0 = y_0 = 0$  θα πάρουμε την μοναδική λύση του συστήματος

$$x^* = 0.243946543560, \quad y^* = -1.410806161460$$

Μπορούμε να έχουμε μια γραφική εικόνα για τις ρίζες του συστήματος (2.6) σχεδιάζοντας τις καμπύλες μηδενικής τιμής των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  στο επίπεδο  $xy$ . Κάθε μια από τις δύο καμπύλες χωρίζει το επίπεδο σε περιοχές όπου η αντίστοιχη συνάρτηση είναι θετική ή αρνητική. Η τομή των δύο καμπύλων υποδηλώνει μια ρίζα για το σύστημα εξισώσεων.

**[M]** Στο Mathematica η σχεδίαση μιας καμπύλης στη μορφή  $f(x, y) = 0$  γίνεται με την ContourPlot.

```
ContourPlot[f(x,y)==0, {x,xmin,xmax}, {y,ymin,ymax}, options/styles]
```

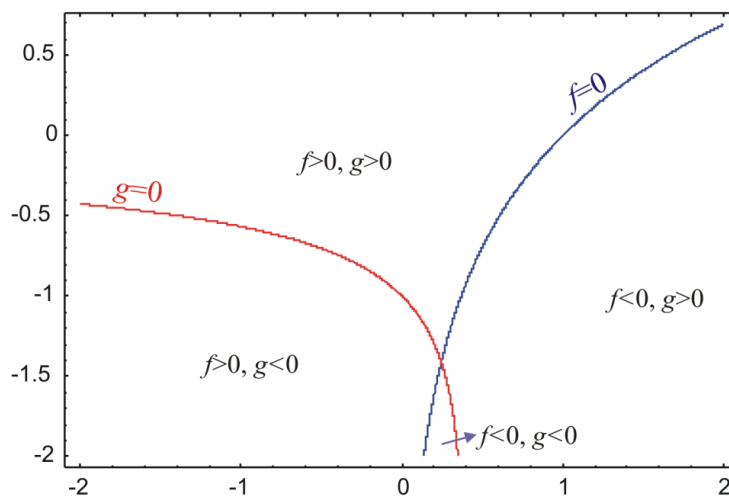
Για το σύστημα (2.7) γράφουμε

```

gr1 = ContourPlot[-x + Exp[y] == 0, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, ContourStyle -> Blue]
gr2 = ContourPlot[y + Exp[-x y] == 0, {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
ContourStyle -> Red]
Show[gr1, gr2, AxesLabel -> {x, y}, Frame -> True, Axes -> None]

```

και παίρνουμε τις καμπύλες που παρουσιάζονται στο Σχήμα 2-2. Στις περιοχές τις οποίες χωρίζουν οι καμπύλες το επίπεδο  $xy$ , σημειώνουμε τα πρόσημα των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ . Από την ασυμπτωτική συμπεριφορά των καμπύλων φαίνεται ότι έχουμε μια μόνο τομή των καμπύλων, η οποία αντιστοιχεί στη ρίζα του συστήματος.



Σχήμα 2-2. Οι καμπύλες  $f=0$ ,  $g=0$  του συστήματος (2.7). Η τομή των καμπύλων αντιστοιχεί στη ρίζα του συστήματος.

**[M]** Η FindRoot που παρουσιάσαμε στην παράγραφο §2.1.1 μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την αριθμητική επίλυση ενός συστήματος  $n$  εξισώσεων. Για δύο εξισώσεις (και αντίστοιχα για περισσότερες) συντάσσεται ως εξής

```
FindRoot[{f(x,y)==0,g(x,y)==0},{x,x0},{y,y0}]
```

Π.χ. για το σύστημα (2.7), και για αρχική εκτίμηση το σημείο (0,0), έχουμε

```
In[9]:= f = -x + Exp[y]; g = y + Exp[-x y];
FindRoot[{f == 0, g == 0}, {x, 0.5}, {y, -1.5}] // InputForm

Out[10]//InputForm=
{x -> 0.24394654356047948, y -> -1.4108061614598164}
```

**Σημείωση.** Η εντολή InputForm παρουσιάζει το αποτέλεσμα με όλα τα σημαντικά ψηφία στην ακρίβεια μηχανής.

## 2.2 Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων

### 2.2.1 Η έννοια της αριθμητικής λύσης

Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών με μια διαφορική εξίσωση 1<sup>ης</sup> τάξης για την συνάρτηση  $x = x(t)$

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.8)$$

Αν αναπτύξουμε την λύση  $x = x(t)$  σε σειρά Taylor γύρω από τη χρονική στιγμή  $t=t_0$ , τότε για την χρονική στιγμή  $t_1=t_0+\delta t$  θα έχουμε

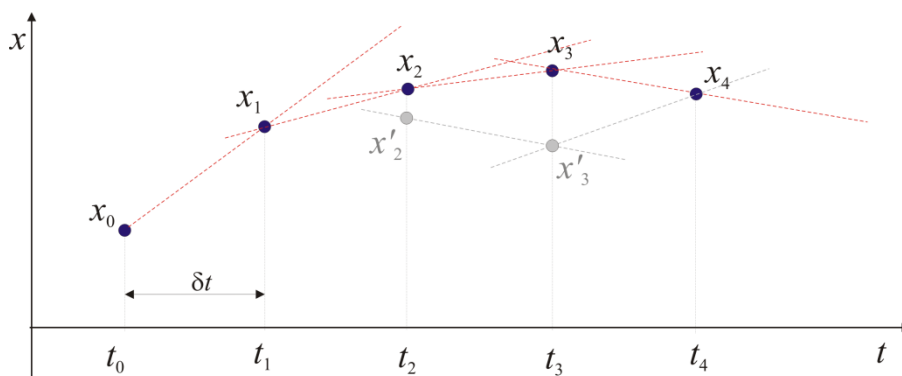
$$x_1 = x(t_0 + \delta t) = x_0 + \left. \frac{dx}{dt} \right|_{(t_0, x_0)} \delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{(t_0, x_0)} \delta t^2 + O(\delta t^3) \quad (2.9)$$

Μέχρι όρους 1<sup>ης</sup> τάξης παίρνουμε τον *τύπο του Euler*

$$x_1 = x_0 + \delta t f(t_0, x_0) + O(\delta t^2)$$

Ο παραπάνω τύπος μπορεί να επαναληφθεί αναδρομικά αν αγνοήσουμε τους όρους 2<sup>ης</sup> τάξης

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n + \delta t = t_0 + (n+1)\delta t \\ x_{n+1} &= x_n + \delta t f(t_n, x_n) \end{aligned}, \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.10)$$



Σχήμα 2-3. Η προσέγγιση Euler της αριθμητικής λύσης ανά χρονικό βήμα  $\delta t$  όταν ξεκινάμε από το σημείο  $(t_0, x_0)$ . Αν ξεκινήσουμε την διαδικασία, π.χ. από το σημείο  $(t_4, x_4)$ , με βήμα  $-\delta t$  θα πάρουμε τα σημεία  $x'_3, x'_2, \dots$ , τα οποία δεν συμπίπτουν με τα  $x_3, x_2, \dots$  και άρα η μέθοδος δεν είναι συμμετρική ως προς το χρόνο.

Ακολουθώντας την επαναληπτική διαδικασία (2.10), και όπως φαίνεται στο Σχήμα 2-3, παίρνουμε ένα σύνολο σημείων  $(t_n, x_n)$ , τα οποία αποτελούν μια προσεγγιστική δειγματοληψία για την άγνωστη συνάρτηση  $x=x(t)$ .

Για την πραγματοποίηση της παραπάνω επαναληπτικής διαδικασίας, απαιτείται η «γνώση» ενός αρχικού σημείου. Από οποιοδήποτε σημείο  $(t_0, x_0)$  και αν ξεκινήσουμε και για όσο ορίζεται η συνάρτηση  $f(t, x)$  στο πραγματικό χώρο, η παραπάνω επαναληπτική διαδικασία θα μας δώσει ένα σύνολο σημείων

$$A(t_0, x_0) = \{ (t_n, x_n) \in \mathbb{R}^2 \mid t_n = t_0 + n\delta t, n = 0, 1, \dots, n_{\max} \} \quad (2.11)$$

Το παραπάνω σύνολο, αφού προέρχεται από μια υπολογιστική διαδικασία, δεν μπορεί να είναι άπειρο, αλλά θα αναφέρεται πάντα σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα  $[t_0, t_{\max}]$ ,  $t_{\max} = t_0 + n_{\max} \delta t$ .

**Σημείωση.** Το βήμα ολοκλήρωσης  $\delta t$  μπορεί να είναι και αρνητικό, οπότε ολοκληρώνουμε σε ένα διάστημα  $[t_{\min}, t_0]$

Κάθε σημείο  $(t_0, x_0)$  αποτελεί μια αρχική συνθήκη, και για κάθε αρχική συνθήκη αντιστοιχεί μια μοναδική μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης. Ουσιαστικά, δηλώνοντας, το αρχικό σημείο  $(t_0, x_0)$  ορίζουμε πλέον ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, που η λύση του  $x=x(t)$  δεν περιέχει αυθαίρετες σταθερές. Συνεπώς, το σύνολο των σημείων (2.11) αποτελεί μια αριθμητική παράσταση της μερικής λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών και ονομάζεται **αριθμητική λύση** ενώ η επαναληπτική διαδικασία που ακολουθείται ονομάζεται **αριθμητική ολοκλήρωση**.

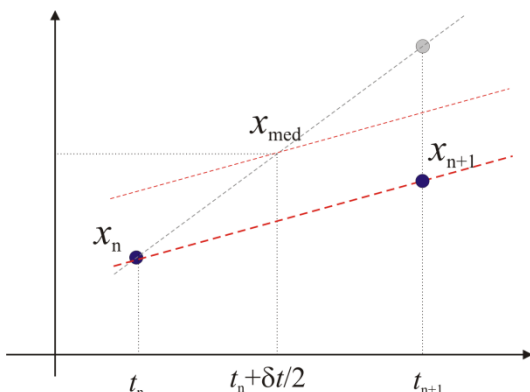
Ο τύπος του Euler προσεγγίζει την λύση σε κάθε βήμα μέχρι όρους **πρώτης τάξης** ως προς το χρονικό βήμα  $\delta t$ . Άρα σε κάθε βήμα υπεισέρχονται σφάλματα  $O(\delta t^2)$  και το χρονικό βήμα ολοκλήρωσης θα πρέπει να είναι πολύ μικρό για να έχουμε μια ικανοποιητική ακρίβεια της λύσης στο απαιτούμενο χρονικό διάστημα. Επίσης *δεν είναι συμμετρική* ως προς το χρόνο. Δηλαδή, αν ξεκινήσουμε από το σημείο  $(t_n, x_n)$  και χρησιμοποιήσουμε βήμα  $-\delta t$  δεν θα πάρουμε το ίδιο σύνολο σημείων (2.11). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι χρησιμοποιούμε την τιμή της παραγώγου  $dx/dt = f(x, t)$  μόνο στο αρχικό σημείο, δηλαδή

$$\begin{array}{ccc} (t_n, x_n) & \xrightarrow{f(t_n, x_n)} & (t_{n+1}, x_{n+1}) \\ (t_{n+1}, x_{n+1}) & \xrightarrow{f(t_{n+1}, x_{n+1})} & (t_n, x'_n) \end{array}, \quad f(t_n, x_n) \neq f(t_{n+1}, x_{n+1}) \Rightarrow x_n \neq x'_n$$

### 2.2.2 Η μέθοδος Runge-Kutta

Η προσέγγιση Euler (1<sup>ης</sup> τάξης) μπορεί να βελτιωθεί αν χρησιμοποιήσουμε ένα δοκιμαστικό βήμα στη μέση  $t_{med} = t_n + \delta t/2$  κάθε χρονικού διαστήματος  $[t_n, t_{n+1}]$ , σύμφωνα με τον τύπο (2.10). Προσδιορίζουμε την τιμή της συνάρτησης  $f$  στο σημείο αυτό και τη χρησιμοποιούμε στον τύπο του Euler για τον προσδιορισμό του  $x_{n+1}$  από το  $x_n$  (Σχήμα 2-4)

$$x_{n+1} = x_n + \delta t f(t_{med}, x_{med}) \quad (2.12)$$



Σχήμα 2-4. Η προσέγγιση μέσης τιμής.

Με αυτή την προσέγγιση η μέθοδος γίνεται συμμετρική και επίσης αποδεικνύεται ότι τα σφάλματα μετατοπίζονται σε όρους  $O(\delta t^3)$ . Η προσέγγιση αυτή ονομάζεται μέθοδος μέσης τιμής (midpoint method) ή μέθοδος **Runge-Kutta 2<sup>ης</sup> τάξης**. Συνολικά έχουμε τους υπολογισμούς

$$\begin{aligned}
k_1 &= \delta t f(t_n, x_n) \\
k_2 &= \delta t f(t_n + \delta t/2, x_n + k_1/2) \\
x_{n+1} &= x_n + k_2
\end{aligned}$$

Η παραπάνω προσέγγιση μπορεί να επαναληφθεί για δύο ενδιαμέσα δοκιμαστικά σημεία. Έτσι παίρνουμε την μέθοδο **Runge-Kutta 4<sup>ης</sup> τάξης** με σφάλμα  $O(\delta t^5)$ . Οι υπολογισμοί συνοψίζονται στους παρακάτω τύπους

$$\begin{aligned}
k_1 &= \delta t f(t_n, x_n) \\
k_2 &= \delta t f(t_n + \delta t/2, x_n + k_1/2) \\
k_3 &= \delta t f(t_n + \delta t/2, x_n + k_2/2) \\
k_4 &= \delta t f(t_n + \delta t, x_n + k_3) \\
x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Για ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad x_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, N \tag{2.14}$$

οι υπολογισμοί (2.13) γίνονται για την κάθε συνάρτηση  $x_i = x_i(t)$  και για την κάθε συνάρτηση  $f_i$  στα αντίστοιχα σημεία

$$\begin{aligned}
k_{i,1} &= \delta t f_i(t_n, x_{i,n}) \\
k_{i,2} &= \delta t f_i(t_n + \delta t/2, x_{i,n} + k_{i,1}/2) \\
k_{i,3} &= \delta t f_i(t_n + \delta t/2, x_{i,n} + k_{i,2}/2) \\
k_{i,4} &= \delta t f_i(t_n + \delta t, x_{i,n} + k_{i,3}) \\
x_{i,n+1} &= x_{i,n} + \frac{1}{6}k_{i,1} + \frac{1}{3}k_{i,2} + \frac{1}{3}k_{i,3} + \frac{1}{6}k_{i,4}, \quad i = 1, \dots, N
\end{aligned} \tag{2.15}$$

**Σημείωση.** Φυσικά υπάρχουν και μέθοδοι [Runge-Kutta](#) μεγαλύτερης τάξης.

**[C]** Στη γλώσσα C, η υλοποίηση της μεθόδου Runge-Kutta 4<sup>ης</sup> τάξης μπορεί να υλοποιηθεί με τη χρήση της παρακάτω διαδικασίας

Ορίζουμε την **σταθερά** N ως το πλήθος εξισώσεων και δεσμεύουμε μονοδιάστατους πίνακες (διανύσματα) X διάστασης N+1 για τις μεταβλητές  $x_i$ . Το πρώτο στοιχείο του πίνακα X[0] θα αναφέρεται στο χρόνο t και τα υπόλοιπα X[1], X[2], ..., X[N] στις αντίστοιχες μεταβλητές.

Ορίζουμε συνάρτηση για τον υπολογισμό των τιμών των συναρτήσεων  $f_i$  του διανυσματικού πεδίου του συστήματος (2.14) σε κάποια δεδομένη χρονική στιγμή

```

void odevectorfield(double X[], double f[])
{
f[1]=.....;
f[2]=.....; (* H X[0] είναι η μεταβλητή χρόνου *)
.....
f[N]=.....;
}

```

Οι υπολογισμοί (2.15) της μεθόδου γίνονται στη συνάρτηση RK4, η οποία δέχεται ως ορίσματα τις τιμές των μεταβλητών X0[] την χρονική στιγμή t και με το τέλος της ενημερώνει τον πίνακα X1[] με τις τιμές των μεταβλητών στο χρόνο t+dt, όπου dt το βήμα της ολοκλήρωσης, το οποίο είναι όρισμα της RK4, επίσης.

```

void RK4(double X0[], const double dt, double X1[])
{
double K[N + 1][5]; double F[N + 1], X[N + 1];
/*compute k1*/

```

```

odevectorfield(X0, F);
for (int i = 1; i <= N; i++) K[i][1] = dt*F[i];
/*compute k2*/
X[0]=X0[0]+dt/2; for (int i=1; i <= N; i++) X[i]=X0[i]+ K[i][1]/2;
odevectorfield(X, F);
for (int i = 1; i <= N; i++) K[i][2] = dt*F[i];
/*compute k3*/
X[0] = X0[0]+ dt/2; for (int i=1; i<=N; i++) X[i]=X0[i] + K[i][2]/2;
odevectorfield(X, F);
for (int i = 1; i <= N; i++) K[i][3] = dt*F[i];
/*compute k4*/
X[0] = X0[0] + dt; for (int i = 1; i <= N; i++) X[i]=X0[i]+K[i][3];
odevectorfield(X, F);
for (int i = 1; i <= N; i++) K[i][4] = dt*F[i];
/* compute next step values */
X1[0] = X0[0] + dt;
for (int i = 1; i <= N; i++) X1[i] = X0[i] + K[i][1] / 6 + K[i][2] / 3 + K[i][3]
/ 3 + K[i][4] / 6;
}

```

**Παράδειγμα.** Θεωρούμε το δυναμικό σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων

$$\dot{x}=u, \quad \dot{y}=v, \quad \dot{u}=-x-xy^2, \quad \dot{v}=-y-x^2y+xsint \quad (2.16)$$

και αντιστοιχίζουμε τις μεταβλητές ως  $x \rightarrow x_1$ ,  $y \rightarrow x_2$ ,  $u \rightarrow x_3$ ,  $v \rightarrow x_4$ . Η αριθμητική επίλυση γίνεται με τον κώδικα, ο οποίος περιγράφεται παρακάτω (δες codeRK4d3.c<sup>5</sup>)

Δηλώνουμε το διανυσματικό της πεδίο

```

#define N 4
void odevectorfield(double X[], double f[])
{
f[1] = X[3];
f[2] = X[4];
f[3] = -X[1] - X[1]*X[2]*X[2];
f[4] = -X[2] - X[1]*X[1]*X[2]+X[1]*sin(X[0]);
}

```

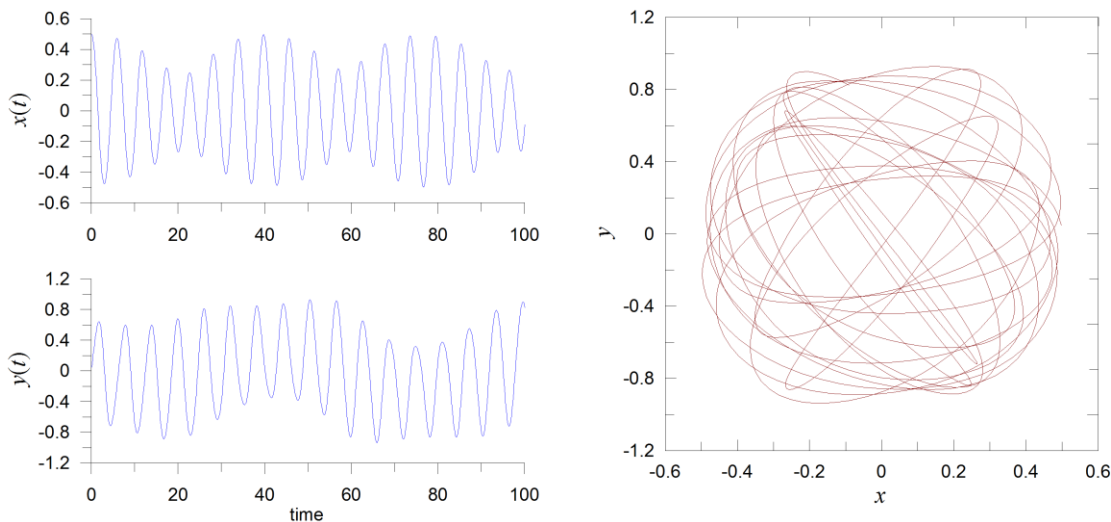
Στην συνάρτηση main () του προγράμματος δηλώνουμε το βήμα και τον χρόνο ολοκλήρωσης, καθώς και τις αρχικές συνθήκες. Επίσης ανοίγουμε ένα αρχείο κειμένου για την αποθήκευση των δεδομένων ( $t, x, y, u, v$ ) ανά γραμμή σε κάθε βήμα ολοκλήρωσης.

```

void main()
{
double dt = 0.1; double tmax = 100;
double X[N + 1], Y[N + 1];
/* initial conditions */
X[0] = 0.0; X[1] = 0.5; X[2] = 0.0; X[3] = 0.0; X[4] = 0.5;
FILE *datafile = fopen("rk4out.txt", "w");
while (X[0] < tmax)
{
RK4(X, dt, Y);
double en = ener(Y[1], Y[2], Y[3], Y[4]);
fprintf(datafile, "%f %f %f %f %f\n", Y[0], Y[1], Y[2], Y[3], Y[4]);
for (int i = 0; i <= N; i++) X[i] = Y[i];
}
fclose(datafile);
}

```

<sup>5</sup> Ο κώδικας codeRK4d3.c είναι διαθέσιμος στην ιστοσελίδα του παρόντος συγγράμματος/κεφαλαίου στον Ελληνικό Συσσωρευτή Ακαδημαϊκών Ηλεκτρονικών Βιβλίων (<http://repfiles.kallipos.gr/file/14094>).



Σχήμα 2-5. Το αποτέλεσμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης για τις μεταβλητές  $x$  και  $y$  (χρονική εξέλιξη και παραμετρική καμπύλη).

**Σχόλιο.** Η αριθμητική λύση αποτελεί μια «διακριτή» προσέγγιση μιας μερικής λύσης του δυναμικού συστήματος και για ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Επειδή το μικρό λάθος σε κάθε βήμα της ολοκλήρωσης συμβάλει εν γένει σε ένα μεγαλύτερο λάθος στο επόμενο βήμα, δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι για την ακρίβεια της λύσης μας μετά από ένα μεγάλο διάστημα ολοκλήρωσης. Αν γνωρίζουμε την αναλυτική λύση του δυναμικού συστήματος τότε γνωρίζουμε με αυθαίρετη ακρίβεια την εξέλιξη του συστήματος για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη και για κάθε χρονικό διάστημα. Ουσιαστικά γνωρίζουμε κάθε πληροφορία για την εξέλιξη του συστήματος και την εξάρτησή του από τις παραμέτρους του. Όμως μόνο σε ελάχιστες (και ενδεχομένως τετριμμένες) περιπτώσεις μπορούμε να βρούμε τις αναλυτικές λύσεις σε συστήματα με δύο ή περισσότερες διαστάσεις.

Υπάρχουν πολλές διαφορετικές μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης διαφορικών εξισώσεων. Εν γένει χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες (α) *σταθερού βήματος* και (β) *μεταβλητού βήματος*. Οι μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης έχουν ως στόχο να επιτύχουν καλύτερη ακρίβεια με τον μικρότερο υπολογιστικό χρόνο. Ανάλογα με την δομή των εξισώσεων μπορεί να επιλεγεί και η βέλτιστη μέθοδος. Η εύρεση τέτοιων μεθόδων αποτελεί ένα βασικό πρόβλημα της Αριθμητικής Ανάλυσης.

## Ασκήσεις

**Άσκηση 2.2.1.** Λύστε με την RK4 την διαφορική εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή  $\ddot{x} = -x$  με αρχικές συνθήκες  $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$  και για χρόνο  $t_{\max} = 400$ . Χρησιμοποιήστε τα βήματα  $\Delta t = 0.01, 0.1, 0.2,$  και  $0.5$  και συγκρίνετε τις λύσεις που προκύπτουν ως προς την αναλυτική λύση.

**Άσκηση 2.2.2.** Ο αρμονικός ταλαντωτής της παραπάνω άσκησης διατηρεί σταθερή ενέργεια που δίνεται από τη σχέση  $E = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} x^2$ . Αντικαταστήστε την αριθμητική λύση στην  $E$  και διαπιστώστε κατά πόσο διατηρείται σταθερή στο χρόνο.

**Άσκηση 2.2.3.** Λύστε με την RK4 το σύστημα του Rossler

$$\dot{x} = -(y + z), \quad \dot{y} = x + 0.2y, \quad \dot{z} = 0.2 + z(x - c) \quad , \quad c = 1.5, \quad c = 5$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1$$

για τις δύο δοθείσες τιμές της παραμέτρου  $c$ . Σχεδιάστε τη χρονική εξέλιξη των δυναμικών μεταβλητών για  $0 < t < 100$  ή και περισσότερο χρόνο. Επίσης, σχεδιάστε την φασική καμπύλη στον τρισδιάστατο χώρο φάσεων  $xyz$ .

### 2.2.3 Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων με το Mathematica

Όπως τονίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο, μια αριθμητική λύση αναφέρεται στη λύση ενός προβλήματος αρχικών τιμών και για ένα πεπερασμένο διάστημα της ανεξάρτητης μεταβλητής (*διάστημα ολοκλήρωσης*). Η αριθμητική επίλυση στο Mathematica γίνεται με την εντολή NDSolve, η οποία



συντάσσεται όπως και η `DSolve` για ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (βλ. §1.2.2) αλλά μαζί με την δήλωση της ανεξάρτητης μεταβλητής δηλώνεται και το διάστημα ολοκλήρωσης ( $t_{\min}, t_{\max}$ )

`NDSolve[{εξισώσεις, Αρχικές συνθήκες}, {x1, x2, ..., xN}, {t, tmin, tmax}]`

Το αποτέλεσμα της `NDSolve` δίνεται ως μια **συνάρτηση παρεμβολής** (*Interpolating function*) του `Mathematica` για κάθε δυναμική μεταβλητή. Μέσω αυτής της συνάρτησης μπορούμε να πάρουμε τις τιμές των μεταβλητών για οποιοδήποτε  $t$  στο διάστημα ( $t_{\min}, t_{\max}$ ).

Μπορούμε να δηλώσουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (IVP) για το δυναμικό σύστημα (2.16) ως εξής

```
In[1]:= deq1 = x'[t] == u[t];
deq2 = y'[t] == v[t];
deq3 = u'[t] == -x[t] - x[t] y[t]^2;
deq4 = v'[t] == -y[t] - x[t]^2 y[t] + x[t] Sin[t];
x0 = 0.5; y0 = 0.0; u0 = 0.0; v0 = 0.5;
IVP = {deq1, deq2, deq3, deq4, x[0] == x0, y[0] == y0, u[0] == u0, v[0] == v0}
```

Η λύση του συστήματος μας δίνεται ως

```
In[17]:= sol=NDSolve[IVP, {x, y, u, v}, {t, 0, 100}]

Out[17]= {{x->InterpolatingFunction[{{0., 100.}}, <>],
y->InterpolatingFunction[{{0., 100.}}, <>],
u->InterpolatingFunction[{{0., 100.}}, <>],
v->InterpolatingFunction[{{0., 100.}}, <>]}}
```

**Σημείωση.** Η `InterpolatingFunction` ορίζεται πάντα σε ένα πεπερασμένο διάστημα ορισμού  $\{\min, \max\}$  και στηρίζεται σε σύνολα σημείων και τιμών παραγώγων, που μπορούν να ορίσουν τη συνάρτηση τοπικά με μια δεδομένη ακρίβεια. Ορίζεται ένας αριθμός από τέτοια σύνολα σημείων για να οριστεί ικανοποιητικά όλο το διάστημα  $\{\min, \max\}$ . Εν γένει, έξω από αυτό το διάστημα η `InterpolatingFunction` επιστρέφει σημαντικά ανακριβείς τιμές. Μέσα στο διάστημα ορισμού της μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε ως μια κοινή συνάρτηση, π.χ. μπορούμε να την παραγωγίσουμε, να βρούμε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα κλπ.

Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τις συναρτήσεις παρεμβολής της λύσης σε σύμβολα ή συναρτήσεις του χρήστη και στη συνέχεια να εξάγουμε τιμές και να τις σχεδιάσουμε π.χ.

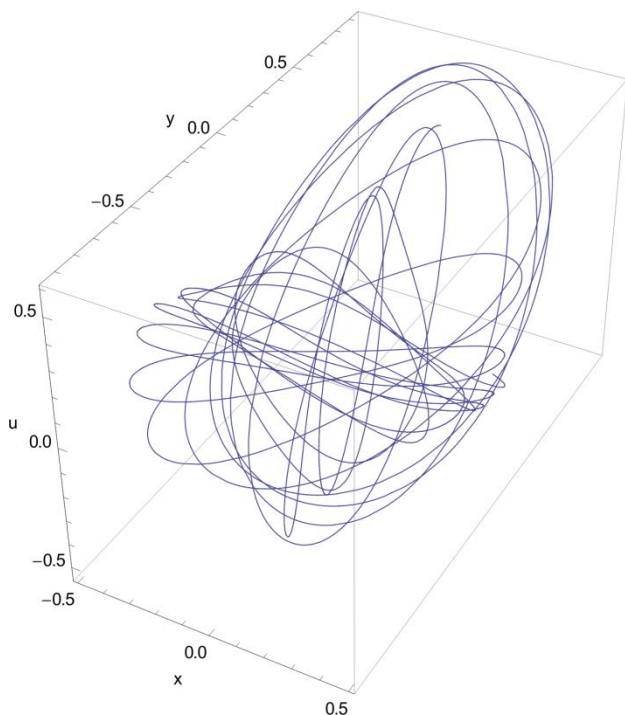
```
Xt = x[t] /. sol[[1]]; Yt = y[t] /. sol[[1]];
Ut = u[t] /. sol[[1]]; Vt = v[t] /. sol[[1]];
```

Μετά την παραπάνω αντικατάσταση, τα σύμβολα  $Xt$ ,  $Yt$ , κλπ., αντιστοιχούν στις συναρτήσεις της λύσης με ανεξάρτητη μεταβλητή το σύμβολο  $t$ . Έτσι π.χ. αν θέλουμε να δούμε την τιμή της  $x(t)$  για  $t=10$ , γράφουμε  $Xt /. \{t \rightarrow 10\}$  ή την σχεδιάζουμε δίνοντας την εντολή

```
Plot[Xt, {t, 0, 100}]
```

Επίσης μπορούμε να σχεδιάσουμε άμεσα και μια τρισδιάστατη προβολή της τετραδιάστατης φασικής καμπύλης ( $x(t), y(t), u(t), v(t)$ )

```
ParametricPlot3D[{Xt, Yt, Ut}, {t, 0, 100}, AxesLabel -> {"x", "y", "u"}]
```



Σχήμα 2-6. Τρισδιάστατη προβολή  $(x,y,u)$  της φασικής καμπύλης για το παραπάνω παράδειγμα.

Η `NDSolve` χρησιμοποιεί κλασσικές μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης (π.χ. *Runge-Kutta*, *Adam*, *Gear*). Οι παραπάνω μέθοδοι χρησιμοποιούν παραμέτρους οι οποίες καθορίζονται αυτόματα από την `NDSolve`. Υπάρχουν όμως και μερικές βασικές παράμετροι οι οποίες μπορούν να αλλάξθούν με βάση τις απαιτήσεις του συγκεκριμένου προβλήματος. Έτσι η `NDSolve` μπορεί να συνταχθεί ως εξής

**`NDSolve`** [*equations*,  $\{y_1, y_2, \dots\}$ ,  $\{x, x_{min}, x_{max}\}$ , *Επιλογή1* → *Νέα Τιμή*, *Επιλογή2* → *Νέα Τιμή* κ.λ.π., ]

Μερικές επιλογές ελέγχου είναι οι ακόλουθες

### 1. **Method** (Προεπιλεγμένη τιμή `Automatic`)

Επιλέγουμε ποια αριθμητική μέθοδο θα χρησιμοποιήσει η `NDSolve`, π.χ. `Method` → `RungeKutta`. Με την επιλογή `Automatic` το `Mathematica 5.2` εναλλάσσει τις μεθόδους *Adams* και *Gear*, ανάλογα με τη συμπεριφορά της λύσης, για την επίτευξη μεγαλύτερης ακρίβειας.

### 2. **AccuracyGoal** και **PrecisionGoal** (Προεπιλεγμένη τιμή=`WorkingPrecision/2`)

Καθορίζουν το απόλυτο και το σχετικό σφάλμα της λύσης, αντίστοιχα, για το κάθε βήμα ολοκλήρωσης και εκφράζονται με τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων που επιθυμούμε. Η `NDSolve` σταματάει τις εσωτερικές επαναλήψεις αν επιτευχθεί **έστω η μια** από τις παραπάνω συνθήκες. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι οι τιμές `AccuracyGoal` και `PrecisionGoal` δεν εκφράζουν το πραγματικό σφάλμα μετά το τέλος της ολοκλήρωσης, αλλά σχετίζονται με το σφάλμα για το κάθε βήμα.

**Σημείωση.** Η τιμή `WorkingPrecision` αναφέρεται στο μέγιστο αριθμό σημαντικών ψηφίων με τον οποίο γίνονται οι υπολογισμοί. Γενικά έχει την προεπιλεγόμενη τιμή `MachinePrecision` η οποία εξαρτάται από το υπολογιστικό σύστημα, π.χ. ένα 32-bit σύστημα προσφέρει 16 σημαντικά δεκαδικά ψηφία.

### 3. **MaxSteps** (Προεπιλεγμένη τιμή=10000)

Κατά την αριθμητική ολοκλήρωση με την `NDSolve`, αποθηκεύονται στη μνήμη οι τιμές της λύσης ανά διαστήματα με βήμα  $\Delta t$ , το οποίο είναι μεταβλητό, και κατασκευάζεται από αυτές η συνάρτηση παρεμβολής. Η τιμή `MaxSteps` καθορίζει το μέγιστο αριθμό βημάτων που επιτρέπουμε να γίνουν στην `NDSolve` για να καλυφθεί το διάστημα ολοκλήρωσης  $(t_{min}, t_{max})$ .

Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να λύσουμε το σύστημα (2.16), το οποίο αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο όπου το λύσαμε αριθμητικά για  $0 \leq t \leq 100$ . Αν επιχειρήσουμε να το επιλύσουμε μέχρι  $t_{\max}=1000$ , θα πάρουμε

```
In[22]:= sol=NDSolve[IVP,{x,y,u,v},{t,0,1000}]
```

```
NDSolve::mxst: Maximum number of 10000 steps reached at the point t == 908.3399573846538`.>>
```

```
Out[22]= {{x->InterpolatingFunction[{{0.,908.34}},<>],
y->InterpolatingFunction[{{0.,908.34}},<>],
u->InterpolatingFunction[{{0.,908.34}},<>],
v->InterpolatingFunction[{{0.,908.34}},<>]}
```

Η προειδοποίηση του Mathematica μας ενημερώνει ότι η αριθμητική επίλυση πραγματοποιήθηκε μέχρι τον χρόνο  $t=908.3399$  ... γιατί συμπληρώθηκαν τα 10000 βήματα (προεπιλεγόμενη τιμή). Θα πρέπει λοιπόν να δηλώσουμε ένα μεγαλύτερο αριθμό βημάτων, π.χ.

```
In[23]:= sol=NDSolve[IVP,{x,y,u,v},{t,0,1000}, MaxSteps->15000]
```

Η αύξηση του MaxStep σημαίνει παραγωγή περισσότερων σημείων και συνεπώς μεγαλύτερες απαιτήσεις σε μνήμη. Η επιλογή MaxSteps $\rightarrow\infty$ , επιτρέπει στο Mathematica να χρησιμοποιήσει όσα βήματα χρειάζονται για να επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια.

**4. StartingStepSize** (Προεπιλεγμένη τιμή=Automatic) και **MaxStepSize** (Προεπιλεγμένη τιμή= $\infty$ ):

Το StartingStepSize είναι το βήμα  $\Delta t$  με το οποίο ξεκινάει η ολοκλήρωση. Με την επιλογή MaxStepSize δηλώνουμε έναν περιορισμό για την μέγιστη τιμή την οποία μπορεί να πάρει το βήμα ολοκλήρωσης. Τόσο το αρχικό βήμα όσο και το μέγιστο επιτρεπτό βήμα μπορεί να καθορίσουν σημαντικά την *πραγματική* ακρίβεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Σε συστήματα όπου οι αρχικές συνθήκες βρίσκονται κοντά σε «μαθηματικές ανωμαλίες» του συστήματος, θα πρέπει να ξεκινούμε με πολύ μικρό βήμα την ολοκλήρωση.

**5. InterpolationPrecision** (Προεπιλεγμένη τιμή =WorkingPrecision)

Αναφέρεται στην ακρίβεια των ψηφίων που επιστρέφει η συνάρτηση παρεμβολής που εκφράζει τη λύση. Δεν σχετίζεται με την ακρίβεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης.

**6. Compiled** (Προεπιλεγμένη τιμή=True) : Με την τιμή True, οι εξισώσεις και η μέθοδος αριθμητικής επίλυσης μετατρέπονται σε κώδικα μηχανής (μέσω compiler της C). Γενικά η ταχύτητα αριθμητικής ολοκλήρωσης με το Mathematica μπορεί να υπολείπεται κάποιες τάξεις μεγέθους σε σχέση με την ταχύτητα που επιτυγχάνεται με κώδικα στη C.

**Σημείωση.** Οι προεπιλεγόμενες τιμές των παραπάνω παραμέτρων μπορεί να διαφέρουν από έκδοση σε έκδοση του Mathematica (συμβουλευτείτε το «[online documentation](#)» της Mathematica).

## Ασκήσεις

**Άσκηση 2.2.4** Για την διαφορική εξίσωση

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{5} + \frac{x}{2} = \frac{1}{5} \sin\left(\frac{t}{3}\right)$$

α) Βρείτε τη γενική λύση (αναλυτικά) με την DSolve

β) Σχεδιάστε στο διάστημα  $0 \leq t \leq 20$  τις λύσεις με αρχικές συνθήκες  $(dx/dt)(0)=0$  και  $x(0)=0.1, 0.5$  και  $1.1$ .

γ) Επιλύστε αριθμητικά την Διαφορική εξίσωση και σχεδιάστε τις λύσεις με αρχικές συνθήκες όπως παραπάνω.

**Άσκηση 2.2.5.** Να λυθεί αριθμητικά η ΔΕ

$$\ddot{y} = \sin(4t) - y^2, \quad \dot{y}(0) = 0$$

για  $y(0)=0$  και  $y'(0)=0.5$  στο χρονικό διάστημα  $0 \leq t \leq 5$  και να σχεδιαστούν οι λύσεις  $y=y(t)$ .

## 2.3 Διακριτοί μετασχηματισμοί Fourier

### 2.3.1 Ο μετασχηματισμός Fourier και το φάσμα ισχύος

Γενικά οι [μετασχηματισμοί Fourier](#) χρησιμοποιούνται κυρίως στην ανάλυση σημάτων, όμως μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για την μελέτη των συχνοτήτων μιας λύσης  $x(t)$  ενός δυναμικού συστήματος η οποία περιγράφει ταλαντώσεις. Αν  $x=x(t)$  είναι μια συνιστώσα της παραπάνω λύσης, δηλαδή η χρονική εξέλιξη μιας δυναμικής μεταβλητής που ορίζεται στο  $-\infty < t < \infty$ , το φάσμα συχνοτήτων της θα δίνεται από το *μετασχηματισμό Fourier*

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi ift} dt, \quad -\infty < f < \infty, \quad X(f) \in \mathbb{C} \quad (2.17)$$

όπου  $f$  η συχνότητα (σε κύκλους ανά μονάδα χρόνου) και  $i = \sqrt{-1}$ . Αν μας δοθεί η  $X(f)$ , τότε η  $x(t)$  μας δίνεται μέσω του *αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{2\pi ift} df, \quad -\infty < t < \infty \quad (2.18)$$

Η *φασματική πυκνότητα ισχύος* ή, απλά, *ισχύς*, η οποία περιέχεται στο στοιχειώδες διάστημα συχνοτήτων  $f$  και  $f + df$  ορίζεται ως

$$P(f) = |X(f)|^2 + |X(-f)|^2, \quad 0 \leq f < \infty \quad (2.19)$$

Με τον παραπάνω ορισμό δεν γίνεται διάκριση μεταξύ αρνητικών και θετικών συχνοτήτων. Εξάλλου για την  $x(t)$  που αποτελεί πραγματική συνάρτηση είναι  $|X(f)| = |X(-f)|$ .

Αν η  $x(t)$  είναι μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο  $T_0$  τότε

$$P(f) = \begin{cases} \infty, & f = kf_0 \\ 0, & f \neq kf_0 \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

δηλαδή το φάσμα ισχύος αποτελείται από *δ-κορυφές* σε θέσεις που είναι ακέραια πολλαπλάσια της μικρότερης συχνότητας  $f_0 = 1/T_0$  της  $x(t)$ .

Για την συνολική ισχύ του «σήματος»  $x(t)$  ισχύει το θεώρημα του Parseval

$$P_{\text{ολ}} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (2.21)$$

### 2.3.2 Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, στα δυναμικά συστήματα η χρονική εξέλιξη  $x(t)$  οποιασδήποτε δυναμικής μεταβλητής είναι γνωστή μέσω μιας αριθμητικής λύσης, δηλαδή γνωστή σε διακριτά βήματα  $\Delta t$  και σε κάποιο πεπερασμένο διάστημα  $[t_{\min}, t_{\max}]$ . Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την (2.17) αριθμητικά, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της αριθμητικής λύσης και έτσι να προσεγγίσουμε το φάσμα ισχύος της  $x(t)$ . Μια τέτοια αριθμητική διαδικασία προσεγγίζεται μεθοδολογικά με τους *διακριτούς μετασχηματισμούς Fourier* (Discrete Fourier Transform – [DFT](#)).

Θεωρούμε ότι μια δυναμική μεταβλητή  $x(t)$  είναι γνωστή σε  $N$  διακριτές χρονικές στιγμές ανά χρονικό βήμα  $\Delta t$ , έχουμε δηλαδή μια δειγματοληψία ή *χρονοσειρά*

$$x_n = x(t_n), \quad t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.22)$$

με συχνότητα δειγματοληψίας  $f_{\Delta} = 1/\Delta t$ . Προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα (2.17) για τις συχνότητες

$$f_k = \frac{k}{N\Delta t}, \quad k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} \quad (2.23)$$

και ορίζουμε τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier της (2.22) την σειρά

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i kn/N} \in \mathbb{C} \quad (2.24)$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$X(f_k) \approx \Delta t X_k$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός θα είναι

$$x_n = \sum_{k=-N/2}^{N/2} X_k e^{2\pi i k n / N} \quad (2.25)$$

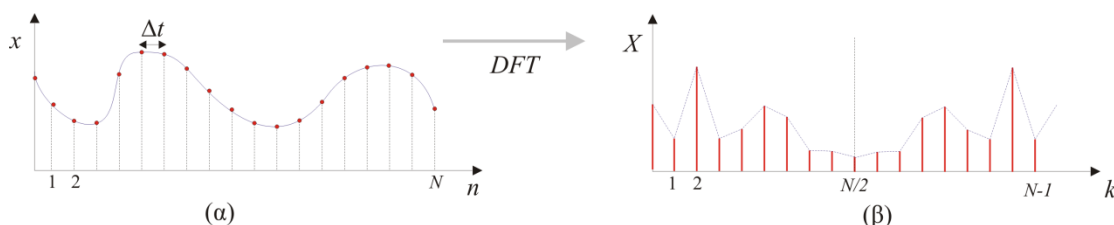
Ο μετασχηματισμός (2.24) είναι περιοδικός με περίοδο  $N$  και, συνεπώς, είναι  $X_{-k} = X_{N-k}$ . Μπορούμε λοιπόν τις αρνητικές συχνότητες να τις αντιστοιχίσουμε και αυτές στο διάστημα  $[0, N-1]$ , όπου οι θετικές συχνότητες θα είναι στο διάστημα  $[0, N/2]$  και οι αρνητικές στο διάστημα  $(N/2, N-1]$ . Η μηδενική συχνότητα ( $k=0$ ) αντιστοιχεί στην μέση τιμή της  $x(t)$ , ομοίως με τις σειρές Fourier. Η μέση θα αντιστοιχεί και στην  $f_{N/2}$  και στην  $f_{-N/2}$ . Για μια πραγματική χρονοσειρά θα είναι

$$|X_k| = |X_{N-k}|$$

και το διακριτό φάσμα ισχύος (ή περιοδόγραμμα) θα ορίζεται ως

$$P_k = \frac{1}{N} |X_k|^2, \quad k=0, \dots, N-1 \quad (2.26)$$

Φυσικά και το παραπάνω φάσμα είναι συμμετρικό γύρω από τη θέση  $k = N/2$  και συνήθως παρουσιάζεται μόνο το αριστερό του τμήμα από 0 έως  $N/2$ .



Σχήμα 2-7. (α) Χρονοσειρά μεταβλητής και (β) το διακριτό φάσμα ισχύος (σχηματικά).

Η συχνότητα  $f_{N/2} = \frac{1}{2\Delta t}$  ονομάζεται συχνότητα Nyquist. Σύμφωνα με το [θεώρημα Nyquist-Shannon](#), η δειγματοληψία (2.22) της συνεχούς συνάρτησης  $x(t)$  μπορεί να ορίσει πλήρως την  $x(t)$  αν  $X(f) = 0$  για  $|f| > f_{N/2}$ .

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε αρκετά υψηλές συχνότητες για τη χρονοσειρά μας, π.χ. μέχρι  $f_{\max}$ , τότε η δειγματοληψία πρέπει να είναι πυκνή,

$$f_{\Delta} = 1/\Delta t > 2f_{\max} \quad \eta \quad \Delta t < \frac{1}{2f_{\max}}$$

Προφανώς είναι  $f_{\max} = f_{N/2}$ .

Η χαμηλότερη συχνότητα (πέρα της μηδενικής), η οποία περιέχεται στο φάσμα είναι η

$$f_1 = \frac{1}{N\Delta t} = \frac{1}{t_N}$$

όπου  $t_N = t_{\max} - t_{\min} + \Delta t$ . Συνεπώς για να προσεγγίσουμε όλο και χαμηλότερες συχνότητες θα πρέπει να αυξάνουμε το χρονικό διάστημα της χρονοσειράς. Παρατηρήστε ότι, η διακριτότητα  $\Delta f = |f_{k+1} - f_k|$  του φάσματος είναι ίση με την χαμηλότερη συχνότητα.

Κατά τον υπολογισμό του διακριτού φάσματος και την προσέγγιση του πραγματικού συνεχούς φάσματος της χρονοσειράς υπεισέρχονται φαινόμενα που προκαλούν αλλοιώσεις. Συνοπτικά αναφέρουμε τα εξής :

- Το φαινόμενο της αναδίπλωσης (aliasing). Το φάσμα που υπολογίζεται είναι στο διάστημα συχνοτήτων  $[f_{-N/2}, f_{N/2}]$ . Αν όμως η χρονοσειρά  $x(t)$  έχει φασματικές συνιστώσες σε συχνότητες  $|f| > f_{N/2}$  τότε το υπαρκτό αυτό φάσμα αναδιπλώνεται και προστίθεται στο υπολογιζόμενο φάσμα μέσα στο διάστημα  $[f_{-N/2}, f_{N/2}]$ . Η αλλοίωση αυτή μπορεί να μειωθεί με πυκνότερη δειγματοληψία.
- Το φαινόμενο της διαρροής (leakage). Οφείλεται στη διακριτότητα της χρονοσειράς. Ουσιαστικά αντί να υπολογίσουμε το φάσμα της συνεχούς συνάρτησης  $x(t)$ , υπολογίζουμε το φάσμα της συνέλιξης της  $x(t)$  με ένα παλμό πλάτους  $t_N$ . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η ισχύς μιας πραγματικής συχνότητας  $f$

να διαρρέει και να αλλοιώνει και τις γειτονικές συχνότητες. Η αλλοίωση αυτή μπορεί να μειωθεί με τη χρήση κατάλληλων φίλτρων.

### 2.3.3 Υπολογισμός των διακριτών μετασχηματισμών Fourier

Οι διακριτοί μετασχηματισμοί Fourier μπορούν να υπολογιστούν άμεσα αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (2.24). Μέσα στο άθροισμα έχουμε τον υπολογισμό  $N$  όρων, οπότε για τον υπολογισμό των  $N$  συχνοτήτων απαιτείται ο υπολογισμός  $N^2$  όρων (λέμε ότι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι  $O(N^2)$ ). Όμως υπάρχει ο αλγόριθμος των γρήγορων μετασχηματισμών Fourier (*fast Fourier transform* – **FFT**) απαιτεί πολύ λιγότερους υπολογισμούς.

Ο αλγόριθμος FFT στηρίζεται στο γεγονός ότι ένας διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT) για μια χρονοσειρά  $N$  σημείων, μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα δύο διακριτών μετασχηματισμών Fourier (DFT1 και DFT2) για χρονοσειρές με  $N/2$  σημεία. Ο πρώτος χρησιμοποιεί τα *μονά* στοιχεία και ο δεύτερος τα *ζυγά* στοιχεία της χρονοσειράς. Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί αναδρομικά οπότε υπολογίζουμε αρκετούς μεν DFT αλλά με πολύ λιγότερα σημεία. Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου γίνεται  $O(N \log_2 N)$ . Έτσι αν  $N \approx 10^5$  σημεία, ο κλασικός αλγόριθμος απαιτεί περίπου  $10^{10}$  υπολογισμούς ενώ ο FFT μόνο  $1.7 \cdot 10^6$ . Ο αλγόριθμος φυσικά μπορεί να υλοποιηθεί αν η χρονοσειρά διαθέτει αριθμό σημείων που είναι δύναμη του 2, δηλαδή  $N=2^M$ .

**Σημείωση.** Λεπτομέρειες για την υλοποίηση του αλγορίθμου FFT καθώς και κώδικες σε διάφορες γλώσσες προγραμματισμού μπορούν να αναζητηθούν στη βιβλιογραφία (δες Press et al, 2007) και στο διαδίκτυο (π.χ. [εδώ](#)).

**[M]** Στο Mathematica ο μετασχηματισμός FFT υλοποιείται με την εντολή `Fourier`, η οποία υπολογίζει τον DFT μιας λίστας δεδομένων

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$$

Αν η λίστα έχει μήκος διάφορο του  $2^M$ , τότε ο αλγόριθμος την συμπληρώνει με μηδενικά μέχρι το μήκος να γίνει δύναμη του 2. Η αρίθμηση δεδομένων και συχνοτήτων ξεκινάει από το 1 και ο μετασχηματισμός υπολογίζεται μέσω του τύπου

$$X = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}, \quad X_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N x_n e^{2\pi i(n-1)(k-1)/N} \quad (2.27)$$

Άρα η μηδενική συχνότητα αντιστοιχεί στο στοιχείο  $X_1$ . Έτσι έχουμε

$$X = \text{Fourier}[x]$$

Το διακριτό φάσμα ισχύος θα υπολογιστεί ως

$$P = \text{Abs}[X]^2 / N^2$$

**Παράδειγμα 1.** Δίνουμε τη χρονοσειρά  $x$  και υπολογίζουμε το φάσμα

```
In[1]:= x = {0.1, 1, -0.6, -0.2, 1.1, -0.4, -0.5, 1.1, -0.2, -0.7,
0.9, 0., -0.8, 0.9, 0.4, -0.9, 0.6, 0.4};
X = Fourier[x] // Chop
```

```
Out[2]= {0.518545, 0.209488 + 0.00939319 I, 0.122641 - 0.0334387 I, 0.235702, 0.344853 -
0.175471 I, 0.607676 - 0.403027 I, -1.31993 + 1.22474 I, -0.180769 + 0.199952 I, -0.04323
+ 0.102917 I, -0.0471405, -0.04323 - 0.102917 I, -0.180769 - 0.199952 I, -1.31993 -
1.22474 I, 0.607676 + 0.403027 I, 0.344853 + 0.175471 I, 0.235702, 0.122641 + 0.0334387 I,
0.209488 - 0.00939319 I}
```

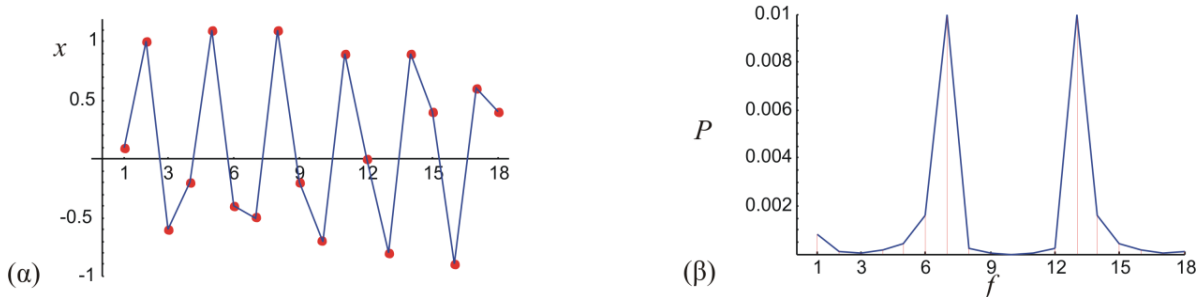
Η χρονοσειρά αποτελείται από 18 σημεία. Η μηδενική συχνότητα έχει μέτρο  $A_0 = 0.5185$ , είναι πάντα πραγματική (για  $x(t) \in \mathbb{R}$ ) και αντιστοιχεί στο μέσο όρο των τιμών της χρονοσειράς μέσω της σχέσης

$$A_0 = \bar{x} \cdot \sqrt{N}$$

Το διακριτό φάσμα ισχύος θα είναι

```
In[3]:= P = Abs[X]^2 / Length[x]^2
```

```
Out[25]= {0.000829904, 0.000135721, 0.0000498732, 0.000171468,
0.000462079, 0.00164105, 0.0100069, 0.000224253, 0.0000384592,
6.85871*10^-6, 0.0000384592, 0.000224253, 0.0100069, 0.00164105,
0.000462079, 0.000171468, 0.0000498732, 0.000135721}
```



Σχήμα 2-8. (α) Η χρονοσειρά του παραδείγματος 1 και (β) το διακριτό φάσμα ισχύος.

**Παράδειγμα 2.** Θεωρούμε την περιοδική τροχιά του παραδείγματος 1, παράγραφος §1.5. Με το Mathematica κάνουμε τους παρακάτω υπολογισμούς

- Αριθμητική ολοκλήρωση της τροχιάς

```
In[1]:= deq = x'[t] == -4 x[t]^3 + 2 x[t] - 1/4;
x0 = 1 ; v0 = 0; tmax = 120;
xt[t_] = x[t]/. NDSolve[{deq, x[0]==x0, x'[0]==v0}, x, {t, 0, tmax}][[1]]
```

- Δειγματοληψία 512 σημείων

```
In[4]:= ndata=512; dt=tmax/ndata;
sampleData=Table[xt[i*dt], {i, 0, ndata-1}];
Short[sampleData, 3]
```

```
Out[6]//Short= {1., 0.940901, 0.790758, 0.603407, 0.417937, <<502>>, -0.458511, -
0.238437, -0.0544429, 0.109887, 0.271932}
```

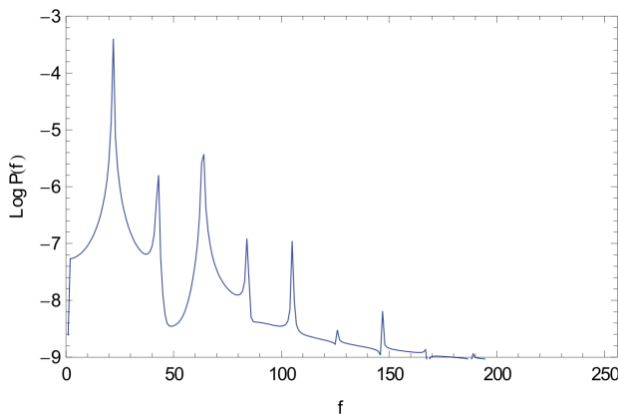
- Υπολογισμός Φάσματος Ισχύος (σε λογαριθμική κλίμακα)

```
In[7]:= DFT=Fourier[sampleData] //Chop;
logpowerSpectrum= Log[10, Abs[DFT]^2/ndata^2];
Short[logpowerSpectrum, 3]
```

```
Out[9]//Short= {-8.60726, -7.26707, -7.25907, -7.24567, -7.22675, <<503>>, -7.22675, -
7.24567, -7.25907, -7.26707}
```

- Σχεδίαση Φάσματος

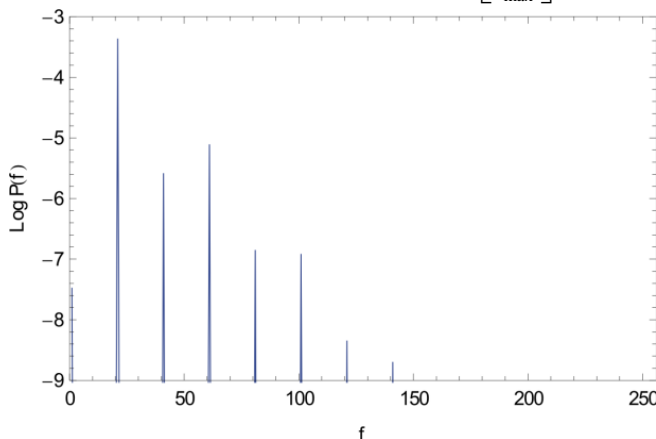
```
ListPlot[logpowerSpectrum, Joined->True, FrameLabel->{"f", "Log P(f)"}, Frame->
True, PlotRange->{{0, 256}, {-9, -3}}, PlotStyle->Blue]
```



Σχήμα 2-9. Φάσμα ισχύος για την περιοδική τροχιά του παραδείγματος 2 και για χρόνο  $t=120$  και δειγματοληψία με  $N=512$ .

Στο παραπάνω παράδειγμα η περίοδος της τροχιάς είναι  $T \approx 5.757$ . Αν η ανάλυση του σήματος γίνει σε χρόνο πολλαπλάσιο της περιόδου (π.χ.  $t_{\max} = 20T = 115.145$ ) τότε το φαινόμενο της διαρροής (leakage) σχεδόν εξουδετερώνεται και το φάσμα αποτελείται από καθαρές κορυφές (peaks) μόνο σε συχνότητες που είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας βασικής συχνότητας  $f = 1/T$  ή, για το διακριτό φάσμα, στις θέσεις

$$k = j \cdot \left[ \frac{T}{t_{\max}} \right], \quad j = 1, 2, 3 \dots$$



Σχήμα 2-10. Το διακριτό φάσμα της περιοδικής τροχιάς του παραδείγματος 2. Η δειγματοληψία των 512 τιμών αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα 20 περιόδων.

**Σχόλιο.** Αν συγκρίνουμε τα δύο παραπάνω φάσματα που αντιστοιχούν στην ίδια δυναμική μεταβλητή και σχεδόν στην ίδια δειγματοληψία, παρατηρούμε ότι το φαινόμενο της διαρροής αλλοιώνει το φάσμα δίνοντας ένα σημαντικό εύρος στις βάσεις των κορυφών. Εν γένει η χρονική εξέλιξη μιας μεταβλητής δεν είναι περιοδική. Αλλά, ακόμα και αν είναι, δεν ξέρουμε εξ' αρχής την περίοδό της. Συνεπώς δεν μπορούμε να μειώσουμε το φαινόμενο της διαρροής παίρνοντας χρονικά διαστήματα ίσα με μία ή περισσότερες περιόδους. Για το λόγο αυτό πρέπει να γίνεται χρήση φίλτρων τα οποία μειώνουν την παραπάνω αλλοίωση.

Το βήμα  $\Delta t$  που συνήθως χρησιμοποιούμε για την δειγματοληψία μας συνήθως είναι πολύ μικρό (αφού με τους σύγχρονους υπολογιστές μπορούμε να επεξεργαστούμε μεγάλο αριθμό δεδομένων) και συνεπώς η συχνότητα Nyquist είναι αρκετά υψηλή όπου η ισχύς του σήματος είναι σχεδόν μηδενική. Έτσι με αρκούτως πυκνή δειγματοληψία από την αριθμητική λύση, δεν έχουμε ιδιαίτερο πρόβλημα αναδίπλωσης (aliasing).

## Ασκήσεις

**Άσκηση 2.3.1.** Για την διαφορική εξίσωση του παραδείγματος 2 ( $\ddot{x} = -4x^3 + 2x - 1/4$ ) υπολογίστε και σχεδιάστε το διακριτό φάσμα ισχύος για τις περιοδικές ταλαντώσεις που αντιστοιχούν στις αρχικές συνθήκες  $x(0) = -0.8$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  και  $x(0) = -1.8$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ . Χρησιμοποιήστε τις ίδιες παραμέτρους με το παράδειγμα 2.



## 2.4 Βιβλιογραφία

- Abell, M.L. & Braselton, J.P., 1997. *Differential equations with Mathematica*. 2nd ed. Academic Press.
- Aberth, O., 1998. *Precise numerical methods using C++*. Academic Press.
- Baker, G.L. & Gollub, J.P., 1990. *Chaotic Dynamics: an introduction*. New York: Cambridge University Press.
- Bauman, G., 2005. *Mathematica for Theoretical Physics: Classical Mechanics and nonlinear dynamics*. New York: Springer.
- Enns, R.H. & McGuire, G.C., 2001. *Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers*. Boston: Birkhauser.
- Kernighan, B.W. & Ritchie D.M., 1988. *The C programming language*. 2nd ed. Prentice Hall Inc. (ελληνική μετάφραση: 2008. *Η γλώσσα προγραμματισμού C*. Αθήνα: Κλειδάριθμος.)
- Korsch, H.J. & Jodl, H.J., 1998. *Chaos: A program Collection*. 2<sup>nd</sup> ed. Berlin: Springer-Verlag.
- Lynch, S., 2007. *Dynamical systems with applications using Mathematica*, Boston: Birkhauser.
- Marasco, A. & Romano, A., 2001. *Scientific Computing with Mathematica: Mathematical problems of ordinary differential equations*, Boston: Birkhauser.
- Press, W.H. κ.ά., 2007. *Numerical Recipes: the art of scientific computing*. 3rd ed. Cambridge UK: Cambridge University Press.
- Βραχάτης, Μ.Ν., 2012. *Αριθμητική Ανάλυση: Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*. Αθήνα: Κλειδάριθμος.
- Σούρλας, Δ., 2012. *Δυναμικά συστήματα και εφαρμογές με τη χρήση του Maple*. Σημειώσεις. Διαθέσιμο στη: [http://www.physics.upatras.gr/UploadedFiles/course\\_182\\_1516.pdf](http://www.physics.upatras.gr/UploadedFiles/course_182_1516.pdf). Πανεπιστήμιο Πάτρας.

### 3 Αυτόνομα μηχανικά συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας

#### 3.1 Εξισώσεις και γενικά χαρακτηριστικά

##### 3.1.1 Διαφορικές εξισώσεις 2<sup>ης</sup> τάξης και λύσεις

Στη φυσική και στην μηχανολογία, πολλά απλά αλλά συνάμα ενδιαφέροντα δυναμικά συστήματα είναι αυτά της κλασικής μηχανικής και συγκεκριμένα αυτά που περιγράφουν την κίνηση ενός υλικού σημείου στην ευθεία  $x'Ox$  υπό την επίδραση μιας δύναμης  $F$  που εξαρτάται από τη θέση και την ταχύτητα του υλικού σημείου

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x})$$

Γενικότερα στο κεφάλαιο αυτό θα μας απασχολήσουν δυναμικά συστήματα που περιγράφονται από την 2<sup>ης</sup> τάξης αυτόνομη διαφορική εξίσωση

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

η οποία γράφεται ως σύστημα δύο εξισώσεων στη μορφή

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x, y) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Θα ονομάζουμε τη συνάρτηση  $f$  *συνάρτηση δύναμης*. Μπορεί να αποτελεί μια πραγματική συνάρτηση δύναμης ανά μονάδα μάζας αν το  $x$  εκφράζει μήκος. Γενικά θα ονομάζουμε **θέση** τη μεταβλητή  $x$  και **ταχύτητα** την μεταβλητή  $y$ .

Για την ειδική περίπτωση όπου η  $f$  δεν εξαρτάται από την ταχύτητα  $y$ , θα έχουμε την διαφορική εξίσωση

$$\ddot{x} = f(x) \quad (3.3)$$

ή το σύστημα

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x),$$

για το οποίο η απόκλιση του διανυσματικού του πεδίου (δες §1.4.1) θα είναι

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f(x)}{\partial y} = 0.$$

Συνεπώς το σύστημα (3.3) είναι **διατηρητικό**.

Οι διαφορικές εξισώσεις της μορφής (3.1) ή (3.3) σπάνια έχουν λύσεις οι οποίες εκφράζονται αναλυτικά με πεπερασμένο αριθμό όρων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι τυπικές (standard) συναρτήσεις, δηλαδή πολυώνυμα, εκθετικές συναρτήσεις, τριγωνομετρικές συναρτήσεις κλπ., είναι πολύ περιορισμένες για να αποδώσουν την μεγάλη ποικιλία λύσεων  $x = x(t)$  αυτών των διαφορικών εξισώσεων. Σε κάθε περίπτωση η γενική λύση θα συμπεριλαμβάνει δύο αυθαίρετες σταθερές  $c_1$  και  $c_2$ , οι οποίες προσδιορίζονται μέσω των αρχικών συνθηκών

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = y(t_0) = y_0 \quad (3.4)$$

**Παράδειγμα 1.** Έστω η διαφορική εξίσωση

$$\ddot{x} = x \cdot \dot{x} \quad \text{ή} \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = xy$$

Αφού λείπει η ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$  (αυτόνομο σύστημα), χρησιμοποιούμε την παράγωγο

$$\ddot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} y$$

και η διαφορική εξίσωση γράφεται

$$y \frac{dy}{dx} = xy \quad \stackrel{y \neq 0}{\Rightarrow} \quad dy = x dx \quad \stackrel{\int}{\Rightarrow} \quad y = \frac{1}{2}(x^2 + c_1)$$

όπου  $c_1$  αυθαίρετη σταθερά από την 1<sup>η</sup> ολοκλήρωση. Θεωρούμε  $c_1 > 0$  και παίρνουμε

$$\frac{dx}{x^2 + c_1} = 2 dt \quad \stackrel{\int}{\Rightarrow} \quad \tan^{-1}(x/\sqrt{c_1}) = 2\sqrt{c_1}t + c_2.$$

Άρα έχουμε τελικά

$$x(t) = \sqrt{c_1} \tan(2\sqrt{c_1}t + c_2) \quad \text{και} \quad y(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{2c_1}{\cos^2(2\sqrt{c_1}t + c_2)} \quad (c_1 > 0)$$

**Σημείωση.** Για  $c_1 < 0$  θα παίρναμε  $x(t) = \sqrt{-c_1} \tanh(2\sqrt{-c_1}t + c_2)$ .

**Παράδειγμα 2.** Έστω η διαφορική εξίσωση

$$\ddot{x} = x(1 + \dot{x})$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση  $\ddot{x} = ydy/dx$ , βρίσκουμε

$$\frac{ydy}{1+y} = xdx \quad \int \Rightarrow \quad y - \ln|1+y| = \frac{1}{2}x^2 + c_1 \quad (3.5)$$

Για να ολοκληρώσουμε μια ακόμη φορά την παραπάνω σχέση απαιτείται η επίλυσή της ως προς  $y$ , κάτι το οποίο δεν μπορεί να γίνει με τη χρήση τυπικών συναρτήσεων.

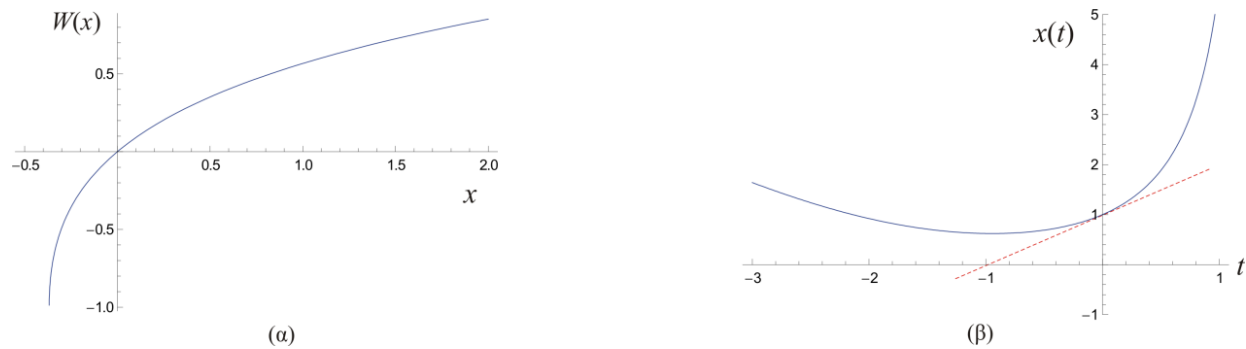
**[M]** Χρησιμοποιώντας το Mathematica, η αντιστροφή της συνάρτησης  $g(x) = y - \ln(y+1)$  για την πλεγμένη συνάρτηση (3.5) μας δίνει

```
In[1]:= Solve[y-Log[1+y]==x^2/2+c1, y]
Out[1]:= {{y->-1-ProductLog[-Exp[-1-c1-x^2/2]]}}
```

Η ειδική συνάρτηση  $\text{ProductLog}(x)$  (ή συνάρτηση *Lambert W(x)*) είναι η αντίστροφη συνάρτηση της  $x = ye^y$ . και η γραφική της παράσταση δίνεται στο Σχήμα 2-1(α). Συνεπώς, αφού  $y = dx/dt$  η λύση  $x = x(t)$  θα εκφράζεται από την πεπλεγμένη συνάρτηση

$$\int \frac{dx}{1-W(\chi)} = t + c_2, \quad \chi = e^{c_1 - x^2/2}$$

Όπου θέσαμε  $c_1$  στη θέση της σταθεράς  $-1 - c_1$ .



Σχήμα 3-1. (α) η γραφική παράσταση της συνάρτησης Lambert (β) η λύση  $x = x(t)$  της διαφορικής εξίσωσης του παραδείγματος 2 και με αρχικές συνθήκες  $x(0)=1, y(0)=1$ .

**Σχόλιο.** Λύσεις όπως αυτές του παραδείγματος 2, είναι δύσκολο να τις χειριστούμε. Επίσης είναι δύσκολο να αντιστοιχίσουμε τις αυθαίρετες σταθερές  $c_1$  και  $c_2$  στις αρχικές συνθήκες (3.4). Και το Mathematica, αν και μας δίνει τη γενική λύση (π.χ. για το παράδειγμα 2), δεν μπορεί να επιλύσει το πρόβλημα αρχικών τιμών.

```
In[1]:= sol=DSolve[{x'[t]==x[t](1+x'[t]), x[0]==1, x'[0]==1}, x, t]
... DSolve::bvnul: For some branches of the general solution, the given boundary conditions
lead to an empty solution. >>
Out[1]= {}
```

Έτσι, καταφεύγουμε συνήθως στις αριθμητικές λύσεις.

### 3.1.2 Χώρος φάσεων, ολοκληρώματα και σημεία Ισορροπίας

Ο **χώρος των φάσεων** του συστήματος (3.2) είναι το επίπεδο  $Oxy$  (θέση-ταχύτητα). Η ποιοτική μελέτη της διαφορικής εξίσωσης (3.1) ή του συστήματος (3.2) συνίσταται στο πως μπορούμε να εξάγουμε σημαντικές ιδιότητες για τις λύσεις χωρίς να χρειαστεί να βρούμε (ή να χρησιμοποιήσουμε) την τελική μορφή της λύσης. Οι ιδιότητες αυτές και, γενικότερα, η ποιοτική δυναμική συμπεριφορά του συστήματος μπορούν να προκύψουν από την μελέτη του **φασικού διαγράμματος**, δηλαδή τις φασικές τροχιές στο επίπεδο  $Oxy$ . Οι φασικές τροχιές μπορούν να αποδοθούν και αναλυτικά, εν γένει σε πεπλεγμένη μορφή, όταν μπορούμε να βρούμε ένα **ολοκλήρωμα** της εξίσωσης

$$\Phi(x, y) = c \quad (3.6)$$

Για παράδειγμα η σχέση (3.5) αποτελεί ένα ολοκλήρωμα για την διαφορική εξίσωση του παραδείγματος 2.

Ένα ολοκλήρωμα για το σύστημα (3.2) μπορεί να βρεθεί από τη διαφορική εξίσωση 1<sup>ης</sup> τάξης

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y} \quad (3.7)$$

Το ολοκλήρωμα είναι μια συνάρτηση των δυναμικών μεταβλητών η οποία παραμένει σταθερή κατά την χρονική εξέλιξη της τροχιάς. Η σταθερή τιμή  $c$  εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Οι φασικές καμπύλες (3.6) οφείλουν να εφάπτονται στο διανυσματικό πεδίο του συστήματος (δες και §1.3.1),

$$\mathbf{f} = (y, f(x, y)) \quad (3.8)$$

**Σημείωση.** Από το διανυσματικό πεδίο (3.8) προκύπτει ότι η κατεύθυνση ροής είναι γενικά από αριστερά προς τα δεξιά για  $y > 0$  και από τα δεξιά προς τα αριστερά για  $y < 0$ .

Τα **σημεία ισορροπίας** ή τα κρίσιμα σημεία  $(x^*, y^*)$  του διανυσματικού πεδίου προκύπτουν από την εξίσωση  $\mathbf{f} = 0$ , οπότε θα έχουμε πάντα  $y^* = 0$ , δηλαδή τα σημεία ισορροπίας θα βρίσκονται πάνω στον άξονα  $x'Ox$  και στις θέσεις  $x^*$  που προκύπτουν από την λύση της εξίσωσης

$$f(x^*, 0) = 0 \quad (3.9)$$

### 3.1.3 [M] Σχεδίαση διανυσματικού πεδίου και φασικού διαγράμματος

Θα χρησιμοποιήσουμε το σύστημα του παραδείγματος 2

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x(1 + y)$$

Με ολοκλήρωμα το (3.5)

$$y - \ln |1 + y| - \frac{1}{2}x^2 = c$$

Το σύστημα έχει ένα σημείο ισορροπίας στο  $(0,0)$ . Οι φασικές τροχιές του συστήματος αποτελούν τις ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης

$$\Phi(x, y) = y - \ln |1 + y| - x^2 / 2,$$

οι οποίες στο Mathematica σχεδιάζονται άμεσα με την εντολή ContourPlot. Αυτή συντάσσεται ως εξής

$$\text{ContourPlot}[\Phi, \{x, x_{\min}, x_{\max}\}, \{y, y_{\min}, y_{\max}\}, \text{παράμετροι επιλογών σχεδίασης}]$$

Για το σχεδιασμό του φασικού διαγράμματος αναφέρουμε τις ακόλουθες χρήσιμες παραμέτρους

- ContourShading  $\rightarrow$  False (αποτρέπει τον χρωματισμό των περιοχών μεταξύ δύο ισοσταθμικών καμπύλων)
- Contours  $\rightarrow$  Number (αριθμός ισοσταθμικών καμπύλων που θα σχεδιαστούν)
- Contours  $\rightarrow$   $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  (ισοσταθμικές καμπύλες στα δεδομένα επίπεδα τιμών)
- PlotPoints  $\rightarrow$  Number (αριθμός σημείων για την σχεδίαση της κάθε καμπύλης)

Π.χ.

$$f = y - \text{Log}[\text{Abs}[y + 1]] - x^2 / 2;$$

$$\text{ContourPlot}[f, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}, \text{ContourShading} \rightarrow \text{False}, \text{Contours} \rightarrow 20, \text{PlotPoints} \rightarrow 100]$$

Για τον σχεδιασμό του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$  γίνεται χρήση της εντολής

```
VectorPlot[{f1,f2},{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}]
```

Π.χ.

```
f1=y;f2=x(1+y);
```

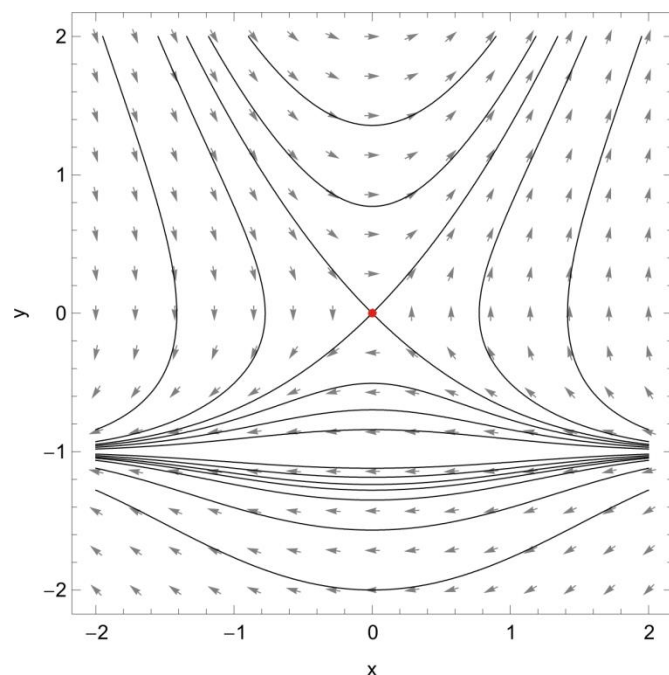
```
VectorPlot[{f1,f2},{x,-2,2},{y,-2,2}]
```

**Σημείωση.** Για το Mathematica 5.x απαιτείται και η φόρτωση από τη βιβλιοθήκη γραφικών της PlotField, δηλαδή θα πρέπει να εισάγουμε την εντολή <<Graphics`PlotField`, και να χρησιμοποιήσουμε την εντολή PlotVectorField.

Μπορούμε να γράψουμε τον παρακάτω συνολικό κώδικα για την σχεδίαση του φασικού διαγράμματος στο οποίο περιλαμβάνονται

- Ενδεικτικές φασικές τροχιές σε διάφορες σταθερές  $c_1$
- Τα σημεία ισορροπίας
- Το διανυσματικό πεδίο

```
In[]:=f1=y;f2=x*(1+y); Phi=y-Log[Abs[y+1]]-x^2/2;
gr1=VectorPlot[{f1,f2},{x,-2,2},{y,-2,2},VectorPoints->15,VectorScale->{0.02,1.5,None},VectorStyle->Gray];
gr2=ListPlot[{{0,0}},PlotStyle->{PointSize[0.03],Red}];
gr3=ContourPlot[Phi,{x,-2,2},{y,-2,2},ContourShading->False,Contours->{-2,-1,-0.3,0,0.2,0.5,1},PlotPoints->100];
Show[{gr1,gr2,gr3},Frame->True,FrameLabel->{"x","y"}]
```



Σχήμα 3-2. Το φασικό διάγραμμα του συστήματος  $dx/dt=y$ ,  $dy/dt=x(1+y)$  όπως προκύπτει από τον παραπάνω κώδικα.

## 3.2 Γραμμικές περιπτώσεις

Οι γραμμικές περιπτώσεις για μια αυτόνομη διαφορική εξίσωση 2<sup>ης</sup> τάξης της μορφής (3.1) συνοψίζονται στην γενική μορφή

$$\ddot{x} = a_1 x + a_2 \dot{x}, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (\text{σταθ.}) \quad (3.10)$$

Η γενική λύση της εξαρτάται από τις ρίζες  $r_1, r_2$  του χαρακτηριστικού της πολωνύμου

$$\Pi(r) = r^2 - a_2 r - a_1$$

Έχουμε τις εξής περιπτώσεις

- i.  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2$ , τότε  $x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$
- ii.  $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$ , τότε  $x = (c_1 + c_2 t) e^{rt}$
- iii.  $r_1, r_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, r_i = a \pm bi$ , τότε  $x = e^{at} (c_1 \cos(bt) + c_2 \sin(bt))$

Τα γραμμικά συστήματα (3.10) έχουν ένα σημείο ισορροπίας το  $(0,0)$ .

### 3.2.1 Ο αρμονικός ταλαντωτής ([harmonic oscillator](#))

Πρόκειται για ένα σύστημα που περιγράφεται με μια από τις πιο γνωστές εξισώσεις της φυσικής

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \omega \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{σταθ.}) \quad (3.11)$$

ή, ως σύστημα εξισώσεων,  $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega^2 x$ . Θεωρώντας αρχικές συνθήκες  $x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$ , η λύση θα είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos \omega t + (y_0 / \omega) \sin \omega t \\ y(t) &= -x_0 \omega \sin \omega t + y_0 \cos \omega t \end{aligned} \quad (3.12)$$

Η εξίσωση για τη θέση γράφεται και ως

$$x(t) = D \cos(\omega t - \theta_0), \quad \text{όπου} \quad D = \sqrt{x_0^2 + (y_0 / \omega)^2}, \quad \theta_0 = \tan^{-1} \left( \frac{y_0}{\omega x_0} \right) \quad (3.13)$$

και περιγράφει αρμονικές ταλαντώσεις πλάτους  $D$  και κυκλικής συχνότητας  $\omega$  ή **περιόδου**  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ,

**ανεξάρτητης των αρχικών συνθηκών.** Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση της θέσης (3.12) επί  $\omega$ , υψώνοντας στο τετράγωνο τη σχέση αυτή καθώς και την σχέση της ταχύτητας και προσθέτοντας τις δυο τελευταίες σχέσεις έχουμε απαλοιφή του χρόνου και καταλήγουμε στη σχέση

$$y(t)^2 + \omega^2 x(t)^2 = y_0^2 + \omega^2 x_0^2,$$

η οποία εκφράζει ένα ολοκλήρωμα για το σύστημα, το **ολοκλήρωμα της ενέργειας**

$$E = y^2 + \omega^2 x^2 \quad (3.14)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό θα μπορούσε να προκύψει άμεσα από την ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης (3.7)

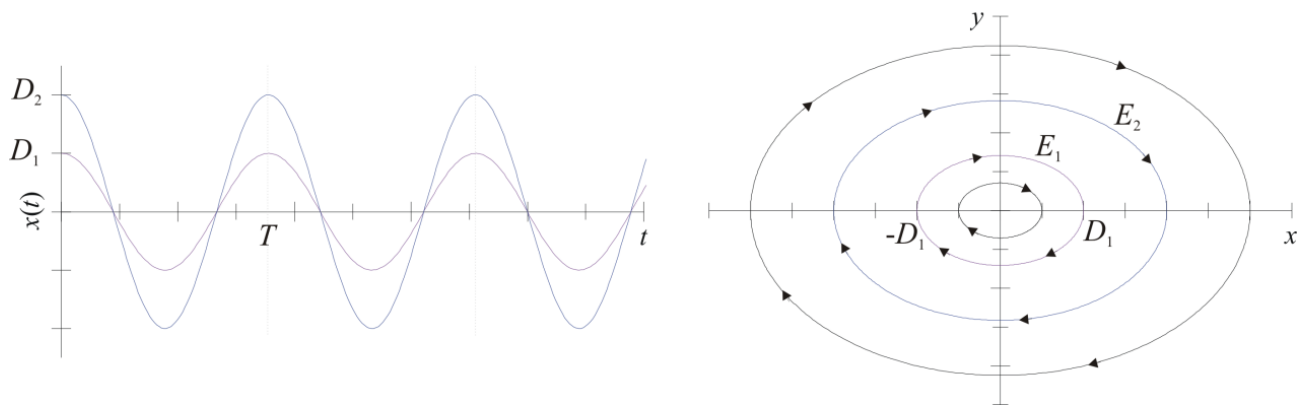
**Σημείωση.** Αν θεωρήσουμε τις ταλαντώσεις υλικού σημείου μάζας  $m$ , το οποίο είναι στερεωμένο στο άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς  $k$ , τότε έχουμε την εξίσωση κίνησης  $m\ddot{x} = -kx$  και μηχανική ενέργεια  $E_M = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$ . Άρα, σε αντιστοιχία με το σύστημα (3.11), είναι  $\omega = \sqrt{k/m}$  και  $E = 2E_M / m$ .

Από το ολοκλήρωμα της ενέργειας (3.14) προκύπτει ότι οι φασικές καμπύλες είναι ελλείψεις με όρια

$$\begin{aligned} -D \leq x \leq D, \quad D &= \sqrt{E} / \omega \\ -\sqrt{E} \leq y \leq \sqrt{E} \end{aligned}$$

και με φορά κατά τη διεύθυνση της κίνησης των δεικτών του ρολογιού (βλ. Σχήμα 3-3).

**Σχόλιο.** Από τη γνώση του ολοκληρώματος (3.14) συμπεραίνουμε ότι οι φασικές καμπύλες είναι κλειστές για κάθε τιμή του ολοκληρώματος και συνεπώς έχουμε ταλαντώσεις της θέσης και της ταχύτητας με όρια που εξαρτώνται από την τιμή της ενέργειας. Βέβαια δεν μπορούμε να συμπεράνουμε για την αρμονική μορφή της ταλάντωσης και την περίοδό της. Τα τελευταία γίνονται αντιληπτά μόνο μέσω της αναλυτικής λύσης.



Σχήμα 3-3. Αρμονικές ταλαντώσεις (αριστερά) με πλάτη  $D_1 < D_2$  αλλά με την ίδια περίοδο και το φασικό διάγραμμα (δεξιά) με τις ελλειπτικές φασικές τροχιές (είναι  $E_1 < E_2$ ).

### 3.2.2 Το απωστικό (υπερβολικό) σύστημα

Πρόκειται για το σύστημα

$$\ddot{x} = a^2 x, \quad a \in \mathbb{R} \quad (\text{σταθ.}) \quad (3.15)$$

ή, ως σύστημα εξισώσεων,  $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = a^2 x$ .

**Σημείωση.** Το σύστημα αυτό μπορεί να περιγράψει την ευθύγραμμη κίνηση ενός υλικού σημείου μάζας  $m$  στο οποίο δρα δύναμη ανάλογη με την απόσταση  $x$  του σημείου από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και με φορά αντίθετη προς αυτό, δηλαδή  $F = -kx$ , οπότε  $a^2 = k/m$ .

Η λύση δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{at} + c_2 e^{-at} \\ y(t) &= ac_1 e^{at} - ac_2 e^{-at} \end{aligned} \quad (3.16)$$

όπου, αν θεωρήσουμε τις αρχικές συνθήκες  $x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$ , θα είναι

$$c_1 = \frac{1}{2}(x_0 + y_0/a), \quad c_2 = \frac{1}{2}(x_0 - y_0/a).$$

Από την (3.7), η οποία γράφεται ως

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 x}{y},$$

Προκύπτει το ολοκλήρωμα της ενέργειας

$$E = y^2 - a^2 x^2 \quad (3.17)$$

Οι φασικές καμπύλες που περιγράφει η (3.17) είναι μια οικογένεια υπερβολών, η οποία παρουσιάζεται στο Σχήμα 3-4(β). Μια ειδική περίπτωση αποτελούν οι φασικές καμπύλες για ενέργεια  $E = 0$ , δηλαδή οι ευθείες

$$y = \pm ax, \quad a > 0 \quad (3.18)$$

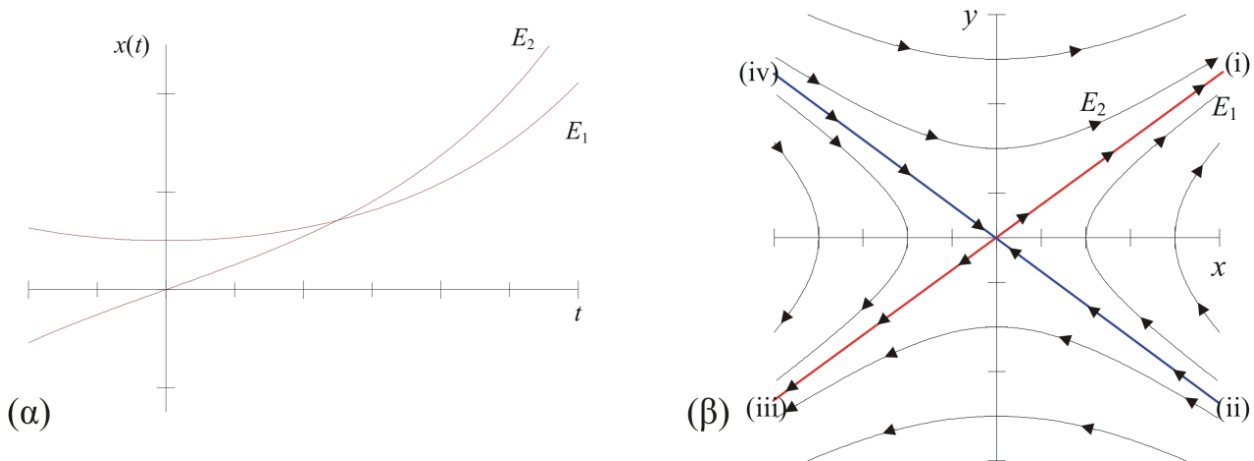
όπου, χωρίς άρση της γενικότητας, θέσαμε  $a > 0$ . Θεωρώντας αρχικές συνθήκες πάνω στις ευθείες (3.18) έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις

- i.  $y = ax, \quad x_0 > 0$   $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$  και  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$   
 $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$  και  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$
- ii.  $y = -ax, \quad x_0 > 0$   $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$  και  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$   
 $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = +\infty$  και  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = -\infty$
- iii.  $y = ax, \quad x_0 < 0$   $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty$  και  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -\infty$   
 $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$  και  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$

$$\text{iv. } y = -ax, \quad x_0 < 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = +\infty$$

Παρατηρούμε ότι για  $t \rightarrow +\infty$ , οι μόνες λύσεις που δεν διαφεύγουν στο  $\pm\infty$  είναι αυτές που αντιστοιχούν σε αρχικές ευθείες πάνω στην ευθεία  $y = -ax$ , η οποία ονομάζεται **ευσταθής ασύμπτωτη**. Για την  $y = ax$ , η οποία ονομάζεται **ασταθής ασύμπτωτη**, οι λύσεις τείνουν εκθετικά στο μηδέν αλλά για  $t \rightarrow -\infty$ . Όλες οι υπόλοιπες φασικές τροχιές διαφεύγουν στο  $\pm\infty$  είτε για  $t \rightarrow +\infty$  ή για  $t \rightarrow -\infty$ . Μια τέτοια τοπολογία φασικών καμπύλων γύρω από το σημείο ισορροπίας ονομάζεται **σάγμα**.



Σχήμα 3-4. (α) χρονική εξέλιξη της δυναμικής μεταβλητής του υπερβολικού συστήματος για  $E_1 < 0$  και  $E_2 > 0$  (β) Το φασικό διάγραμμα του υπερβολικού συστήματος (σάγμα). Η ασταθής και η ευσταθής ασύμπτωτη παρουσιάζονται με την κόκκινη και μπλε, αντίστοιχα, ευθεία.

### 3.2.3 Γραμμικός ταλαντωτής με απόσβεση

Στα μηχανικά συστήματα θεωρούμε συνήθως ως γραμμική απόσβεση (**damping**) μια δύναμη ανάλογη της ταχύτητας και με φορά πάντα αντίθετη της ταχύτητας. Έτσι αν στον αρμονικό ταλαντωτή προσθέσουμε μια τέτοια απόσβεση θα έχουμε το σύστημα

$$\ddot{x} = -b\dot{x} - \omega^2 x, \quad b, \omega \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{σταθ.}) \quad (3.19)$$

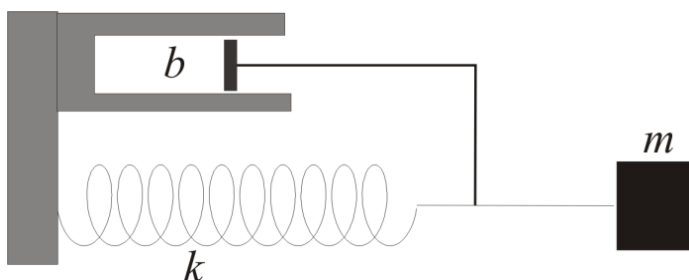
ή, ως σύστημα εξισώσεων,  $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -by - \omega^2 x$  με απόκλιση του διανυσματικού του πεδίου

$$\text{div} \mathbf{f} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial (-by - \omega^2 x)}{\partial y} = -b < 0$$

Άρα το σύστημα (3.19) είναι ένα σύστημα με απώλειες και η θετική παράμετρος  $b$  ονομάζεται συντελεστής απόσβεσης. Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολωνύμου θα δίνονται από τη σχέση

$$r_1 = -\alpha + \beta, \quad r_2 = -\alpha - \beta$$

$$\text{όπου } \alpha = \frac{b}{2} > 0, \quad \beta = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 - 4\omega^2}$$



Σχήμα 3-5. Σχηματική παράσταση μηχανικού ταλαντωτή με απόσβεση.



Ανάλογα με την τιμή των παραμέτρων διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

**A) περίπτωση μεγάλης απόσβεσης ( $b > 2\omega$ ),**

Και οι δύο ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι πραγματικές και μάλιστα αρνητικές

$$r_2 < r_1 < 0$$

και η γενική λύση της (3.19) θα δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \\ y(t) &= c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t} \end{aligned} \quad (3.20)$$

όπου, για αρχικές συνθήκες  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y(0) = y_0$ ,

$$c_1 = -\frac{x_0 r_2 - y_0}{r_1 - r_2}, \quad c_2 = \frac{x_0 r_1 - y_0}{r_1 - r_2}.$$

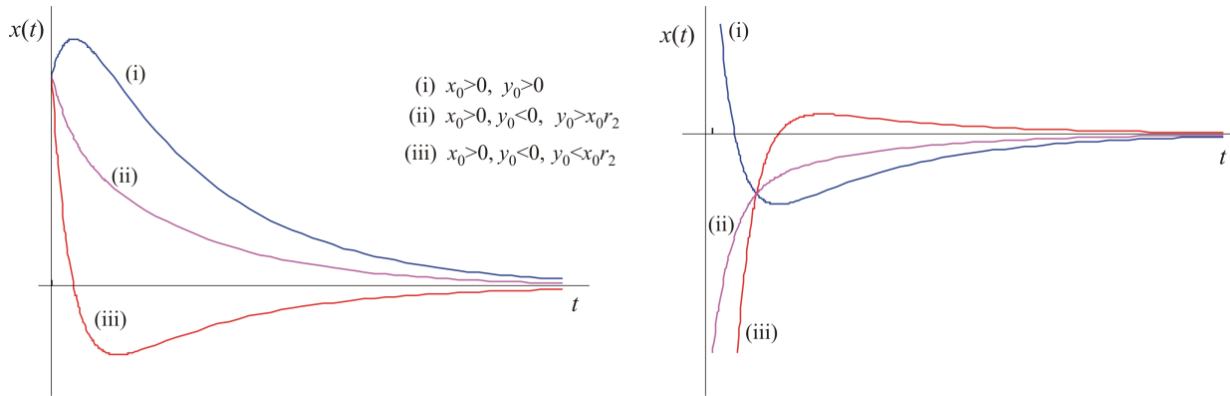
Παρατηρούμε ότι για όλες τις λύσεις

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Επίσης μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\exists t^*, \quad x(t^*) = 0 \quad \text{εαν} \quad |y_0| > |x_0 r_2| \quad \text{και} \quad y_0 x_0 < 0$$

και, μάλιστα, το  $t^*$  είναι και μοναδικό.



Σχήμα 3-6. Τυπικές λύσεις  $x=x(t), y=y(t)$  για το σύστημα (3.19) στην περίπτωση μεγάλης απόσβεσης.

**B) περίπτωση μικρής απόσβεσης ( $b < 2\omega$ )**

Στην περίπτωση αυτή οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι μιγαδικές

$$r_{1,2} = -\alpha \pm \omega_1 i, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - (b/2)^2}$$

Αν θεωρήσουμε αρχικές συνθήκες  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ , η λύση θα είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\frac{b}{2}t} (c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t) \\ y(t) &= -\frac{b}{2} e^{-\frac{b}{2}t} (c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t) + e^{-\frac{b}{2}t} (-c_1 \omega_1 \sin \omega_1 t + c_2 \omega_1 \cos \omega_1 t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

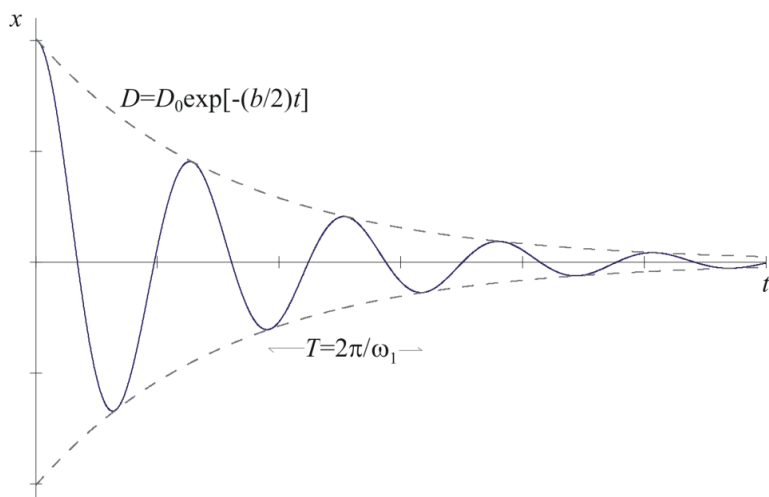
όπου  $c_1 = x_0$  και  $c_2 = \frac{y_0 + b x_0 / 2}{\omega_1}$ .

Η εξίσωση για τη θέση γράφεται και ως

$$x(t) = D_0 e^{-\frac{b}{2}t} \cos(\omega_1 t - \theta_0), \quad \text{όπου} \quad D_0 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \theta_0 = \tan^{-1} \left( \frac{c_2}{c_1} \right) \quad (3.22)$$

δηλώνοντας ταλαντώσεις σταθερής περιόδου  $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$ , ανεξάρτητης των αρχικών συνθηκών, και με εκθετικά

μειούμενο πλάτος  $D = D_0 e^{-(b/2)t}$



Σχήμα 3-7. Ταλαντώσεις με εκθετικά μειούμενο πλάτος για το γραμμικό σύστημα μικρής απόσβεσης.

Αν θεωρήσουμε ότι η ενέργεια χωρίς την απόσβεση δίνεται από τη σχέση  $E_0 = \frac{1}{2} \omega^2 D_0^2$  τότε κατά την απόσβεση μπορούμε να πούμε ότι  $E = \frac{1}{2} \omega^2 D(t)^2$  ή

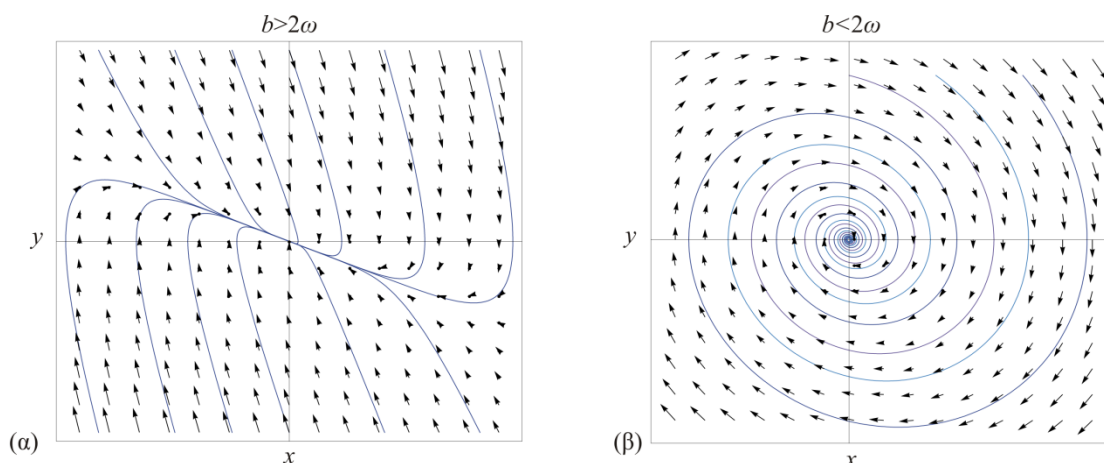
$$E = E_0 e^{-bt} \quad (3.23)$$

**Σημείωση.** Στην ειδική περίπτωση όπου  $r_1=r_2=-b/2$  οι λύσεις είναι γραφικά όμοιες με τις λύσεις (3.20). Δες άσκηση 3.2.1.

Οι φασικές καμπύλες που αντιστοιχούν στις λύσεις (3.20) ή (3.21) δεν μπορούν να βρεθούν εύκολα με την απαλοιφή του  $t$  από τις σχέσεις θέσης και ταχύτητας. Μπορούν όμως να βρεθούν αναλυτικά από την λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.7), η οποία γράφεται

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-by - \omega^2 x}{y} = -b - \omega^2 \frac{x}{y} \quad (3.24)$$

Η παραπάνω διαφορική είναι ομογενής και μπορεί να διαχωριστεί με την αντικατάσταση  $z = y/x$ . Η λύση-ολοκλήρωμα είναι αρκετά περίπλοκη και δεν την παραθέτουμε εδώ. Με τη βοήθεια του Mathematica σχεδιάζουμε (Σχήμα 3-8) το διανυσματικό πεδίο και το φασικό διάγραμμα για τις περιπτώσεις της μεγάλης και της μικρής απόσβεσης. Χρησιμοποιούμε τις αναλυτικές λύσεις (3.20) ή (3.21) για διάφορες αρχικές συνθήκες και την εντολή `ParametricPlot[{x(t),y(t)}, {t,0,t_max}]`.



Σχήμα 3-8. Φασικά διαγράμματα για τον γραμμικό ταλαντωτή με απόσβεση (α) με μεγάλη απόσβεση, κόμβος (β) με μικρή απόσβεση, εστία.

## Ασκήσεις

**Άσκηση 3.2.1.** Βρείτε την αναλυτική λύση για το σύστημα (3.19) αν  $b = 2\omega$ .

**Άσκηση 3.2.2.** Για την λύση (3.20) και με αρχικές συνθήκες  $x_0 > 0$ ,  $y_0 = 0$ , βρείτε τον χρόνο  $t^*$  για τον οποίο  $x(t^*) = 0$

**Άσκηση 3.2.3.** Βρείτε ένα ολοκλήρωμα για το σύστημα (3.19) λύνοντας την εξίσωση (3.24).

**Άσκηση 3.2.4.** Βρείτε τις αναλυτικές λύσεις και σχεδιάστε τα φασικά διαγράμματα για το σύστημα (ταλαντωτής με ενίσχυση)

$$\ddot{x} = b\dot{x} - \omega^2 x, \quad b, \omega \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{σταθ.})$$

**Άσκηση 3.2.5.** Βρείτε τις αναλυτικές λύσεις και σχεδιάστε τα φασικά διαγράμματα για το υπερβολικό σύστημα με απόσβεση

$$\ddot{x} = -b\dot{x} + a^2 x, \quad b, a \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{σταθ.})$$

**Άσκηση 3.2.6.** Αν  $E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$  είναι η σταθερή ενέργεια του ταλαντωτή χωρίς απόσβεση ( $b=0$ ), δείξτε ότι για  $b \neq 0$  ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας θα είναι  $\frac{dE}{dt} = -b\dot{x}^2$ .

**Άσκηση 3.2.7.** Γράψτε τη λύση (3.22) για τον ταλαντωτή με  $b = 1/4$ ,  $\omega = 1$ . Αντικαταστήστε τη λύση αυτή στην παράσταση  $E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$  και βρείτε τη μεταβολή της ενέργειας με το χρόνο  $E = E(t)$ . Σχεδιάστε την μεταβολή αυτή καθώς και τη μεταβολή που δίνεται από την σχέση (3.23). Παρατηρείται διαφορά;

## 3.3 Διατηρητικά συστήματα και δυναμική

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε σε αυτόνομα και, ταυτόχρονα, διατηρητικά συστήματα της μορφής (δες §3.1.1)

$$\ddot{x} = f(x) \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) \end{cases} \quad (3.25)$$

### 3.3.1 Η συνάρτηση δυναμικού και το ολοκλήρωμα ενέργειας

Όπως είδαμε στα γραμμικά συστήματα προκύπτει πάντα ένα ολοκλήρωμα, το οποίο είναι το ανάλογο της μηχανικής ενέργειας. Γενικότερα, για το σύστημα (3.25) μπορούμε να προχωρήσουμε σε ολοκλήρωση της εξίσωσης (3.7) αφού είναι χωριζόμενων μεταβλητών

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y} \Leftrightarrow ydy = f(x)dx \Leftrightarrow \int ydy = \int f(x)dx$$

Ορίζουμε τη **συνάρτηση δυναμικού**

$$V(x) = -\int f(x)dx \quad (3.26)$$

και η παραπάνω ολοκλήρωση μας δίνει

$$\frac{1}{2}y^2 = -V(x) + c,$$

όπου  $c$  η σταθερά ολοκλήρωσης, την οποία ονομάζουμε ενέργεια και την συμβολίζουμε με  $E$ . Έχουμε, λοιπόν, **το ολοκλήρωμα της ενέργειας**

$$\frac{1}{2}y^2 + V(x) = E \quad (3.27)$$

Σε δεδομένες αρχικές συνθήκες  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$  τιμή της ενέργειας  $E_0 = \frac{1}{2} y_0^2 + V(x_0)$  θα είναι η ίδια για όλη τη λύση και η φασική τροχιά  $(x(t), y(t))$  οφείλει να διατηρεί αυτή την τιμή, δηλαδή  $E(x(t), y(t)) = E_0 \quad \forall t$ . Έτσι η (3.27) αποτελεί την εξίσωση των φασικών καμπύλων και το φασικό διάγραμμα προκύπτει από φασικές καμπύλες για διάφορες τιμές της ενέργειας. Μάλιστα μπορούμε να λύσουμε ως προς  $y$  και να πάρουμε

$$y = \pm \sqrt{2(E - V)} \quad (3.28)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι φασικές καμπύλες είναι **συμμετρικές** ως προς τον άξονα  $y=0$ . Το πρόσημο του  $y(=\dot{x})$  δηλώνει και τη φορά της ροής του διανυσματικού πεδίου. Για  $y > 0$  έχουμε ροή των φασικών καμπύλων από τα αριστερά προς τα δεξιά (το  $x$  αυξάνεται) ενώ για  $y < 0$  έχουμε ροή των φασικών καμπύλων από τα δεξιά προς τα αριστερά (το  $x$  μειώνεται)

Δεδομένου ότι  $y = \dot{x}$ , μπορούμε να προχωρήσουμε σε ολοκλήρωση της (3.28) με αρχική συνθήκη την  $x(t_0) = x_0$  και να προκύψει η σχέση

$$t - t_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}, \quad (3.29)$$

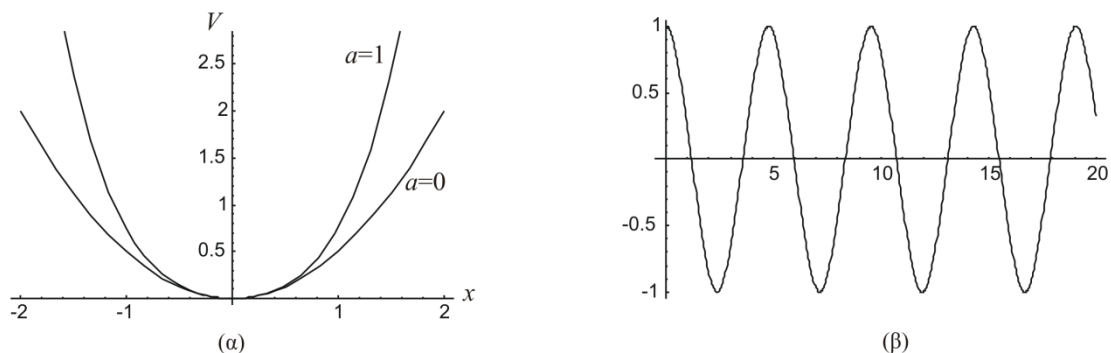
όπου το πρόσημο «συν» ή «πλην» λαμβάνεται ανάλογα με τη φορά της ταχύτητας ( $y > 0$  ή  $y < 0$ , αντίστοιχα). Η (3.29) αποτελεί την αναλυτική έκφραση της λύσης για το σύστημα. Όμως η λύση αυτή υποφέρει από τα μειονεκτήματα που συζητήθηκαν και στην §3.1.1. Για παράδειγμα δεν είναι εύκολο να βρούμε και να εκφράσουμε το ολοκλήρωμα του δευτέρου μέλους της (3.29) με τυπικές συναρτήσεις. Ακόμα και αν γίνει αυτό η παράσταση που θα προκύψει θα πρέπει να αντιστραφεί για να λυθεί ως προς τη δυναμική μεταβλητή  $x$ . Θα περιγράψουμε την αναλυτική λύση (3.29) για το απλό εκκρεμές στην §3.4.3.

**Παράδειγμα 1.** Το «σκληρό ελατήριο» χαρακτηρίζεται από συντελεστή  $k$ , ο οποίος δεν είναι σταθερός αλλά εξαρτάται από την απόσταση από το σημείο ισορροπίας. Έτσι έχουμε τον ταλαντωτή που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\ddot{x} = -(\kappa + a^2 x^2)x, \quad \kappa > 0 \quad (3.30)$$

Το δυναμικό που αντιστοιχεί στο σκληρό ελατήριο θα είναι σύμφωνα με τη σχέση (3.26)

$$V = \frac{1}{2} \kappa x^2 + \frac{a^2}{4} x^4 \quad (3.31)$$



Σχήμα 3-9. (α) Το δυναμικό του σκληρού ελατηρίου με  $a \neq 0$ . Για  $a=0$  έχουμε το κλασικό δυναμικό του Hooke (β) μη γραμμική ταλάντωση του σκληρού ελατηρίου όπως προκύπτει από τη αριθμητική ολοκλήρωση της (3.30) με  $\kappa=1$ ,  $a=1$  και αρχικές συνθήκες  $x(0)=1$ ,  $x'(0)=0$ .

Το ολοκλήρωμα της σχέσης (3.29) για το δυναμικό (3.31) μπορεί να δοθεί με τη βοήθεια «ελλειπτικών συναρτήσεων» και η μορφή του είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη για να το χειριστεί κανείς αναλυτικά. Χρησιμοποιώντας αριθμητική ολοκλήρωση αναπαράγουμε τις μη γραμμικές ταλαντώσεις του «σκληρού ελατηρίου» όπως φαίνονται στο Σχήμα 3-9(β).

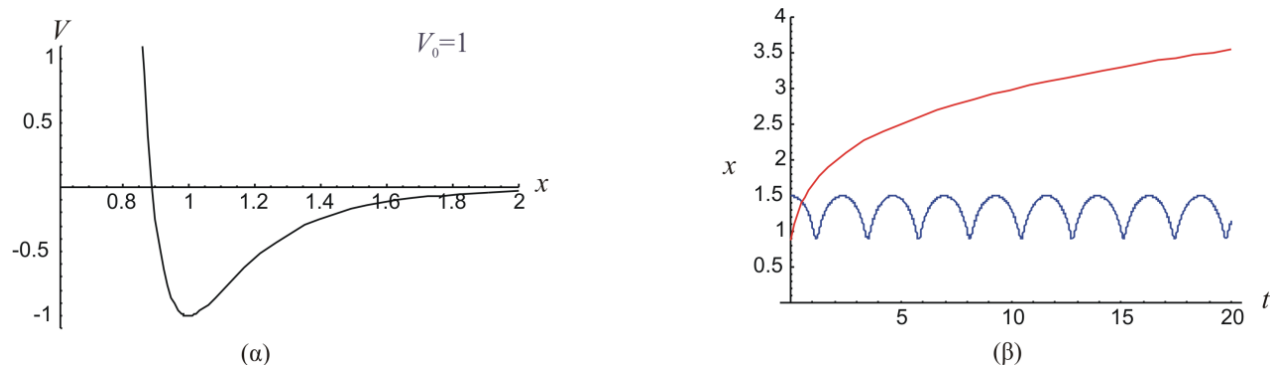
**Παράδειγμα 2.** Ένα μοντέλο δυναμικού, το οποίο περιγράφει την αλληλεπίδραση δύο ουδέτερων ατόμων ή μορίων που βρίσκονται σε απόσταση  $x$ , είναι το δυναμικό Lenard-Jones, που σε κανονικοποιημένες μονάδες γράφεται στη μορφή

$$V = V_0 \left( \frac{1}{x^{12}} - \frac{2}{x^6} \right), \quad V_0 > 0 \text{ (σταθ.)}, \quad x > 0 \quad (3.32)$$

Η συνάρτηση δύναμης που αντιστοιχεί στο παραπάνω δυναμικό είναι

$$f = -\frac{dV}{dx} = -f_0 \left( \frac{1}{x^7} - \frac{1}{x^{13}} \right), \quad f_0 = 12V_0$$

είναι ελκτική ( $f < 0$ ) για  $x > 1$  και  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . Η διαφορική εξίσωση του συστήματος (3.25) μπορεί να λυθεί αριθμητικά. Δύο ενδεικτικές αριθμητικές λύσεις  $x = x(t)$  παρουσιάζονται στο Σχήμα 3-10(β).



Σχήμα 3-10. (α) Το δυναμικό του δυναμικού Lenard-Jones ( $V_0=1$ ) (β) η εξέλιξη της απόστασης των δύο ατόμων υπό την αλληλεπίδρασή τους μέσω του δυναμικού (3.32) για δύο διαφορετικές αρχικές συνθήκες,  $x_0=1.5$ ,  $dx/dt(0)=0$ , (μπλε) και  $x_0=0.8909$ ,  $dx/dt(0)=0$  (κόκκινη).

### 3.3.2 Σημεία ισορροπίας και γραμμική ευστάθεια

Σύμφωνα με τον ορισμό της παραγράφου §2.4, τα σημεία ισορροπίας προκύπτουν από τη λύση του συστήματος

$$y = 0, \quad f(x) = 0$$

Δηλαδή τα σημεία ισορροπίας αντιστοιχούν πάντα σε μηδενική ταχύτητα και στις θέσεις όπου η συνάρτηση δύναμης  $f(x)$  μηδενίζεται ή, ισοδύναμα, στα ακρότατα της συνάρτησης δυναμικού  $V(x)$ .

**Παράδειγμα 1.** Έστω το σύστημα ενός ταλαντωτή ο οποίος αλληλεπιδρά με γειτονικούς ταλαντωτές. Η αλληλεπίδραση αυτή περιγράφεται μέσω μιας δύναμης ανάλογης του κύβου της απόστασης από το σημείο ισορροπίας του ταλαντωτή

$$\ddot{x} = ax - x^3, \quad a \in \mathbb{R} \text{ (σταθ.)} \quad (3.33)$$

Ο ταλαντωτής ισορροπεί στις θέσεις για τις οποίες  $ax - x^3 = 0$

$$x_{01} = -\sqrt{a}, \quad x_{02} = 0, \quad x_{03} = \sqrt{a}$$

Προφανώς τα σημεία ισορροπίας  $x_{01}$  και  $x_{03}$  υπάρχουν μόνο για  $a > 0$ .

**Παράδειγμα 2.** Έστω το σύστημα με εξίσωση

$$\ddot{x} = x - x^3 - \frac{1}{4} \quad (3.34)$$

Η λύση της  $x - x^3 - 1/4 = 0$  μπορεί να προσδιοριστεί εύκολα με την NSolve στο περιβάλλον του Mathematica

```
In[1]:= NSolve[x-x^3-1/4==0,x]
Out[1]= {{x->-1.10716}, {x->0.269594}, {x->0.837565}}
```

**Παράδειγμα 3.** Το δυναμικό Yukawa περιγράφει την αλληλεπίδραση σωματιδίων σε ατομική κλίμακα. Αν θεωρήσουμε δύο σωματίδια που το ένα περιστρέφεται γύρω από το άλλο, το δυναμικό θα έχει τη μορφή

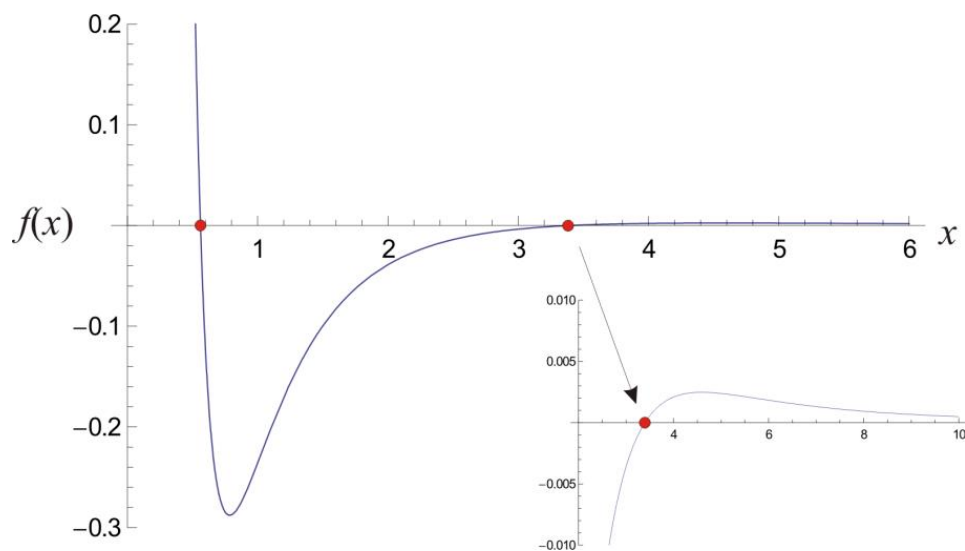
$$V(x) = \frac{c^2}{x^2} - \frac{a}{bx} e^{-bx} \quad (3.35)$$

και η αντίστοιχη συνάρτηση δύναμης θα είναι η

$$f(x) = -\frac{dU}{dx} = 2\frac{c^2}{x^3} - a\left(\frac{1}{bx^2} + \frac{1}{x}\right)e^{-bx}$$

Οι ρίζες της  $f(x)$  δεν μπορούν να βρεθούν αναλυτικά. Μπορούν να προσεγγιστούν με την μέθοδο *Newton-Raphson* ή την *FindRoot* του *Mathematica* για δεδομένες τιμές των παραμέτρων  $a, b$  και  $c$ . Π.χ. για  $a=b=1, c=1/2$ , μπορούμε να σχεδιάσουμε την  $f(x)$ , ώστε να εντοπίσουμε κατά μια πρώτη προσέγγιση σε ποια σημεία μηδενίζεται (δες Σχήμα 3-11)

```
In[1]:= FindRoot[f==0, {x, 0.5}]
Out[2]= {x->0.561394}
In[3]:= FindRoot[f==0, {x, 3.5}]
Out[4]= {x->3.39692}
```



Σχήμα 3-11. Η συνάρτηση δύναμης Yukawa και τα σημεία ισορροπίας ( $a=b=1, c=1/2$ ).

Έστω  $x_0$  ένα σημείο ισορροπίας, οπότε  $f(x_0) = 0$  και  $x(t) = x_0, y(t) = 0, \forall t$ . Σύμφωνα με τη μέθοδο διαταραχών, θεωρούμε μια *κοντινή* τροχιά στο σημείο ισορροπίας που την περιγράφουμε με την λύση

$$x(t) = x_0 + \delta x(t), \quad y(t) = \delta y(t), \quad (|\delta x(0)| + |\delta y(0)| \ll 1) \quad (3.36)$$

Η απομάκρυνση ή όχι της παραπάνω τροχιάς από το σημείο ισορροπίας εξαρτάται από την εξέλιξη των ποσοτήτων  $\delta x$  και  $\delta y$  στο χρόνο. Αν αντικαταστήσουμε τις σχέσεις (3.36) στο δυναμικό σύστημα (3.25) θα πάρουμε

$$\delta \dot{x} = \delta y, \quad \delta \dot{y} = f(x_0 + \delta x).$$

Αναπτύσσοντας την  $f(x_0 + \delta x)$  σε σειρά Taylor

$$f(x_0 + \delta x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_0} \delta x^2 + O(\delta x^3),$$

και θεωρώντας τα  $\delta x$  μικρές ποσότητες, κρατάμε μόνο τους όρους πρώτης τάξης ως προς  $\delta x$  και παίρνουμε το γραμμικό σύστημα

$$\delta \dot{x} = \delta y, \quad \delta \dot{y} = k \delta x \quad \text{ή} \quad \delta \ddot{x} - k \delta x = 0, \quad k = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \quad (3.37)$$

Η χρονική εξέλιξη των  $\delta x$  και  $\delta y$  δίνεται από την (3.37), στην οποία αντιστοιχούν δύο ποιοτικά διαφορετικές καταστάσεις:

- Για  $k < 0$  το σύστημα (3.37) είναι το σύστημα του *αρμονικού ταλαντωτή* που μελετήσαμε στο παράδειγμα 2.1, και το οποίο μας δίνει περατωμένες φασικές τροχιές (ελλείψεις)

$$\delta y^2 + k\delta x^2 = \text{σταθ.}$$

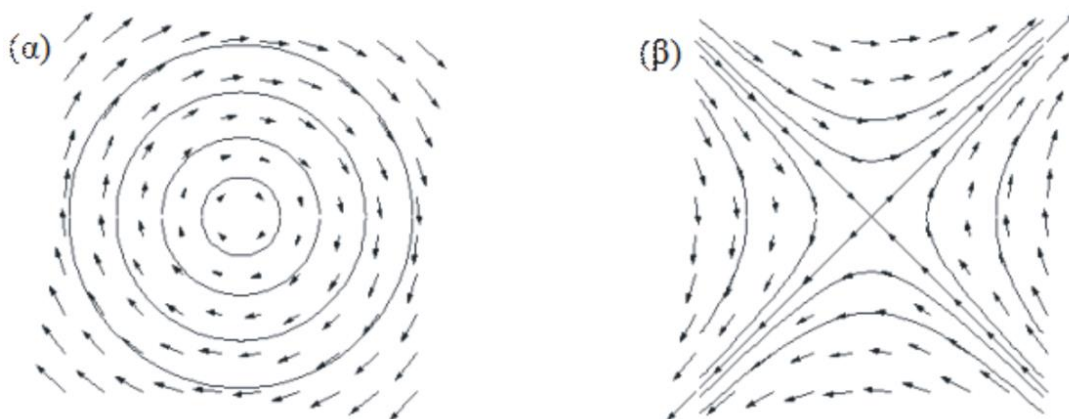
- και το φασικό πορτρέτο έχει τη μορφή που δίνεται στο Σχήμα 3-12(α) (δες, επίσης, Σχήμα 3-3).

- Για  $k > 0$  η (3.37) μας δίνει τις ανοιχτές φασικές τροχιές (υπερβολές)

$$\delta y^2 - k\delta x^2 = \text{σταθ.}$$

και το φασικό πορτρέτο έχει τη μορφή που δίνεται στο Σχήμα 3-12(β) (δες, επίσης, Σχήμα 3-4)

Άρα για  $k = (df/dx)_{x_0} < 0$  οι κινήσεις γύρω από το σημείο ισορροπίας  $x_0$  είναι περατωμένες (δηλαδή τροχιές που ξεκινούν κοντά στο σημείο ισορροπίας παραμένουν κοντά σε αυτό) και το σημείο ισορροπίας χαρακτηρίζεται ως **γραμμικά ευσταθές**. Για  $k > 0$ , γύρω από το σημείο ισορροπίας οι φασικές τροχιές είναι ανοιχτές (δηλαδή τροχιές που ξεκινούν κοντά στο σημείο ισορροπίας φεύγουν μακριά από αυτό με το χρόνο) και το σημείο χαρακτηρίζεται ως **γραμμικά ασταθές**. Θα ονομάζουμε την σταθερά  $k$  **δείκτη ευστάθειας**.



Σχήμα 3-12. Φασικό πορτρέτο για το σύστημα (3.37) α)  $k < 0$  – αρμονικός ταλαντωτής και ευστάθεια β)  $k > 0$  – σύστημα «απωστικών δυνάμεων» και αστάθεια.

Για κάθε σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας ο φασικός χώρος κοντά στα σημεία ισορροπίας του πρέπει να είναι **τοπολογικά όμοιος** με αυτόν των παραπάνω πορτρέτων ανάλογα με το είδος της ευστάθειας, η οποία υπολογίζεται άμεσα από την σχέση (3.37) με τον προσδιορισμό της σταθεράς  $k$ .

Επειδή  $k = -\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_0}$  διαπιστώνουμε ότι τα ευσταθή σημεία ισορροπίας αντιστοιχούν σε ελάχιστα του δυναμικού  $V(x)$ , ενώ τα ασταθή σε μέγιστα.

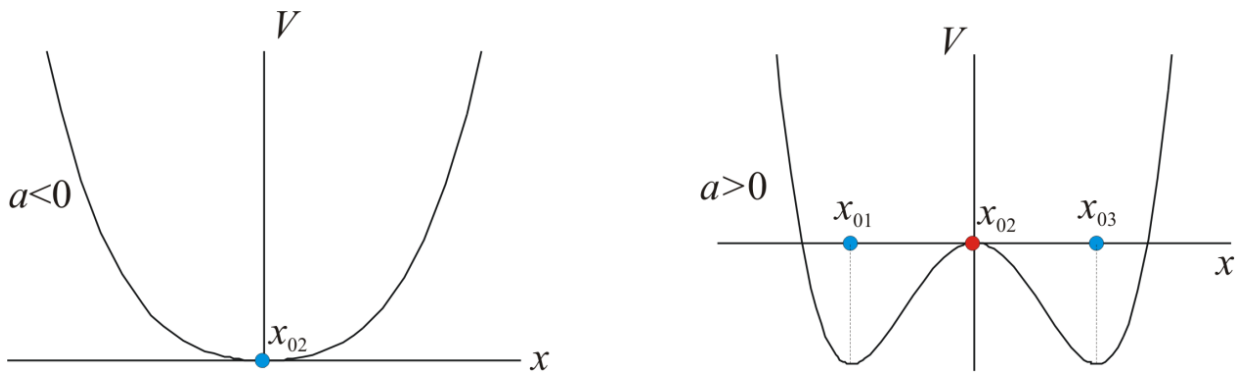
**Σχόλιο.** Αν  $k=0$  τότε έχουμε **κρίσιμη ευστάθεια** σε γραμμική προσέγγιση. Η γενικότερη συμπεριφορά των λύσεων γύρω από το σημείο ισορροπίας καθορίζεται από τους όρους ανώτερης τάξης της σειράς Taylor της  $f(x_0 + \delta x)$  ή μπορεί να δείχτει ποιοτικά (βλ. παράδειγμα 4). Αν η  $f(x)$  είναι μια συνεχής συνάρτηση χωρίς σημεία καμπής, και μας δίνει δύο ή περισσότερα σημεία ισορροπίας, το είδος της ευστάθειας τους θα εναλλάσσεται.

**Παράδειγμα 1 (συνέχεια)** Ο δείκτης ευστάθειας για το σύστημα (3.33) είναι

$$k = a - 3x_0^2$$

Συνεπώς για το σημείο ισορροπίας  $x_0 = 0$  θα είναι  $k = a$ , δηλαδή ευσταθές για  $a < 0$  και ασταθές για  $a > 0$ .

Για τα σημεία ισορροπίας  $x_0 = \pm\sqrt{a}$ ,  $a > 0$ , είναι  $k = -2a < 0$ , δηλαδή τα σημεία είναι ευσταθή.



Σχήμα 3-13. Το δυναμικό του συστήματος (3.33) για  $a < 0$  και  $a > 0$ . Τα σημεία ισορροπίας αντιστοιχούν στα ακρότατα του δυναμικού (τα μπλε σημεία είναι ευσταθή και το κόκκινο ασταθές).

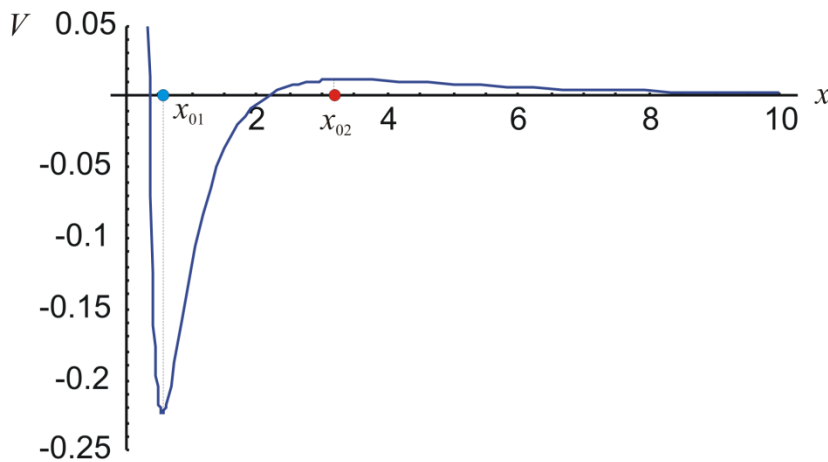
**Παράδειγμα 2. (συνέχεια).** Το δυναμικό του συστήματος (3.34) είναι το  $V = x^4/4 - x^2/2 + x/4$  και ο δείκτης ευστάθειας  $k = 1 - 3x^2$ . Έτσι για τα τρία σημεία ισορροπίας θα είναι

$$x_{01} = -1.10716, \quad k = -2.67741 < 0 \text{ (ευσταθές)}$$

$$x_{02} = 0.269594, \quad k = 0.781957 > 0 \text{ (ασταθές)}$$

$$x_{03} = 0.837565, \quad k = -1.10455 < 0 \text{ (ευσταθές)}$$

**Παράδειγμα 3. (συνέχεια).** Για  $a=b=1, c=1/2$  το δυναμικό Yukawa (3.35) παρουσιάζεται στο Σχήμα 3-14. Παρουσιάζει ένα ελάχιστο το  $x_{01} = 0.561394$  (ευσταθές σημείο ισορροπίας με  $k = -4.02$ ) και ένα μέγιστο  $x_{02} = 3.39692$  (ασταθές σημείο ισορροπίας με  $k = 0.0061$ )



Σχήμα 3-14. Το δυναμικό Yukawa για  $a=b=1, c=1/2$ .

### 3.3.3 Όρια της κίνησης και ταλαντώσεις

Από την σχέση (3.27) προκύπτει ότι πρέπει να πληρείται η σχέση

$$E - V(x) \geq 0 \tag{3.38}$$

Η ανισότητα (3.38) ορίζει τα **όρια της κίνησης**. Για μια δεδομένη τιμή της ενέργειας έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις

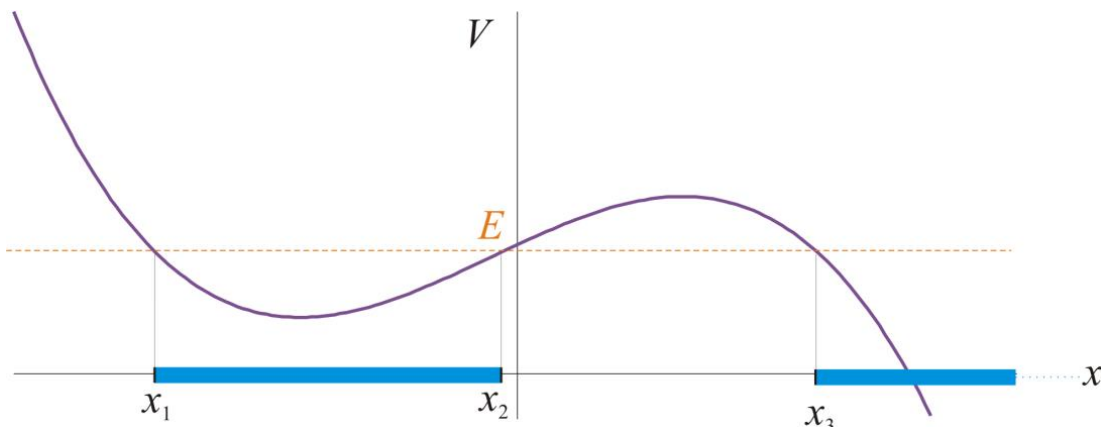
- $x_{min} \leq x \leq x_{max}$  : περατωμένη φασική τροχιά
- $x_{min} \leq x$  ή  $x \leq x_{max}$  ή  $x \in (-\infty, +\infty)$ : ανοιχτή φασική τροχιά

Για το σύστημα (3.25) κάθε φασική τροχιά αντιστοιχεί σε μια τιμή ενέργειας, και κατά συνέπεια για το ίδιο σύστημα κλειστές και ανοιχτές τροχιές μπορούν να συνυπάρχουν. Στα όρια της κίνησης θα είναι

$$E - V(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0,$$



Δηλαδή στα όρια η ταχύτητα μηδενίζεται. Η λύση της ανίσωσης (3.38) μπορεί να εκτιμηθεί γραφικά με την σχεδίαση του δυναμικού και την ευθεία  $V = E$ . Τα διαστήματα του άξονα  $x'Ox$  για τα οποία το δυναμικό βρίσκεται κάτω από την ευθεία  $V = E$  (Σχήμα 3-15) είναι αυτά που ικανοποιούν την ανίσωση.



Σχήμα 3-15. Γραφική εκτίμηση ορίων της κίνησης για ενέργεια  $E$ . Στην ενέργεια αυτή αντιστοιχούν δύο τροχιές μια περατωμένη για  $x \in [x_1, x_2]$  και μια ανοιχτή με  $x \in [x_3, \infty)$ . Τα σημεία  $x_1, x_2$  και  $x_3$  αποτελούν λύσεις της εξίσωσης  $V(x) = E$ .

**Σημείωση.** Αν το δυναμικό παρουσιάζει ένα ολικό ελάχιστο (το οποίο φυσικά θα αντιστοιχεί και σε ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας με ενέργεια  $E_{\min}$  τότε όλες οι τροχιές θα πρέπει να έχουν ενέργεια μεγαλύτερη του  $E_{\min}$ .

Μια περατωμένη φασική τροχιά περνάει από τα σημεία  $(x_{\min}, 0)$  και  $(x_{\max}, 0)$ . Έτσι στο διάστημα  $(x_{\min}, x_{\max})$  έχουμε ένα τμήμα φασικής τροχιάς με  $y \geq 0$  (από το  $x_{\min}$  στο  $x_{\max}$ ) αλλά και, σύμφωνα με την (3.28), το συμμετρικό του με  $y \leq 0$  (από το  $x_{\max}$  στο  $x_{\min}$ ). Αν τα όρια της κίνησης δεν αποτελούν σημεία ισορροπίας, δηλαδή το διανυσματικό πεδίο είναι ομαλό, τα παραπάνω τμήματα δεν μπορούν να τέμνονται εγκάρσια αλλά να ενώνονται ομαλά και να αποτελούν ουσιαστικά την ίδια τροχιά. Άρα μια **περατωμένη** τροχιά για το αυτόνομο διατηρητικό σύστημα (3.25) αντιστοιχεί σε μια **κλειστή** φασική τροχιά. Έχουμε δηλαδή για την χρονική εξέλιξη των δυναμικών μεταβλητών  $x = x(t)$  και  $y = y(t)$  μια **περιοδική ταλάντωση**.

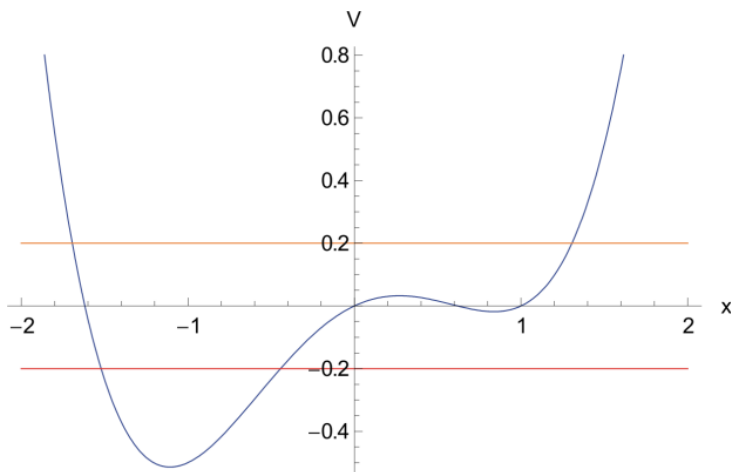
Αν  $T$  είναι η περίοδος μιας περατωμένης τροχιάς ενέργειας  $E$ , τότε η κίνηση από τη θέση  $x_{\min}$  έως τη θέση  $x_{\max}$ , και αντίστροφα, θα διαρκεί χρόνο  $t = T/2$ , οπότε από την σχέση (3.29) προκύπτει η **περίοδος** της ταλάντωσης

$$T = \sqrt{2} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \quad (3.39)$$

Κοντά στα ευσταθή σημεία ισορροπίας  $x = x_0$  η περίοδος μπορεί να προσεγγιστεί από το γραμμικό σύστημα (3.37), δηλαδή

$$T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{-k}}, \quad k = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \quad (3.40)$$

**Παράδειγμα 2. (συνέχεια).** Για το δυναμικό  $V = x^4/4 - x^2/2 + x/4$  το ολικό ελάχιστο παρουσιάζεται στο σημείο ισορροπίας  $x_{01} = -1.10716$ , το οποίο αντιστοιχεί στην τιμή ενέργειας  $E_{\min} = -0.514043$ . Έχουμε λοιπόν επιτρεπτή κίνηση για  $E > E_{\min}$ .



Σχήμα 3-16. Το δυναμικό του παραδείγματος 2. Οι περιοχές μεταξύ των δύο τομών, του δυναμικού και της συγκεκριμένης ενεργειακής τιμής (κόκκινες ευθείες), αποτελεί την επιτρεπτή περιοχή κίνησης.

Προσδιορίζουμε τα όρια της κίνησης από την εξίσωση  $E - V(x) = 0$ . Για  $E > E_{\min}$  η σχεδίαση του δυναμικού (Σχήμα 3-16) μας δείχνει ότι η παραπάνω εξίσωση μας δίνει πάντα δύο λύσεις (εκτός της ειδικής περίπτωσης  $E = V(x_{02}) = 0.0323787$ ) και η ανισότητα (3.38) ισχύει μεταξύ των δύο αυτών λύσεων. Έχουμε λοιπόν πάντα περατωμένες (περιοδικές) κινήσεις με  $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$  και περίοδο που δίνεται από τη σχέση (3.39). Βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \text{Για } E = -0.2 &\rightarrow x_{\min} = -1.52041, \quad x_{\max} = -0.444243, \quad T = 4.54944 \\ \text{Για } E = 0.2 &\rightarrow x_{\min} = -1.69387, \quad x_{\max} = 1.30516, \quad T = 8.73094 \end{aligned}$$

**[M]** Με το Mathematica μπορούμε να επιχειρήσουμε να επιλύσουμε άμεσα την ανίσωση (3.38) με την χρήση της εντολής Reduce, π.χ. για το παραπάνω παράδειγμα με  $E = -0.2$ ,

```
In[] := Reduce[energy-V>=0,x]
Out[] := -1.52041<=x<=-0.444243
```

**Σχόλιο.** Ο υπολογισμός της περιόδου για  $E = 0.2$  με το Mathematica μας δίνει

```
In[] := energy=0.2;
sol=NSolve[V-energy==0,x]
T=2*NIntegrate[(2*(energy-V))^(1/2),{x,x/.sol[[1]],x/.sol[[4]]}]

Out[] = {{x->-1.69387},{x->0.194353-0.56929 I},{x->0.194353+0.56929 I},{x->1.30516}}
Out[] = 8.73094-9.77118*10^-10 I
```

**Σημείωση.** Το πολύ μικρό φανταστικό μέρος ( $-9.77 \cdot 10^{-10} i$ ) προκύπτει λόγω αριθμητικών λαθών κατά την ολοκλήρωση της (3.39). Στα όρια της κίνησης το υπόριζο  $\sqrt{E - V}$  μηδενίζεται. Όμως ένα μικρό λάθος στον αριθμητικό υπολογισμό των  $x_{\min}$  και  $x_{\max}$  μπορεί να δώσει αρνητικές τιμές για το υπόριζο και συνεπώς να προκύψουν μιγαδικές τιμές με πολύ μικρό φανταστικό μέρος. Στο Mathematica μπορούμε να διώξουμε το αριθμητικό σφάλμα με την εντολή Chop, η οποία αντικαθιστά με μηδέν τις πολύ μικρές ποσότητες σε μια παράσταση. Γενικότερα, μπορούμε να αποφύγουμε την έξοδο μιγαδικών τιμών κατά τον υπολογισμό της (3.39) ολοκληρώνοντας στο διάστημα  $[x_{\min} + \delta x, x_{\max} + \delta x]$ . Το  $\delta x$  πρέπει να είναι μια μικρή ποσότητα, της τάξης του λάθους του αριθμητικού προσδιορισμού των  $x_{\min}$  και  $x_{\max}$  και η μικρότερη δυνατή ώστε να εξασφαλίζεται ότι  $E - V(x) > 0$  στο παραπάνω διάστημα.

**[C].** Για τον αριθμητικό υπολογισμό του ολοκληρώματος (3.39) δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η απλή μέθοδος του τραπεζίου ή οι κλασικές μέθοδοι Simpson. Οι μέθοδοι αυτές χρησιμοποιούν τις τιμές της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης στα άκρα του διαστήματος (κλειστοί τύποι) όπου η συνάρτησή μας πάντα απειρίζεται. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μεθόδους ανοιχτού τύπου (Newton-Cotes). Π.χ. έστω η

συνάρτηση  $f=f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ . Θεωρούμε  $N$  διαμερίσεις του διαστήματος  $[a, b]$  με βήμα  $h=(b-a)/N$ . Το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης στο δοθέν διάστημα μπορεί να προσεγγιστεί από τη σχέση

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h \left( \frac{55}{24} f(x_1) - \frac{1}{6} f(x_2) + \frac{11}{8} f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + \dots \right. \\ \left. \dots + f(x_{N-5}) + f(x_{N-4}) + \frac{11}{8} f(x_{N-3}) - \frac{1}{6} f(x_{N-2}) + \frac{55}{24} f(x_{N-1}) \right) \quad (3.41)$$

Όπου  $x_k=x_0+kh$ ,  $x_0=a$ ,  $x_N=b$ .

Η παραπάνω ολοκλήρωση υλοποιείται με την συνάρτηση `IntegrateNC( )` που παρουσιάζεται παρακάτω.

```
double IntegrateNC(double a, double b, int N)
{
    double h = (b - a) / N;
    double x0 = a, sum;
    sum = 55.0*f(x0 + h) / 24 - f(x0 + 2 * h) / 6 + 11.0*f(x0 + 3 * h) / 8;
    for (int k = 4; k <= N - 4; k++) sum += f(x0 + k*h);
    sum += 11.0*f(x0+(N-3)*h)/8 - f(x0+(N-2)*h)/6 + 55.0*f(x0+(N-1)*h)/24;
    return h*sum;
}
```

**Παράδειγμα 3. (συνέχεια).** Θα υπολογίσουμε την περίοδο των ταλαντώσεων στο δυναμικό Yukawa ( $a=b=1$ ,  $c=1/2$ ) για ενέργεια  $E=0$ . Αρχικά βρίσκουμε τα όρια της κίνησης επιλύοντας την εξίσωση

$$E - V(x) = -\frac{1/4}{x^2} + \frac{1}{x} e^{-x} = 0$$

Για την λύση της παραπάνω εξίσωσης εφαρμόζουμε τη μέθοδο Newton-Raphson χρησιμοποιώντας τον κώδικα `codeNR1.c`<sup>6</sup> με συναρτήσεις τις

$$f = -\frac{1}{4x^2} + \frac{e^{-x}}{x}, \quad df = \frac{1}{2x^3} - \frac{e^{-x}}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x}$$

Από το Σχήμα 3-14 παρατηρούμε ότι το δυναμικό έχει μηδενική τιμή στα σημεία  $\tilde{x}_1 \approx 0.4$  και  $\tilde{x}_2 \approx 2.1$ . Τις τιμές αυτές τις χρησιμοποιούμε ως πρώτες προσεγγίσεις των ζητούμενων ριζών. Βρίσκουμε

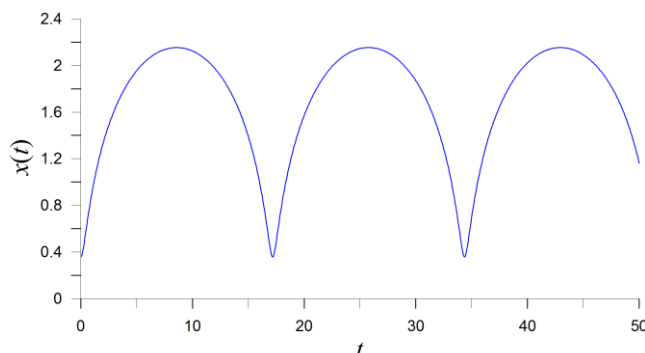
$$x_1 = 0.3574029562, \quad x_2 = 2.1532923641$$

Για τον υπολογισμό της περιόδου υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$T = \sqrt{2} \int_{x_1}^{x_2} \left( -\frac{1/4}{x^2} + \frac{1}{x} e^{-x} \right)^{-1/2} dx$$

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση `IntegrateNC( )` και για διάφορες διαμερίσεις  $N$  βρίσκουμε τα εξής αποτελέσματα

$N$	$T$
100	16.23
1000	16.88
100000	17.15
<code>NIntegrate</code>	<b>17.18</b>



Σχήμα 3-17. Χρονική εξέλιξη της μεταβλητής  $x=x(t)$  για το δυναμικό Yukawa (παράδειγμα 3). Η εξέλιξη έχει περίοδο  $T \approx 17.2$ .

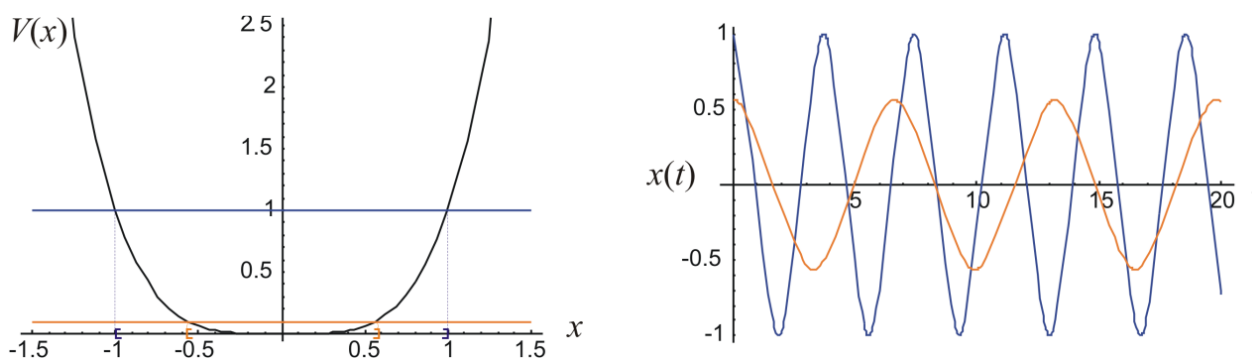
<sup>6</sup> Ο κώδικας `codeNR1.c` είναι διαθέσιμος στην ιστοσελίδα του παρόντος συγγράμματος (κεφάλαιο 2) στον Ελληνικό Συσσωρευτή Ακαδημαϊκών Ηλεκτρονικών Βιβλίων (<http://repfiles.kallipos.gr/file/14092>)

**Σημείωση** Η `NIntegrate` χρησιμοποιεί καταλληλότερες αριθμητικές μεθόδους ώστε να αντιμετωπίζει καλύτερα τις ανωμαλίες στο διάστημα ολοκλήρωσης. Έτσι στον παραπάνω πίνακα η πιο ακριβής τιμή της περιόδου είναι αυτή που μας δίνει η `NIntegrate`.

**Παράδειγμα 4.** Το δυναμικό  $V = x^4$  έχει ένα ελάχιστο (σημείο ισορροπίας) το  $x_{01} = 0$  σε ενέργεια  $E=0$ , η οποία είναι η μικρότερη ενέργεια για να έχουμε τροχιές. Ο δείκτης ευστάθειας έχει τιμή  $k=0$  και συνεπώς έχουμε κρίσιμη γραμμική ευστάθεια. Η ανίσωση  $E - V(x) \geq 0$  ισχύει πάντα μεταξύ δύο ορίων,  $x_1 \leq x \leq x_2$ , όπου  $x_1 = -E^{1/4}$  και  $x_2 = E^{1/4}$ . Συνεπώς οι τροχιές είναι περιοδικές και μια τροχιά που ξεκινάει κοντά στο σημείο ισορροπίας παραμένει για πάντα κοντά σε αυτό. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι το σημείο ισορροπίας  $x_{01} = 0$  είναι ευσταθές. Αν αναπτύξουμε την αντίστοιχη συνάρτηση δύναμης  $f = -4x^3$  γύρω από το μηδέν παίρνουμε την ίδια την συνάρτηση  $f$  και συνεπώς η εξίσωση της κίνησης κοντά ή μακριά από το  $x_{01} = 0$  θα δίνεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\ddot{x} = -4x^3$$

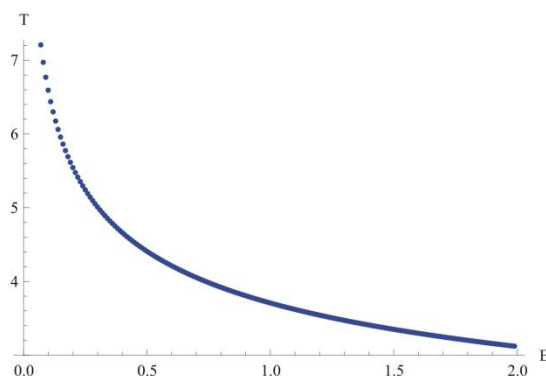
με λύσεις που εκφράζονται με ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi.



Σχήμα 3-18. Το δυναμικό  $V=x^4$  και οι στάθμες ενέργειας  $E=0.1$  και  $E=1$ . Δεξιά παρουσιάζονται οι ταλαντώσεις που αντιστοιχούν στις δύο στάθμες ενέργειας (περίοδοι 6.59413 και 3.70815, αντίστοιχα).

**Σχόλιο.** Η σχέση *Ενέργειας – Περίοδος* σε ένα μη-γραμμικό δυναμικό μπορεί να εκτιμηθεί υπολογιστικά αν βρούμε την περίοδο  $T$  για ένα σύνολο τιμών ενέργειας στο διάστημα  $[E_{\min}, E_{\max}]$  και με βήμα  $\Delta E$ . Για την κάθε ενέργεια εντοπίζουμε τα όρια της κίνησης χρησιμοποιώντας ως αρχικές εκτιμήσεις τα όρια που βρέθηκαν στην προηγούμενη τιμή ενέργειας. Φυσικά θα πρέπει να εκτιμήσουμε μια προσέγγιση για τα όρια στο πρώτο βήμα του αλγορίθμου με ενέργεια  $E_{\min}$ . Επίσης για τον υπολογισμό της περιόδου ολοκληρώνουμε στο διάστημα  $[x_1+\delta x, x_2+\delta x]$ , για να αποφύγουμε μινιαδικά αποτελέσματα με μικρό φανταστικό μέρος (βλ. τις παρατηρήσεις που έγιναν παραπάνω). Μια εφαρμογή του αλγορίθμου σε `Mathematica` για το δυναμικό  $V=x^4$  παρουσιάζεται στο κώδικα που δίνεται στο σχήμα που ακολουθεί

```
V = x^4;
Emin = 0.01; Emax = 2; DE = 0.01;
Energy = Emin;
x1 = -0.01; x2 = 0.01; dx = 10^-8;
data = {};
While[Energy < Emax,
  x1 = x /. FindRoot[Energy - V == 0, {x, x1}]; x1 += dx;
  x2 = x /. FindRoot[Energy - V == 0, {x, x2}]; x2 -= dx;
  T = Sqrt[2] NIntegrate[(Energy - V)^(-1/2), {x, x1, x2}] // N // Chop;
  AppendTo[data, {Energy, T}];
  Energy += DE;
]
p1 = ListPlot[data, AxesLabel -> {"E", "T"}, PlotStyle -> Blue]
```



Σχήμα 3-19. Η περίοδος ως συνάρτηση της ενέργειας για το δυναμικό  $V=x^4$ . (κώδικας `Mathematica` και αποτέλεσμα).

**Σημείωση.** Φυσικά στο συγκεκριμένο δυναμικό τα όρια της κίνησης είναι γνωστά ως συνάρτηση της ενέργειας και δεν απαιτείται ο αριθμητικός τους υπολογισμός. Μάλιστα το ολοκλήρωμα (3.39) μπορεί να υπολογιστεί και αυτό αναλυτικά με την χρήση της ειδικής συνάρτησης  $\Gamma(x)$ .

$$T = \frac{2\sqrt{2\pi} \Gamma(\frac{5}{4})}{E^{1/4} \Gamma(\frac{3}{4})}$$

### 3.3.4 Φασικά διαγράμματα

Η δυναμική του συστήματος (3.25) χαρακτηρίζεται από τροχιές με διαφορετικά ποιοτικά χαρακτηριστικά. Ένα φασικό διάγραμμα θεωρείται πλήρες εφόσον περιέχει μια τουλάχιστον τροχιά για κάθε περίπτωση που χαρακτηρίζεται ποιοτικά από διαφορετική εξέλιξη. Αυτό επιτυγχάνεται με σωστή επιλογή ενός συνόλου τιμών ενέργειας για τις τροχιές

$$\mathbf{E}_n = \{E_1, E_2, \dots, E_n\},$$

η οποία μπορεί να στηριχθεί στους παρακάτω κανόνες

1. Υπολογίζουμε τα σημεία ισορροπίας, την ευστάθειά τους καθώς και την τιμή της ενέργειας (δυναμικού) στο οποίο αντιστοιχούν. Κοντά στα ευσταθή σημεία ισορροπίας θα έχουμε κλειστές φασικές καμπύλες όπως σε έναν αρμονικό ταλαντωτή (βλ. Σχήμα 3-3(β)). Κοντά στα ασταθή σημεία ισορροπίας θα έχουμε μια εικόνα όπως αυτήν του υπερβολικού συστήματος (βλ. Σχήμα 3-4(β)). Οι ασύμπτωτες θα παρουσιάζονται τώρα εν γένει καμπυλωμένες αλλά θα εφάπτονται στο σημείο ισορροπίας στις ασύμπτωτες ευθείες του γραμμικού συστήματος (δες §4.4).
2. Στην ενέργεια  $E_o$  των ευσταθών σημείων ισορροπίας προσθέτουμε μια μικρή τιμή  $\delta E > 0$  διότι στην τιμή  $E_o$  δεν αντιστοιχεί φασική τροχιά αλλά ένα μόνο σημείο. Στην τιμή  $E_o + \delta E$  θα πρέπει να αντιστοιχεί μια έλλειψη γύρω και πολύ κοντά στο σημείο ισορροπίας. Στην ενέργεια  $E_x$  του ασταθούς σημείου ισορροπίας αντιστοιχούν οι ασύμπτωτες.
3. Στο σύνολο  $\mathbf{E}_n$  συμπεριλαμβάνουμε τουλάχιστον από μια τιμή ενέργειας μεταξύ αυτών των σημείων ισορροπίας.
4. Δεν υπάρχει περιορισμός στο πόσο μεγάλη θα είναι η τιμή της ενέργειας. Όσο αυξάνει η τιμή της τόσο αυξάνονται οι ταχύτητες  $y$  στη φασική τροχιά. Μπορούμε να επιλέξουμε μια μόνο τιμή ενέργειας πάνω από το υψηλότερο τοπικό μέγιστο του δυναμικού. Όλες οι άλλες τροχιές με μεγαλύτερες ενέργειες είναι ποιοτικά ισοδύναμες. Αν το δυναμικό παρουσιάζει ολικό ελάχιστο θα πρέπει να θεωρήσουμε ενέργειες  $E > V_{\min}$ . Αν δεν υπάρχει ολικό ελάχιστο τότε επιλέγουμε μια τιμή ενέργειας χαμηλότερη από αυτήν του χαμηλότερου τοπικού ελάχιστου. Για μικρότερες ενέργειες θα πάρουμε ποιοτικά ισοδύναμες τροχιές.

Η φασική καμπύλη που αντιστοιχεί στην ενέργεια  $E_x$  ενός ασταθούς σημείου ισορροπίας, ονομάζεται και **διαχωριστική καμπύλη** (separatrix), η οποία διαχωρίζει το επίπεδο  $xy$  του χώρου φάσεων σε περιοχές όπου οι τροχιές έχουν διαφορετικά ποιοτικά χαρακτηριστικά. Η διαχωριστική καμπύλη αποτελεί την σπονδυλική στήλη του διαγράμματος φάσεων.

Η σχεδίαση των φασικών καμπύλων μπορεί να γίνει για κάθε τιμή ενέργειας  $E_i \in \mathbf{E}_n$  αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (3.28). Είναι βέβαια πιο εύχρηστο να σχεδιάσουμε άμεσα τις ισοενεργειακές καμπύλες

$$\frac{1}{2}y^2 + V(x) = E_i$$

χρησιμοποιώντας την ContourPlot του Mathematica όπως την περιγράψαμε στην §3.1.3. Επίσης, η σχεδίαση και του διανυσματικού πεδίου συμπληρώνει το φασικό διάγραμμα δείχνοντας την φορά ροής των φασικών καμπύλων.

**Παράδειγμα 5.** Ένα μοντέλο που περιγράφει τις ιδιο-ταλαντώσεις του τυμπάνου του αυτιού περιγράφεται από την εξίσωση

$$\ddot{x} = -x - ax^2 \tag{3.42}$$

Η εξίσωση (3.42) περιγράφει σωστά το φυσικό σύστημα μόνο στην περιοχή γύρω από το  $x=0$ . Όμως στη συνέχεια θα μελετήσουμε τη δυναμική του σε όλο το διάστημα τιμών του  $x$ .

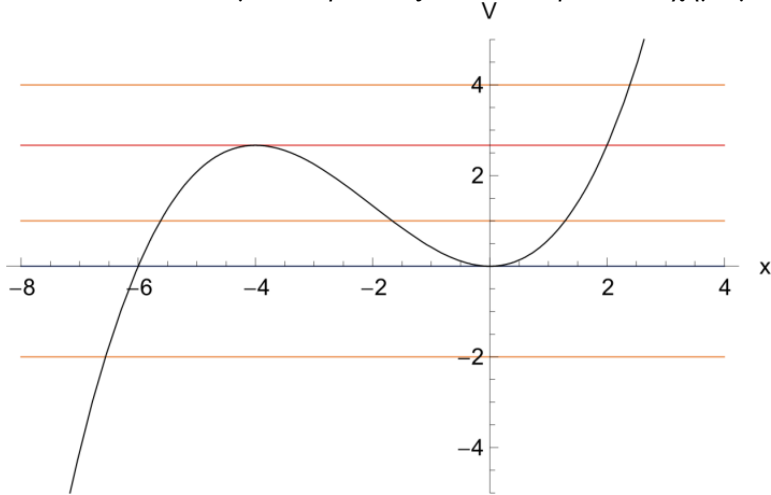
Το δυναμικό του συστήματος είναι το

$$V = \frac{x^2}{2} + a \frac{x^3}{3} \quad (3.43)$$

και τα σημεία ισοροπίας τα

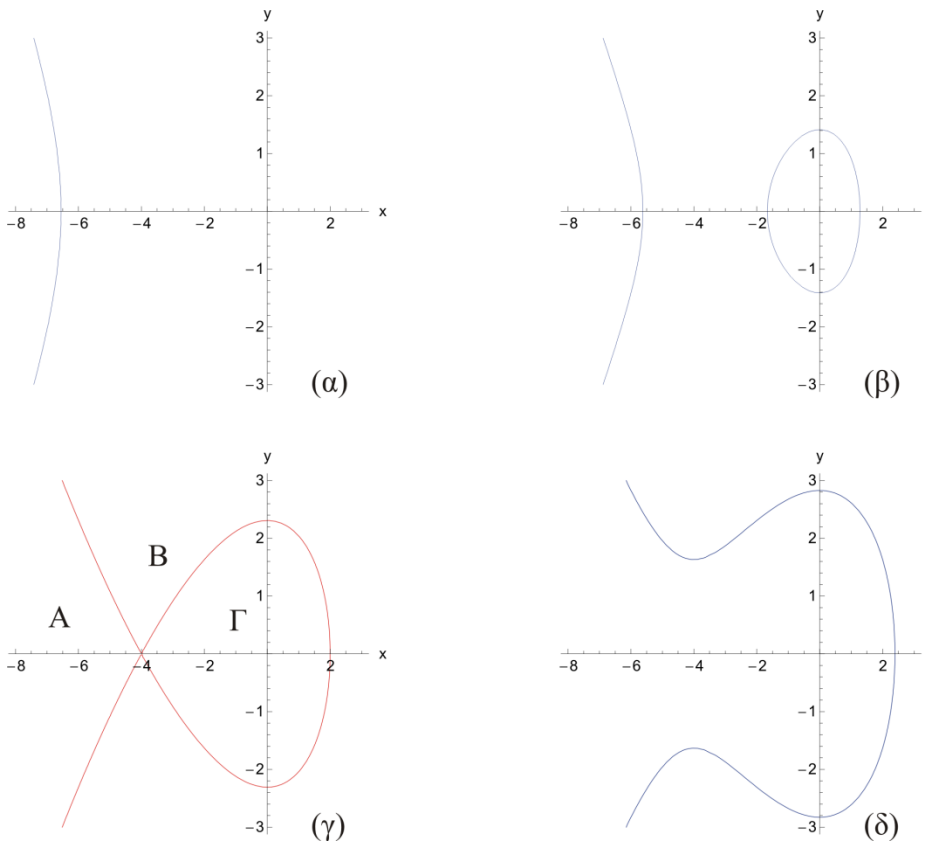
$$x_{01} = -\frac{1}{\alpha} \quad (k=1, \text{ ασταθες}) \quad , \quad x_{02} = 0 \quad (k=-1, \text{ ευσταθες})$$

Για  $a=1/4$  το δυναμικό παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα μαζί με κάποια ενδεικτικά επίπεδα ενέργειας.



Σχήμα 3-20. Δυναμικό και ισοενεργειακές στάθμες για το δυναμικό του παραδείγματος 5.

Το ευσταθές σημείο ισοροπίας (τοπικό ελάχιστο) έχει ενέργεια  $E_o=0$  και το ασταθές  $E_x=8/3$  (τοπικό μέγιστο). Οι τιμές ενέργειας που περιλαμβάνονται στο παραπάνω σχήμα αντιστοιχούν σε διαφορετικές ποιοτικά τροχιές (διαφορετικά όρια κίνησης) όπως παρουσιάζονται στο Σχήμα 3-21.



Σχήμα 3-21. Φασικές τροχιές για το σύστημα του παραδείγματος 5 για ενέργειες α)  $E=-2$ , β)  $E=1$ , γ)  $E=8/3$  δ)  $E=4$  (δες κείμενο).

(α)  $E=-2$ . Για  $E<0$  έχουμε ανοιχτές φασικές καμπύλες, οι οποίες μοιάζουν με υπερβολές, στα αριστερά του διαγράμματος ( $x \leq x_{\max} < 0$ ).

(β)  $E=1$ . Για ενέργειες  $E_0 < E < E_x$  αντιστοιχούν δύο φασικές καμπύλες : Υπερβολές στα αριστερά, όπως στην περίπτωση (α) και κλειστές φασικές τροχιές με  $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ , διάστημα που οριοθετείται μέσα στην κοιλάδα του δυναμικού. Στην περίπτωση αυτή, οι αρχικές συνθήκες  $(x_0, y_0)$  υποδεικνύουν την φασική καμπύλη κατά την οποία θα εξελιχθεί το σύστημα.

(γ)  $E=E_x$ . Στην τιμή αυτή αντιστοιχεί η διαχωριστική καμπύλη, η οποία σχηματίζει ένα βρόγχο δεξιά του ασταθούς σημείου ισορροπίας. Είναι  $x < x_s$ , όπου  $x_s > 0$ , το σημείο στο οποίο η καμπύλη τέμνει τον άξονα  $Ox$ . Παρατηρούμε ότι η διαχωριστική καμπύλη χωρίζει το επίπεδο  $Oxy$  σε τρεις διαφορετικές περιοχές Α, Β και Γ.

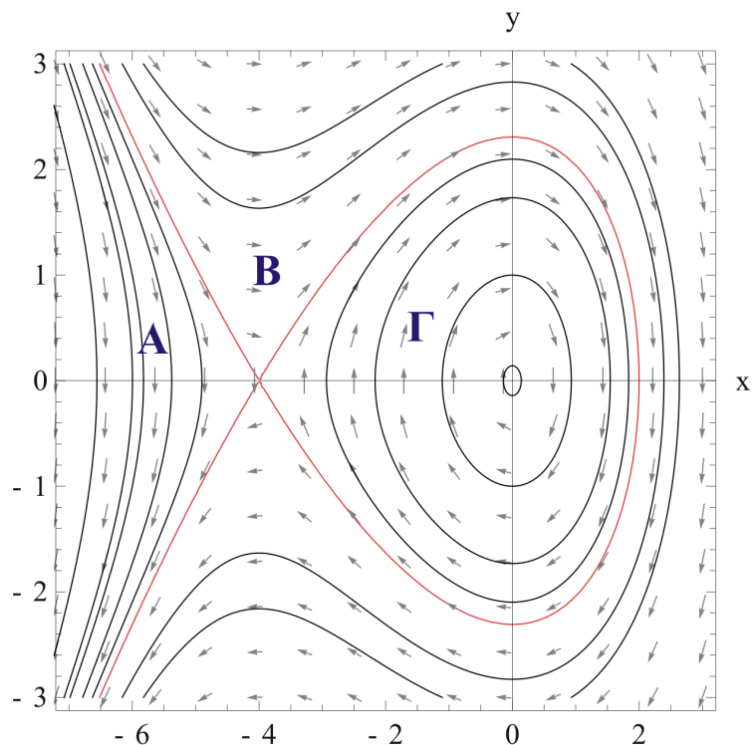
(δ)  $E=4$ . Και πάλι έχουμε ανοιχτές φασικές τροχιές που περιορίζονται από τα δεξιά ( $x \leq x_{\max}$ ) όπου τώρα  $x_{\max} > x_s > 0$ .

**Σημείωση.** Για τη σχεδίαση μιας συγκεκριμένης φασικής καμπύλης  $y^2/2 + V(x) = E_i$  ή πολλών, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την εντολή `ContourPlot` του `Mathematica` (δες §2.1.2).

Χρησιμοποιώντας το σύνολο ενεργειακών σταθμών

$$E_n = \{-2, 0.01, 0.5, 1.5, 2.2, 2.66, 4, 5\}$$

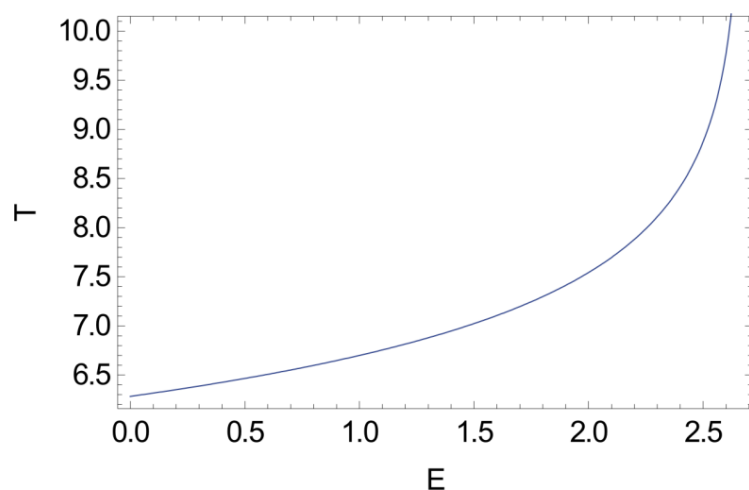
παίρνουμε το παρακάτω φασικό διάγραμμα μαζί με το διανυσματικό πεδίο του συστήματος.



Σχήμα 3-22. Το φασικό διάγραμμα του συστήματος (3.42) με  $a=1/4$ .

Στην περιοχή Α όλες οι τροχιές είναι ανοιχτές και πάντα είναι  $x < x_{01}$ . Ανοιχτές είναι και οι τροχιές της περιοχής Β αλλά φτάνουν μέχρι μια τιμή  $x_{\max} > x_{02}$ . Η περιοχή Γ αποτελείται από κλειστές φασικές καμπύλες. Για αρχικές συνθήκες  $(x_0, y_0) \in \Gamma$  η εξέλιξη θα είναι περατωμένη και περιοδική. Υπολογίζουμε την περίοδο των τροχιών στην περιοχή Γ ως συνάρτηση της ενέργειας στο διάστημα  $E \in (0, E_x)$ . Υπολογιστικά ακολουθούμε την τεχνική που περιγράψαμε στο παράδειγμα 4, δηλαδή διαμερίζουμε το διάστημα ενεργειών σε  $N$  τιμές και για κάθε τιμή της ενέργειας υπολογίζουμε την περίοδο από τον τύπο (3.39). Η μεταβολή της

περιόδου με την ενέργεια παρουσιάζεται στο Σχήμα 3-23. Παρατηρούμε ότι για την ενέργεια  $E=0$  του ευσταθούς σημείου ισορροπίας είναι  $T=2\pi$ , όπως προκύπτει και από τη γραμμική προσέγγιση (3.40). Επίσης η περίοδος αυξάνεται και απειρίζεται για ενέργεια ίση με αυτήν της διαχωριστικής καμπύλης, όπου η τροχιά γίνεται ασυμπτωτική.



Σχήμα 3-23. Η μεταβολή της περιόδου ως προς την ενέργεια για τις περιοδικές τροχιές του συστήματος του ακουστικού τυμπάνου (παράδειγμα 5).

**Παράδειγμα 6.** Για το δυναμικό Lenard-Jones (δες παράδειγμα 2, §3.3.1)

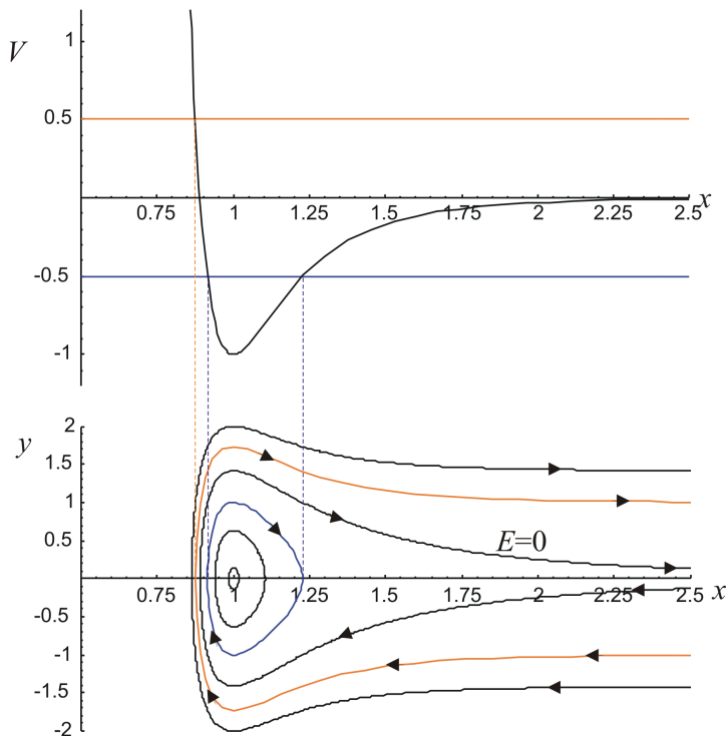
$$V = \frac{1}{x^{12}} - \frac{2}{x^6}, \quad x > 0$$

έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} V(x) = \infty$  και  $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = 0$ .

Υπάρχει ένα ελάχιστο, δηλαδή ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας στο  $x=1$  και το οποίο έχει ενέργεια  $E_0=-1$ . Η τιμή αυτή αποτελεί και το ολικό ελάχιστο του δυναμικού και συνεπώς έχουμε τροχιές για  $E > -1$ . Από την γραφική παράσταση του δυναμικού διακρίνουμε δύο ποιοτικά διαφορετικές περιπτώσεις

- $-1 < E < 0$ . Η ανίσωση (3.38) ισχύει σε ένα περατωμένο διάστημα  $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ , όπου  $\lim_{E \rightarrow 0^-} x_{\max} = \infty$ , και συνεπώς οι τροχιές θα είναι περιοδικές και θα αντιστοιχούν σε κλειστές φασικές καμπύλες.
- $E > 0$ . Η ανίσωση (3.38) ισχύει στο διάστημα  $x_{\min} \leq x < \infty$  και συνεπώς οι φασικές τροχιές είναι ανοιχτές από τα δεξιά.





Σχήμα 3-24. Το δυναμικό Lenard-Jones και το φασικό του διάγραμμα.

## Ασκήσεις

**Άσκηση 3.3.1.** Βρείτε το δυναμικό, τα σημεία ισορροπίας και την ευστάθειά τους και σχεδιάστε το φασικό διάγραμμα για τα συστήματα

$$(i) \quad \ddot{x} = x - x^3 \quad (ii) \quad \ddot{x} = x^3 - x \quad (iii) \quad \ddot{x} = x^4 - x^2 \quad (iv) \quad \ddot{x} = \frac{x^4}{3} - \frac{x}{2}$$

**Άσκηση 3.3.2.** Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και την ευστάθεια για το σύστημα

$$\ddot{x} = x^3 - ax, \quad a \in \mathbb{R}$$

Σχεδιάστε το φασικό διάγραμμα για  $a = -1$  και  $a = 1$ .

**Άσκηση 3.3.3.** Για τον ταλαντωτή (δυναμικό σε αλυσίδα Fermi-Pasta-Ulam)

$$V = \frac{a}{b} e^{-bx} + ax, \quad a, b > 0$$

βρείτε το σημείο ισορροπίας, δείξτε ότι είναι ευσταθές και βρείτε την περίοδο των ταλαντώσεων κοντά σε αυτό.

**Άσκηση 3.3.4.** Για το σύστημα  $\ddot{x} = \frac{1}{x^2} - 2$ ,  $x > 0$  βρείτε τα όρια της κίνησης και δείξτε ότι όλες οι τροχιές είναι περατωμένες. Ποια είναι η μικρότερη τιμή ενέργειας για την οποία έχουμε τροχιές. Βρείτε την περίοδο των ταλαντώσεων για  $E = 10$ .

**Άσκηση 3.3.5.** Για το σύστημα  $\ddot{x} = \frac{x^4}{3} - \frac{x}{2}$  υπολογίστε τα όρια της κίνησης για ενέργεια  $E = 1/2$ . Για αυτήν την τιμή ενέργειας και για την αρχική θέση  $x(0) = 1$  βρείτε την ελάχιστη ταχύτητα για την οποία οι τροχιές δεν είναι περατωμένες

**Άσκηση 3.3.6.** Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και την ευστάθειά τους για το σύστημα  $\ddot{x} = 1 - \ln(x^2)$  Σχεδιάστε τη διαχωριστική καμπύλη και υπολογίστε σε ποιο σημείο τέμνει τον άξονα  $Ox$ .

**Άσκηση 3.3.7.** Για το σύστημα  $\ddot{x} = x^3 - x^2 - 2x$

α) Εντοπίστε και σχεδιάστε τις διαχωριστικές καμπύλες του συστήματος. β) Εντοπίστε τον αριθμό των περιοχών στο χώρο φάσεων με διαφορετικά χαρακτηριστικά κίνησης γ) Υπολογίστε το διάστημα ενεργειών  $E_1 < E < E_2$  για το οποίο έχουμε περατωμένες τροχιές.

**Άσκηση 3.3.8.** Για το σύστημα  $\ddot{x} = -\arctan(x)$  σχεδιάστε το δυναμικό και υπολογίστε αριθμητικά την περίοδο των τροχιών ως συνάρτηση της ενέργειας.

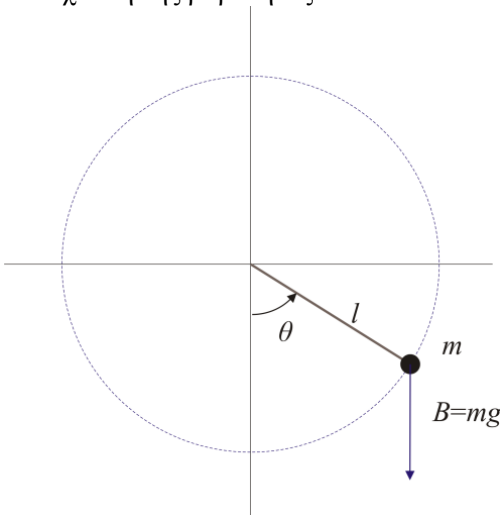
**Άσκηση 3.3.9.** Για το σκληρό ελατήριο  $\ddot{x} = -(1+a^2x^2)x$  βρείτε αναλυτικά την περίοδο των μικρών ταλαντώσεων και υπολογίστε αριθμητικά την περίοδο των ταλαντώσεων ως συνάρτηση του πλάτους της ταλάντωσης (θέστε  $a=1$ ).

### 3.4 Το απλό εκκρεμές

Το μαθηματικό εκκρεμές ή απλά εκκρεμές ([pendulum](#)) αναφέρεται στο σύστημα με διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (3.44)$$

όπου  $\theta$  εκφράζει γωνία ( $\theta \equiv \text{mod } 2\pi$ ) και  $\omega_0$  σταθερή παράμετρος. Το σύστημα (3.44) συνδέεται συνήθως με την περιγραφή του απλού εκκρεμούς για το οποίο  $\omega_0^2 = g/l$ , όπου  $l$  το φυσικό μήκος του εκκρεμούς και  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας.



Σχήμα 3-25. Το απλό εκκρεμές.

Το σύστημα έχει αναλυτική λύση  $\theta = \theta(t)$  η οποία όμως δεν δίνεται με συνήθεις συναρτήσεις (δες §3.1.1). Θα μελετήσουμε την (3.44) με βάση την αναλυτική λύση παρακάτω αφού πρώτα προβούμε σε μια ποιοτική μελέτη της δυναμικής του.

#### 3.4.1 Σημεία ισορροπίας - φασικό διάγραμμα

Το σύστημα το απλού εκκρεμούς που αποτελείται από ένα σώμα μάζας  $m$  και μια αβαρή ράβδο μήκους  $l$  είναι ένα μηχανικό σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας με γενικευμένη συντεταγμένη την γωνία  $\theta$  και με δυναμική και κινητική ενέργεια:

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2, \quad V = mgz = -mgl \cos \theta \quad (3.45)$$

Έτσι θα έχουμε την συνάρτηση Lagrange  $L = T - V$  από την οποία προκύπτει άμεσα η διαφορική εξίσωση (3.44) καθώς και το ολοκλήρωμα της ενέργειας

$$E = T + V = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta$$

ή, σε κατάλληλες μονάδες,

$$E = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \omega_0^2 \cos \theta \quad (3.46)$$

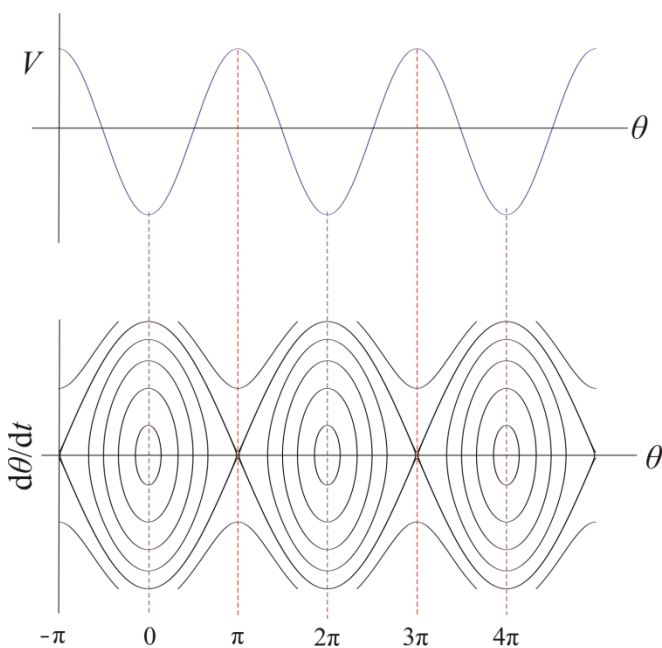
Τα σημεία ισορροπίας προκύπτουν από την εξίσωση  $\sin \theta = 0$  (μηδενισμός συνισταμένης δύναμης ή ακρότατο δυναμικού) δηλαδή  $\theta_{0k} = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Η δεύτερη παράγωγος του δυναμικού είναι

$$V'' = d^2V/d\theta^2 \Big|_{\theta_0} = \omega_0^2 \cos \theta \text{ οπότε και έχουμε}$$

$$\theta_{00} = 0, \quad \theta_{02} = 2\pi, \quad \theta_{04} = 4\pi, \quad \dots \quad V'' = \omega_0^2 > 0 \quad \text{ευστάθεια}$$

$$\theta_{01} = \pi, \quad \theta_{03} = 3\pi, \quad \theta_{05} = 5\pi, \quad \dots \quad V'' = -\omega_0^2 < 0 \quad \text{αστάθεια}$$

Το δυναμικό καθώς και το φασικό διάγραμμα του συστήματος παρουσιάζονται στο Σχήμα 3-26.

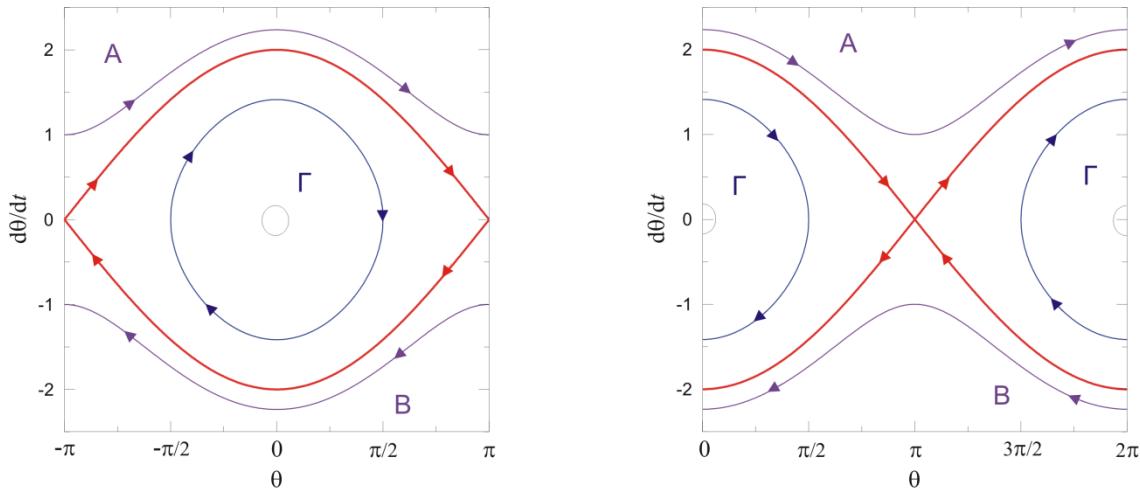


Σχήμα 3-26. Το δυναμικό και το φασικό διάγραμμα του απλού εκκρεμούς.

Παρατηρούμε ότι η διαφορική εξίσωση (3.44) παραμένει αναλλοίωτη κάτω από την παράλληλη μετατόπιση

$$\theta \rightarrow \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

και άρα το σύστημα μπορεί να μελετηθεί στο διάστημα  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  ή  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Το φασικό διάγραμμα, λοιπόν, και η δυναμική του συστήματος συνοψίζονται στο Σχήμα 3-27 για τα δύο παραπάνω διαστήματα.



Σχήμα 3-27. Το φασικό διάγραμμα του εκκρεμούς είτε για  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  ή για  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Στο Σχήμα 3-27 διακρίνουμε τρεις περιοχές για το φασικό διάγραμμα, οι οποίες αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικούς τύπους κινήσεων (περιοχές A,B και Γ) . Οι περιοχές αυτές οριοθετούνται από την διαχωριστική φασική καμπύλη (*separatrix*), η οποία διέρχεται από το ασταθές σημείο ισορροπίας  $\theta = \pi$  (ή  $\theta = -\pi$ , ισοδύναμα) και αποτελείται από τις ευσταθείς και ασταθείς ασύμπτωτες καμπύλες (ή, αλλιώς ασύμπτωτες πολλαπλότητες). Η τιμή ενέργειας  $E_S$  στην οποία αντιστοιχεί η διαχωριστική φασική καμπύλη είναι αυτή του ασταθούς σημείου ισορροπίας  $(\theta_{01}, \dot{\theta}_{01}) = (\pi, 0)$ . Έτσι από την (3.46) παίρνουμε

$$E_S = -\omega_0^2 \cos \pi = \omega_0^2 \quad (3.47)$$

Οι τροχιές που αντιστοιχούν σε ενέργεια  $E < E_S$  (περιοχή Γ) βρίσκονται εντός της διαχωριστικής καμπύλης, περιβάλλουν το ευσταθές σημείο ισορροπίας και αντιστοιχούν σε περιοδικές ταλαντώσεις με  $\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$ . Μια τέτοια είδους κίνηση ονομάζεται **λίκνιση** (*libration*) για την οποία έχουμε

$$\theta_{\max} = -\theta_{\min} = \arccos\left(-\frac{E}{\omega_0^2}\right), \quad E < E_S. \quad (3.48)$$

Το εύρος των ταλαντώσεων είναι

$$\Delta\theta = \theta_{\max} - \theta_{\min} = 2\arccos\left(-E/\omega_0^2\right) \quad (3.49)$$

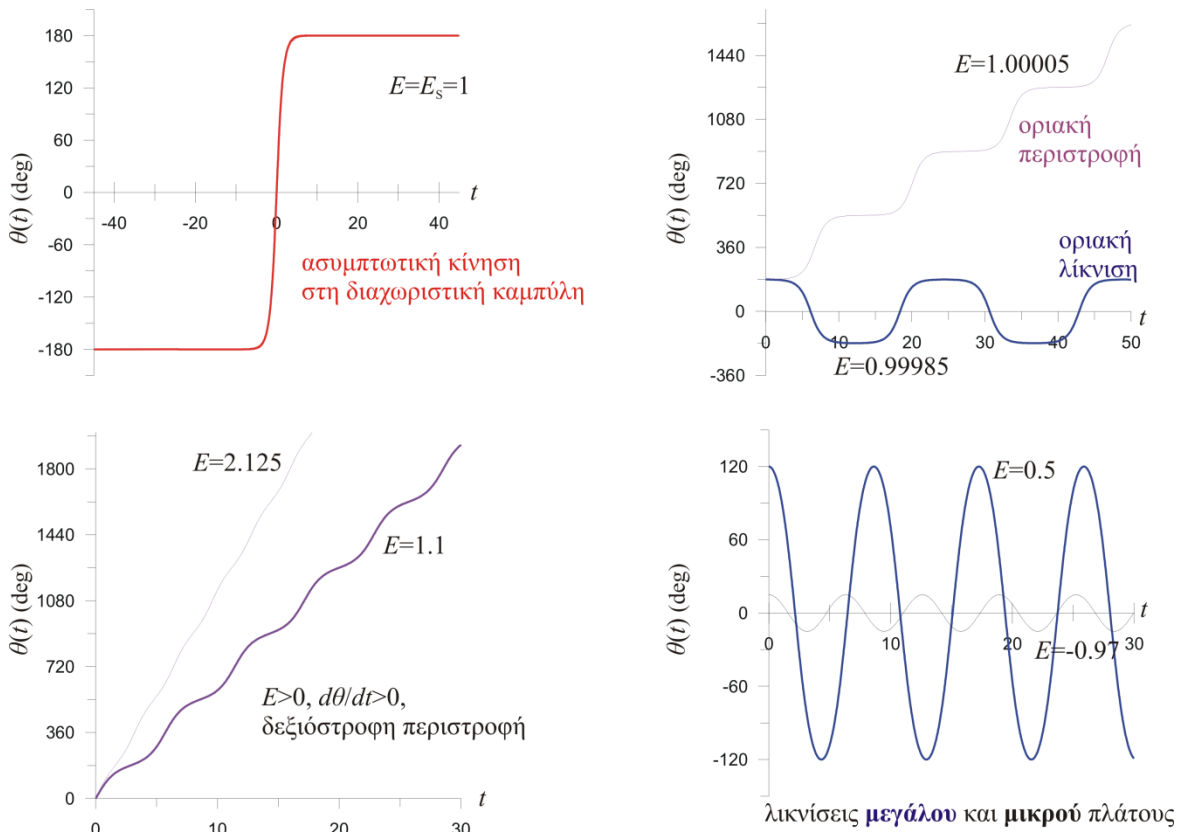
Επίσης η μέγιστη διαφορά στην κυκλική ταχύτητα (για την ίδια ενέργεια) είναι αυτή που σημειώνεται πάνω στη διαχωριστική καμπύλη  $\Delta\dot{\theta}_S = 2\dot{\theta}_{\max}$ , δηλαδή

$$E_S = \frac{1}{2}\dot{\theta}_{\max}^2 - \omega_0^2 \cos 0 = \omega_0^2 \Rightarrow \dot{\theta}_{\max} = 2\omega_0 \Rightarrow \Delta\dot{\theta}_S = 4\omega_0 \quad (3.50)$$

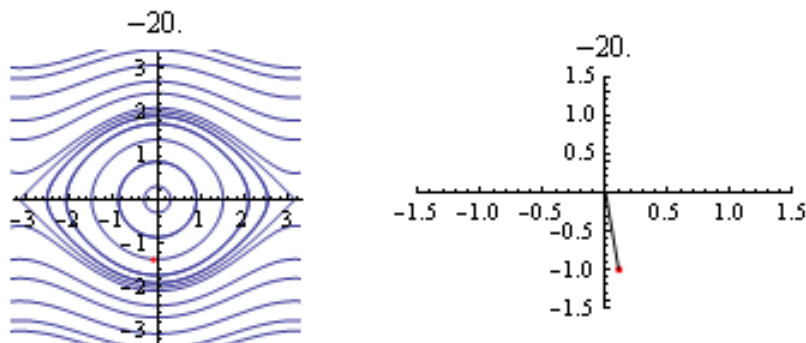
Για ενέργεια  $E > E_S$  η γωνία  $\theta$  αυξάνει συνεχώς κατά απόλυτη τιμή και η κίνηση ονομάζεται **περιστροφή** (*rotation*) σε αντιστοιχία με την περιστροφική κίνηση του απλού εκκρεμούς. Στην περιοχή A είναι  $\dot{\theta} > 0$  (αριστερόστροφη περιστροφή) και στην B είναι  $\dot{\theta} < 0$  (δεξιόστροφη περιστροφή).

Για  $E = E_S$  έχουμε την κίνηση που αντιστοιχεί στην διαχωριστική καμπύλη και η οποία είναι ασυμπτωτική από και προς το ασταθές σημείο ισορροπίας, δηλαδή

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \theta(t) = \pm\pi \quad (\text{για } \dot{\theta} > 0) \quad \text{ή} \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \theta(t) = \mp\pi \quad (\text{για } \dot{\theta} < 0).$$

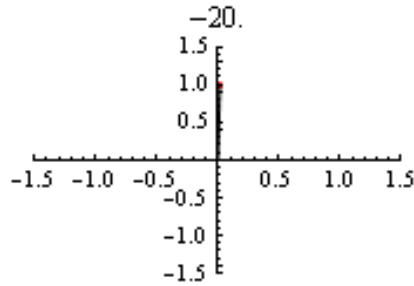
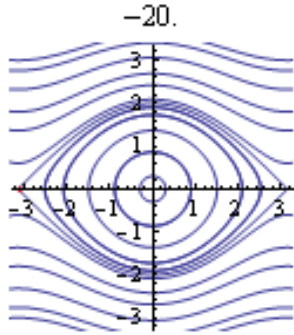


Σχήμα 3-28. Η χρονική εξέλιξη της γωνίας του εκκρεμούς για διάφορες τιμές ενέργειας.

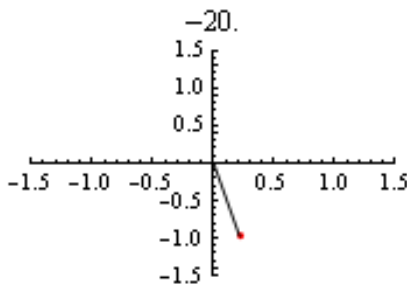
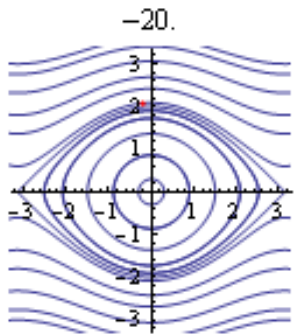


Κινούμενη εικόνα 3-1<sup>7</sup>. Λίκνιση του εκκρεμούς.

<sup>7</sup> Η κινούμενη εικόνα `Pendulum_Libration.gif` είναι διαθέσιμη στην ιστοσελίδα του παρόντος συγγράμματος/κεφαλαίου στον Ελληνικό Συσσωρευτή Ακαδημαϊκών Ηλεκτρονικών Βιβλίων (<http://repfiles.kallipos.gr/file/20423>)



Κινούμενη εικόνα 3-2<sup>8</sup>. Σχεδόν ασυμπτωτική κίνηση του εκκρεμούς (πολύ κοντά στη διαχωριστική καμπύλη).



Κινούμενη εικόνα 3-3<sup>9</sup>. Περιστροφή του εκκρεμούς.

Από το ολοκλήρωμα της ενέργειας (3.46) έχουμε ότι το χρονικό διάστημα για μια μετατόπιση από την  $\theta_1$  στη  $\theta_2$  θα είναι

$$\Delta t|_{\theta_1 \rightarrow \theta_2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{2(E + \omega_0^2 \cos \theta)}} \quad (3.51)$$

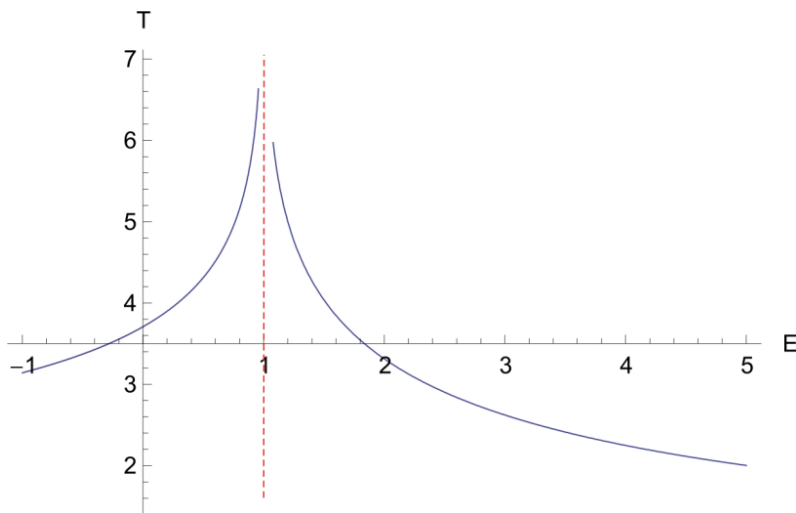
Η περίοδος  $T$  των λικνίσεων προκύπτει για  $E < E_S$  και για  $\theta_1 = \theta_{\min}$ ,  $\theta_2 = \theta_{\max}$ . Λόγω της συμμετρίας των λικνίσεων θα έχουμε

$$T = 4 \int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(E + \omega_0^2 \cos \theta)}} \quad (3.52)$$

Η περίοδος της περιστροφής προκύπτει από την (3.51) για  $E > E_S$  και  $\theta_1 = -\pi$ ,  $\theta_2 = \pi$ . Φυσικά για  $E = E_S$  έχουμε ασυμπτωτική κίνηση από ή προς το σταθεές σημείο ισορροπίας και η περίοδος απειρίζεται.

<sup>8</sup> Η κινούμενη εικόνα Pendulum\_Separatrix.gif είναι διαθέσιμη στην ιστοσελίδα του παρόντος συγγράμματος/κεφαλαίου στον Ελληνικό Συσσωρευτή Ακαδημαϊκών Ηλεκτρονικών Βιβλίων (<http://repfiles.kallipos.gr/file/20425>)

<sup>9</sup> Η κινούμενη εικόνα Pendulum\_Rotation.gif είναι διαθέσιμη στην ιστοσελίδα του παρόντος συγγράμματος/κεφαλαίου στον Ελληνικό Συσσωρευτή Ακαδημαϊκών Ηλεκτρονικών Βιβλίων (<http://repfiles.kallipos.gr/file/20424>)



Σχήμα 3-29. Η περίοδος  $T$  των λικνίσεων ( $E < 1$ ) και των περιστροφών ( $E > 1$ ) για  $\omega_0 = 1$ .

### 3.4.2 Σειρά Taylor και προσεγγίσεις

Την κίνηση του συστήματος σε ένα μικρό διάστημα γύρω από κάποια γωνία  $\theta = \theta_0$ , μπορούμε να τη μελετήσουμε αναπτύσσοντας το δεύτερο μέλος της διαφορικής εξίσωσης (3.44) σε σειρά Taylor και διατηρώντας έναν πεπερασμένο αριθμό όρων μέχρι κάποιας τάξης. Έχουμε

$$\sin \theta = \sin \theta_0 + (\theta - \theta_0) \cos \theta_0 - \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^2 \sin \theta_0 - \frac{1}{6}(\theta - \theta_0)^3 \cos \theta_0 + O((\theta - \theta_0)^4) \quad (3.53)$$

Κοντά στο ευσταθές σημείο ισορροπίας  $\theta_0 = 0$  έχουμε μικρές ταλαντώσεις με  $\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$ , όπου τα όρια δίνονται από τη σχέση (3.48). Αν θεωρήσουμε για αυτές τις ταλαντώσεις σημαντικό μόνο τον όρο 1<sup>ης</sup> τάξης ως προς το  $\Delta\theta = \theta - \theta_0$  η διαφορική εξίσωση (3.44) γίνεται ο αρμονικός ταλαντωτής

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0. \quad (3.54)$$

με δυναμικό

$$V_0 = \frac{1}{2} \omega_0^2 \theta^2 \quad (3.55)$$

Γύρω λοιπόν από το  $\theta = 0$  θα έχουμε σχεδόν αρμονικές ταλαντώσεις με περίοδο

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (3.56)$$

Παρόμοια για το ασταθές σημείο ισορροπίας  $\theta = \theta_0 = \pi$  βρίσκουμε την εξίσωση

$$\ddot{\theta} - \omega_0^2 \theta = 0 \quad (3.57)$$

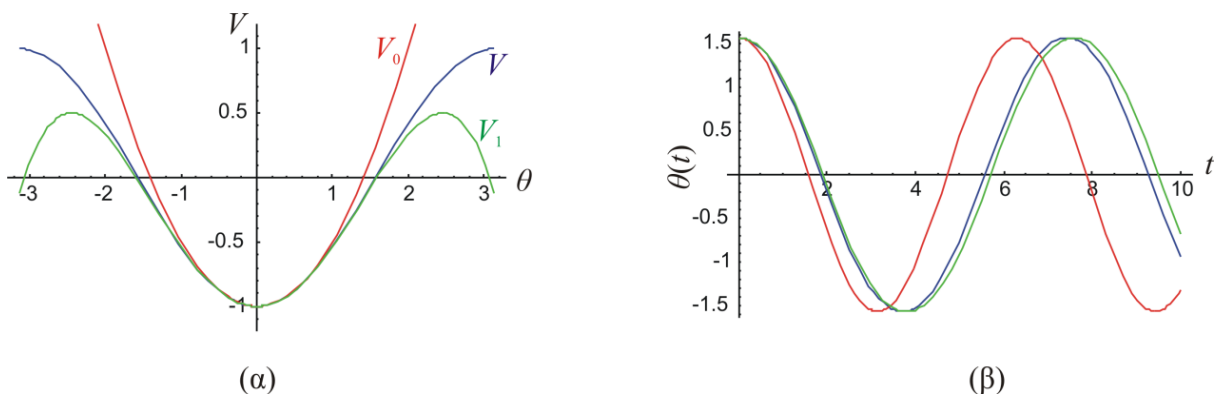
που αποτελεί το υπερβολικό (απωστικό) σύστημα (3.15). Στην περίπτωση όμως αυτή η γραμμική προσέγγιση ισχύει μόνο για  $t < t_0$  αφού όλες της οι τροχιές είναι ανοιχτές και το  $\Delta\theta = \theta - \theta_0$  δεν είναι πλέον μικρό.

Θεωρώντας την περιοχή των λικνίσεων γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας  $\theta_0 = 0$  και κρατώντας στη σειρά (3.53) και τους μη γραμμικούς όρους 3<sup>ης</sup> τάξης παίρνουμε το προσεγγιστικό σύστημα

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta - \frac{\omega_0^2}{6} \theta^3 = 0. \quad (3.58)$$

Το παραπάνω δεν λύνεται με γνωστές συναρτήσεις. Στην (3.58) αντιστοιχεί το δυναμικό

$$V_1 = \frac{1}{2} \omega_0^2 \theta^2 - \frac{1}{24} \omega_0^2 \theta^4 \quad (3.59)$$



Σχήμα 3-30. (α) Το δυναμικό  $V$  του εκκρεμούς και οι προσεγγίσεις του (β) Η ταλάντωση που προκύπτει για τα τρία δυναμικά με αρχικές συνθήκες  $\theta(0)=\pi$ ,  $d\theta/dt(0)=0$ .

Μια προσεγγιστική λύση για το  $\theta(t)$  προκύπτει όπως περιγράψουμε στη συνέχεια. Αναπτύσσουμε τη λύση  $\theta(t)$ , με αρχικές συνθήκες  $\theta(0)=\theta_0$  και  $\dot{\theta}(0)=p_0$ , σε σειρά γύρω από το  $(\theta_0, p_0)$  μέχρι όρους 3<sup>ης</sup> τάξης

$$\theta(t) = \theta_0 + p_0 t + \frac{\ddot{\theta}(0)}{2} t^2 + \frac{\theta^{(3)}(0)}{6} t^3 + O(t^4) \quad (3.60)$$

Αντικαθιστώντας την λύση (3.60) στην εξίσωση (3.58) παίρνουμε

$$\ddot{\theta}(0) + \omega_0^2 \theta_0 - \frac{\omega_0^2}{6} \theta_0^3 + \left( \omega_0^2 p_0 - \frac{\omega_0^2}{2} p_0 \theta_0^2 + \theta_0^{(3)} \right) t + O(t^2) = 0 \quad (3.61)$$

Για να ισχύει η παραπάνω σχέση για κάθε  $t$  θα πρέπει

$$\ddot{\theta}(0) + \omega_0^2 \theta_0 - \frac{\omega_0^2}{6} \theta_0^3 = 0 \quad \text{και} \quad \omega_0^2 p_0 - \frac{\omega_0^2}{2} p_0 \theta_0^2 + \theta_0^{(3)} = 0$$

δηλαδή

$$\ddot{\theta}(0) = \frac{\omega_0^2 \theta_0}{6} (\theta_0^2 - 6) \quad \text{και} \quad \theta_0^{(3)} = \frac{\omega_0^2 p_0}{2} (\theta_0^2 - 2) \quad (3.62)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.62) στην (3.60) παίρνουμε την προσεγγιστική λύση για τις αρχικές συνθήκες  $\theta(0)=\theta_0$  και  $\dot{\theta}(0)=p_0$

$$\theta(t) = \theta_0 + p_0 t + \frac{\omega_0^2 \theta_0}{12} (\theta_0^2 - 6) t^2 + \frac{\omega_0^2 p_0}{12} (\theta_0^2 - 2) t^3 + O(t^4) \quad (3.63)$$

Είναι προφανές ότι η λύση (3.63) είναι έγκυρη μόνο για ένα μικρό χρονικό διάστημα  $t < 1$  (αρκετά μικρότερο της περιόδου) και δεν μας δίνει πληροφορίες για την ταλάντωση του εκκρεμούς.

**Σχόλιο.** Μπορούμε να εφαρμόσουμε την λύση (3.63) (και την παράγωγό της) για ένα μικρό βήμα  $\delta t$ . Το αποτέλεσμα που προκύπτει το χρησιμοποιούμε ως αρχική συνθήκη για να εκτελέσουμε ένα επόμενο βήμα  $\delta t$ . Μια τέτοια μέθοδος ολοκλήρωσης του συστήματος είναι γνωστή ως *ολοκλήρωση διαφορικών εξισώσεων με σειρές Taylor*. Η (3.63) έχει αναπτυχθεί μέχρι όρους 4<sup>ης</sup> τάξης και δίνει ένα λάθος  $O(\delta t^4)$ . Θα μπορούσε όμως να έχουμε ανάπτυγμα Taylor με μεγαλύτερα αναπτύγματα και να πάρουμε πολύ ακριβείς αριθμητικές λύσεις

### 3.4.3 Η Αναλυτική λύση του εκκρεμούς

Έστω ταλαντώσεις με πλάτος  $\theta_{\max}$  και αρχική συνθήκη  $\theta(0) = 0$ , οπότε θα έχουμε

$$\theta(0) = \theta_{\max}, \quad \dot{\theta}(0) = 0 \quad (3.64)$$

με ενέργεια  $E = -\omega_0^2 \cos \theta_{\max}$ . Από το ολοκλήρωμα της ενέργειας βρίσκουμε

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2 \cos \theta + E = 2\omega_0^2 (\cos \theta - \cos \theta_{\max})$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση  $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2(\theta/2)$  παίρνουμε

$$\dot{\theta}^2 = 4\omega_0^2 \left( \sin^2 \left( \frac{\theta_{\max}}{2} \right) - \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \quad (3.65)$$



Θέτουμε

$$k = \sin\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right) \quad (3.66)$$

και χρησιμοποιούμε τη νέα μεταβλητή  $\varphi$ , που ορίζεται από την σχέση

$$k \sin \varphi = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (3.67)$$

Σημειώνουμε ότι  $-1 \leq \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_{\max}/2)} \leq 1$  και συνεπώς ο μετασχηματισμός (3.67) είναι έγκυρος. Επίσης είναι

$$\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \sqrt{k^2 - k^2 \sin^2 \varphi} = k \cos \varphi$$

και η (3.65) γράφεται

$$\dot{\theta} = 2\omega_0 k \cos \varphi \quad (3.68)$$

Παραγωγίζοντας την (3.67) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = k \cos \varphi d\varphi &\Rightarrow d\theta = \frac{2k \cos \varphi}{\cos(\theta/2)} d\varphi = \frac{2k \cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta/2)}} d\varphi \Rightarrow \\ d\theta = \frac{2k \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi &\quad (3.69) \end{aligned}$$

Η (3.68) γίνεται  $\dot{\varphi}^2 = \omega_0^2 (1 - k^2 \sin^2 \varphi) \Rightarrow \omega_0(t - t_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$ .

Για  $t_0=0$  έχουμε  $\theta=0$  οπότε και  $\varphi_0=0$ . Έτσι τελικά παίρνουμε

$$\omega_0 t = u, \quad (3.70)$$

Όπου

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3.71)$$

Η συνάρτηση  $u = F(\varphi, k)$  ονομάζεται *ελλειπτικό ολοκλήρωμα 1<sup>ου</sup> είδους* ή [ελλειπτική συνάρτηση του Jacobi](#). Το όρισμα  $k$  ονομάζεται modulo του  $u$  και το  $\varphi$  *πλάτος* της  $u$ .

Το ολοκλήρωμα (3.71) μπορεί να προσδιοριστεί με την χρήση της συγκλίνουσας σειράς

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \dots \quad (x = k \sin \varphi)$$

και με τη χρήση των σχέσεων

$$\int_0^{\varphi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2}(\varphi - \cos \varphi \sin \varphi), \quad \int_0^{\varphi} \sin^4 \varphi d\varphi = \frac{1}{32}(12\varphi - 8\sin 2\varphi + \sin 4\varphi), \quad \text{κλπ}$$

Αντιστρέφοντας την (3.70) παίρνουμε

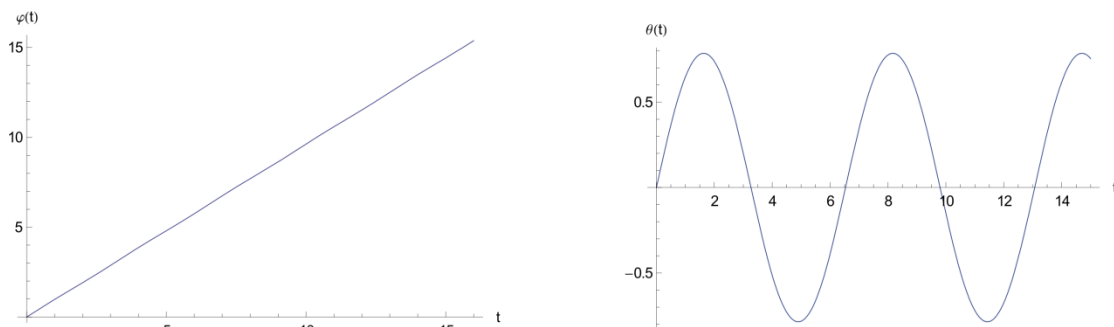
$$\varphi = am(\omega_0 t, k) \quad (3.72)$$

και από την (3.67) έχουμε την λύση των λικνίσεων του εκκρεμούς

$$\theta(t) = 2 \arcsin(k \sin \varphi), \quad (3.73)$$

όπου

$$k = \sin\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right), \quad \theta(0) = \theta_{\max}, \quad \dot{\theta}(0) = 0$$



Σχήμα 3-31. Η χρονική εξέλιξη της βοηθητικής μεταβλητής  $\varphi(t)$  και της γωνίας  $\theta(t)$  του εκκρεμούς όπως προκύπτουν από τις (3.72) και (3.73), αντίστοιχα, με  $\theta_{\max}=\pi/4$ .

**Σημείωση.** Οι ελλειπτικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις, ελλειπτικό ημίτονο και ελλειπτικό συνημίτονο ορίζονται αντίστοιχα ως εξής

$$\operatorname{sn}(u,k)=\sin(\varphi), \operatorname{cn}(u,k)=\cos(\varphi), \text{ όπου } \varphi = am(u,k)$$

Η κίνηση του εκκρεμούς από την γωνία  $\theta=0$  μέχρι την  $\theta=\theta_{\max}$  (ή το αντίστροφο) γίνεται σε χρόνο  $t=T/4$  όπου  $T$  η περίοδος της ταλάντωσης. Από την (3.67) έχουμε την αντιστοιχία

$$\theta=0 \leftrightarrow \varphi=0, \quad \theta=\theta_{\max} \leftrightarrow \varphi=\pi/2,$$

και από την (3.70) προκύπτει

$$T = \frac{4}{\omega_0} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \frac{4}{\omega_0} K(k), \quad (3.74)$$

όπου η συνάρτηση  $K(k)=F(\pi/2,k)$  ονομάζεται *πλήρης* (complete) *ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους* και υπολογίζεται με τη βοήθεια της σχέσης

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \varphi d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n=1,2,\dots$$

**[M]** Η Mathematica δίνει τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.44) ως εξής

```
In[1]:= sol=DSolve[\theta''[t]+\omega_0^2 Sin[\theta[t]]==0,\theta,t]
```

During evaluation of In[1]:= Solve::ifun: Inverse functions are being used by Solve, so . . .

```
Out[2]= {{\theta->Function[{t},\pm 2 JacobiAmplitude[1/2 Sqrt[(2 \omega_0^2+C[1]) (t+C[2])^2], (4 \omega_0^2)/(2 \omega_0^2+C[1])]]}}
```

Η συνάρτηση [JacobiAmplitude](#) είναι το πλάτος της συνάρτησης Jacobi που ορίσαμε παραπάνω. Η αναλυτική λύση των λικνίσεων (3.73) περιλαμβάνεται στην παραπάνω λύση. Η DSolve δεν μπορεί να λύσει το πρόβλημα αρχικών τιμών  $\theta(0)=\theta_{\max}$ ,  $\dot{\theta}(0)=0$ . Το πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα  $K(k)$  (βλ. σχέση (3.74)) ορίζεται στο Mathematica ως `EllipticK[k]`.

## Ασκήσεις

**Άσκηση 3.4.1.** Για το απλό εκκρεμές (3.44) με  $\omega_0=1/2$ , υπολογίστε την ενέργεια της διαχωριστικής καμπύλης και βρείτε ποιες από τις παρακάτω αρχικές συνθήκες αντιστοιχούν σε λίκνιση και ποιες σε περιστροφή

- (i)  $\theta(0)=\frac{3\pi}{2}, \dot{\theta}(0)=\frac{1}{2}$       (ii)  $\theta(0)=\frac{3\pi}{2}, \dot{\theta}(0)=\frac{3}{4}$   
 (iii)  $\theta(0)=\frac{4\pi}{3}, \dot{\theta}(0)=\frac{1}{4}$       (iv)  $\theta(0)=\frac{4\pi}{3}, \dot{\theta}(0)=\frac{1}{2}$

Βρείτε αριθμητικά τις λύσεις (με την `NDSolve` ή τον κώδικα `RK4` με βήμα  $\Delta t=0.01$ ) και σχεδιάστε την χρονική εξέλιξη της  $\theta=\theta(t)$ ,  $0 \leq t \leq 20$ .

**Άσκηση 3.4.2.** Υπολογίστε την περίοδο της ταλάντωσης του εκκρεμούς ( $\omega_0 = 1$ ) για αρχικές συνθήκες  $\theta_0 = \pi/2$ ,  $\dot{\theta}_0 = 0$  καθώς και την περίοδο της περιστροφής του για  $\theta_0 = 0$  και αρχική γωνιακή ταχύτητα  $\dot{\theta}_0 = 5/2$ . Κάντε τον υπολογισμό α) υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα (3.52) αριθμητικά β) χρησιμοποιώντας την αναλυτική σχέση (3.74).

**Άσκηση 3.4.3.** Σχεδιάστε την χρονική εξέλιξη της  $\theta = \theta(t)$  του εκκρεμούς ( $\omega_0 = 1$ ) για αρχικές συνθήκες  $\theta_0 = \pi/2$ ,  $\dot{\theta}_0 = 0$  χρησιμοποιώντας α) την αναλυτική λύση (3.73) και β) την αριθμητική λύση με τον κώδικα `RK4` και για βήματα ολοκλήρωσης  $\Delta t=0.01$  και  $0.001$ . Λόγω των αριθμητικών σφαλμάτων, το πλάτος  $a$  (δηλαδή το  $\theta_{\max}$ ) και η περίοδος  $T$  της ταλάντωσης αλλάζουν. Βρείτε το σφάλμα  $\Delta a$  και  $\Delta T$  στο πλάτος και στην περίοδο αντίστοιχα μετά από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα ολοκλήρωσης (π.χ.  $t \geq 1000$ ).

**Άσκηση 3.4.4.** Δείξτε ότι η λύση του απλού εκκρεμούς (3.44) για την διαχωριστική καμπύλη δίνεται από τη σχέση

$$\theta = 4 \arctan \left[ e^{\pm \omega_0 t} \tan \left( \frac{\theta_0 + \pi}{4} \right) \right] - \pi, \quad \theta_0 = \theta(0)$$

**Άσκηση 3.4.5.** Ένα καλό τεστ για την ακρίβεια των αριθμητικών ολοκληρωτών είναι η λύση που προκύπτει όταν οι αρχικές συνθήκες αναφέρονται σε ένα ασταθές σημείο ισορροπίας. Θεωρήστε την εξίσωση του απλού εκκρεμούς με  $\omega_0 = 1$  και αρχικές συνθήκες  $\theta(0) = 0$  και  $\dot{\theta}(0) = 2$ , οι οποίες αντιστοιχούν στην διαχωριστική καμπύλη. Μια σωστή αριθμητική λύση θα πρέπει να προσεγγίζει το ασταθές σημείο ισορροπίας  $(\pi, 0)$  για πολύ χρόνο (χωρίς το υλικό σημείο να επιστρέφει κάνοντας ταλάντωση και ούτε να το ξεπερνάει κάνοντας περιστροφή, δες π.χ. τις οριακές περιπτώσεις του σχήματος 17). Δοκιμάστε τόσο την `NDSolve` του `Mathematica` (για διάφορες παραμέτρους ακρίβειας και διαφορετικές μεθόδους ολοκλήρωσης) καθώς και τον κώδικα `RK4` για διάφορα βήματα  $\Delta t$ . Πόσος είναι ο μεγαλύτερος χρόνος προσέγγισης της αστάθειας που επιτύχατε; Με ποια μέθοδο και σε πόσο χρόνο CPU (sec);

**Άσκηση 3.4.6.** Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και την ευστάθεια για το σύστημα

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{l} \sin \theta (a \cos \theta - 1), \quad a > 0$$

Σχεδιάστε το φασικό διάγραμμα για  $a < 1$  και  $a > 1$ .

## 3.5 Απωλεστικά συστήματα

Στην παράγραφο αυτή θεωρούμε συστήματα που περιγράφονται από εξίσωση

$$\ddot{x} = f(x) - b\dot{x}, \quad b > 0, \quad (3.75)$$

όπου  $b$  είναι η **σταθερά απόσβεσης**, ή ισοδύναμα  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = f(x) - by$ . Διαπιστώνουμε εύκολα ότι η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου του συστήματος είναι

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = -b < 0$$

και άρα το (3.75) είναι ένα σύστημα με απώλειες για κάθε συνάρτηση  $f(x)$ . Σύμφωνα, λοιπόν, με την §1.4, το εμβαδόν, μιας περιοχής του χώρου φάσεων,  $D \in E^2$ , θα απεικονίζεται, σε κάθε βήμα  $\Delta t$ , σε μια περιοχή  $D'$  μικρότερου εμβαδού, εμβαδόν το οποίο θα μηδενιστεί καθώς  $t \rightarrow +\infty$ .

**Σημείωση.** Συστήματα στα οποία η παράμετρος  $b$  δεν είναι σταθερά αλλά συνάρτηση της δυναμικής μεταβλητής  $x$ ,  $b=b(x)$ , ονομάζονται συστήματα Liénard, και μερικά στοιχεία της δυναμικής τους θα παρουσιάσουμε στο κεφάλαιο §5.3.3.

### 3.5.1 Σημεία ισορροπίας και γραμμική προσέγγιση

Τα σημεία ισορροπίας της (3.75), συμπίπτουν με τα σημεία ισορροπίας του διατηρητικού συστήματος  $\dot{x} = f(x)$ , δηλαδή είναι τα σημεία  $(x_0, 0)$  για τα οποία

$$f(x_0) = 0$$

Γραμμικοποιώντας την (3.75) γύρω από το  $(x_0, 0)$ , σύμφωνα με τη μέθοδο διαταραχών που περιγράψαμε στην §3.3.2, θα πάρουμε την εξίσωση

$$\ddot{x} = kx - b\dot{x}, \quad k = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \quad (3.76)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

- $k < 0$ . Θέτοντας  $k = -\omega^2$  παίρνουμε την εξίσωση (3.19) του αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση. Για μεγάλη απόσβεση ( $b > 2\omega$ ) έχουμε την λύση της μορφής (3.20) και οι φασικές καμπύλες παρουσιάζουν την τοπολογία του κόμβου του σχήματος 7α. Για μικρή απόσβεση ( $b < 2\omega$ ) έχουμε την λύση της μορφής (3.21) και οι φασικές καμπύλες παρουσιάζουν την τοπολογία της εστίας του σχήματος 7β.
- $k > 0$ . Η λύση είναι της μορφής

$$x = c_1 e^{a_- t} + c_2 e^{a_+ t} \quad (3.77)$$

όπου  $a_- = -b - \sqrt{b^2 + 4k} < 0$  και  $a_+ = -b + \sqrt{b^2 + 4k} > 0$ . Η (3.77) είναι ποιοτικά όμοια με τη λύση (3.16) του υπερβολικού συστήματος και οι φασικές καμπύλες παρουσιάζουν την τοπολογία του σάγματος του σχήματος 3β.

Σύμφωνα με το [θεώρημα Hartman-Grobman](#), το οποίο θα αναφέρουμε στο επόμενο κεφάλαιο και τις συνθήκες του οποίου ικανοποιεί το σύστημα (3.75) για  $b \neq 0$  και  $k \neq 0$ , το γραμμικό σύστημα περιγράφει ποιοτικά την συμπεριφορά του μη γραμμικού συστήματος κοντά στα σημεία ισορροπίας.

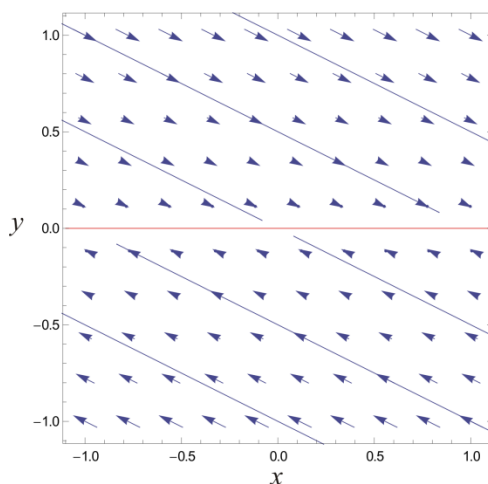
**Σχόλιο.** Στην ιδιάζουσα περίπτωση όπου  $k=0$ , το γραμμικό σύστημα παίρνει τη μορφή  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -by$  με λύση για αρχικές συνθήκες για  $x(0)=x_0$  και  $y(0)=y_0$  την

$$x = x_0 + \frac{y_0}{b}(1 - e^{-bt}), \quad y = y_0 e^{-bt} \quad (3.78)$$

Η δυναμική μεταβλητή  $y$  τείνει ασυμπτωτικά στο 0 ενώ η  $x$  στο  $x_0 + y_0/b$ . Απαλείφοντας το χρόνο  $t$ , παίρνουμε ως φασικές τροχιές τις ευθείες

$$x + \frac{y}{b} = \text{σταθ.}, \quad (3.79)$$

οι οποίες αντιστοιχούν σε δύο διακριτές τροχιές, μία για  $y > 0$  και μία για  $y < 0$ .



Σχήμα 3-32. Ο φασικός χώρος για το ιδιάζων σύστημα  $dx/dt=y$ ,  $dy/dt=-by$ .

### 3.5.2 Δυναμική εξέλιξη στο χώρο φάσεων

Οι φασικές καμπύλες του συστήματος (3.75) ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση (3.7), η οποία γράφεται

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y} - b \quad (3.80)$$

Για την παραπάνω διαφορική, οι τεχνικές επίλυσής της είναι περιορισμένες και μπορούν να εφαρμοστούν για συγκεκριμένες συναρτήσεις δύναμης, π.χ.  $f(x) = ax + \beta$ .

Ας θεωρήσουμε το δυναμικό που αντιστοιχεί στο σύστημα για  $b=0$ ,  $V(x) = -\int f(x)dx$ , και την ενέργειά του  $E = y^2/2 + V(x)$ . Για  $b \neq 0$  η ενέργεια  $E$  δεν διατηρείται, μάλιστα έχουμε

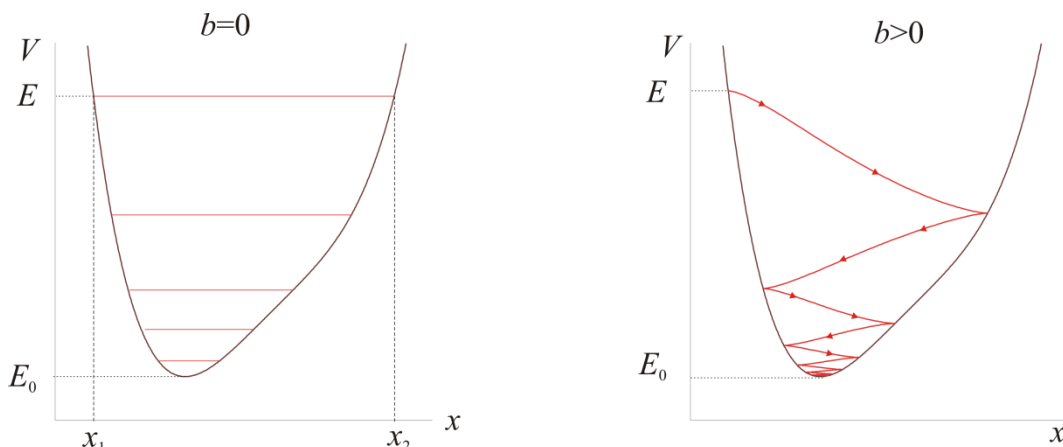
$$\frac{dE}{dt} = y\dot{y} + \frac{dV}{dt} = y\ddot{x} + \frac{dV}{dx}\dot{x} = y\ddot{x} - f(x)y$$

και αντικαθιστώντας το  $\ddot{x}$  από την (3.75) βρίσκουμε

$$\frac{dE}{dt} = -by^2 \quad (3.81)$$

Η ενέργεια λοιπόν ελαττώνεται όσο έχουμε  $y = \dot{x} \neq 0$ .

Ας υποθέσουμε ότι το δυναμικό παρουσιάζει ένα ακρότατο και μάλιστα ελάχιστο (βλ. Σχήμα 3-33). Για το διατηρητικό σύστημα ( $b=0$ ) θα έχουμε περατωμένες κινήσεις μεταξύ των ορίων  $x_1$  και  $x_2$ , τα οποία εξαρτώνται από την τιμή της ενέργειας. Όσο μειώνεται η ενέργεια τόσο μειώνεται και το διάστημα  $D = x_2 - x_1$ , το οποίο είναι το πλάτος της ταλάντωσης και το οποίο μηδενίζεται όταν  $E = E_0$ , όπου  $E_0 = V_{\min}$  η ενέργεια που αντιστοιχεί στο σημείο ισορροπίας, όπου  $y=0$ . Στο απωλεστικό σύστημα, αν ξεκινήσουμε από μια ταλάντωση με ενέργεια  $E$ , τότε η ενέργεια αυτή θα μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση (3.81) και συνεπώς θα μειώνεται και το πλάτος της ταλάντωσης. Όταν πλησιάσουμε στην ενέργεια του σημείου ισορροπίας η τροχιά θα προσεγγίζεται από τη λύση του γραμμικού συστήματος (3.76) και θα τείνει ασυμπτωτικά προς το σημείο ισορροπίας.



Σχήμα 3-33. Αριστερά, περατωμένες ταλαντώσεις σε ένα δυναμικό που στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω. Δεξιά, μείωση της ενέργειας λόγω απόσβεσης και ταλαντώσεις μειούμενου πλάτους.

Στην περίπτωση που το δυναμικό παρουσιάζει μέγιστο (ασταθές σημείο ισορροπίας) αναφέραμε ότι το φασικό διάγραμμα θα είναι ποιοτικά όμοιο όπως αυτό του υπερβολικού συστήματος. Αποδεικνύεται ότι οι ασυμπτωτες καμπύλες του διατηρητικού συστήματος συνεχίζουν να υπάρχουν και στο απωλεστικό σύστημα. Συνεπώς υπάρχουν λύσεις που τείνουν ασυμπτωτικά προς το σημείο ισορροπίας ή απομακρύνονται από αυτό.

**Παράδειγμα 1.** Έστω το σύστημα (3.30) του σκληρού ελατηρίου στο οποίο εισάγουμε τον όρο της απόσβεσης

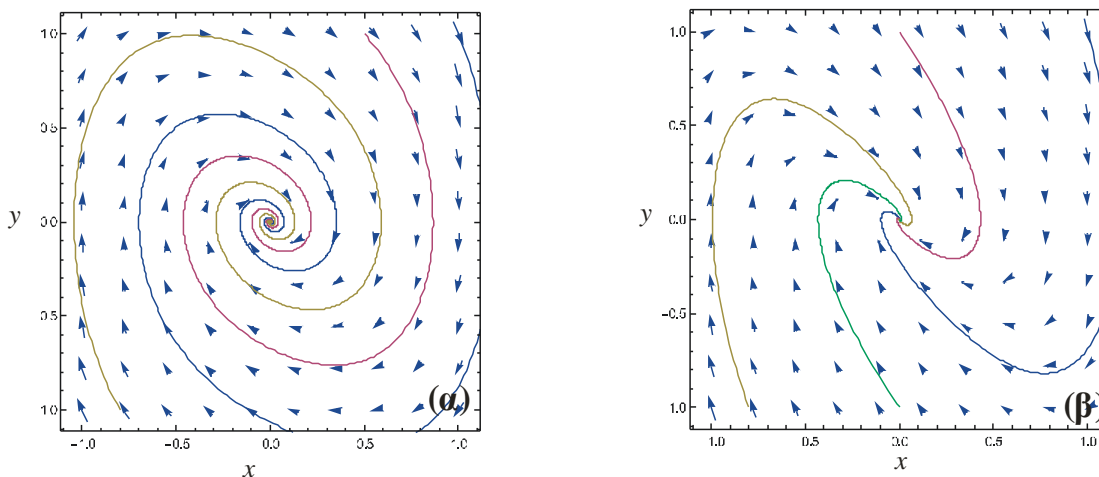
$$\ddot{x} = -(\kappa + a^2x^2)x - b\dot{x}, \quad \kappa, b > 0, \quad a > 1. \quad (3.82)$$

Για  $b=0$  το σύστημα έχει δυναμικό το  $V = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{a^2}{4}x^4$ , το οποίο παρουσιάζει ένα ελάχιστο στο  $x=0$  (δες Σχήμα 3-9) Συνεπώς στο χώρο φάσεων το σημείο  $(0,0)$  αποτελεί ευσταθές σημείο ισορροπίας. Η γραμμικοποίηση του συστήματος μας δίνει  $k = -\kappa$ . Άρα έχουμε τις περιπτώσεις

$b > 2\sqrt{k}$  : μεγάλη απόσβεση (ευσταθής κόμβος)

$b < 2\sqrt{k}$  : μικρή απόσβεση (ευσταθής εστία)

Δυο τυπικά διαγράμματα του χώρου φάσεων παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα. Οι φασικές καμπύλες προκύπτουν από την αριθμητική λύση του συστήματος.



Σχήμα 3-34. Το φασικό διάγραμμα του σκληρού ελατηρίου ( $\kappa=1$ ,  $a=1$ ) με απόσβεση, (α) για μικρή απόσβεση  $b=0.5$  και (β) για μεγάλη απόσβεση,  $b=1.5$ .

**Παράδειγμα 2.** Έστω το σύστημα

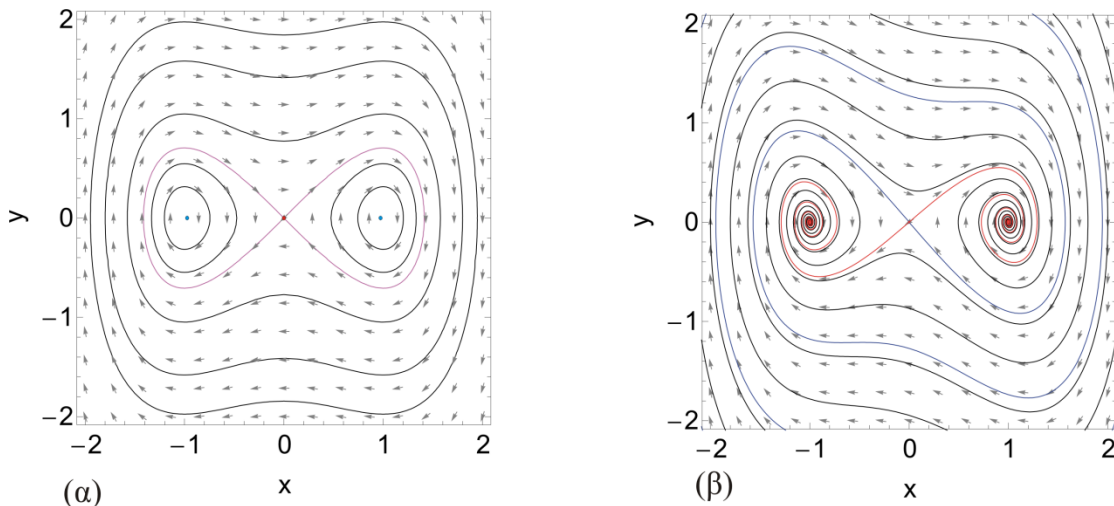
$$\ddot{x} = x - x^3 - b\dot{x} \quad (3.83)$$

Το δυναμικό του διατηρητικού συστήματος  $V = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$  παρουσιάζεται στο Σχήμα 3-13(δεξιά). Έχουμε τρία σημεία ισορροπίας,  $x_{01} = -1$  (ευσταθές),  $x_{02} = 0$  (ασταθές) και  $x_{03} = 1$  (ευσταθές) όπως φαίνεται άμεσα από τα ακρότατα του δυναμικού. Η ενέργεια στα σημεία ισορροπίας είναι  $-1/4$ ,  $0$  και  $-1/4$  αντίστοιχα. Η τιμή  $-1/4$  είναι και το ολικό ελάχιστο του δυναμικού και η μικρότερη επιτρεπτή τιμή ενέργειας.

Το φασικό διάγραμμα για το διατηρητικό σύστημα ( $b=0$ ) παρουσιάζεται στο Σχήμα 3-35α. Η διαχωριστική καμπύλη (μωβ) που αντιστοιχεί στο ασταθές σημείο ισορροπίας αποτελείται από ευσταθείς και ασταθείς ασύμπτωτες που ενώνονται ομαλά, αριστερά και δεξιά, και παίρνουν το σχήμα του «8» και χωρίζει το χώρο φάσεων σε τρεις περιοχές. Για ενέργειες  $-1/4 < E < 0$  έχουμε ταλαντώσεις γύρω από ένα από τα δύο ευσταθή σημεία ισορροπίας. Για  $E > 0$  έχουμε περατωμένες κινήσεις οι οποίες περνούν και από τα δύο σημεία ισορροπίας.

Όταν εισάγουμε τον όρο της απόσβεσης ( $b > 0$ ) η ενέργεια μειώνεται και τείνει προς την ελάχιστη τιμή  $-1/4$ . Η ταλαντώσεις φθίνουν και το σύστημα καταλήγει σε ένα από τα δύο σημεία ισορροπίας. Το αντίστοιχο φασικό διάγραμμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 3-35β. Για την τιμή  $b=0.3$ , που χρησιμοποιήθηκε, οι φασικές καμπύλες έχουν την μορφή ευσταθούς εστίας κοντά στα σημεία ισορροπίας.

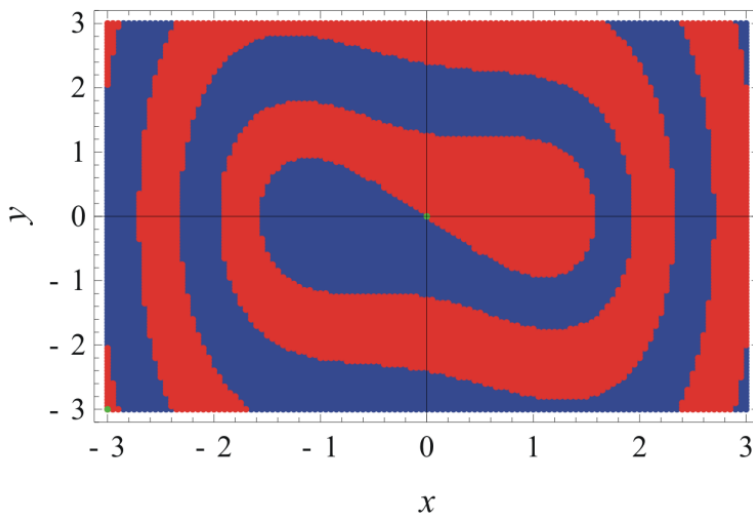
Οι ασύμπτωτες που αντιστοιχούν στο ασταθές σημείο ισορροπίας  $(0,0)$  συνεχίζουν να υπάρχουν αλλά δεν ενώνονται πλέον ομαλά. Οι ευσταθείς ασύμπτωτες, που ξεκινούν από το  $(0,0)$ , εκτείνονται προς μεγαλύτερες ενέργειες για  $t \rightarrow -\infty$ . Οι ασταθείς ασύμπτωτες ξεκινούν από το  $(0,0)$  και για  $t \rightarrow +\infty$  τείνουν, κάθε μια, προς ένα σημείο ευσταθούς ισορροπίας.



Σχήμα 3-35. α) το φασικό διάγραμμα του συστήματος (3.83) για  $b=0$ . Η μωβ καμπύλη σχήματος «8» είναι η διαχωριστική καμπύλη, που αντιστοιχεί στο ασταθές σημείο  $(0,0)$  β) Τα φασικό διάγραμμα μετά την εισαγωγή απόσβεσης ( $b=0.3$ ). Όλες οι φασικές καμπύλες τείνουν σε ένα από τα δύο σημεία ισορροπίας, όπως και η ασταθής ασύμπτωτες (κόκκινες καμπύλες). Εξαίρεση αποτελούν οι ευσταθείς πολλαπλότητες (μπλε) που τείνουν στο ασταθές σημείο  $(0,0)$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

**Σχόλιο.** Ένα ερώτημα που μπορούμε να θέσουμε για την δυναμική του συστήματος (3.83) είναι το εξής : Δοθείσας μιας αρχικής συνθήκης  $x(0)=x_0, y(0)=y_0$ , σε ποιο σημείο ισορροπίας, το  $x_{01}=-1$  ή το  $x_{03}=1$ , θα καταλήξει η λύση;

Έστω τα σύνολα αρχικών συνθηκών  $A_1 \subseteq E$  και  $A_2 \subseteq E$ , για τα οποία οι τροχιές τείνουν προς το  $(x_{01},0)$  και το  $(x_{03},0)$ , αντίστοιχα. Τα σύνολα  $A_1$  και  $A_2$  ονομάζονται **λεκάνες έλξης (basins of attraction)** των αντίστοιχων σημείων ισορροπίας και για  $b=0.3$  παρουσιάζονται στο Σχήμα 3-36. Το σύνορο μεταξύ των συνόλων  $A_1$  και  $A_2$  είναι οι ευσταθείς ασύμπτωτες του συστήματος, οι οποίες τείνουν στο  $(0,0)$ .



Σχήμα 3-36. Οι λεκάνες έλξης των σημείων ισορροπίας  $(-1,0)$  και  $(1,0)$  (μπλε και κόκκινη, αντίστοιχα) του απωλεστικού συστήματος (3.83) για  $b=0.3$ .

## Ασκήσεις

**Άσκηση 3.5.1.** Βρείτε την αναλυτική λύση των φασικών καμπύλων του απωλεστικού συστήματος (3.75) για  $f(x)=\alpha x + \beta$ , όπου  $\alpha, \beta$  σταθερές .

**Άσκηση 3.5.2.** Γράψτε τη διαφορική εξίσωση (3.75) του απωλεστικού συστήματος Lenard-Jones με δυναμικό  $V = \frac{1}{x^{12}} - \frac{2}{x^6}$ ,  $x > 0$ . Προσδιορίστε την κρίσιμη τιμή του συντελεστή απόσβεσης  $b$ , βάση της οποίας οι απώλειες χαρακτηρίζονται μικρές ή μεγάλες. Σχεδιάστε το φασικό διάγραμμα.

**Άσκηση 3.5.3.** Για το απωλεστικό εκκρεμές

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x - b\dot{x} \quad (3.84)$$

προσδιορίστε την κρίσιμη τιμή του  $b$ . Θέστε  $\omega=1$  και σχεδιάστε (με τη βοήθεια της αριθμητικής λύσης) την φασική καμπύλη για μια τροχιά με αρχικές συνθήκες  $x_0 = 0$ ,  $x'_0 = 2.5$  και για  $b=0.1$  και  $b=0.3$ .

**Άσκηση 3.5.4.** Για το απλό εκκρεμές (3.44), με  $\omega=1$ , αν ξεκινήσουμε με μια τιμή ενέργειας  $E>1$  έχουμε περιστροφές. Με την εισαγωγή απόσβεσης (εξ. (3.84)), το σύστημα χάνει ενέργεια και μετά από έναν αριθμό  $N$  περιστροφών, αρχίζει να λικνίζεται μέχρι να καταλήξει στο ευσταθές σημείο ισορροπίας. Ξεκινώντας μια τροχιά με αρχική ενέργεια  $E_0=2$  ( $\theta_0=0$ ), προσδιορίστε υπολογιστικά τον αριθμό των περιστροφών ως συνάρτηση του συντελεστή απόσβεσης  $b$ ,  $N=N(b)$  (θεωρήστε  $0.01 \leq b \leq 0.3$ )

## 3.6 Βιβλιογραφία

- Abell, M.L. & Braselton, J.P., 1997. *Differential equations with Mathematica*. 2nd ed. Academic Press
- Bauman, G., 2005. *Mathematica for Theoretical Physics: Classical Mechanics and nonlinear dynamics*, New York: Springer.
- Enns, R.H. & McGuire, G.C., 2001. *Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers*. Boston: Birkhauser.
- Hilborn, R.C., 1994. *Chaos and Nonlinear Dynamics*. New York, Oxford: Oxford University Press.
- Iro, H., 2002. *A modern approach to Classical Mechanics*. World Scientific.
- Irwin, M.C., 2001. *Smooth Dynamical Systems*. Singapore: World Scientific.
- Jordan, D. W. & Smith, P., 2007. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. 4th ed. Oxford: Oxford University Press.
- Jose, J.V. & Saletan, E.J., 1998. *Classical Dynamics: a contemporary approach*. Cambridge UK: Cambridge University Press.
- Marasco, A. & Romano, A., 2001. *Scientific Computing with Mathematica: Mathematical problems of ordinary differential equations*, Boston: Birkhauser.
- Sagdeev, R.Z. & Usikov, D.A. & Zaslavsky, G.M., 1988. *Nonlinear Physics: from pendulum to turbulence and chaos*. Chur-Switzerland: Harwood Academic publ.
- Strogatz, S.H., 1994. *Nonlinear Dynamics and Chaos, with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- Tabor M., 1989. *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: An Introduction*. New York: Wiley.
- Tel, T. & Gruiz, M., 2006. *Chaotic Dynamics: an introduction based on Classical Mechanics*. New York: Cambridge University Press.
- Βουγιατζής, Γ.Β. & Μπόζης, Γ.Δ. & Παπαδόπουλος, Δ.Β., 2012. *Διαφορικές Εξισώσεις και εφαρμογές*. Αθήνα: Κλειδάριθμος.
- Χατζηδημητρίου, Ι.Δ., 2000. *Θεωρητική Μηχανική (τόμος Α')*: Νευτώνια Μηχανική. 3η έκδ. Θεσσαλονίκη: Γιαχούδη.
- Πνευματικός, Σπ., 2006. *Κλασική Μηχανική*. Αθήνα: Γ.Α. Πνευματικού.
- Σούρλας, Δ., 2012. *Δυναμικά συστήματα και εφαρμογές με τη χρήση του Maple*. Σημειώσεις. Διαθέσιμο στη: [http://www.physics.upatras.gr/UploadedFiles/course\\_182\\_1516.pdf](http://www.physics.upatras.gr/UploadedFiles/course_182_1516.pdf). Πανεπιστήμιο Πάτρας.
- Τραχανάς, Σ., 2008. *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις: Μέθοδοι λύσης και Εφαρμογές*. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.



## 4 Αυτόνομα συστήματα στο επίπεδο

### 4.1 Εισαγωγή. Εξισώσεις, λύσεις και ολοκληρώματα

Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε συνεχή συστήματα με δύο δυναμικές μεταβλητές,  $x_1=x$  και  $x_2=y$  και εξισώσεις

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}\quad (4.1)$$

όπου  $f, g$  συνεχείς συναρτήσεις σε ένα τόπο του επιπέδου  $Oxy$ . Ο τόπος αυτός αποτελεί το χώρο φάσεων του συστήματος  $E^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ . Σύμφωνα με τα θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων που αναφέραμε στο κεφάλαιο 1, από κάθε σημείο του χώρου των φάσεων  $(x_0, y_0)$ , το οποίο μπορεί να αντιστοιχιστεί στις αρχικές συνθήκες  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ , θα αντιστοιχεί μια και μοναδική λύση του συστήματος (4.1). Επίσης από το σημείο  $(x_0, y_0)$  θα περνάει μια και μοναδική φασική καμπύλη, η οποία μπορεί να οριστεί παραμετρικά με τη λύση της (4.1) για τις δεδομένες αρχικές συνθήκες.

$$x = x(t; x_0, y_0), \quad y = y(t; x_0, y_0) \quad (4.2)$$

Το σύστημα (4.1) ονομάζεται **γραμμικό** (αυτόνομο) αν έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y\end{aligned}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \quad (\text{σταθ.}), \quad (4.3)$$

σε κάθε άλλη περίπτωση το σύστημα ονομάζεται **μη γραμμικό**.

Δεν είναι εύκολο να προσδιορίσουμε αναλυτικά τις λύσεις (4.2) για ένα μη γραμμικό σύστημα (4.1), οι οποίες (αν μπορούν να βρεθούν!) δίνονται εν γένει με τη βοήθεια ειδικών συναρτήσεων ([special functions](#)). Στην πράξη καταφεύγουμε στη χρήση αριθμητικών λύσεων που με τη βοήθεια των μεθόδων που θα περιγράψουμε στις επόμενες παραγράφους μας αποκαλύπτουν πλήρως τη δυναμική του συστήματος.

**Παράδειγμα 1.** Έστω το μη γραμμικό σύστημα  $\dot{x} = -y^3, \dot{y} = -x^3$ . Χρησιμοποιώντας το Mathematica παίρνουμε την λύση στην παρακάτω μορφή

```
In[1]:= deq1=x'[t]==-y[t]^3; deq2=y'[t]==x[t]^3;
DSolve[{deq1, deq2}, {x[t], y[t]}, t]
```

```
Out[2]:= {{y[t]->(4 C[1]-InverseFunction[Hypergeometric2F1[1/4, 3/4, 5/4, #1^4/(4
C[1])]] #1 (4-#1^4/C[1])^(3/4))/(2 Sqrt[2] (4 C[1]-#1^4)^(3/4))&] [-
t+C[2]]^4)^(1/4), x[t]->InverseFunction[Hypergeometric2F1[1/4, 3/4, 5/4, #1^4/(4
C[1])]] #1 (4-#1^4/C[1])^(3/4))/(2 Sqrt[2] (4 C[1]-#1^4)^(3/4))&] [-t+C[2]]},
κ.λ.π.
```

Η παραπάνω λύση περιγράφεται με την βοήθεια αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων και αυτή αποτελεί μια συνήθη μορφή λύσεων ενός μη γραμμικού συστήματος.

Οι φασική καμπύλη που περνάει το σημείο  $(x_0, y_0)$  μπορεί να βρεθεί και ως λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (βλ. §1.3.1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \quad y(x_0) = y_0 \quad (4.4)$$

Εν γένει, η γενική λύση της (4.4) προκύπτει σε πεπλεγμένη μορφή με μια αυθαίρετη σταθερά  $c = c(x_0, y_0)$ , την οποία την γράφουμε ως

$$F(x, y) = c. \quad (4.5)$$

Η  $F=F(x, y)$  αποτελεί ένα ολοκλήρωμα του συστήματος (4.1) και περιγράφει τις φασικές καμπύλες του συστήματος.

**Σημείωση.** Τα συστήματα  $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ , που μελετήσαμε στο δεύτερο κεφάλαιο, αποτελούν μια ειδική περίπτωση του συστήματος (4.1) αν θέσουμε  $\dot{x} = y$ , οπότε  $\dot{y} = \ddot{x}$  και  $g = f(x, y)$ . Μάλιστα αν  $g = g(x)$  τότε έχουμε το διατηρητικό σύστημα,  $\ddot{x} = f(x)$ , και το ολοκλήρωμα (4.5) είναι το ολοκλήρωμα της ενέργειας.

**Παράδειγμα 1 (συνέχεια).** Για το σύστημα  $\dot{x} = -y^3$ ,  $\dot{y} = -x^3$ , η εξίσωση (4.4) μας δίνει

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^3}{y^3} \Rightarrow x^3 dx + y^3 dy = 0,$$

και ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$F = x^4 + y^4 = c, \tag{4.6}$$

όπου βέβαια  $c = x_0^4 + y_0^4$ .

**Παράδειγμα 2.** Για το σύστημα  $\dot{x} = -x - y^2$ ,  $\dot{y} = y + x^2$  η εξίσωση (4.4) γράφεται

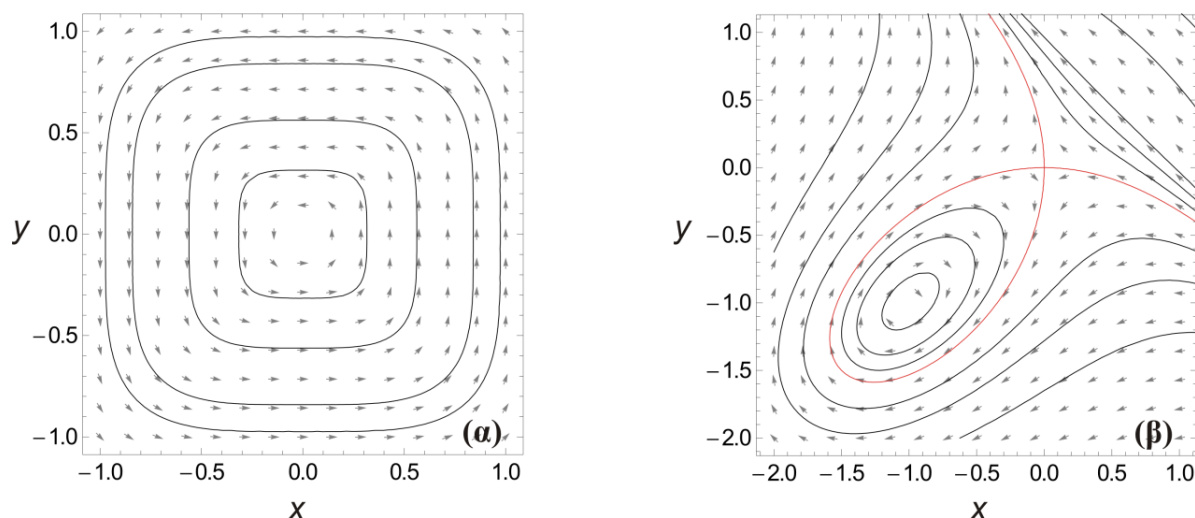
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y + x^2}{x + y^2} \Rightarrow (y + x^2)dx + (x + y^2)dy = 0$$

Η παράσταση  $(y + x^2)dx + (x + y^2)dy$  μορφή ικανοποιεί το κριτήριο πληρότητας και συνεπώς γράφεται ως τέλειο διαφορικό  $dF$  μιας συνάρτησης  $F(x, y)$ , η οποία βρίσκεται να είναι η

$$F = \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + xy \tag{4.7}$$

Είναι λοιπόν  $dF = 0$  και άρα  $F = \text{σταθ.}$ , δηλαδή η (4.7) είναι το ολοκλήρωμα του συστήματος.

**[M]** Αν είναι γνωστό το ολοκλήρωμα  $F = F(x, y)$ , τότε οι φασικές τροχιές θα είναι οι ισοσταθμικές καμπύλες του ολοκληρώματος. Η σχεδιάσή τους είναι άμεση αν μπορούμε να λύσουμε την σχέση  $F(x, y) = c$  ως προς  $x$  ή ως προς  $y$ . Συνήθως αυτό δεν είναι πρακτικά εφικτό και ακολουθούμε αριθμητικές μεθόδους. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει στη §3.1.3, το Mathematica μας παρέχει την εντολή `ContourPlot` για την σχεδίαση των ισοσταθμικών καμπύλων μιας συνάρτησης  $F(x, y)$ . Στο Σχήμα 4-1 παρουσιάζονται οι ισοσταθμικές καμπύλες – φασικά διαγράμματα για τα συστήματα των παραδειγμάτων 1 και 2. Επίσης σχεδιάζουμε και το διανυσματικό πεδίο, το οποίο δείχνει τη ροή των φασικών καμπύλων. Για το σύστημα του παραδείγματος 1, παρατηρούμε ότι όλες οι τροχιές είναι κλειστές καμπύλες και συνεπώς αντιστοιχούν σε περιοδικές ταλαντώσεις για τις δυναμικές μεταβλητές  $x$  και  $y$ . Για το σύστημα του παραδείγματος 2 παρατηρούμε την ύπαρξη μιας διαχωριστικής καμπύλης (κόκκινη), η οποία σχηματίζει μια θηλιά, εντός της οποίας έχουμε κλειστές φασικές καμπύλες και συνεπώς περιοδικές ταλαντώσεις. Έξω από αυτήν την περιοχή οι φασικές καμπύλες τείνουν προς το άπειρο και η εξέλιξη των δυναμικών μεταβλητών είναι μη περατωμένη.



Σχήμα 4-1. Φασικά διαγράμματα για τα συστήματα α) του παραδείγματος 1 β) του παραδείγματος 2. Οι φασικές καμπύλες σχεδιάστηκαν ως ισοσταθμικές καμπύλες των ολοκληρωμάτων.

**Παράδειγμα 3.** Θεωρούμε τώρα το σύστημα  $\dot{x}=1-y$ ,  $\dot{y}=x^2-y^2$ , και η διαφορική εξίσωση των φασικών καμπύλων θα είναι η

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{1 - y}$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης δεν μπορεί να προσδιοριστεί αναλυτικά, όπως μπορεί να δείχτεί και με τη χρήση του Mathematica.

Η ιδιότητα της διατήρησης ή όχι των εμβαδών στον επίπεδο χώρο φάσεων (βλ. §1.4.1) δίνεται μέσω της απόκλισης του διανυσματικού πεδίου του συστήματος (4.1), η οποία θα είναι

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \quad (4.8)$$

Αν η απόκλιση του συστήματος είναι μηδέν τότε το σύστημα διατηρεί τα εμβαδά στο επίπεδο των φάσεων. Εν γένει η απόκλιση είναι μη μηδενική και το πρόσημό της εξαρτάται από το σημείο  $(x, y)$  στο οποίο αναφερόμαστε.

**Σχόλιο.** Η διαφορική εξίσωση (4.4) από την οποία προκύπτουν οι φασικές καμπύλες γράφεται στη μορφή

$$g(x, y)dx - f(x, y)dy = 0 \quad (4.9)$$

Αν το σύστημα είναι διατηρητικό τότε θα ισχύει ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Όμως η παραπάνω σχέση αποτελεί το κριτήριο πληρότητας,  $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x}$ , για την διαφορική εξίσωση (4.9). Έτσι, για τα διατηρητικά συστήματα μπορούμε πάντα να βρούμε μια συνάρτηση  $F(x, y)$  για την οποία η διαφορική εξίσωση γράφεται  $dF=0$  και συνεπώς η  $F(x, y)=c$  είναι λύση της και άρα ολοκλήρωμα του δυναμικού συστήματος. Τα συστήματα των παραδειγμάτων 1 και 2, για τα οποία δώσαμε το ολοκλήρωμά τους, εύκολα διαπιστώνεται ότι είναι διατηρητικά. Όμως το σύστημα του παραδείγματος 3 δεν είναι διατηρητικό και δεν μπορούσαμε να βρούμε κάποιο αναλυτικό ολοκλήρωμα.

## Ασκήσεις

**Άσκηση 4.1.1.** Βρείτε το ολοκλήρωμα του συστήματος  $\dot{x}=1/y^2$ ,  $\dot{y}=x$  και σχεδιάστε πρόχειρα το φασικό διάγραμμα.

**Άσκηση 4.1.2.** Ποια από τα παρακάτω συστήματα είναι διατηρητικά; Βρείτε ένα ολοκλήρωμά τους

(i)  $\dot{x}=y(1-x^2)$ ,  $\dot{y}=-x(1-y^2)$

(ii)  $\dot{x}=\sin x \cos y$ ,  $\dot{y}=\sin y \cos x$

(iii)  $\dot{x}=-x^2-y^2$ ,  $\dot{y}=2xy$

(iv)  $\dot{x}=-xy$ ,  $\dot{y}=x^2+y^2+x$

(v)  $\dot{x}=xy^2$ ,  $\dot{y}=x^3+y^3$

**Άσκηση 4.1.3.** Επιλύστε αριθμητικά το σύστημα του παραδείγματος 1 για αρχικές συνθήκες  $(x_0, y_0)=(1/2, 1/2)$  και υπολογίστε την περίοδο της ταλάντωσης των δυναμικών μεταβλητών.

**Άσκηση 4.1.4.** Για το σύστημα του παραδείγματος 2, βρείτε για ποιο διάστημα τιμών του ολοκληρώματος (4.7) αντιστοιχούν περιοδικές ταλαντώσεις για τις δυναμικές μεταβλητές.

## 4.2 Γραμμικά συστήματα δύο διαστάσεων με σταθερούς συντελεστές (αυτόνομα)

### 4.2.1 Γενική λύση γραμμικού συστήματος

Έχουμε ορίσει το γραμμικό σύστημα 2 διαστάσεων με σταθερούς συντελεστές με τις εξισώσεις (4.3). Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό των μεταβλητών του πρώτου κεφαλαίου, γράφουμε τις εξισώσεις στη μορφή

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{aligned}\quad (4.10)$$

ή

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \text{με} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Οι συντελεστές  $a_{ij}$  είναι πραγματικές σταθερές και ο πίνακας  $\mathbf{A}$  που ορίζει πλήρως το γραμμικό σύστημα ονομάζεται **πίνακας του γραμμικού συστήματος**. Από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

- Οι λύσεις του γραμμικού συστήματος (4.10) αποτελούν διανυσματικό χώρο διάστασης δύο.

Αυτό σημαίνει ότι αν έχουμε δύο λύσεις,  $\mathbf{x}_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t))^T$  και  $\mathbf{x}_2(t) = (x_{21}(t), x_{22}(t))^T$ , όπου το σύμβολο  $T$  δηλώνει το ανάστροφο (διάνυσμα στήλη), οι οποίες είναι γραμμικά ανεξάρτητες τότε η γενική λύση του συστήματος (4.10) θα είναι η

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) \quad (4.11)$$

όπου  $c_1, c_2$  οι αυθαίρετες σταθερές που εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες. Οι λύσεις  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  αποτελούν δηλαδή μια βάση του διανυσματικού χώρου λύσεων. Σημειώνουμε ότι, οποιεσδήποτε λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες μπορούν να σχηματίσουν βάση και να γράψουμε τη γενική λύση στη μορφή (4.11). Προφανώς η  $\mathbf{x}(t) = (0, 0)$ , που προκύπτει για  $c_1 = c_2 = 0$ , είναι η μοναδική **λύση ισορροπίας** του συστήματος (4.10) αλλά δεν μπορεί να αποτελεί μέλος της βάσης του διανυσματικού χώρου των λύσεων.

Έστω ότι  $x_1(t) = u_1 e^{\lambda t}$ ,  $x_2(t) = u_2 e^{\lambda t}$  είναι μια λύση του συστήματος, που σε διανυσματική μορφή τη γράφουμε ως

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}e^{\lambda t}. \quad (4.12)$$

Αντικαθιστώντας την (4.12) στο σύστημα (4.10) διαπιστώνουμε ότι το ικανοποιεί όταν ισχύουν οι σχέσεις

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0. \quad (4.13)$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = 0, \quad (4.14)$$

όπου  $\mathbf{I}$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Η σχέση (4.13) είναι η **χαρακτηριστική εξίσωση** του συστήματος και το  $\lambda$  είναι μια **ιδιοτιμή** του πίνακα του συστήματος. Η σχέση (4.14) δηλώνει, αντίστοιχα, ότι το  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  είναι το **ιδιοδιάνυσμα** της  $\lambda$ .

**Σημείωση.** Η (4.14) δίνει μια απειρία λύσεων από παράλληλα διανύσματα. Όμως τα ιδιοδιανύσματα ορίζονται ανεξαρτήτως μέτρου και δείχνουν μόνο διεύθυνση. Έτσι επιλέγουμε αυθαίρετα μια από τις λύσεις της (4.14).

Άρα μπορούμε να περιγράψουμε τη γενική λύση (4.11) χρησιμοποιώντας λύσεις της μορφής (4.12). Παρακάτω αναλύουμε αυτές τις λύσεις για τις περιπτώσεις όπου οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathbf{A}$  δεν είναι μηδέν.

**Σχόλιο.** Για τις ιδιάζουσες περιπτώσεις όπου έχουμε **μηδενικές ιδιοτιμές** έχουμε τα εξής: Αν μια ιδιοτιμή του πίνακα  $\mathbf{A}$  είναι μηδέν τότε σε αυτή αντιστοιχεί η θεμελιώδης λύση

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} = \text{σταθ.}$$

Αν και οι δύο ιδιοτιμές είναι μηδέν τότε, εκτός από την παραπάνω λύση αντιστοιχεί και η

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}t + \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = \text{σταθ.}$$

Έτσι η γενική λύση παίρνει τη μορφή  $\mathbf{x} = c_1\mathbf{a} + c_2(\mathbf{a}t + \mathbf{b})$

## 4.2.2 Ταξινόμηση λύσεων

### Διακριτές πραγματικές ιδιοτιμές

Έστω ότι ο πίνακας  $A$  έχει δύο πραγματικές ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  και  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Τότε, αν  $\mathbf{u}_1 = (u_{11}, u_{12})$  και  $\mathbf{u}_2 = (u_{21}, u_{22})$  είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα ( $u_{ij} \in \mathbb{R}$ ), η λύση του γραμμικού συστήματος είναι

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 u_{11} e^{\lambda_1 t} + c_2 u_{21} e^{\lambda_2 t} \\ x_2(t) &= c_1 u_{12} e^{\lambda_1 t} + c_2 u_{22} e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \quad \text{ή} \quad \mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{u}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{u}_2 e^{\lambda_2 t} \quad (4.15)$$

Παρατηρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες  $x_{10} = x_1(0)$  και  $x_{20} = x_2(0)$  που αντιστοιχούν στην τιμή της αυθαίρετης σταθεράς  $c_1 = 0$  ανήκουν πάνω στην ευθεία  $x_1/x_2 = u_{21}/u_{22}$ , δηλαδή στην ευθεία κατά την διεύθυνση του ιδιοδιανύσματος  $\mathbf{u}_2$ . Επίσης παρατηρούμε ότι σ' αυτήν την περίπτωση έχουμε

$$\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{u_{21}}{u_{22}} = \text{σταθ.}, \quad \forall t, \quad (4.16)$$

δηλαδή η φασική τροχιά είναι μια ευθεία κατά  $\mathbf{u}_2$ . Παρόμοια ιδιότητα έχει και η ευθεία κατά μήκος του ιδιοδιανύσματος  $\mathbf{u}_1$  στην οποία αντιστοιχούν οι αρχικές συνθήκες για τις οποίες προκύπτει  $c_2 = 0$ , δηλαδή

$$\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{u_{11}}{u_{12}} = \text{σταθ.}, \quad \forall t, \quad (4.17)$$

Οι ευθείες (4.16) και (4.17) ονομάζονται **αναλλοίωτοι γραμμικοί υπόχωροι** και συμβολίζονται με  $E$ . Ανάλογα με το πρόσημο της αντίστοιχης ιδιοτιμής έχουμε τις εξής περιπτώσεις για τη λύση του υπόχωρου  $\mathbf{x} = \mathbf{u} e^{\lambda t}$

- $\lambda > 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t)| = \infty$ . Ο υπόχωρος ονομάζεται ασταθής και συμβολίζεται ως  $E^u$ .
- $\lambda < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t)| = 0$ . Ο υπόχωρος ονομάζεται ευσταθής και συμβολίζεται ως  $E^s$ .

**Σχόλιο.** Αν θεωρήσουμε έναν μετασχηματισμό από το καρτεσιανό ορθογώνιο σύστημα  $(x_1, x_2)$  στο, εν γένει, πλαγιογώνιο σύστημα,  $(y_1, y_2)$  που ορίζεται από τα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{u}_1$  και  $\mathbf{u}_2$ , το σύστημα παίρνει την **κανονική μορφή** ([canonical form](#))

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 \end{aligned} \quad \text{ή} \quad \dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad (4.18)$$

και οι λύσεις γράφονται ως  $y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}$  και  $y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$

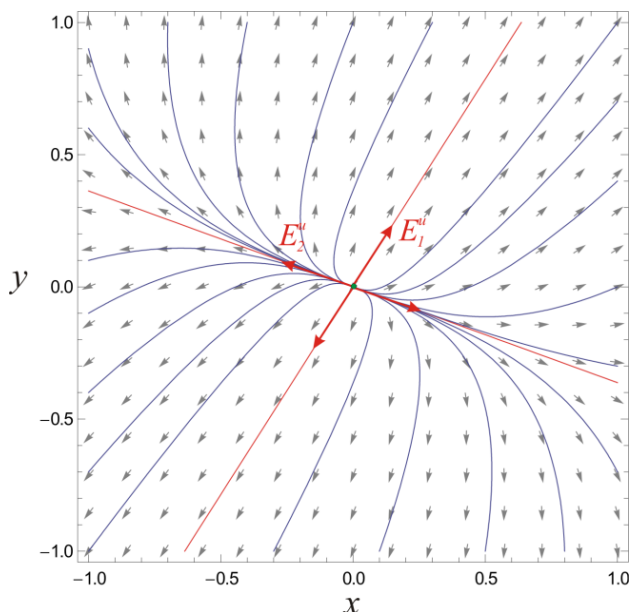
Διακρίνουμε τις παρακάτω υπο-περιπτώσεις:

**I)  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ .**

Τα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{u}_1$  και  $\mathbf{u}_2$  ορίζουν **δύο ασταθείς** υπόχωρους,  $E_1^u$  και  $E_2^u$ , αντίστοιχα. Για όλες τις αρχικές συνθήκες θα είναι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (|x_1(t)|, |x_2(t)|) = (\infty, \infty), \quad \forall (x_1(0), x_2(0)) \in E^2 - \{0, 0\} \quad (4.19)$$

Στη γενική λύση (4.15), καθώς ο χρόνος  $t$  αυξάνει ο όρος  $\mathbf{u}_1 e^{\lambda_1 t}$  υπερτερεί έναντι του όρου  $\mathbf{u}_2 e^{\lambda_2 t}$  και ο υπόχωρος  $E_1^u$  ονομάζεται **γρήγορος** και ο  $E_2^u$  **αργός**. Οι αντίστοιχες φασικές καμπύλες τείνουν να γίνουν παράλληλες με τον γρήγορο υπόχωρο. Το φασικό διάγραμμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 4-2 και το σημείο ισορροπίας  $(0,0)$  ονομάζεται **ασταθής κόμβος** (unstable node).



Σχήμα 4-2. Φασικό διάγραμμα γραμμικού συστήματος με ασταθή κόμβο.

**II)  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ .**

Τα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{u}_1$  και  $\mathbf{u}_2$  ορίζουν **δύο ευσταθείς** υπόχωρους,  $E_1^s$  και  $E_2^s$ , αντίστοιχα. Το φασικό διάγραμμα είναι το ίδιο με την περίπτωση (I) αλλά τώρα η ροή είναι αντίθετη και για όλες τις λύσεις και θα έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (|x_1(t)|, |x_2(t)|) = (0, 0), \quad \forall (x_1(0), x_2(0)) \in E^2 \quad (4.20)$$

Το σημείο ισορροπίας  $(0,0)$  ονομάζεται **ευσταθής κόμβος** (stable node).

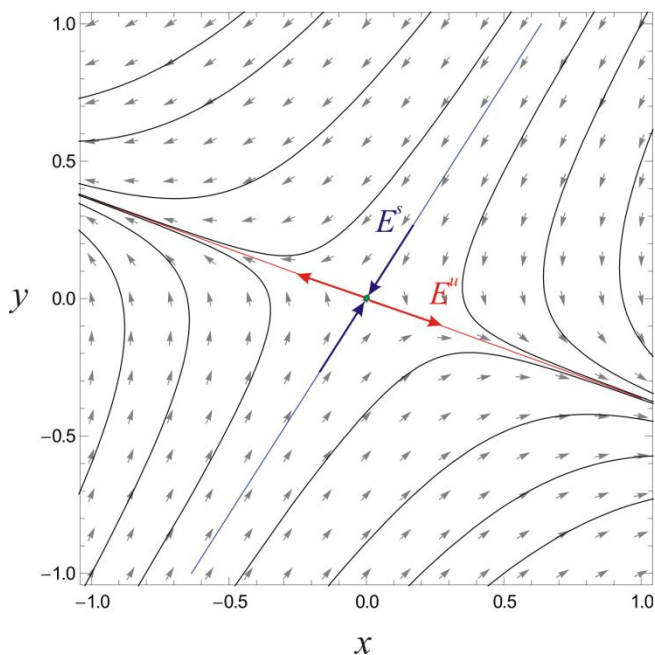
**III)  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$**

Το ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{u}_2$  ορίζει τον **ευσταθή υπόχωρο**  $E^s$  και το ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{u}_1$  τον **ασταθή υπόχωρο**  $E^u$  του γραμμικού συστήματος. Οποιαδήποτε τροχιά ξεκινά επάνω στην  $E^s$ , αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες με  $c_1 = 0$ , παραμένει επάνω στην ευθεία (4.16) για κάθε  $t$  και τείνει στο σημείο ισορροπίας  $(0,0)$  καθώς  $t \rightarrow +\infty$ . Ο ασταθής υπόχωρος  $E^u$  αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες με  $c_2 = 0$ . Οποιαδήποτε τροχιά ξεκινά επάνω στην  $E^u$  παραμένει στην ευθεία (4.17) για κάθε  $t$  και απομακρύνεται από το  $(0,0)$  καθώς  $t \rightarrow +\infty$ .

Το σημείο ισορροπίας  $(0,0)$  ονομάζεται **σάγμα** (saddle) και το φασικό διάγραμμα έχει τη εικόνα όπως στο Σχήμα 4-3. Μια τροχιά που ξεκινάει κοντά στον ευσταθή υπόχωρο τον ακολουθεί τείνοντας προς το  $(0,0)$ , όμως ο όρος της λύσης  $\mathbf{u}_1 e^{\lambda_1 t}$  αυξάνει εκθετικά και απομακρύνει την τροχιά από τον  $E^s$ . Για  $t \rightarrow +\infty$  οι φασικές τροχιές τείνουν να γίνουν παράλληλες με τον ασταθή υπόχωρο. Έτσι έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (|x_1(t)|, |x_2(t)|) = (\infty, \infty), \quad \forall (x_1(0), x_2(0)) \in \mathbb{E}^2 - (E^s \cup \{0,0\}) \quad (4.21)$$

Την ίδια εικόνα παρουσιάζει και ο χώρος φάσεων του γραμμικού συστήματος των απωστικών δυνάμεων (βλ. §3.2.2). Οι ασύμπτωτες ευθείες στο σύστημα των απωστικών δυνάμεων είναι οι γραμμικοί υπόχωροι του συστήματος.



Σχήμα 4-3. Φασικό διάγραμμα γραμμικού συστήματος με σαγματικό σημείο ισορροπίας.

### Τρεις μη μηδενικές ιδιοτιμές

Εν γένει στη διπλή πραγματική ιδιοτιμή  $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$  αντιστοιχεί ένα μόνο ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  και η λύση είναι της μορφής

$$\mathbf{x}(t) = (c_1 + c_2 t)\mathbf{u}e^{\lambda t} + c_2 \mathbf{w}e^{\lambda t}, \quad (4.22)$$

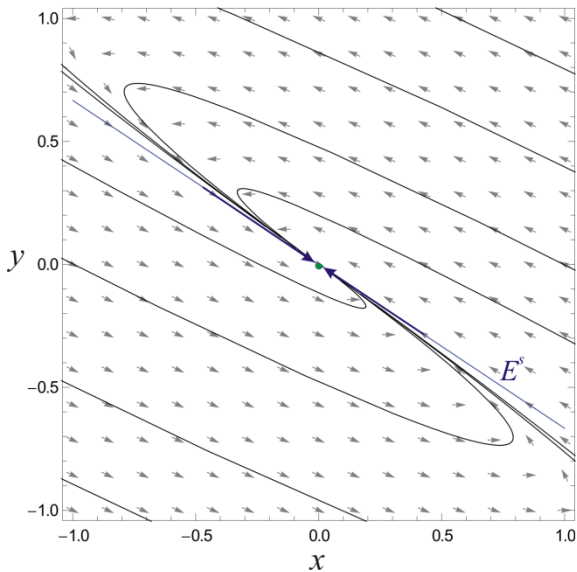
όπου  $\mathbf{w}=(w_1, w_2)$  ένα σταθερό διάνυσμα. Οι σταθερές  $c_1, c_2$  αντιστοιχούν σε αρχικές συνθήκες σύμφωνα με τη σχέση

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$$

Για αρχικές συνθήκες τέτοιες ώστε  $c_2=0$  έχουμε την λύση  $x_1(t)=c_1 u_1 e^{\lambda t}$  και  $x_2(t)=c_1 u_2 e^{\lambda t}$ . Η αντίστοιχη φασική καμπύλη είναι η ευθεία

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{u_1}{u_2} = \text{σταθ.}, \quad (4.23)$$

η οποία αποτελεί τον μοναδικό γραμμικό υπόχωρο του συστήματος. Αν  $\lambda < 0$ , τότε το ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{u}$  μας δίνει έναν ευσταθή υπόχωρο  $E^s$  ενώ αν  $\lambda > 0$  παίρνουμε έναν ασταθή υπόχωρο  $E^u$ . Το φασικό διάγραμμα έχει τη μορφή που δίνεται στο Σχήμα 4-4 και το σημείο ισορροπίας  $(0,0)$  ονομάζεται ευσταθής ή ασταθής, αντίστοιχα, **ιδιάζων κόμβος** (improper node).



Σχήμα 4-4. Φασικό διάγραμμα γραμμικού συστήματος με ιδιάζων ευσταθή κόμβο. Για τον ασταθή κόμβο η εικόνα είναι ίδια αλλά με αντίθετη κατεύθυνση για το διανυσματικό πεδίο.

**Σχόλιο.** Η κανονική μορφή του συστήματος στην περίπτωση  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  έχει τη μορφή

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad (4.24)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου  $\alpha = 0$ , έχουμε δύο διαφορετικά ιδιοδιανύσματα,  $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$  και  $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$  που αντιστοιχούν στη διπλή ιδιοτιμή  $\lambda$ . Η λύση δίνεται πάλι από την (4.15). Το σημείο ισορροπίας είναι ασταθής ή ευσταθής κόμβος, αν  $\lambda > 0$  ή  $\lambda < 0$  αντίστοιχα. Όλες οι φασικές τροχιές είναι ευθείες γραμμές, που περνούν από το σημείο ισορροπίας  $(0, 0)$ .

### Ιδιοτιμές μιγαδικές συζυγείς.

Έστω ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα του γραμμικού συστήματος είναι οι  $\lambda_1 = a + i\beta$  και  $\lambda_2 = a - i\beta$  με  $\beta \neq 0$ . Στην ιδιοτιμή  $\lambda_1$  αντιστοιχεί το μιγαδικό ιδιοδιάνυσμα  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ , όπου  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ . Η  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}e^{at}$  είναι μια μιγαδική λύση του συστήματος, όπου όμως το πραγματικό της και το φανταστικό της μέρος αποτελούν ξεχωριστά γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις που μπορούν να αποτελέσουν βάση της γενικής λύσης. Η ιδιοτιμή  $\lambda_2$  μας παρέχει λύσεις γραμμικά εξαρτημένες των προηγούμενων. Τελικά παίρνουμε τη γενική λύση

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{at} (\mathbf{u} \cos \beta t - \mathbf{v} \sin \beta t) + c_2 e^{at} (\mathbf{u} \sin \beta t + \mathbf{v} \cos \beta t) \quad (4.25)$$

όπου  $c_1, c_2$ , οι αυθαίρετες σταθερές που συνδέονται με τις αρχικές συνθήκες  $x_{10}$  και  $x_{20}$  σύμφωνα με τη σχέση

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$$

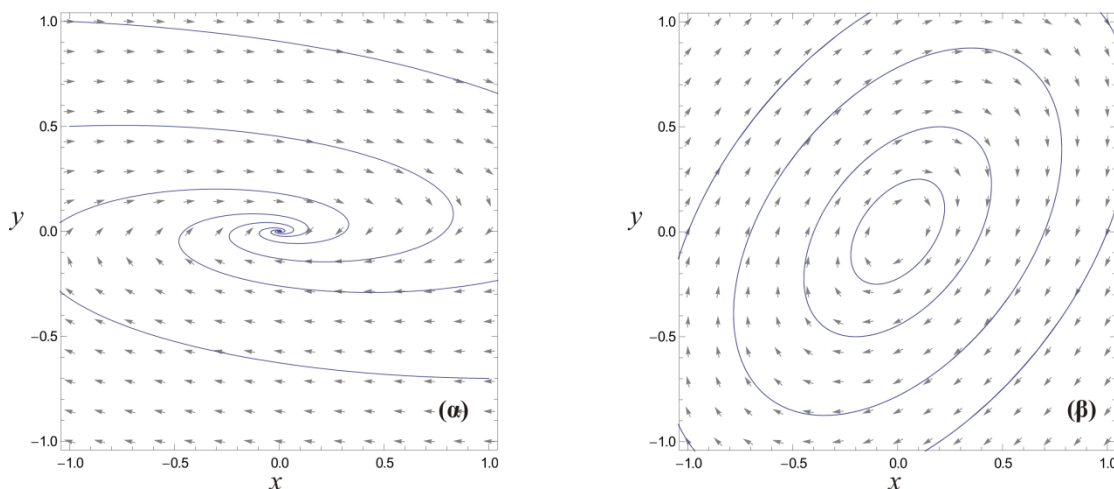
Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

**I)  $\alpha = 0$ .** Η λύση (4.25) εκφράζει φασικές τροχιές που είναι ελλείψεις γύρω από το σημείο ισορροπίας  $(0, 0)$ , δηλαδή αντιστοιχούν σε περιοδικές τροχιές ή, ισοδύναμα, ταλαντώσεις των μεταβλητών  $x_i(t)$  με περίοδο  $T = 2\pi/\beta$ . Το σημείο ισορροπίας ονομάζεται **κέντρο** (center ή vortex) και το αντίστοιχο φασικό διάγραμμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 4-5β. Η περίπτωση αυτή είναι παρόμοια με την περίπτωση των ευσταθών σημείων ισορροπίας στα συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας (βλ §3.2.1).

**II)  $\alpha < 0$ .** Οι δυναμικές μεταβλητές παρουσιάζουν ταλαντώσεις μειούμενου πλάτους,  $A \sim e^{-at}$ , όπως στον αρμονικό ταλαντωτή με απόσβεση (βλ 3.5). Οι φασικές καμπύλες έχουν το σχήμα μιας έλικας (Σχήμα 4-5α) που κλείνει και καταλήγει για  $t \rightarrow \infty$  στο σημείο ισορροπίας  $(0, 0)$ , που ονομάζεται **ευσταθής εστία** (stable focus).



III) Για  $\alpha > 0$ , οι φασικές καμπύλες έχουν την ίδια μορφή, όπως παραπάνω αλλά με αντίθετη ροή. Οι ταλαντώσεις των δυναμικών μεταβλητών αυξάνουν εκθετικά το πλάτος τους. Τώρα το σημείο ισορροπίας ονομάζεται ασταθής εστία και όλες οι τροχιές απομακρύνονται από αυτό.



Σχήμα 4-5. Φασικό διάγραμμα α) σε μια ευσταθή εστία ( $a < 0$ ) και β) στο κέντρο ( $a = 0$ ).

**Σχόλιο.** Η κανονική μορφή του συστήματος στην περίπτωση των μιγαδικών ιδιοτιμών έχει τη μορφή

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad (4.26)$$

### 4.2.3 Ο παραμετρικός χώρος ευστάθειας

Η δυναμική των γραμμικών συστημάτων περιγράφεται από το φασικό διάγραμμα, το οποίο παρουσιάζει τις διαφορετικές τοπολογικές μορφές που περιγράφηκαν στα παραπάνω σχήματα της §4.2.2 και σχετίζονται με το είδος των ιδιοτιμών του πίνακα  $\mathbf{A}$  του συστήματος. Η χαρακτηριστική εξίσωση (4.13) παίρνει τη μορφή

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (4.27)$$

όπου

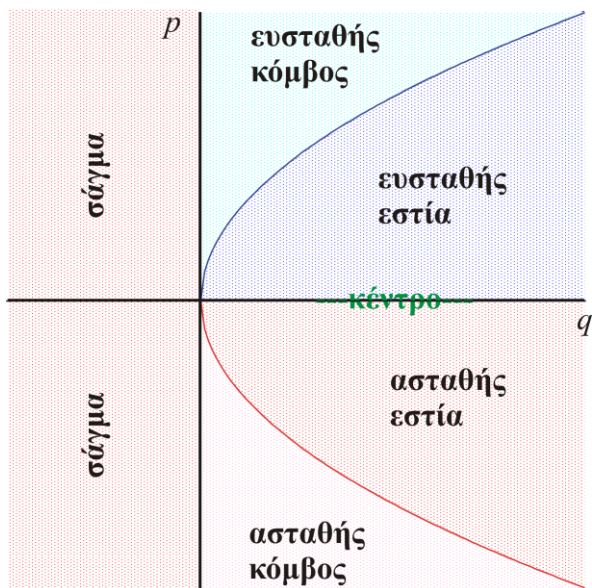
$$p = -\text{trace}\mathbf{A} = -(a_{11} + a_{12}), \quad q = \det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Έτσι οι λύσεις της (4.27) γράφονται

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q} \quad (4.28)$$

Από την (4.28) προκύπτουν τα εξής:

- 1) Αν  $q > 0$  και  $p^2 - 4q > 0$  τότε έχουμε πάντα δύο πραγματικές ιδιοτιμές με το ίδιο πρόσημο και άρα το σημείο ισορροπίας του συστήματος θα είναι **κόμβος**. Αν  $p > 0$  ο κόμβος είναι ευσταθής και αν  $p < 0$  ο κόμβος είναι ασταθής.
- 2) Αν  $p^2 - 4q < 0$  τότε έχουμε μιγαδικές συζυγείς ιδιοτιμές και το σημείο ισορροπίας είναι **εστία**, ευσταθής αν  $p > 0$  και ασταθής αν  $p < 0$ .
- 3) Αν  $p^2 - 4q = 0$  τότε έχουμε διπλή πραγματική ιδιοτιμή και **ιδιάζων κόμβο**.
- 4) Αν  $p = 0$  και  $q > 0$  παίρνουμε καθαρά φανταστικές ιδιοτιμές που αντιστοιχούν σε **κέντρο**.
- 5) Αν  $q < 0$  τότε έχουμε πάντα πραγματικές ιδιοτιμές με αντίθετο πρόσημο, δηλαδή το σημείο ισορροπίας αντιστοιχεί σε **σάγμα**.



Σχήμα 4-6. Ταξινόμηση γραμμικών συστημάτων-σημείων ισορροπίας στο επίπεδο  $q-p$ .

Οι φασικές καμπύλες μπορούν να βρεθούν και από την διαφορική εξίσωση (4.4), η οποία γράφεται

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y} = \frac{a_{21} + a_{22}(y/x)}{a_{11} + a_{12}(y/x)}. \quad (4.29)$$

Η (4.29) είναι ομογενής και μπορεί να λυθεί-διαχωριστεί μέσω του μετασχηματισμού  $z=y/x$ . Εν γένει οι λύσεις της (4.29) δίνονται σε πλεγμένη μορφή εκφράζοντας ένα **ολοκλήρωμα**  $\Phi(x,y)=c$  του γραμμικού συστήματος.

**Παράδειγμα**. Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\dot{x} = -x + y, \quad \dot{y} = 2x + 3y$$

όπου υιοθετούμε τον συμβολισμό  $x_1=x$  και  $x_2=y$ . Για τον πίνακα του γραμμικού συστήματος έχουμε

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad p = -\text{trace}\mathbf{A} = -2, \quad q = \det \mathbf{A} = -5.$$

Από το Σχήμα 4-6, φαίνεται ότι το σημείο ισορροπίας είναι σάγμα. Αυτό προκύπτει και από τις ιδιοτιμές, οι οποίες δίνονται από τη σχέση (4.28)

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{6} > 0, \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{6} < 0$$

Το ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{u}_1$ , που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_1$  θα βρεθεί από τη σχέση (4.14), η οποία δίνει  $2u_{11} + (2 - \sqrt{6})u_{12} = 0$ . Θέτοντας  $u_{12} = 2$  παίρνουμε  $\mathbf{u}_1 = \{-2 + \sqrt{6}, 2\}$  και ο ασταθής υπόχωρος θα δίνεται από την ευθεία

$$y = (2 + \sqrt{6})x$$

Αντίστοιχα, για την ιδιοτιμή  $\lambda_2$  βρίσκουμε  $\mathbf{u}_2 = \{-2 - \sqrt{6}, 2\}$  και ο ευσταθής υπόχωρος θα δίνεται από την ευθεία

$$y = (2 - \sqrt{6})x$$

Η γενική λύση θα δίνεται από την (4.15).

**[M]** Στο Mathematica ορίζουμε τον πίνακα του γραμμικού συστήματος και, μέσω αυτού, το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{f}$  και τις διαφορικές εξισώσεις

```
A = {{-1, 1}, {2, 3}};
f1 = A[[1, 1]] x + A[[1, 2]] y;
f2 = A[[2, 1]] x + A[[2, 2]] y;
deq1 = x'[t] == {f1 /. {x -> x[t], y -> y[t]}}[[1]];
deq2 = y'[t] == {f2 /. {x -> x[t], y -> y[t]}}[[1]];
```

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα με τις εντολές `Eigenvalues[A]` και `Eigenvectors[A]`. Κατασκευάζουμε τις εξισώσεις του ευσταθούς και του ασταθούς υπόχωρου και τους σχεδιάζουμε

```
eval = Eigenvalues[A]
evec = Eigenvectors[A]
yu = ( evec[[1, 2]]/evec[[1, 1]]) x
ys = ( evec[[2, 2]]/evec[[2, 1]]) x
subspaces = Plot[{yu, ys}, {x, -1, 1}, PlotRange->{-1, 1}, PlotStyle->{Red, Blue}]
```

Το διανυσματικό πεδίο σχεδιάζεται με την εντολή

```
vectorfield = VectorPlot[{f1, f2}, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, VectorPoints -> 15,
VectorScale -> {0.02, 1.5, None}, vectorStyle -> Gray]
```

Η αναλυτική λύση με  $x(0)=x_0$ ,  $y(0)=y_0$  δίνεται με την `DSolve` (δες §1.2.2)

```
In[1]:= analyticSolution = DSolve[{deq1, deq2, x[0]==x0, y[0]==y0}, {x, y}, t];
xt = x[t] /. analyticSolution[[1]] // Simplify
yt = y[t] /. analyticSolution[[1]] // Simplify
```

```
Out[1]= 1/12 E^(t-Sqrt[6] t) (2 (3+Sqrt[6]-(-3+Sqrt[6]) E^(2 Sqrt[6] t))
x0+Sqrt[6] (-1+E^(2 Sqrt[6] t)) y0)
Out[2]= 1/6 E^(t-Sqrt[6] t) (Sqrt[6] (-1+E^(2 Sqrt[6] t)) x0+(3-
Sqrt[6]+(3+Sqrt[6]) E^(2 Sqrt[6] t)) y0)
```

Για τη σχεδίαση του χώρου φάσεων επιλέγουμε ένα κατάλληλο σύνολο (IC) από αρχικές συνθήκες και ένα κατάλληλο διάστημα ολοκλήρωσης ( $t_1, t_2$ ), π.χ.

```
IC = {{0.25, 0.0}, {0.5, 0.0}, {0.7, 0.0}, {0.9, 0.0}, {-1, 0.455}, {-1, 0.5}, {-1, 0.6},
{-1, 0.8}, {-0.1, -1}, {1, -0.8}, {1, -0.6}, {1, -0.5}, {-0.35, -1}, {-0.5, -1}, {-0.7, -
1}, {-0.9, -1}};
n = Length[IC]; t1 = -2; t2 = 2;
```

Χρησιμοποιώντας την αναλυτική λύση σχεδιάζουμε (στο παρασκήνιο) τις φασικές καμπύλες στον τόπο  $[-1,1] \times [-1,1]$  και κατασκευάζουμε μια λίστα (trajectories) με τα γραφήματά τους

```
For[i = 1, i <= n, i++, traj[i] = ParametricPlot[{xt, yt} /. {x0 -> IC[[i, 1]],
y0 -> IC[[i, 2]]}, {t, t1, t2}, PlotRange -> {-1, 1}, PlotStyle -> Black]]
trajectories = Table[traj[i], {i, 1, n}];
```

Συνολικά παίρνουμε το φασικά διάγραμμα με την

```
Show[trajectories, subspaces, vectorfield, Frame->True, FrameLabel->{"x", "y"}]
```

Το αποτέλεσμα είναι παρόμοιο με αυτό που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4-3.

## Ασκήσεις

**Άσκηση 4.2.1.** Βρείτε την γενική λύση καθώς και τον ευσταθή και ασταθή γραμμικό υπόχωρο του συστήματος

$$\dot{x} = 2x + y, \quad \dot{y} = x + 2y$$

**Άσκηση 4.2.2.** Ταξινομήστε το σημείο ισορροπίας (0,0) των γραμμικών συστημάτων και σχεδιάστε πρόχειρα το φασικό διάγραμμα

- (i)  $\dot{x} = -x - y, \quad \dot{y} = x - y$
- (ii)  $\dot{x} = -2x, \quad \dot{y} = -4x - 2y$
- (iii)  $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = x + 3y$

**Άσκηση 4.2.3.** Για τα γραμμικά συστήματα με πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

ταξινομήστε το σημείο ισορροπίας ως προς την πραγματική παράμετρο  $a$ .

### 4.3 Σημεία ισορροπίας και ευστάθεια

#### 4.3.1 Σημεία ισορροπίας και γραμμικοποίηση

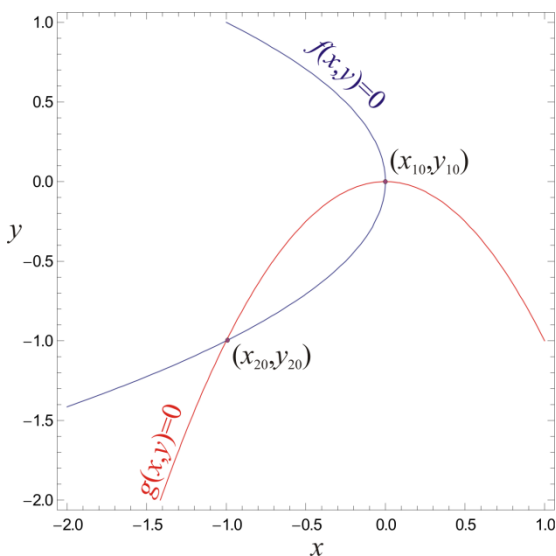
Επιστρέφουμε τώρα στα μη γραμμικά επίπεδα συστήματα που ορίσαμε στην αρχή του κεφαλαίου,

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y) \tag{4.30}$$

Τα σημεία ισορροπίας προκύπτουν από τη λύση του συστήματος

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0. \tag{4.31}$$

Γεωμετρικά, το σύστημα (4.31) εκφράζει την τομή ή τις τομές των δύο καμπύλων που ορίζουν αντίστοιχα οι δύο εξισώσεις (δες Σχήμα 4-7).



Σχήμα 4-7. Τα σημεία ισορροπίας για το σύστημα του παραδείγματος 2 της §4.1.

**Σημείωση.** Η εύρεση των λύσεων του αλγεβρικού συστήματος (4.31) επιτυγχάνεται υπολογιστικά με τις μεθόδους που περιγράψαμε στην §2.1.2.

Έστω η λύση ισορροπίας  $(x_0, y_0)$ . Μια λύση  $(x(t), y(t))$ , κοντά σ' αυτό, μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$x = x_0 + \delta x, \quad y = y_0 + \delta y.$$

Αντικαθιστώντας στο σύστημα (4.30) θα έχουμε

$$\delta \dot{x} = f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y), \quad \delta \dot{y} = g(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y)$$

Θεωρώντας τις ποσότητες  $\delta x$  και  $\delta y$  μικρές, αναπτύσσουμε σε σειρά Taylor τα δεύτερα μέλη των εξισώσεων γύρω από το σημείο ισορροπίας  $(x_0, y_0)$  μέχρι όρους 1<sup>ης</sup> τάξης ως προς τα  $\delta x$  και  $\delta y$

$$\delta \dot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 \delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_0 \delta y + O(\delta x, \delta y)$$

$$\delta \dot{y} = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_0 \delta x + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_0 \delta y + O(\delta x, \delta y)$$

όπου ο δείκτης 0 δηλώνει ότι οι παράγωγοι είναι υπολογισμένες στο σημείο  $(x_0, y_0)$ . Αν μετονομάσουμε τα  $\delta x$  και  $\delta y$  σε  $x$  και  $y$  ή, ισοδύναμα, αν με μια παράλληλη μετατόπιση φέρουμε το σημείο  $(x_0, y_0)$  στο  $(0,0)$ , το γραμμικοποιημένο σύστημα γράφεται

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 & \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_0 & \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_0 \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Το σύστημα (4.32) είναι ένα γραμμικό σύστημα με σταθερούς συντελεστές και οι λύσεις του είναι αυτές που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο με βάση τις ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathbf{A}$  ή με βάση το ίχνος του  $p = a_{11} + a_{22}$  και την ορίζουσα του  $q = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ . Έχουμε, λοιπόν, τις παρακάτω περιπτώσεις γραμμικής ευστάθειας για το σημείο ισορροπίας  $(x_0, y_0)$

	Ιδιοτιμές $(\lambda_1, \lambda_2)$	$p = a_{11} + a_{22}$	$q = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$	$\Delta = p^2 - 4q$
Σάγμα	$\lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_1 < 0 < \lambda_2$	-	$q < 0$	$\Delta > 0$
Ευσταθής κόμβος	$\lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	$p < 0$	$q > 0$	$\Delta > 0$
Ασταθής κόμβος	$\lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	$p > 0$	$q > 0$	$\Delta > 0$
Ευσταθής εστία	$\lambda, \lambda^* \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \text{Re } \lambda < 0$	$p < 0$	$q > 0$	$\Delta < 0$
Ασταθής εστία	$\lambda, \lambda^* \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \text{Re } \lambda > 0$	$p > 0$	$q > 0$	$\Delta < 0$
κέντρο	$\lambda, \lambda^* \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \text{Re } \lambda = 0$	$p = 0$	$q > 0$	$\Delta < 0$
Ιδιάζων ευσταθής κόμβος	$\lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_1 = \lambda_2 < 0$	$p < 0$	$q > 0$	$\Delta = 0$
Ιδιάζων ασταθής κόμβος	$\lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_1 = \lambda_2 > 0$	$p > 0$	$q > 0$	$\Delta = 0$

- Ένα σημείο ισορροπίας ονομάζεται **υπερβολικό** εάν το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών του Ιακωβιανού πίνακα  $\mathbf{A}$  είναι διάφορο του μηδενός.

**Παράδειγμα.** Για το σύστημα  $\dot{x} = -x - y^2$ ,  $\dot{y} = y + x^2$ , (δες και §4.1), βρίσκουμε δύο σημεία ισορροπίας, το  $(0,0)$  και το  $(-1,-1)$ .

Ο πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$ . Για το σημείο ισορροπίας  $(0,0)$  θα

έχουμε  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  με ιδιοτιμές  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$  και ιδιοδιανύσματα τα  $(1,0)$  και  $(0,1)$  αντίστοιχα. Συνεπώς

έχουμε ένα σάγμα με ευσταθή υπόχωρο τον άξονα  $x'Ox$  και ασταθή τον άξονα  $y'Oy$ . Για το σημείο

ισορροπίας  $(-1, -1)$  θα είναι  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  με καθαρά φανταστικές ιδιοτιμές  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$ , οπότε στη

γραμμική προσέγγιση το σημείο είναι κέντρο. Πράγματι, από το φασικό διάγραμμα του συστήματος, που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4-1β, διαπιστώνουμε ότι γύρω από τα σημεία ισορροπίας οι φασικές καμπύλες είναι ποιοτικά ίδιες με αυτές στο Σχήμα 4-3 και στο Σχήμα 4-5β, αντίστοιχα. Όμως αυτό δεν ισχύει πάντα όπως θα δούμε στις επόμενες παραγράφους.

### 4.3.2 Ευστάθεια στο μη γραμμικό σύστημα

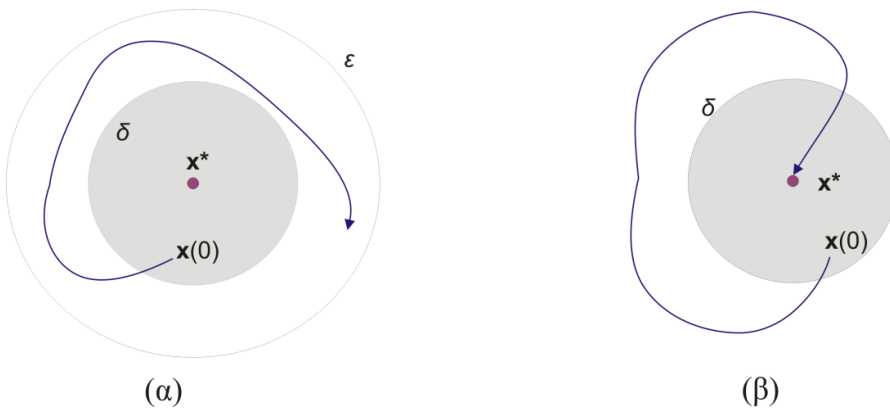
Συνήθως για τα σημεία ισορροπίας ενός μη γραμμικού συστήματος χρησιμοποιούνται οι παρακάτω ορισμοί για την ευστάθειά τους

- Ένα σημείο ισορροπίας (ή κρίσιμο σημείο)  $\mathbf{x}^*=(x_0,y_0)$  ονομάζεται **ευσταθές** (ή **ευσταθές** κατά **Lyapunov**) εάν ξεκινώντας από μια αρχική συνθήκη  $\mathbf{x}(0)$  σε απόσταση  $\delta$  από αυτό, η τροχιά θα παραμείνει σε απόσταση μικρότερη του  $\varepsilon$  για κάθε χρονική στιγμή, δηλαδή  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  έτσι ώστε, εάν  $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\| < \delta$  τότε  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$

Αν το σημείο δεν είναι ευσταθές τότε ονομάζεται **ασταθές**. Επίσης

- Ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας  $\mathbf{x}^* = (x_0, y_0)$ , ονομάζεται **ασυμπτωτικά ευσταθές** αν υπάρχει γύρω από το σημείο περιοχή  $\Delta = \{\mathbf{x} = (x, y), \|x - x^*\| < \delta\}$ , όπου  $\|\cdot\|$  εκφράζει απόσταση, έτσι ώστε για κάθε αρχική συνθήκη  $\mathbf{x}(0) \in \Delta$ , η τροχιά τείνει προς το σημείο ισορροπίας, δηλαδή

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| = 0$$



Σχήμα 4-8. (α) Ευστάθεια κατά Lyapunov (β) ασυμπτωτική ευστάθεια.

Στα γραμμικά συστήματα για τα οποία όλες οι ιδιοτιμές του πίνακά τους έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, το  $(0,0)$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Αν έστω και μια ιδιοτιμή έχει πραγματικό μέρος θετικό, τότε το  $(0,0)$  είναι ασταθές. Η περίπτωση του κέντρου αντιστοιχεί σε ευσταθές σημείο κατά Lyapunov αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Τα σημεία ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος τα οποία έλκουν τις τροχιές που ξεκινούν από τη γειτονιά τους ονομάζονται και **ελκυστές** (**attractors**) ή καταβόθρες (**sinks**). Στη γειτονιά τους αυτή η αποκλιση του διανυσματικού πεδίου θα είναι  $\text{div} \mathbf{f} < 0$ . Αντίθετα αν όλες οι τροχιές οι οποίες ξεκινούν από μια γειτονιά του σημείου ισορροπίας, απομακρύνονται από αυτό, το σημείο ονομάζεται και **απωθητής** (**repeller**) και στη γειτονιά του θα είναι  $\text{div} \mathbf{f} > 0$ . Προφανώς ένα διατηρητικό σύστημα δεν μπορεί να έχει ούτε ελκυστές ούτε απωθητές.

### 4.3.3 Η συνάρτηση Lyapunov

Έστω ότι υπάρχει μια συνάρτηση  $V = V(x, y)$  έτσι ώστε το μη γραμμικό σύστημα (4.30) να γράφεται ως

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (4.33)$$

Κατά μήκος μιας τροχιάς  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , ο ρυθμός μεταβολή της  $V$  θα είναι

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \leq 0$$

Άρα η  $V = V(x, y)$  πάντα θα ελαττώνεται (ή θα παραμένει σταθερή) κατά μήκος μιας τροχιάς. Επίσης στα ακρότατα της, όπου  $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$ , θα έχουμε σημεία ισορροπίας για το σύστημα (4.33). Άρα η  $V = V(x, y)$  είτε θα τείνει προς την ελάχιστη τιμή της κατά την εξέλιξη της τροχιάς ή θα απομακρύνεται από το μέγιστό της προς μικρότερες τιμές. Συνεπώς τα ελάχιστα της  $V = V(x, y)$  θα αντιστοιχούν σε ευσταθή σημεία ισορροπίας και τα μέγιστα σε ασταθή.

**Σημείωση.** Η συνάρτηση  $V=V(x,y)$  ονομάζεται και συνάρτηση δυναμικού, αλλά δεν πρέπει να τη συγχέουμε με τη συνάρτηση δυναμικού στα μηχανικά συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας.

Το *θεώρημα ευστάθειας του Lyapunov* έχει ως εξής:

- Έστω  $U \subset E^2$  και  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in U$  ένα μεμονωμένο σημείο ισορροπίας. Έστω, επίσης, μια βαθμωτή συνάρτηση  $V = V(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (x, y) \in U$  με τις εξής ιδιότητες

$$V(\mathbf{x}_0) = 0, \quad V(\mathbf{x}) > 0 \text{ αν } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$$

Τότε έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις

- Αν  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ ,  $\forall \mathbf{x} \in U \setminus \mathbf{x}_0$ , το  $\mathbf{x}_0$  είναι ευσταθές
- Αν  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ ,  $\forall \mathbf{x} \in U \setminus \mathbf{x}_0$ , το  $\mathbf{x}_0$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές
- Αν  $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0$ ,  $\forall \mathbf{x} \in U \setminus \mathbf{x}_0$ , το  $\mathbf{x}_0$  είναι ασταθές

Η συνάρτηση  $V = V(\mathbf{x})$  ονομάζεται συνάρτηση Lyapunov ([Lyapunov function](#)).

Δεν υπάρχει συστηματική μέθοδος για την κατασκευή μιας συνάρτησης Lyapunov για ένα οποιοδήποτε σύστημα. Όμως αν  $\dot{V} = 0$  τότε η συνάρτηση Lyapunov αποτελεί ολοκλήρωμα του συστήματος.

**Παράδειγμα 1.** Έστω το σύστημα του παραδείγματος 1 της §4.1,  $\dot{x} = -y^3$ ,  $\dot{y} = x^3$  με σημείο ισορροπίας το  $(0,0)$ . Το γραμμικό σύστημα γύρω από το  $(0,0)$  έχει πίνακα  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  και συνεπώς η γραμμική ευστάθεια του σημείου είναι κρίσιμη. Χρησιμοποιώντας ως συνάρτηση Lyapunov το ολοκλήρωμα  $V = x^4 + y^4$  του συστήματος θα έχουμε

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} = 4x^3(-y^3) + 4y^3x^3 = 0$$

Άρα σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές. Αυτό διαπιστώνεται και από το διάγραμμα φάσεων του συστήματος (δες Σχήμα 4-1α) όπου οι φασικές τροχιές περικλείουν το  $(0,0)$  αλλά δεν τείνουν προς αυτό. Εξάλλου το σύστημα είναι διατηρητικό.

**Παράδειγμα 2.** Έστω το σύστημα

$$\dot{x} = -x + y - xy^2, \quad \dot{y} = -x - y - x^2y \quad (4.34)$$

με σημείο ισορροπίας το  $(0,0)$  και συνάρτηση Lyapunov την  $V = x^2 + y^2$ . Βρίσκουμε ότι

$$\dot{V} = -2(x^2 + y^2) - 4x^2y^2 < 0, \quad \forall (x, y) \neq (0,0).$$

Άρα το  $(0,0)$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Το γραμμικό σύστημα γύρω από το  $(0,0)$  είναι το

$$\dot{x} = -x + y, \quad \dot{y} = -2x - y \quad \eta \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

και οι ιδιοτιμές του πίνακα του συστήματος είναι  $\lambda = -1 \pm i\sqrt{2}$ . Συνεπώς, από άποψη γραμμικής ευστάθειας, το  $(0,0)$  είναι ευσταθής εστία.

**Παράδειγμα 3.** Θα μελετήσουμε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας  $(0,0)$  του συστήματος

$$\dot{x} = -y - x^3, \quad \dot{y} = x - y^3 \quad (4.35)$$

χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Lyapunov  $V = x^2 + y^2$ . Βρίσκουμε

$$\dot{V} = -2(x^4 + y^4) < 0 \quad \forall (x, y) \neq (0,0)$$

και άρα το σημείο  $(0,0)$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Ο Ιακωβιανός πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος έχει ιδιοτιμές  $\lambda = \pm i$  και συνεπώς υποδεικνύει (λανθασμένα!) ότι το  $(0,0)$  είναι κέντρο.

## Ασκήσεις

**Άσκηση 4.3.1.** Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και ταξινομήστε τα με βάση την γραμμική τους ευστάθεια

i)  $\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = x + y - 2xy$

ii)  $\dot{x} = 1 - xy, \quad \dot{y} = -y + xy$

iii)  $\dot{x} = x + x^2 - 2xy, \quad \dot{y} = -y + xy$

$$\text{iv) } \dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = -x - y + (x + y)^3$$

$$\text{v) } \dot{x} = x - xy, \quad \dot{y} = -y - x^2$$

$$\text{vi) } \dot{x} = -x + xy - 5, \quad \dot{y} = y^2 - x^2$$

$$\text{vii) } \dot{x} = 3xy, \quad \dot{y} = -4y^2 - x^2 + 4$$

**Άσκηση 4.3.2.** Για το μη γραμμικό σύστημα βρείτε τα σημεία ισορροπίας και μελετήστε την γραμμική τους ευστάθεια για όλες τις τιμές της θετικής παραμέτρου  $a$

$$\dot{x} = -ax + y, \quad \dot{y} = \frac{x^2}{1+x^2} - y \quad (a > 0)$$

**Άσκηση 4.3.3.** Για το σύστημα με εξισώσεις

$$\dot{x} = y - (y - x)^2, \quad \dot{y} = -x - y^2$$

α) Βρείτε τη γραμμική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας  $(0,0)$

β) Ολοκληρώστε αριθμητικά κάποια τροχιά με αρχικές συνθήκες κοντά στο σημείο ισορροπίας  $(0,0)$  και αποφανθείτε για την ευστάθειά του.

**Άσκηση 4.3.4.** Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Lyapunov  $V = x^2 + y^2$  δείξτε ότι το σημείο ισορροπίας  $(0,0)$  του συστήματος

$$\dot{x} = x^3 - y, \quad \dot{y} = x + 2y$$

είναι ασυμπτωτικά ασταθές.

**Άσκηση 4.3.5.** Χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση Lyapunov της μονοπαραμετρικής οικογένειας  $V = x^2 + ay^2$ , όπου  $a$  θετική παράμετρος, δείξτε ότι το σύστημα με εξισώσεις

$$\dot{x} = -x - 2y^2, \quad \dot{y} = xy - y^3$$

είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

**Άσκηση 4.3.6.** Αποδείξτε ότι το σημείο ισορροπίας  $(0,0)$  του συστήματος

$$\dot{x} = -y - x\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \dot{y} = x - y\sqrt{x^2 + y^2}$$

Είναι ευσταθής εστία και όχι κέντρο όπως υποδεικνύει η γραμμική ευστάθεια (υπόδειξη: γράψτε τις διαφορικές εξισώσεις σε πολικές συντεταγμένες)

## 4.4 Από το γραμμικό στο μη-γραμμικό σύστημα. Διάγραμμα φάσεων

### 4.4.1 Τοπολογική ισοδυναμία και το θεώρημα Hartman-Grobman

Κοντά στα σημεία ισορροπίας μπορούμε να προσεγγίσουμε την εξέλιξη του συστήματος με το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα. Δίνει όμως πράγματι το γραμμικό σύστημα σωστή πληροφορία για την εξέλιξη του μη γραμμικού συστήματος; Στο παράδειγμα 3 της προηγούμενης παραγράφου είδαμε ότι το γραμμικό σύστημα υποδεικνύει ότι το  $(0,0)$  είναι κέντρο και, συνεπώς, θα πρέπει γύρω από αυτό να έχουμε περιοδικές ταλαντώσεις των δυναμικών μεταβλητών. Όμως, η ανάλυση κατά Lyapunov υποδεικνύει, και σωστά, ότι έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια, δηλαδή οι τροχιές τείνουν προς το  $(0,0)$ . Το ερώτημα, λοιπόν, που τίθεται είναι αν το φασικό διάγραμμα κοντά στα σημεία ισορροπίας είναι *τοπολογικά ισοδύναμο* με αυτό του γραμμικού συστήματος. Θα ορίσουμε, λοιπόν, την **τοπολογική ισοδυναμία** και θα αναφερθούμε στο [θεώρημα Hartman-Grobman](#).

Εστω ότι έχουμε δύο διαφορετικά δυναμικά συστήματα με λύσεις τις ροές  $\phi(\mathbf{x}, t)$  και  $\psi(\mathbf{x}, t)$ . Αν υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση  $h: E^2 \rightarrow E^2$ , η οποία να είναι 1-1 (δηλαδή είναι αντιστρέψιμη) και η αντίστροφή της είναι συνεχής (αυτό ονομάζεται [ομοιομορφισμός](#)), τέτοια ώστε

$$\phi(h(\mathbf{x}), t) = h(\psi(\mathbf{x}, t)) \quad (4.36)$$

και αν επιπλέον η  $h$  διατηρεί τον προσανατολισμό της φασικής ροής, τότε τα δύο δυναμικά συστήματα ονομάζονται **τοπολογικά ισοδύναμα**.



Η βασική ιδιότητα της τοπολογικής ισοδυναμίας ή, αλλιώς, συζυγίας είναι ότι οι τροχιές της  $\phi(\mathbf{x}, t)$  (δηλαδή του 1<sup>ου</sup> συστήματος) απεικονίζονται μέσω της  $h$  σε τροχιές της  $\psi(\mathbf{x}, t)$  (δηλαδή του 2<sup>ου</sup> συστήματος) και αντίστροφα. Η σχέση (4.36) γράφεται και ως

$$h^{-1}(\phi(h(\mathbf{x}), t)) = \psi(\mathbf{x}, t).$$

Αυτό σημαίνει ότι παίρνουμε την αρχική συνθήκη  $\mathbf{x}$  και την απεικονίζουμε σε μια άλλη αρχική συνθήκη  $h(\mathbf{x})$ , παίρνουμε την τροχιά της κάτω από το 1<sup>ο</sup> δυναμικό σύστημα με ροή την  $\phi$ , δηλαδή την  $\phi(h(\mathbf{x}), t)$ , που παριστάνει μια καμπύλη στον φασικό  $\chi$  και στη συνέχεια την απεικονίζουμε σε μια άλλη καμπύλη, την  $h^{-1}(\phi(h(\mathbf{x}), t))$ . Αυτή ακριβώς η καμπύλη είναι η τροχιά του σημείου  $\mathbf{x}$  κάτω από το δυναμικό σύστημα  $\psi(\mathbf{x}, t)$ .

Αν λοιπόν ξέρουμε τη λύση ενός δυναμικού συστήματος, π.χ. του  $\psi(\mathbf{x}, t)$ , ή έστω κάποιες τοπολογικές ιδιότητές της, και γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένας τέτοιος ομοιομορφισμός  $h$ , τότε γνωρίζουμε και τη λύση του  $\phi(\mathbf{x}, t)$ , ή ότι η λύση του έχει τις ίδιες τοπολογικές ιδιότητες με την  $\psi_t$ . Αν π.χ.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^*$ , τότε ισχύει ότι  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(h(\mathbf{x}), t) = h(\mathbf{x}^*)$  κλπ.

- **Θεώρημα Hartman-Grobman.** Έστω το μη γραμμικό σύστημα (4.30) και μια περιοχή  $E$  του χώρου των φάσεων που περιέχει ένα σημείο ισορροπίας  $(x_0, y_0)$  στο οποίο αντιστοιχεί το γραμμικοποιημένο σύστημα (4.32). Αν  $\lambda_1, \lambda_2$  είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathbf{A}$  με πραγματικό μέρος διάφορο του μηδενός ( $\text{Re } \lambda_1 \neq 0$  και  $\text{Re } \lambda_2 \neq 0$ ), τότε οι τροχιές του μη-γραμμικού συστήματος στην περιοχή  $E$  είναι *τοπολογικά ισοδύναμες* (ή συζυγείς) με τις τροχιές του γραμμικού συστήματος σε μια περιοχή του γύρω από το  $(0, 0)$ .

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα μπορεί ναδειχτεί ότι οι **υπόχωροι** του γραμμικού συστήματος αντιστοιχούν σε φασικές τροχιές, ασυμπτωτικές προς το σημείο ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος, που ονομάζονται **αναλλοιώτες πολλαπλότητες**. Μάλιστα οι αναλλοιώτες πολλαπλότητες εφάπτονται στους γραμμικούς υπόχωρους στο σημείο ισορροπίας.



Σχήμα 4-9. Φασική τοπολογία ενός γραμμικού (α) και ενός μη γραμμικού (β) συστήματος γύρω από ένα υπερβολικό σημείο ισορροπίας (σάγμα).

Όταν μια πολλαπλότητα ξεκινάει και τελειώνει στο ίδιο σημείο ισορροπίας (διαγράφει δηλαδή ένα βρόγχο στο φασικό χώρο) ονομάζεται **ομοκλινική πολλαπλότητα** ([homoclinic manifold](#)). Αν μια πολλαπλότητα αρχίζει και τελειώνει σε διαφορετικά σημεία ισορροπίας τότε ονομάζεται **ετεροκλινική πολλαπλότητα**.

Συμπερασματικά, και τα σημεία ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος χαρακτηρίζονται ως σάγματα, κόμβοι, εστίες και κέντρα. Αν όλες οι ιδιοτιμές του γραμμικοποιημένου συστήματος έχουν πραγματικό μέρος αρνητικό,  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ , τότε το σημείο ισορροπίας ονομάζεται **γραμμικά ευσταθές** ενώ, αν έστω και μια ιδιοτιμή έχει πραγματικό μέρος θετικό, τότε το σημείο ισορροπίας ονομάζεται **γραμμικά ασταθές**. Επιπλέον, το σημείο ισορροπίας ενός γραμμικού συστήματος, του πίνακα του οποίου οι ιδιοτιμές έχουν μη μηδενικό πραγματικό μέρος  $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0$ , ονομάζεται **υπερβολικό**, δηλαδή υπερβολικά σημεία

χαρακτηρίζονται τα σάγματα, οι κόμβοι και οι εστίες, όχι τα κέντρα. Άρα, το θεώρημα Hartman-Grobman ισχύει μόνο για τη γειτονιά των υπερβολικών σημείων.

#### 4.4.2 Φασικό διάγραμμα στην περιοχή των σημείων ισορροπίας

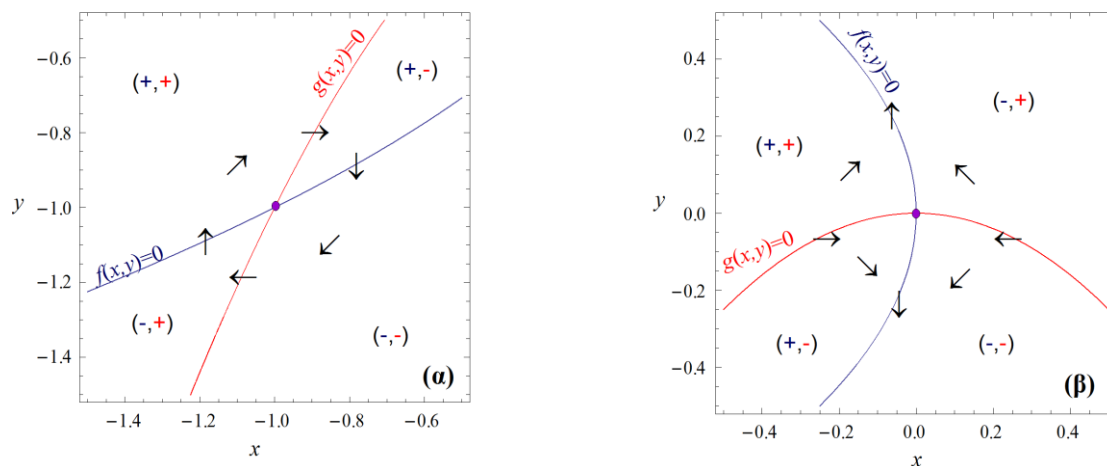
Ο χώρος φάσεων του συστήματος απεικονίζεται υπολογιστικά σε ένα επίπεδο τόπο  $(x_{\min}, x_{\max}) \times (y_{\min}, y_{\max})$ , ο οποίος πρέπει να περιέχει όλα τα σημεία ισορροπίας του συστήματος. Σύμφωνα με το θεώρημα Hartman-Grobman, η μορφή των φασικών καμπύλων στη γειτονιά των υπερβολικών σημείων θα είναι αυτή που περιγράφεται από την γραμμική τους ευστάθεια. Επειδή το σύστημα είναι αυτόνομο, οι φασικές τροχιές δεν τέμνονται μεταξύ τους. Αυτό μας βοηθάει στο να επεκτείνουμε τις φασικές καμπύλες και πέρα από την περιοχή των σημείων ισορροπίας.

Μια σημαντική βοήθεια στο να κατανοήσουμε την ροή στο χώρο φάσεων μας την δίνουν οι **ισοκλινείς καμπύλες** οι οποίες αποτελούνται από τα σημεία  $(x, y)$  για τα οποία

$$\frac{dy}{dx} = \text{σταθ.} \quad (4.37)$$

Ειδικότερα, η **x-ισοκλινής** ορίζεται από τα σημεία για τα οποία είναι  $\dot{x}=0$  ή, ισοδύναμα,  $f(x, y)=0$ . Αντίστοιχα η **y-ισοκλινής** ορίζεται για τα σημεία όπου  $\dot{y}=0$  ή  $g(x, y)=0$ . Όπως ήδη αναφέραμε στα σημεία ισορροπίας οι x και y-ισοκλινείς τέμνονται και η γύρω περιοχή χωρίζεται σε τέσσερα τμήματα. Από τη μια μεριά τις x-ισοκλινούς θα είναι είτε  $\dot{x}>0$  ή  $\dot{x}<0$  και το αντίθετο από την άλλη πλευρά. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε τη φορά της x-συνιστώσας του διανυσματικού πεδίου. Το ίδιο ισχύει και για την y-ισοκλινή, και αντίστοιχα ορίζουμε τη φορά της y-συνιστώσας του διανυσματικού πεδίου.

**Παράδειγμα 1.** Για το σύστημα  $\dot{x} = -x - y^2$ ,  $\dot{y} = y + x^2$ , οι x και y ισοκλινείς παρουσιάζονται στο Σχήμα 4-7. Παρατηρούμε τις τέσσερις περιοχές γύρω από κάθε σημείο ισορροπίας, που η κάθε μια χαρακτηρίζεται από συγκεκριμένα πρόσημα για το  $\dot{x}$  και το  $\dot{y}$ . Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζονται, για το κάθε σημείο ισορροπίας ξεχωριστά, οι περιοχές αυτές και η κατεύθυνση ροής που αντιστοιχεί.



Σχήμα 4-10. Ισοκλινείς και κατεύθυνση ροής γύρω από τα σημεία ισορροπίας του συστήματος στο παράδειγμα 1. α)  $(-1, -1)$ , κέντρο, β)  $(0, 0)$ , σάγμα.

Η ροή στο Σχήμα 4-10β παραπέμπει σε σάγμα, όμως για το σημείο ισορροπίας  $(-1, -1)$  (βλ. Σχήμα 4-10α) η κατεύθυνση της ροής υποδηλώνει είτε κέντρο (όπως και η γραμμική ευστάθεια) ή εστία. Το θεώρημα Hartman-Grobman δεν εγγυάται ότι στο μη γραμμικό σύστημα θα ισχύει η γραμμική προσέγγιση, δηλαδή η ύπαρξη κλειστών φασικών καμπύλων γύρω από το σημείο ισορροπίας.

Σε κάποιες περιπτώσεις ενδέχεται το δυναμικό σύστημα (4.30) να έχει κάποιες συμμετρίες, οι οποίες αυτομάτως μετατρέπονται σε γεωμετρικές συμμετρίες για τις φασικές καμπύλες. Μια κλάση συστημάτων με συμμετρία είναι τα ανάστροφα συστήματα (reversible systems) τα οποία ορίζονται ως εξής

- Το σύστημα  $\dot{x} = f(x, y), \dot{y} = g(x, y)$  θα ονομάζεται **αναστρέψιμο** (*reversible*) αν παραμένει αναλλοίωτο κάτω από τον μετασχηματισμό  $t \rightarrow -t, y \rightarrow -y$  ή, αλλιώς αν

$$f(x, -y) = -f(x, y), \quad g(x, -y) = g(x, y) \quad (4.38)$$

Η παραπάνω συμμετρία σημαίνει ότι οι φασικές καμπύλες είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα  $x'Ox$  και η ροή για  $y < 0$  έχει την αντίθετη φορά με αυτή για  $y > 0$ . Αν μια φασική καμπύλη τέμνει τον άξονα  $x'Ox$  (σε ένα ομαλό σημείο του διανυσματικού πεδίου) τότε, λόγω της συμμετρίας και λόγω της μοναδικότητας των λύσεων, θα πρέπει να την τέμνει κάθετα στο σημείο όπου  $y = 0$ . Άμεση απόρροια αυτού είναι το παρακάτω θεώρημα

- **Θεώρημα** (μη γραμμικά κέντρα σε αναστρέψιμα συστήματα). Έστω ένα σημείο ισορροπίας  $\mathbf{x}^*$  του συστήματος  $\dot{x} = f(x, y), \dot{y} = g(x, y)$ , το οποίο είναι κέντρο με βάση την γραμμική προσέγγιση. Αν το σύστημα είναι αναστρέψιμο τότε κοντά στο σημείο  $\mathbf{x}^*$  όλες οι φασικές τροχιές είναι κλειστές καμπύλες.

Δηλαδή ο περιορισμός του θεωρήματος Hartman-Grobman για τα κέντρα δεν ισχύει στην περίπτωση των αναστρέψιμων συστημάτων. Σημειώνουμε ότι όλα τα μηχανικά συστήματα

$$\ddot{x} = f(x) \quad (\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x))$$

που περιγράψαμε στο τρίτο κεφάλαιο είναι αναστρέψιμα.

**Παράδειγμα 1 (συνέχεια).** Ας κάνουμε ένα μετασχηματισμό των δυναμικών μεταβλητών  $(x, y)$  του συστήματος  $\dot{x} = -x - y^2, \dot{y} = y + x^2$  στις νέες μεταβλητές  $(X, Y)$  σύμφωνα με τις σχέσεις

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y).$$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός εκφράζει μια στροφή κατά  $-45^\circ$  του συστήματος συντεταγμένων  $xOy$  και οι διαφορικές εξισώσεις γράφονται

$$\dot{X} = Y - \sqrt{2}XY, \quad \dot{Y} = X + \frac{\sqrt{2}}{2}(X^2 + Y^2)$$

Το γραμμικό κέντρο, που στο αρχικό σύστημα βρισκόταν στη θέση  $(-1, 1)$  (δες το παράδειγμα 2 στην §4.1) τώρα θα βρίσκεται στη θέση  $(-\sqrt{2}, 0)$ . Παρατηρούμε ότι το νέο σύστημα είναι αναστρέψιμο, σύμφωνα με τον παραπάνω μετασχηματισμό, και συνεπώς γύρω από το γραμμικό κέντρο  $(-\sqrt{2}, 0)$  (ή, ισοδύναμα γύρω από το  $(0, 0)$  στις αρχικές συντεταγμένες) θα έχουμε κλειστές φασικές καμπύλες. Αυτό φυσικά επιβεβαιώνεται από το διάγραμμα φάσεων στο Σχήμα 4-1β.

Για το παραπάνω παράδειγμα διαπιστώνουμε ότι το  $(-1, -1)$  είναι ευσταθές αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές, όπως βρίσκουμε αν χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση Lyapunov  $V = \frac{x^3 + y^3}{3} + xy$ , που είναι το ολοκλήρωμα του συστήματος. Γενικότερα ισχύει το παρακάτω θεώρημα του Poincaré

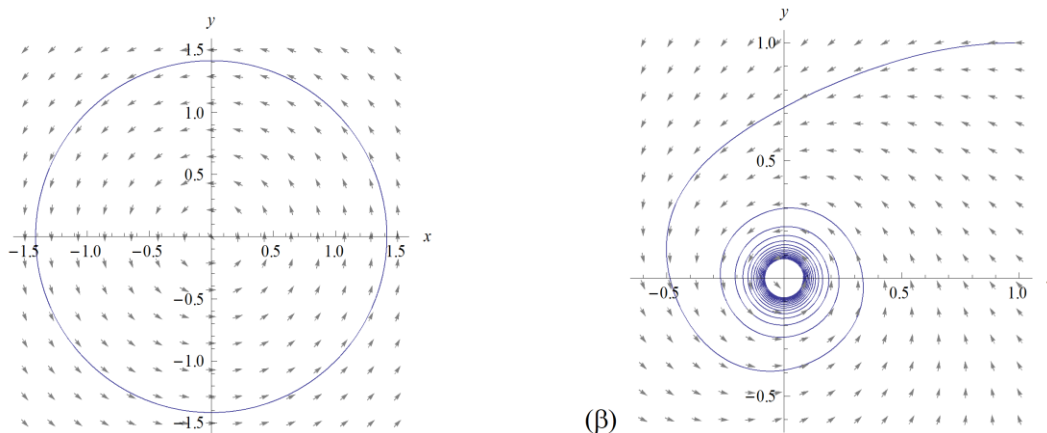
- **Θεώρημα.** Αν ένα σημείο ισορροπίας  $\mathbf{x}^*$  του συστήματος  $\dot{x} = f(x, y), \dot{y} = g(x, y)$  είναι ευσταθές αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές τότε κοντά στο σημείο  $\mathbf{x}^*$  όλες οι φασικές τροχιές είναι κλειστές καμπύλες.

**Παράδειγμα 2.** Θεωρούμε το σύστημα του παραδείγματος 3 της §4.3.3

$$\dot{x} = -y - x^3, \quad \dot{y} = x - y^3$$

Το σημείο ισορροπίας  $(0, 0)$  προκύπτει ως κέντρο με την γραμμική ανάλυση της ευστάθειας και συνεπώς δεν ισχύει το θεώρημα Hartman-Grobman. Επίσης το σύστημα δεν είναι ανάστροφο ώστε να διαπιστώσουμε πως και στο μη γραμμικό σύστημα οι φασικές τροχιές γύρω από το  $(0, 0)$  θα είναι κλειστές. Αντίθετα η ανάλυση

ευστάθειας κατά Lyapunov μας έδειξε ότι οι τροχιές είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς. Μια ενδεικτική φασική καμπύλη του γραμμικοποιημένου και του μη γραμμικού συστήματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 4-11. Παρατηρούμε ότι η γραμμική προσέγγιση δεν οδηγεί σε σωστή πληροφορία για την εξέλιξη στο μη γραμμικό σύστημα.



Σχήμα 4-11. Η φασική καμπύλη με αρχικές συνθήκες (1,1) του γραμμικοποιημένου και του μη γραμμικού συστήματος για το παράδειγμα 2.

### 4.4.3 Συνολική εικόνα του φασικού διαγράμματος

Όταν είναι γνωστό ένα ολοκλήρωμα του συστήματος της μορφής  $F(x,y)=c$  τότε οι φασικές καμπύλες αποτελούν *ισοσταθμικές καμπύλες* του ολοκλήρωματος (δες §4.1). Γενικά, όμως, όταν δεν είναι γνωστό ένα τέτοιο ολοκλήρωμα, καταφεύγουμε στην αριθμητική ολοκλήρωση των τροχιών.

Στα μηχανικά συστήματα που μελετήσαμε στο τρίτο κεφάλαιο, οδηγός για τη σχεδίαση του φασικού διαγράμματος ή, όπως αλλιώς το αναφέραμε, ο σκελετός του χώρου φάσεων ήταν οι διαχωριστικές καμπύλες, οι οποίες ξεκινούσαν από σάγματα. Οι διαχωριστικές αυτές καμπύλες αποτελούνταν από ομοκλινικές ή ετεροκλινικές τροχιές, όπως τις ορίσαμε παραπάνω. Και στα δυναμικά συστήματα της μορφής (4.1), οι ομοκλινικές ή ετεροκλινικές τροχιές, όταν υπάρχουν, χωρίζουν το χώρο φάσεων σε διαφορετικές περιοχές με διαφορετικά ποιοτικά χαρακτηριστικά εξέλιξης.

**Παράδειγμα 3.** Έστω το διατηρητικό σύστημα

$$\dot{x} = y(1-x^2), \quad \dot{y} = -x(1-y^2), \quad (4.39)$$

το οποίο παρουσιάζει πέντε σημεία ισοροπίας, τα

$$\Sigma_0(0,0), \quad \Sigma_1(1,1), \quad \Sigma_2(1,-1), \quad \Sigma_3(-1,-1), \quad \Sigma_4(-1,1)$$

Γενικά ο πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} -2xy & 1-x^2 \\ -1+y^2 & 2xy \end{pmatrix}$$

Για το (0,0), θα είναι  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  με ιδιοτιμές  $\lambda = \pm i$ , και συνεπώς το σημείο ισοροπίας είναι κέντρο. Για το

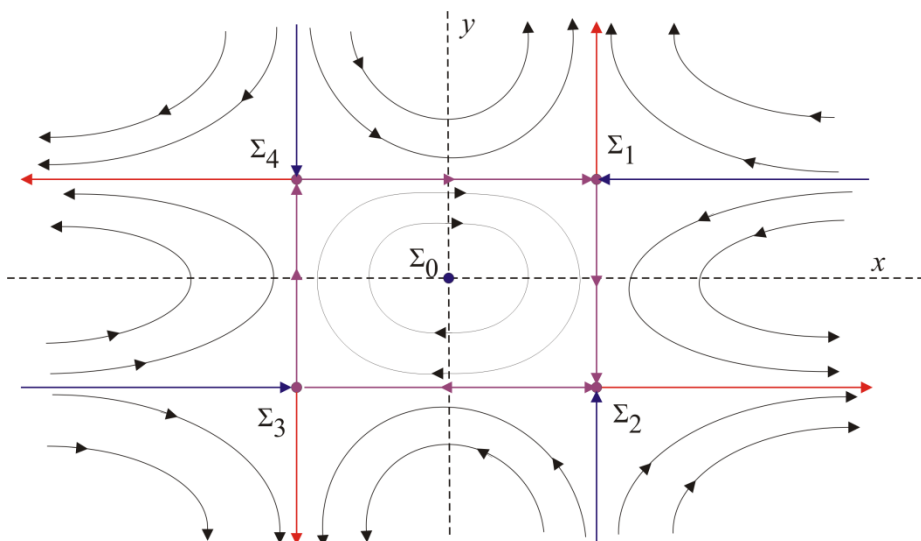
(1,1) βρίσκουμε  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  με  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2$  και ιδιοδιανύσματα τα (1,0) και (0,1). Το σημείο ισοροπίας

(1,1) θα είναι σάγμα με ευσταθή υπόχωρο τον άξονα των  $x$ , ο οποίος περνάει από το σημείο (1,1), δηλαδή  $y=1$ , και με ασταθή υπόχωρο τον κάθετο άξονα  $x=1$ . Παρατηρούμε ότι οι παραπάνω υπόχωροι ικανοποιούν τις μη γραμμικές εξισώσεις του συστήματος και συνεπώς υπάρχουν ως αναλλοίωτες πολλαπλότητες και στο χώρο φάσεων του μη γραμμικού συστήματος. Παρόμοια εικόνα βρίσκουμε και για τα υπόλοιπα σημεία ισοροπίας. Έτσι παρατηρούμε ότι τα σημεία  $\Sigma_1$  έως  $\Sigma_4$  ενώνονται με ετεροκλινικές πολλαπλότητες.

Αν σχεδιάσουμε τις αναλλοίωτες πολλαπλότητες στο επίπεδο  $xy$  (βλέπε Σχήμα 4-12), παρατηρούμε ότι ο χώρος φάσεων χωρίζεται σε εννέα περιοχές. Γύρω από το σημείο (0,0) είναι η μόνη περατωμένη περιοχή. Οι υπόλοιπες είναι ανοιχτές και οι ασταθείς πολλαπλότητες οδηγούν τις φασικές καμπύλες προς το άπειρο.

Για το γραμμικό κέντρο της περατωμένης περιοχής, θα έχουμε κλειστές φασικές καμπύλες διότι, εύκολα παρατηρούμε, ότι το σύστημα είναι ανάστροφο.

Με βάση, λοιπόν τα παραπάνω δεδομένα, σχεδιάζουμε το χώρο φάσεων, ο οποίος δίνεται (σηματικά) στο παρακάτω σχήμα.



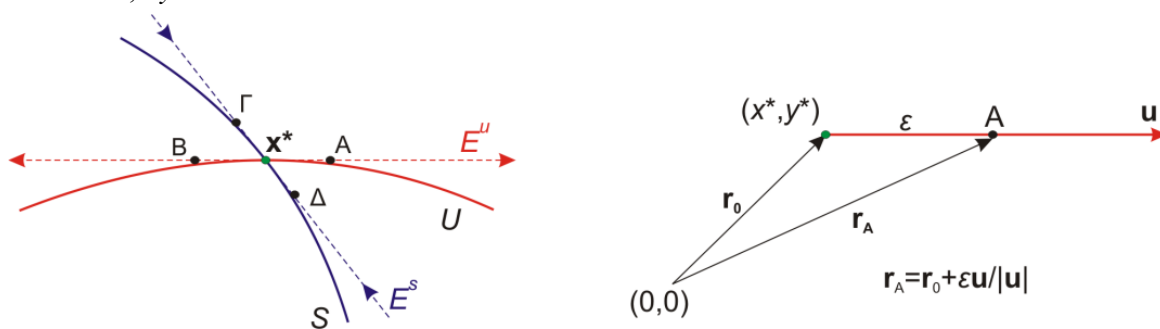
Σχήμα 4-12. Το φασικό διάγραμμα (σηματικά) του συστήματος (4.39). Τα σάγματα  $\Sigma_1$  έως  $\Sigma_4$  ενώνονται με ετεροκλινικές πολλαπλότητες (μωβ γραμμές).

Ο υπολογισμός των αναλλοίωτων πολλαπλοτήτων, εν γένει δεν μπορεί να γίνει αναλυτικά όπως στο παραπάνω παράδειγμα. Μπορούμε όμως να τις προσεγγίσουμε με αριθμητικές μεθόδους. Αν βρούμε μια αρχική συνθήκη η οποία ανήκει πάνω στην πολλαπλότητα, τότε παίρνουμε όλη την πολλαπλότητα με αριθμητική ολοκλήρωση.

Οι αναλλοίωτες πολλαπλότητες που αντιστοιχούν στα σημεία ισορροπίας  $\mathbf{x}^*$  εφάπτονται με τους αντίστοιχους υπόχωρους  $E$  του γραμμικού συστήματος στα σημεία ισορροπίας (Σχήμα 4-13). Οπότε οι αρχικές συνθήκες των πολλαπλοτητών προσεγγίζονται εύκολα σε γραμμική προσέγγιση, δηλαδή θεωρούμε αρχικές συνθήκες, σημεία  $(x(0), y(0))$ , πάνω στους γραμμικούς υπόχωρους αλλά πολύ κοντά στο σημείο ισορροπίας. Συγκεκριμένα, αν  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε μια πολλαπλότητα τότε επιλέγουμε ως αρχικές συνθήκες αυτές του σημείου A στο Σχήμα 4-13,

$$x(0) = x^* \pm u_x \delta x, \quad y(0) = y^* \pm u_y \delta y,$$

όπου  $\delta x, \delta y \ll 1$



Σχήμα 4-13. Γραμμική προσέγγιση αρχικών συνθηκών πάνω σε μια πολλαπλότητα.

Αν το παραπάνω σημείο αρχικών συνθηκών ανήκει σε μια ασταθή πολλαπλότητα, τότε η αριθμητική λύση της βρίσκεται με ολοκλήρωση στο διάστημα  $(0, t_{max})$ . Αν η πολλαπλότητα είναι **ευσταθής** η αριθμητική λύση της βρίσκεται με ολοκλήρωση στο διάστημα  $(-t_{max}, 0)$ .

Υπολογιστικά λοιπόν, για την κατασκευή του διαγράμματος φάσεων έχουμε να κάνουμε τα παρακάτω βήματα

1. Εύρεση σημείων ισορροπίας
2. Εύρεση γραμμικής ευστάθειας (ή, ισοδύναμα, της τοπολογίας κοντά στα σημεία ισορροπίας).
3. Υπολογισμός των ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων αν υπάρχουν και εντοπισμός των περιοχών που ορίζουν στο χώρο φάσεων .
4. Σχεδίαση φασικού πορτρέτου στο οποίο να συμπεριλαμβάνονται οι ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες και επιλογή κατάλληλων αρχικών συνθηκών (τουλάχιστον μια για κάθε μια ποιοτικά διαφορετική εξέλιξη του συστήματος). Η προσθήκη και του διανυσματικού πεδίου μας δίνει και την κατεύθυνση των φασικών καμπύλων.

**Παράδειγμα 3 [M].** Χρησιμοποιώντας το Mathematica, θα σχεδιάσουμε το χώρο φάσεων του συστήματος στο παρακάτω σύστημα

$$\dot{x} = 1 - y, \quad \dot{y} = x^2 - y^2 \quad (4.40)$$

Ορίζουμε αρχικά το διανυσματικό πεδίο και τις διαφορικές εξισώσεις

```
f1 = 1 - y; f2 = x^2 - y^2;
deq1 = x'[t] == 1 - y[t]; deq2 = y'[t] == x[t]^2 - y[t]^2
```

Βρίσκουμε τα σημεία ισορροπίας

```
eqps = NSolve[{f1 == 0, f2 == 0}, {x, y}]
Out[1]= {{x -> -1., y -> 1.}, {x -> 1., y -> 1.}}
```

Έχουμε δηλαδή δύο σημεία ισορροπίας το  $(-1,1)$  και το  $(1,1)$ . Ο πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος θα είναι

```
a11 = D[f1, x]; a12 = D[f1, y]; a21 = D[f2, x]; a22 = D[f2, y];
A = {{a11, a12}, {a21, a22}}
Out[1]= {{0, -1}, {2 x, -2 y}}
```

Για το πρώτο σημείο ισορροπίας  $(x_{00}, y_{00})$  έχουμε τις παρακάτω ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

```
x00 = x /. eqps[[1]]; y00 = y /. eqps[[1]]; A1 = A /. eqps[[1]];
Eigenvalues[A1]
u = Eigenvectors[A1]
Out[1]= {-2.73205, 0.732051}
Out[2]= {{0.343724, 0.939071}, {0.806898, -0.59069}}
```

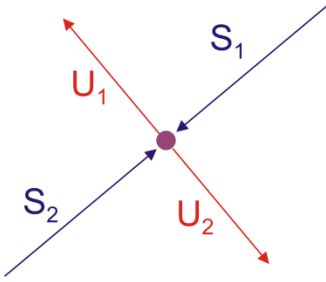
Άρα το  $(-1,1)$  είναι **σάγμα** με ευσταθή υπόχωρο κατά το ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{u}[[1]] = (0.344, 0.939)$  και ασταθή υπόχωρο κατά το  $\mathbf{u}[[2]] = (0.807, -0.591)$  .

Για το δεύτερο σημείο ισορροπίας θα έχουμε

```
A2 = A /. eqps[[2]];
Eigenvalues[A2]
Eigenvectors[A2]
Out[1]= {-1. + 1. I, -1. - 1. I}
Out[2]= {{0.408248 + 0.408248 I, 0.816497 + 0. I}, {0.408248 - 0.408248 I, 0.816497 + 0. I}}
```

Άρα το  $(1,1)$  είναι **ευσταθής εστία**.

Στο σάγμα  $(x_{00}, y_{00}) = (-1, 1)$ , έχουμε τους δύο υπόχωρους που ο καθένας τους χωρίζεται σε δύο κλάδους όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Θεωρώντας απόσταση  $\epsilon=0.01$  από το σημείο ισορροπίας, ορίζουμε για τους τέσσερις κλάδους αρχικές συνθήκες,

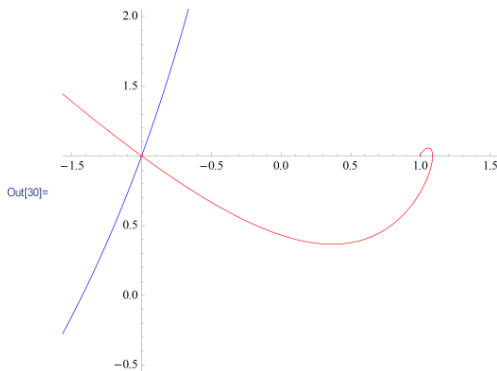
```
epsilon = 0.01;
x0s1 = x00 + epsilon*u[[1, 1]]; y0s1 = y00 + epsilon*u[[1, 2]]; (*S1*)
x0s2 = x00 - epsilon*u[[1, 1]]; y0s2 = y00 - epsilon*u[[1, 2]]; (*S2*)
x0u1 = x00 - epsilon*u[[2, 1]]; y0u1 = y00 - epsilon*u[[2, 1]]; (*U1*)
x0u2 = x00 + epsilon*u[[2, 1]]; y0u2 = y00 + epsilon*u[[2, 1]]; (*U1*)
```

και επιλύουμε αριθμητικά τις τροχιές για κατάλληλο χρονικό διάστημα

```
solS1 = NDSolve[{deq1, deq2, x[0] == x0s1, y[0] == y0s1}, {x,y}, {t, -2, 0}];
solS2 = NDSolve[{deq1, deq2, x[0] == x0s2, y[0] == y0s2}, {x,y}, {t, -2, 0}];
solU1 = NDSolve[{deq1, deq2, x[0] == x0u1, y[0] == y0u1}, {x,y}, {t, 0, 10}];
solU2 = NDSolve[{deq1, deq2, x[0] == x0u2, y[0] == y0u2}, {x,y}, {t, 0, 25}];
```

Σχεδιάζουμε τις παραπάνω λύσεις - πολλαπλότητες με την ParametricPlot

```
S1 = ParametricPlot[{x[t]/.solS1[[1]], y[t]/.solS1[[1]]}, {t,-2,0}, PlotStyle -> Blue];
S2 = ParametricPlot[{x[t]/.solS2[[1]], y[t]/.solS2[[1]]}, {t,-2,0}, PlotStyle -> Blue];
U1 = ParametricPlot[{x[t]/.solU1[[1]], y[t]/.solU1[[1]]}, {t,0,10}, PlotStyle -> Red];
U2 = ParametricPlot[{x[t]/.solU2[[1]], y[t]/.solU2[[1]]}, {t,0,25}, PlotStyle -> Red];
Show[S1, S2, U1, U2, PlotRange -> {{-1.5, 1.5}, {-0.5, 2}}]
```



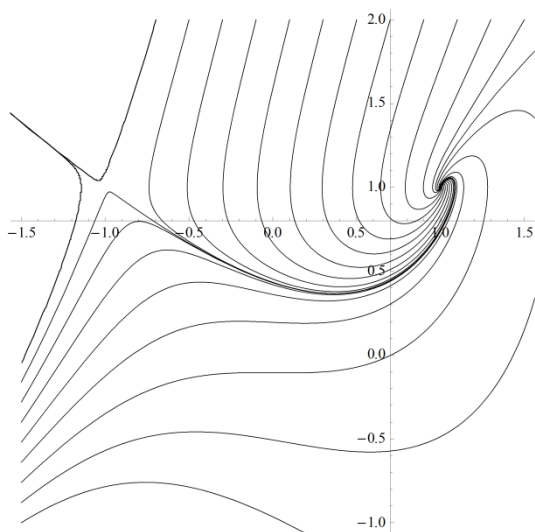
Παρατηρούμε ότι ο δεύτερος κλάδος της ασταθούς πολλαπλότητας του  $(-1,1)$  καταλήγει για  $t \rightarrow \infty$  στο σημείο ισορροπίας  $(1,1)$ . Άρα ο κλάδος αυτός αποτελεί μια **ετεροκλινική** πολλαπλότητα.

Για τις υπόλοιπες φασικές τροχιές επιλέγουμε αρχικές συνθήκες πάνω στον άξονα  $y$  για  $x=-1.5$  και στον άξονα  $x$  για  $y=1.5$ .

```
InitConditions1 = Table[{-1.5, i}, {i, -1, 2, 0.12}];
InitConditions2 = Table[{i, 2}, {i, -1.5, 1.5, 0.2}];
InitConditions = Join[InitConditions1, InitConditions2];
n = Length[InitConditions] (* συνολικός αριθμός αρχικών συνθηκών *)
```

Ολοκληρώνουμε αριθμητικά όλες τις τροχιές για τις παραπάνω αρχικές συνθήκες και για το χρονικό διάστημα (0,15) (το οποίο προέκυψε μετά από μερικές δοκιμές). Επίσης σχεδιάζουμε την κάθε τροχιά και την τοποθετούμε στη λίστα trajectories.

```
Trajectories = {};
For[i = 1, i <= n, i++, {
  x0 = InitConditions[[i, 1]]; y0 = InitConditions[[i, 2]];
  sol = NDSolve[{deq1, deq2, x[0] == x0, y[0] == y0}, {x, y}, {t, 0, 15}];
  trajplot = ParametricPlot[{x[t] /. sol[[1]], y[t] /. sol[[1]]}, {t, 0, 15},
  PlotStyle -> Black];
  AppendTo[Trajectories, trajplot]
} ]
Show[Trajectories, PlotRange -> {{-1.5, 1.5}, {-1, 2}}]
```



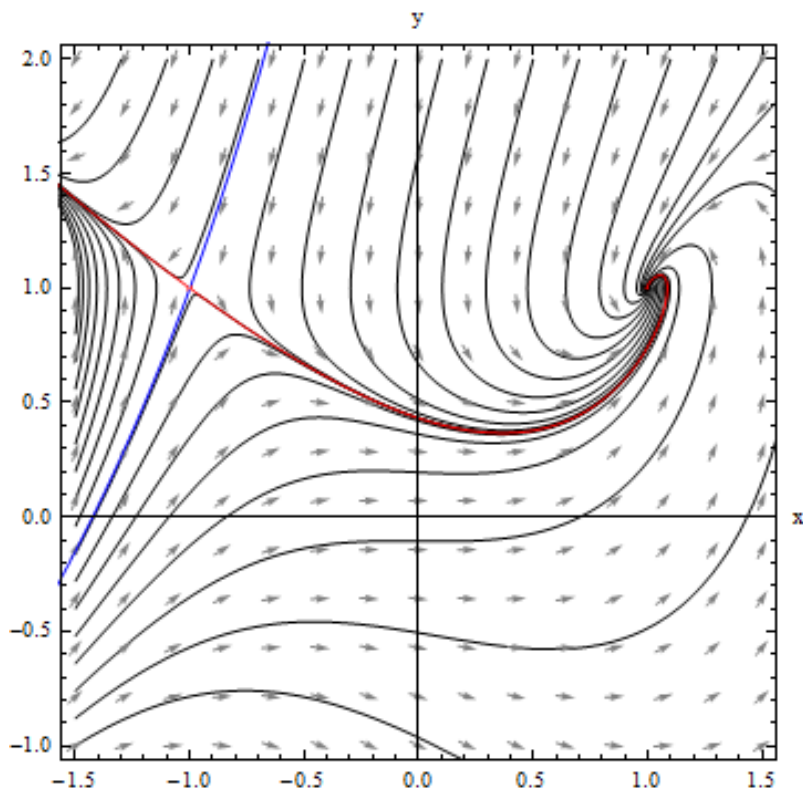
Τέλος σχεδιάζουμε και το διανυσματικό πεδίο στο γράφημα vfield

```
vfield = VectorPlot[{f1, f2}, {x, -1.5, 1.5}, {y, -1, 2}, VectorPoints -> 15,
  VectorScale -> {0.02, 1.5, None}, VectorStyle -> Gray]
```

Συγκεντρώνουμε όλα τα γραφήματα σε μια λίστα και παίρνουμε το φασικό διάγραμμα του παρακάτω σχήματος.

```
phasespace = Flatten[{Trajectories, vfield, S1, S2, U1, U2}, 1];
Show[phasespace, PlotRange -> {{-1.5, 1.5}, {-1, 2}}, AxesOrigin -> {0, 0}, Frame
-> True, AxesLabel -> {"x", "y"}, AspectRatio -> Automatic]
```





Σχήμα 4-14. Το φασικό διάγραμμα του συστήματος (4.40).

Από το παραπάνω διάγραμμα, διαπιστώνουμε ότι η ευσταθής πολλαπλότητα ( $E^s = S_1 \cup S_2$ ) χωρίζει τον χώρο φάσεων σε δύο περιοχές: την περιοχή αριστερά της πολλαπλότητας, όπου όλες οι τροχιές είναι ανοιχτές και τείνουν στο άπειρο για  $t \rightarrow \infty$ , και την περιοχή δεξιά της πολλαπλότητας όπου όλες οι τροχιές τείνουν ασυμπτωτικά στην ευσταθή εστία (1,1).

**Σημείωση.** Μια πρόχειρη σχεδίαση του χώρου φάσεων μπορεί να γίνει άμεσα με την χρήση της εντολής [StreamPlot](#) η οποία συντάσσεται όπως η [VectorPlot](#) και η οποία σχεδιάζει καμπύλες εφαπτόμενες στο διανυσματικό πεδίο.

## Ασκήσεις

**Άσκηση 4.4.1.** Σχεδιάστε πρόχειρα (χωρίς τη χρήση αριθμητικών υπολογισμών) τα φασικά διαγράμματα των παρακάτω συστημάτων

i)  $\dot{x} = 2y + x^2, \quad \dot{y} = x - y$

ii)  $\dot{x} = 2x + y + x^2y, \quad \dot{y} = -x + y$

iii)  $\dot{x} = 1 - x^2, \quad \dot{y} = xy$

iv)  $\dot{x} = xy, \quad \dot{y} = y^2 - x^2$  (υπόδειξη: βρείτε ένα ολοκλήρωμα)

**Άσκηση 4.4.2.** Δείξτε ότι οι άξονες  $x'Ox$  και  $y'Oy$  αποτελούν ασυμπτωτικές πολλαπλότητες για το σύστημα

$$\dot{x} = x + x^2 - 2xy, \quad \dot{y} = -y + xy$$

και σχεδιάστε πρόχειρα (χωρίς τη χρήση αριθμητικών υπολογισμών) το φασικό διάγραμμα.

**Άσκηση 4.4.3.** Χρησιμοποιώντας αριθμητικούς υπολογισμούς, σχεδιάστε τα φασικά διαγράμματα των παρακάτω συστημάτων

i)  $\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = x^2 - 1$

ii)  $\dot{x} = x^2 - y^2, \quad \dot{y} = -6y + 2xy - 8,$

$$\text{iii) } \dot{x} = 1 - x^2 \quad \dot{y} = -(y + x^2 - 1)x^2 - 2x(1 - x^2)$$

**Άσκηση 4.4.4.** Βρείτε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος  $\dot{x} = y(2y^2 - 1)$ ,  $\dot{y} = x(x^2 - 1)$  και ταξινομήστε τα με βάση τη γραμμική τους ευστάθεια. Δείξτε ότι το σύστημα έχει ως ομοκλινική πολλαπλότητα την καμπύλη  $2y^2(y^2 - 1) = x^2(x^2 - 2)$ . Επίσης, δείξτε ότι διαθέτει ετεροκλινικές πολλαπλότητες οι οποίες βρίσκονται πάνω στην έλλειψη  $x^2 + \sqrt{2}y^2 = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})$  και στην υπερβολή  $x^2 - \sqrt{2}y^2 = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})$ . Σχεδιάστε το φασικό διάγραμμα. (υπόδειξη: βρείτε το ολοκλήρωμα του συστήματος και τις τιμές του στα σημεία ισορροπίας)

## 4.5 Εφαρμογές

### 4.5.1 Αλληλεπιδρώντα είδη σε οικολογικά συστήματα

Θεωρήστε ένα οικοσύστημα όπου τα διάφορα είδη είτε συναγωνίζονται μεταξύ τους για την εύρεση τροφής ή έχουν τη σχέση θηρευτή – θύματος. Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού ενός είδους εξαρτάται από τον πληθυσμό των άλλων ειδών. Έτσι δημιουργούμε συστήματα διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν τους ρυθμούς εξέλιξης των ειδών. Στη συνέχεια περιγράφουμε ένα κλασσικό σύστημα θηρευτή – θύματος, το οποίο είναι γνωστό ως το μοντέλο Lotka-Volterra.

Στις αρχές του προηγούμενου αιώνα, στατιστικά δεδομένα των ψαριών της Αδριατικής θάλασσας έδειχναν ότι τόσο τα μικρά όσο και τα μεγάλα ψάρια έδειχναν μια περιοδική αυξομείωση αλλά με μια διαφορά στη φάση. Για να εξηγήσει αυτήν την εξέλιξη, ο Volterra θεώρησε ένα απλό μοντέλο αποτελούμενο από δύο είδη 1) μικρά ψάρια τα οποία τρέφονται με (ανεξάντλητο) πλαγκτόν και 2) μεγάλα ψάρια τα οποία τρέφονται με μικρά ψάρια. Όταν υπάρχουν πολλά μικρά ψάρια, ο πληθυσμός των μεγάλων αυξάνει γρήγορα. Αν όμως ο αριθμός τους αυξηθεί σημαντικά η τροφή τους (μικρά ψάρια) αρχίζει να εξαντλείται και τότε αρχίζουν να μειώνονται. Η δυναμική μπορεί να μοντελοποιηθεί όπως παρακάτω.

Έστω  $X = X(t) > 0$  και  $Y = Y(t) > 0$  ο αριθμός των μεγάλων και των μικρών ψαριών αντίστοιχα μέσα στο κλειστό οικοσύστημα. Αρχικά θεωρούμε, ότι τα δύο είδη δεν αλληλεπιδρούν. Τα μικρά ψάρια, αφού δεν τρώγονται από τα μεγάλα και έχουν άφθονη τροφή, αναπτύσσονται με ρυθμό ανάλογο του πληθυσμού τους και συντελεστή αναλογίας  $a$ ,

$$\dot{Y} = aY, \quad a > 0.$$

Ο πληθυσμός των μεγάλων ψαριών φθίνει αφού δεν τρώνε μικρά ψάρια (δεν υπάρχει αλληλεπίδραση!). Θεωρώντας ως συντελεστή αναλογίας του ρυθμού μείωσης,  $b$ , θα έχουμε

$$\dot{X} = -bX, \quad b > 0$$

Φυσικά η λύση των παραπάνω εξισώσεων εκφράζει την εκθετική αύξηση των μικρών ψαριών και την εκθετική μείωση των μεγάλων.

Υποθέτουμε τώρα ότι τα δύο είδη αλληλεπιδρούν και αυτήν την αλληλεπίδραση την περιγράφουμε με τον παρακάτω κανόνα

- Ο συντελεστής αύξησης των μικρών ψαριών μειώνεται ανάλογα με τον αριθμό των μεγάλων ψαριών, έτσι αντικαθίσταται από τη σχέση

$$a \rightarrow a - r_1 X, \quad r_1 > 0$$

- Ο συντελεστής μείωσης των μεγάλων ψαριών μειώνεται ανάλογα με τον αριθμό των μικρών ψαριών (τροφή)

$$b \rightarrow b - r_2 Y, \quad r_2 > 0$$

Έτσι το δυναμικό σύστημα γράφεται

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -bX + r_2 XY \\ \dot{Y} &= aY - r_1 XY \end{aligned} \quad (4.41)$$

Οι τέσσερις θετικές παράμετροι του συστήματος μπορούν να μειωθούν με κατάλληλη κλίμακα για τον πληθυσμό και τον χρόνο (τα δύο μεγέθη που εμπλέκονται στο σύστημα)

Αλλάζουμε την κλίμακα χρόνου από  $t \rightarrow bt$ , και το σύστημα (4.41) γίνεται

$$\dot{X} = -X + \frac{r_2}{b}XY, \quad \dot{Y} = \frac{a}{b}Y - \frac{r_1}{b}XY.$$

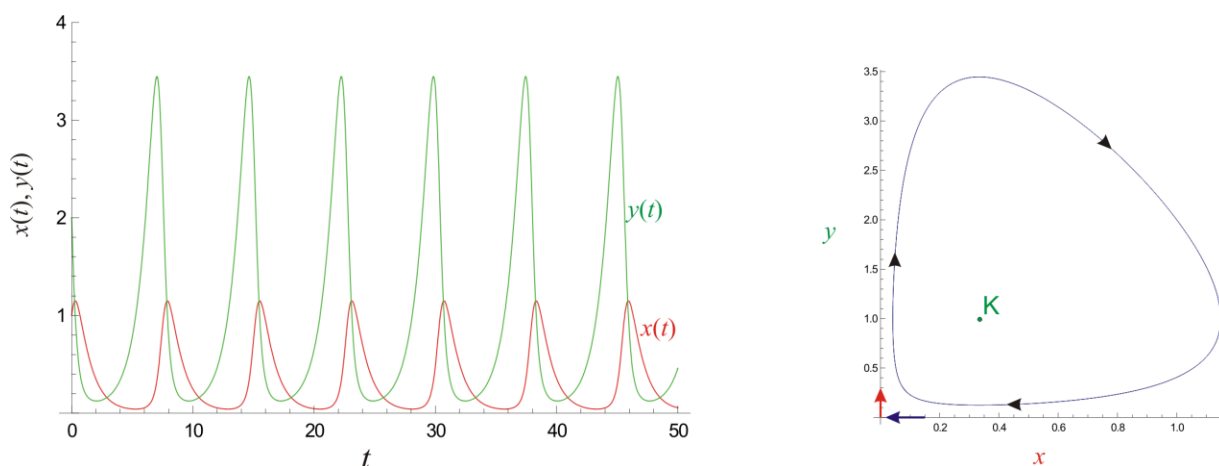
Επίσης, κανονικοποιούμε τον πληθυσμό ορίζοντας τις νέες μεταβλητές

$$x = \frac{r_2}{b}X, \quad y = \frac{r_1}{b}Y$$

Και το σύστημα γράφεται με δύο πλέον παραμέτρους

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + xy \\ \dot{y} &= \gamma y - \mu xy \end{aligned} \tag{4.42}$$

όπου  $\gamma = a/b$  ο λόγος των συντελεστών αναλογίας αύξησης-μείωσης και  $\mu = r_1/r_2$  ο λόγος των συντελεστών σύζευξης. Επιλέγοντας κάποιες τυχαίες αρχικές συνθήκες καθώς και κάποιες τυπικές τιμές για τις παραμέτρους  $\gamma$  παίρνουμε την χρονική εξέλιξη των ψαριών που παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα



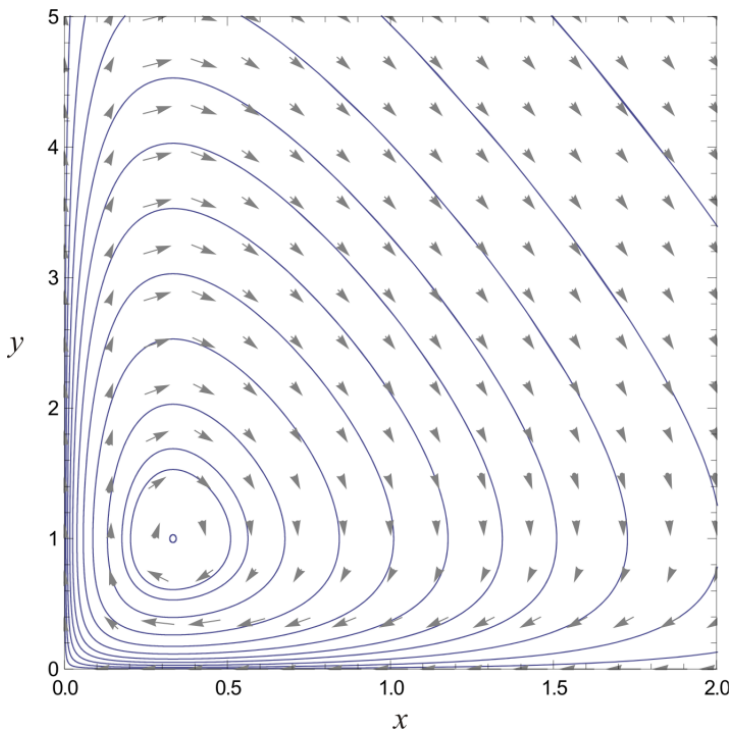
Σχήμα 4-15. Αριστερά, η χρονική εξέλιξη των μεγάλων ( $X$ ) και των μικρών ψαριών ( $Y$ ) στο μοντέλο (4.42) με  $\gamma=1$ ,  $\mu=3$  και αρχικές συνθήκες  $x(0)=1$ ,  $y(0)=3$ . Η εξέλιξη είναι περιοδική με περίοδο  $T=7.8$  χρονικές μονάδες. Δεξιά, η αντίστοιχη κλειστή φασική καμπύλη.

Παρατηρούμε, πράγματι, μια περιοδική εξέλιξη με διαφορά φάσης, μεταξύ των δυναμικών μεταβλητών  $x(t)$  και  $y(t)$ . Η περιοδική αυτή εξέλιξη επιβεβαιώνεται και από την κλειστή φασική καμπύλη που αντιστοιχεί στη λύση. Παρόμοια εξέλιξη προκύπτει για διαφορετικές αρχικές συνθήκες, αλλά με διαφορετική περίοδο και φυσικά διαφορετικά πλάτη.

Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος είναι τα

$$(0,0), \quad (\gamma/\mu, 1)$$

Το  $(0,0)$  είναι σάγμα με ιδιοτιμές  $(-1, \gamma)$ . Ο άξονας  $Ox$  αποτελεί τον ευσταθή γραμμικό υπόχωρο και ο άξονας  $Oy$  τον ασταθή γραμμικό υπόχωρο. Οι υπόχωροι αυτοί αποτελούν και λύσεις του μη γραμμικού συστήματος. Από φυσική άποψη, το σάγμα στο  $(0,0)$  δεν επιτρέπει τον αφανισμό των ψαριών. Το δεύτερο σημείο ισορροπίας  $(\gamma/\mu, 1)$  είναι κέντρο με ιδιοτιμές  $\pm i\sqrt{\gamma}$ . Οι αριθμητικές λύσεις δείχνουν ότι και στο μη γραμμικό σύστημα, γύρω από το κέντρο έχουμε κλειστές φασικές καμπύλες. Το φασικό διάγραμμα του συστήματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 4-16.



Σχήμα 4-16. Το φασικό διάγραμμα για το σύστημα (4.42) με  $\gamma=1$ ,  $\mu=3$ .

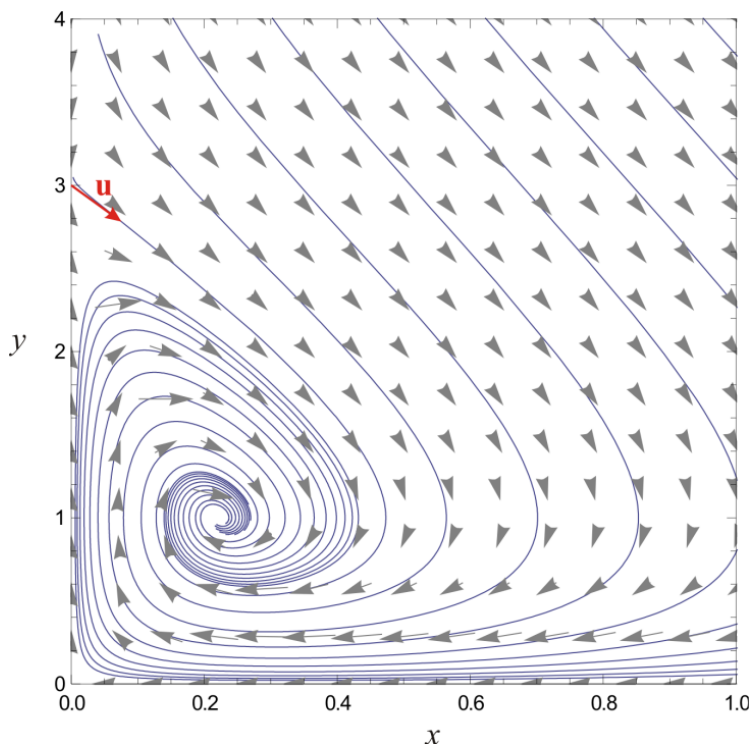
Το παραπάνω μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για άλλα μοντέλα θηρευτή - θύματος και να δεχτεί διάφορες τροποποιήσεις. Για παράδειγμα μια τροποποίηση του μοντέλου είναι η *εισαγωγή του κορεσμού*. Δηλαδή, για το μοντέλο που παρουσιάσαμε μπορούμε να θεωρήσουμε ένα ανώτερο όριο πληθυσμού μικρών ψαριών τον οποίο μπορεί να θρέψει το σύστημα. Ας θεωρήσουμε ότι ο πληθυσμός των μικρών ψαριών (στις κανονικοποιημένες μονάδες) δεν μπορεί να αναπτύσσεται όταν ξεπεράσει μια ανώτερη τιμή  $S_0$ . Αυτό μπορούμε να το εισάγουμε στο σύστημα θεωρώντας μια νέα παράμετρο  $\gamma' = \gamma \cdot s$ , όπου  $s = (S_0 - y)/S_0$ . Παρατηρούμε ότι, όταν τα μικρά ψάρια είναι λίγα στο σύστημα, ο ρυθμός ανάπτυξης τους είναι ουσιαστικά ο ίδιος σαν να μην υπάρχει κορεσμός ( $\lim_{y \rightarrow 0} s = 1$ ). Αν όμως ο αριθμός των ψαριών φτάσει την τιμή κορεσμού, τότε η ανάπτυξη τους σταματάει ( $\lim_{y \rightarrow S_0} s = 0$ ). Οι εξισώσεις του νέου μοντέλου γράφονται

$$\dot{x} = -x + x y, \quad \dot{y} = \gamma \frac{S_0 - y}{S_0} y - \mu x y \quad (4.43)$$

Τώρα το σύστημα έχει τρία σημεία ισορροπίας, τα

$$(0,0), \quad \left( \frac{\gamma(1-S_0)}{S_0\mu}, 1 \right), \quad (0, S_0)$$

Η αρχή  $(0,0)$  παραμένει σάγμα, με τους ίδιους υπόχωρους, όπως και στο προηγούμενο μοντέλο. Το νέο σημείο ισορροπίας  $(0, S_0)$ , πάνω στον άξονα  $Oy$ , είναι σάγμα επίσης με ευσταθή γραμμικό υπόχωρο τον άξονα  $Oy$  και ασταθή κατά το διάνυσμα  $\mathbf{u} = \left( \frac{\gamma+S_0-1}{S_0\mu}, 1 \right)$ . Το δεύτερο σημείο ισορροπίας, το οποίο στο προηγούμενο μοντέλο ήταν κέντρο, τώρα, δεδομένου ότι  $S_0 \gg 1$ , μπορεί να δείχτει ότι είναι ευσταθής εστία. Το φασικό διάγραμμα παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα όπου παρατηρούμε ότι, για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη, το σύστημα καταλήγει στην ευσταθή εστία.



Σχήμα 4-17. Το φασικό διάγραμμα για το σύστημα (4.43) με  $\gamma=1$ ,  $\mu=3$  και  $S_0=3$ .

#### 4.5.2 Ανταγωνιστικά συστήματα. Ένα στρατιωτικό μοντέλο

Στα ανταγωνιστικά συστήματα έχουμε δύο πληθυσμούς-μεγέθη τα οποία ανταγωνίζονται το ένα το άλλο. Στα μοντέλα αυτά ή έχουμε συνύπαρξη των δύο πληθυσμών ή ο ένας πληθυσμός εξουδετερώνεται (μηδενίζεται). Το ποιος πληθυσμός θα εξουδετερωθεί εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες και συνεπώς η μελέτη ενός τέτοιου συστήματος αφορά τον προσδιορισμό των περιοχών του χώρου φάσεων οι οποίες οδηγούν στην εξαφάνιση του ενός ή του άλλου πληθυσμού.

Θεωρούμε δύο χώρες σε εμπόλεμη κατάσταση. Η πρώτη έχει στρατό με  $X$  στρατιώτες και η δεύτερη με  $Y$  στρατιώτες. Οι αριθμοί αυτοί αυξάνονται λόγω της συνεχούς επιστράτευσης αλλά και μειώνονται λόγω των πολεμικών συγκρούσεων. Περιγράφουμε την εξέλιξη των δύο στρατών με το παρακάτω απλουστευμένο δυναμικό μοντέλο

$$\dot{X} = aX - bXY, \quad \dot{Y} = (a+1)Y - gbXY, \quad (4.44)$$

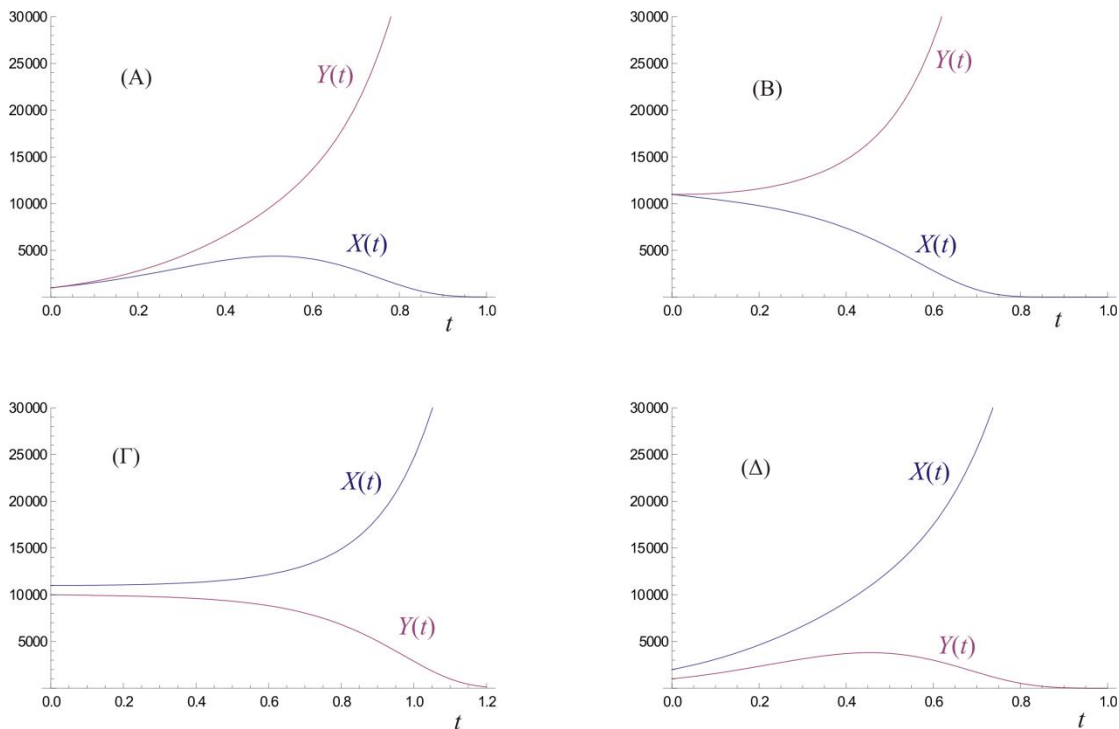
όπου όλες οι παράμετροι είναι θετικές. Οι γραμμικοί όροι στις παραπάνω εξισώσεις εκφράζουν την αύξηση του στρατού λόγω της στρατολόγησης. Θεωρούμε ότι η δεύτερη χώρα έχει συντελεστή στρατολόγησης μεγαλύτερο από την πρώτη χώρα ( $a < a+1$ ). Λόγω της εμπόλεμης κατάστασης οι στρατοί έχουν απώλειες, οι οποίες είναι ανάλογες τόσο του δικού τους αριθμού στρατιωτών όσο και αυτού του αντιπάλου. Θεωρούμε  $b$  τον συντελεστή απωλειών του πρώτου στρατού ενώ για τον δεύτερο έναν μεγαλύτερο συντελεστή  $b'=gb$ ,  $g > 1$ .

Θεωρώντας τις τιμές παραμέτρων

$$a = 5, \quad b = 0.0005, \quad g = 1.1,$$

παρουσιάζουμε στο Σχήμα 4-18 την εξέλιξη των δυναμικών μεταβλητών  $X(t)$  και  $Y(t)$  για τις αρχικές συνθήκες

$$A: (1000, 1000), \quad B: (11000, 11000), \quad \Gamma: (11000, 10000), \quad \Delta: (2000, 1000)$$



Σχήμα 4-18. Η χρονική εξέλιξη των στρατών  $X$  και  $Y$  για τις παραμέτρους και τις αρχικές συνθήκες που περιγράφονται στο κείμενο.

Παρατηρούμε ότι στις περιπτώσεις Α και Β έχουμε ενίσχυση του στρατού  $Y$  και εξάλειψη του στρατού  $X$ . Το αντίθετο συμβαίνει στις περιπτώσεις Γ και Δ. Για το ποιες αρχικές συνθήκες οδηγούν στην νίκη του ενός και στη νίκη του άλλου θα το διαπιστώσουμε μέσα από το φασικό διάγραμμα του συστήματος.

Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος είναι δύο,

$$(0,0), \quad \left( \frac{a+1}{gb}, \frac{a}{b} \right)$$

Για τον υπολογισμό της ευστάθειας υπολογίζουμε τις παραμέτρους ευστάθειας  $p$  και  $q$  (δες §4.2.3). Για το σημείο  $(0,0)$  έχουμε

$$p = -2a - 1, \quad q = a(a+1), \quad p^2 - 4q = 1$$

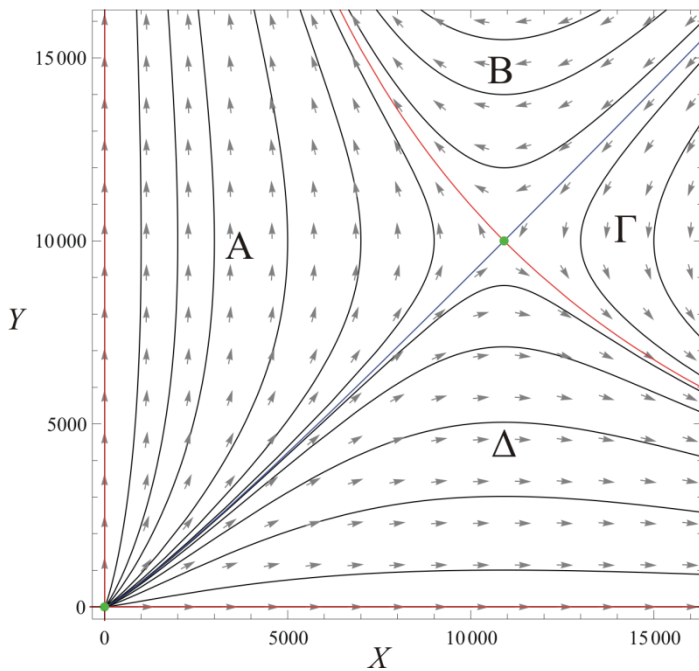
Είναι δηλαδή  $p < 0$ ,  $q > 0$  και  $p^2 - 4q > 0$  και άρα πρόκειται για ασταθή κόμβο με γραμμικούς υπόχωρους τους άξονες  $Ox$  και  $Oy$ . Για το δεύτερο σημείο ισορροπίας είναι

$$p = 0, \quad q = -a(a+1), \quad p^2 - 4q = 4a^2 + 2a$$

Άρα, αφού,  $q < 0$  το δεύτερο σημείο ισορροπίας είναι σάγμα με ιδιοτιμές  $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{a+a^2}$  και γραμμικούς

υπόχωρους τους  $y = \mp \frac{ag}{\sqrt{a+a^2}} x$ .

Σχεδιάζουμε το χώρο φάσεων του συστήματος, για τις παραμέτρους που αναφέραμε παραπάνω, αφού πρώτα υπολογίσουμε την ευσταθή και ασταθή πολλαπλότητα του σάγματος (δες παράδειγμα 3 της §4.4.3).



Σχήμα 4-19. Το φασικό διάγραμμα του συστήματος (4.44) για  $a=5$ ,  $b=0.0005$ ,  $g=1.1$ . Οι κόκκινες καμπύλες αντιστοιχούν στις ασταθείς πολλαπλότητες του κόμβου και του σάγματος, ενώ η μπλε καμπύλη δίνει τις ευσταθείς πολλαπλότητες του σάγματος.

Στο φασικό διάγραμμα διακρίνουμε τέσσερις περιοχές, οι οποίες διαχωρίζονται από τις ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες του σάγματος. Σε κάθε μια από αυτές διακρίνουμε την χρονική εξέλιξη των στρατών  $X$  και  $Y$  που παρουσιάζεται στις περιπτώσεις στο Σχήμα 4-18. Συνεπώς για αρχικές συνθήκες πάνω από την ευσταθή πολλαπλότητα επικρατεί ο στρατός  $Y$  ενώ κάτω από αυτή ο στρατός  $X$ .

## Ασκήσεις

**Άσκηση 4.5.1.** Μελετήστε την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας του συστήματος (4.43) υπολογίζοντας τις ποσότητες  $p$ ,  $q$  και  $\Delta=p^2-4q$ .

**Άσκηση 4.5.2.** Η εξέλιξη του πληθυσμού των αλεπούδων και των λαγών σε ένα οικοσύστημα περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\dot{x} = 2x - axy, \quad \dot{y} = -y + axy$$

όπου  $x=x(t)$  και  $y=y(t)$  οι κανονικοποιημένοι πληθυσμοί των λαγών και των αλεπούδων, αντίστοιχα.

α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και την γραμμική τους ευστάθεια.

β) Για  $a=0.01$  και αρχικές συνθήκες  $x(0)=100$  και  $y(0)=5$ , σχεδιάστε τη χρονική εξέλιξη του πληθυσμού των λαγών και των αλεπούδων.

γ) Για  $a=0.01$  σχεδιάστε το φασικό διάγραμμα

δ) Υπολογίστε την περίοδο της χρονικής εξέλιξης για την παραπάνω τιμή του  $a$ . Πως εξαρτάται η περίοδος από την παράμετρο  $a$ ;

**Άσκηση 4.5.3.** Ένα μοντέλο που προτάθηκε για να περιγράψει την εξέλιξη της επιδημίας πανώλης στην Ινδία το 1906 είναι το [μοντέλο SIR](#). Στοιχειοθετείται με βάση τρεις πληθυσμούς ι) τον υγιή πληθυσμό  $S$  (susceptible) ο οποίος μπορεί να ασθενήσει ιι) τον πληθυσμό  $I$  που είναι άρρωστος (infected) και ιιι) τον πληθυσμό  $R$  (removed) που εξαιρείται είτε γιατί έχει πεθάνει ή γιατί έχει αναρρώσει και συνεπώς δεν πρόκειται ούτε να ασθενήσει ξανά αλλά και ούτε να μεταδώσει την ασθένεια. Οι εξισώσεις του συστήματος είναι οι εξής

$$\dot{S} = -aSI, \quad \dot{I} = aSI - bI, \quad \dot{R} = bI$$

όπου  $S \geq 0$ ,  $I \geq 0$ ,  $R \geq 0$ .

α) Δείξτε ότι  $S(t)+I(t)+R(t)=\text{σταθ.}$

β) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας για το επίπεδο  $S-I$  και συμπεράνετε σχετικά με την εξέλιξη του συστήματος κοντά σε αυτά (τα σημεία δεν είναι μεμονωμένα!)

γ) Εξερευνήστε την εξέλιξη του συστήματος για διάφορες αρχικές συνθήκες (θεωρήστε  $S(0)+I(0)+R(0)=1$ ,  $b=0.01$  και  $a=0.02$ ).

**Άσκηση 4.5.4.** Ο [Rapoport](#) περιέγραψε την εξέλιξη των εξοπλιστικών δαπανών δύο εχθρικών κρατών,  $X$  και  $Y$  αντίστοιχα, με το παρακάτω δυναμικό μοντέλο

$$\dot{X} = -m_1 X + a_1 Y + b_1 Y^2, \quad \dot{Y} = -m_2 Y + a_2 X + b_2 X^2,$$

όπου όλες οι παράμετροι είναι θετικές. Ο πρώτος όρος των δύο εξισώσεων περιγράφει την μείωση των δαπανών που επιβάλλεται από την πίεση των πολιτών τους. Ο δεύτερος όρος δίνει την αύξηση του ρυθμού των δαπανών, ο οποίος είναι ανάλογος με τις δαπάνες του αντιπάλου. Τέλος, αν οι εξοπλιστικές δαπάνες του αντιπάλου αυξηθούν πολύ τότε επιβάλλεται μια επιταχυνόμενη αύξηση των δαπανών για να επιτευχθεί μια ασφαλής ισορροπία. Αυτή η σημαντική αύξηση περιγράφεται από τον τρίτο όρο των εξισώσεων.

Θεωρήστε τις παραμέτρους  $m_1=0.4$ ,  $a_1=0.1$ ,  $b_1=0.05$ ,  $m_2=0.5$ ,  $a_2=1$ ,  $b_2=0.02$ .

α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος και την ευστάθειά τους

β) Θεωρήστε αρχικές συνθήκες κοντά στο  $(0,0)$  και μελετήστε την εξέλιξη των δυναμικών μεταβλητών.

γ) Σχεδιάστε το χώρο φάσεων

**Άσκηση 4.5.5.** Δύο δέσμες laser, με εντάσεις  $I_1$  και  $I_2$  και συχνότητες  $\omega_1$  και  $\omega_2$ , αντίστοιχα, διαδίδονται παράλληλα μέσα σε μια λυχνία που περιέχει τετραχλωράνθρακα και ιώδιο. Η απορρόφηση και η σκέδαση της ακτινοβολίας μέσα στη λυχνία έχει ως αποτέλεσμα να μεταβάλλεται η ένταση των laser κατά μήκος του σωλήνα. Ένα απλό μοντέλο που περιγράφει τις μεταβολές της έντασης κατά μήκος ( $x$ ) της λυχνίας δίνεται από τις εξισώσεις

$$\frac{dI_1}{dx} = -gI_1I_2 - aI_1, \quad \frac{dI_2}{dx} = -gI_1I_2 + aI_2$$

όπου  $a$  θετική παράμετρος που σχετίζεται με τον συντελεστή απορρόφησης της ακτινοβολίας από το ιώδιο και  $g$  συνάρτηση της διαφοράς  $\omega_1-\omega_2$  που σχετίζεται με την σκέδαση των φωτονίων από τον τετραχλωράνθρακα.

α) Βρείτε και μελετήστε την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας του συστήματος.

β) Θεωρήστε αρχικές συνθήκες  $I_1(0)=I_2(0)=1$  και  $a=0.01$ . Σχεδιάστε τις εντάσεις  $I_1(x)$  και  $I_2(x)$  για  $g=0.1, 0.5, 1, 2$ .

## 4.6 Βιβλιογραφία

Abell, M.L. & Braselton, J.P., 1997. *Differential equations with Mathematica*. 2nd ed. Academic Press.

Arrowsmith, D.K. & Place, C.M., 1990. *An Introduction to Dynamical Systems*. New York: Cambridge University Press.

Enns, R.H. & McGuire, G.C., 2001. *Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers*. Boston: Birkhauser.

Guckenheimer, J. & Holmes, P., 1997. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. 3rd ed. New York: Springer-Verlag.

Hilborn, R.C., 1994. *Chaos and Nonlinear Dynamics*. New York, Oxford: Oxford University Press.

Irwin, M.C., 2001. *Smooth Dynamical Systems*. Singapore: World Scientific.

Jordan, D. W. & Smith, P., 2007. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. 4th ed. Oxford: Oxford University Press.

Lynch, S., 2007. *Dynamical systems with applications using Mathematica*. Boston: Birkhauser.

Jose, J.V. & Saletan, E.J., 1998. *Classical Dynamics: a contemporary approach*. Cambridge UK: Cambridge University Press.

Marasco, A. & Romano, A., 2001. *Scientific Computing with Mathematica: Mathematical problems of ordinary differential equations*, Boston: Birkhauser.



- Strogatz, S.H., 1994. *Nonlinear Dynamics and Chaos, with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- Tel, T. & Gruiz, M., 2006. *Chaotic Dynamics: an introduction based on Classical Mechanics*. New York: Cambridge University Press.
- Wiggins, S., 1990. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. New York: Dover.
- Βουγιατζής, Γ.Β. & Μπόζης, Γ.Δ. & Παπαδόπουλος, Δ.Β., 2012. *Διαφορικές Εξισώσεις και εφαρμογές*. Αθήνα: Κλειδάριθμος.
- Χατζηδημητρίου, Ι.Δ., 2000. *Θεωρητική Μηχανική (τόμος Α')*: Νευτώνια Μηχανική. 3η έκδ. Θεσσαλονίκη: Γιαχούδη.
- Μπούντης, Α., 1990. *Μη γραμμικές συνήθειες διαφορικές εξισώσεις*. Αθήνα: Πνευματικός.
- Μπούντης, Α., 2000. *Δυναμικά Συστήματα και Χάος, τόμος Β'*. Πάτρα: εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.
- Πνευματικός Σπ., 2002. *Τοπολογία: θεμελιώδεις έννοιες της γενικής Τοπολογία.*, Αθήνα: εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικού.
- Σούρλας, Δ., 2012. *Δυναμικά συστήματα και εφαρμογές με τη χρήση του Maple*. Σημειώσεις. Διαθέσιμο στη: [http://www.physics.upatras.gr/UploadedFiles/course\\_182\\_1516.pdf](http://www.physics.upatras.gr/UploadedFiles/course_182_1516.pdf). Πανεπιστήμιο Πάτρας.
- Τραχανάς, Σ., 2008. *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις: Μέθοδοι λύσης και Εφαρμογές*. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

## 5 Οριακοί κύκλοι – Περιοδικές Λύσεις

### 5.1 Ο οριακός κύκλος σε επίπεδα συστήματα

Στα προηγούμενα κεφάλαια είδαμε ότι στα διατηρητικά συστήματα μπορούμε να έχουμε περιοχές του χώρου των φάσεων στις οποίες οι κίνηση είναι περιοδική, δηλαδή όλες οι φασικές καμπύλες είναι κλειστές και περικλείουν κάποιο κέντρο. Για παράδειγμα στο μηχανικό σύστημα

$$\ddot{x} = f(x), \quad f(x) = -\frac{dV(x)}{dx}, \quad (5.1)$$

όπου το δυναμικό  $V=V(x)$  παρουσιάζει ένα μοναδικό ελάχιστο στο  $x=x_0$ , όλες οι τροχιές είναι περιοδικές και η κάθε μια αντιστοιχεί σε μια σταθερή τιμή για το ολοκλήρωμα της ενέργειας

$$E = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(x) \quad (5.2)$$

Αν στο σύστημα (5.1) εισάγουμε και έναν όρο ανάλογο της ταχύτητας (δες §3.5),

$$\ddot{x} = f(x) - b\dot{x}, \quad (5.3)$$

τότε η ενέργεια μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση

$$\frac{dE}{dt} = -b\dot{x}^2. \quad (5.4)$$

Αν ο όρος αυτός είναι απωλεστικός, δηλαδή  $b>0$ , τότε η ενέργεια μειώνεται μέχρι η τροχιά να καταλήξει στο σημείο ισορροπίας  $x=x_0$  και η ενέργεια να πάρει την ελάχιστη τιμή του δυναμικού. Οι φασικές τροχιές συγκλίνουν προς το σημείο ισορροπίας είτε σπειροειδώς (εστία) είτε απότομα (κόμβος). Αν, όμως θεωρήσουμε ότι  $b<0$ , τότε η ενέργεια αυξάνεται και οι φασικές τροχιές έχουν την ίδια γεωμετρία όπως προηγουμένως αλλά η φορά τους είναι αντίθετη.

Μια ιδιαίτερη λύση προκύπτει όταν ο συντελεστής  $b$  δεν είναι σταθερός αλλά εξαρτάται από το σημείο του χώρου φάσεων στο οποίο βρίσκεται σε κάθε στιγμή η τροχιά. Θεωρούμε δηλαδή συστήματα της μορφής

$$\ddot{x} = f(x) - b(x, \dot{x})\dot{x}, \quad \eta' \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x) - b(x, y)y \end{aligned} \quad (5.5)$$

Θεωρούμε ότι ο χώρος φάσεων του παραπάνω συστήματος παρουσιάζει περιοχές  $D^+$  και  $D^-$  στις οποίες η συνάρτηση  $b(x, y)$  παίρνει θετική ή αρνητική τιμή, αντίστοιχα. Η τροχιά κερδίζει ενέργεια όταν βρίσκεται στο τόπο  $D^+$  και χάνει ενέργεια στο τόπο  $D^-$ . Τότε, υπό συγκεκριμένες συνθήκες, μπορεί να παρουσιαστεί στο σύστημα μια *μεμονωμένη περιοδική λύση*, και όλες οι τροχιές στη γειτονιά αυτής της λύσης να *τείνουν ασυμπτωτικά* προς αυτήν την περιοδική λύση είτε για  $t \rightarrow +\infty$  ή για  $t \rightarrow -\infty$ . Μια τέτοια λύση ονομάζεται **οριακός κύκλος** ([limit cycle](#)).

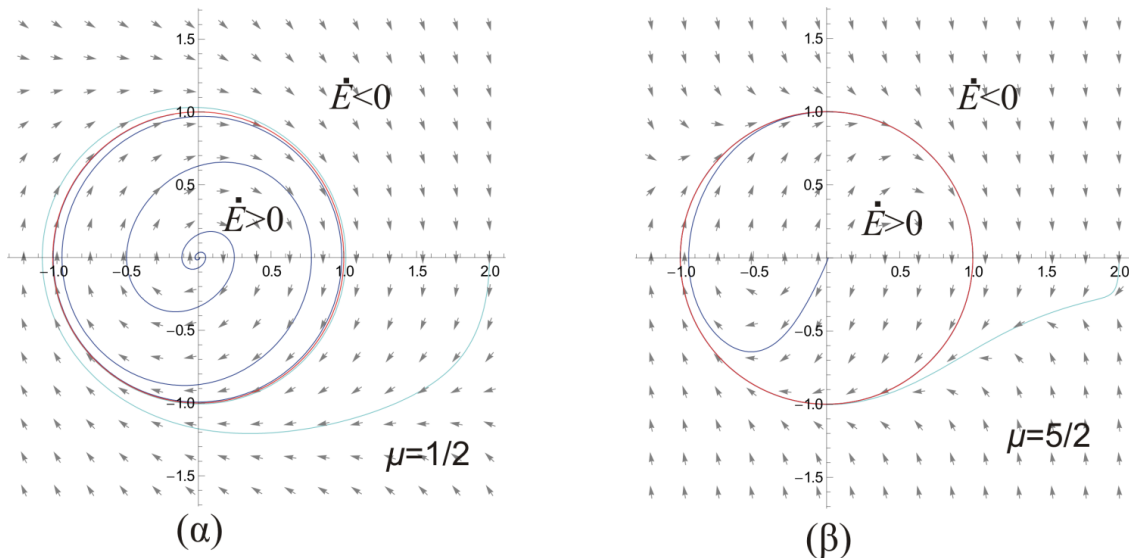
**Παράδειγμα 1.** Έστω το σύστημα

$$\ddot{x} = -x - \mu(x^2 + \dot{x}^2 - 1)\dot{x} \quad \eta' \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y, \quad \dot{y} = -x - \mu(x^2 + y^2 - 1)y \quad (\mu > 0) \end{aligned}$$

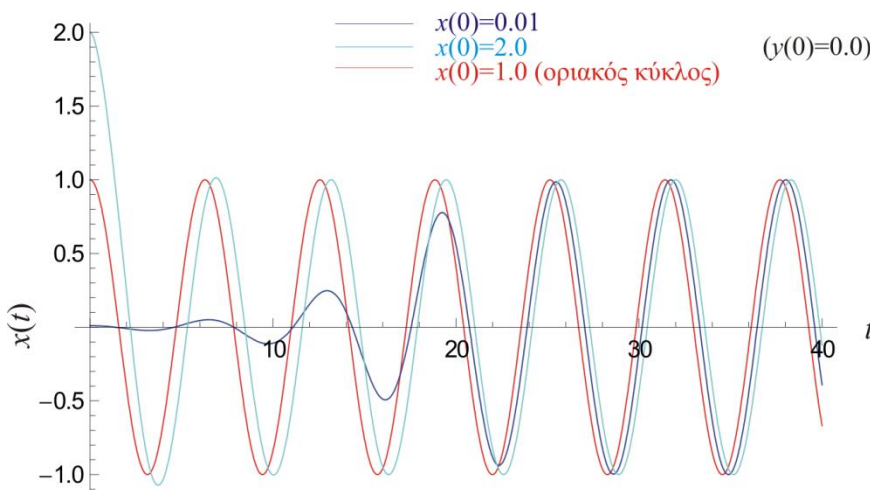
Για  $\mu=0$  έχουμε το σύστημα του αρμονικού ταλαντωτή με  $E = (\dot{x}^2 + x^2)/2$ . Ο απωλεστικός όρος ορίζει τις περιοχές

$$D^+ = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}, \quad D^- = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 1\},$$

δηλαδή, έξω από τον κύκλο με ακτίνα 1, το σύστημα χάνει ενέργεια και οι φασικές καμπύλες τείνουν προς τα μέσα. Μέσα στον κύκλο με ακτίνα 1 το σύστημα κερδίζει ενέργεια και οι φασικές καμπύλες τείνουν προς τα έξω. Τελικά οι τροχιές τείνουν ασυμπτωτικά προς τον κύκλο  $x^2 + y^2 = 1$ , ο οποίος αποτελεί φασική καμπύλη του συστήματος, δηλαδή είναι ένας οριακός κύκλος. Ένα φασικό διάγραμμα του συστήματος, που παρουσιάζει τα παραπάνω χαρακτηριστικά, δίνεται στο Σχήμα 5-1. Για  $0 < \mu < 2$ , το σημείο  $(0, 0)$  αποτελεί μια ασταθή εστία ενώ για  $\mu > 2$  είναι ένας ασταθής κόμβος. Στο Σχήμα 5-2 παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη της δυναμικής μεταβλητής  $x=x(t)$ . Η χρονική εξέλιξη, ανεξάρτητα των αρχικών συνθηκών, τείνει προς ταλαντώσεις με τιμές για πλάτος και περίοδο αυτές του οριακού κύκλου.



Σχήμα 5-1. Φασικά διαγράμματα για το σύστημα του παραδείγματος 1 και για (α)  $\mu=1/2$  (β)  $\mu=5/2$ . Οι φασικές καμπύλες τείνουν προς τον κύκλο με ακτίνα 1, ο οποίος αποτελεί τον ευσταθή οριακό κύκλο του συστήματος.



Σχήμα 5-2. Η χρονική εξέλιξη της δυναμικής μεταβλητής  $x=x(t)$  για το σύστημα του παραδείγματος 1. Ανεξάρτητα των αρχικών συνθηκών οι λύσεις τείνουν προς την περιοδική ταλάντωση, η οποία αντιστοιχεί στον οριακό κύκλο.

Επειδή στο παραπάνω παράδειγμα, όλες οι γειτονικές τροχιές του οριακού κύκλου τείνουν προς τον κύκλο καθώς  $t \rightarrow +\infty$ , ο οριακός κύκλος ονομάζεται **ευσταθής**. Στην αντίθετη περίπτωση ( $\mu < 0$ ), όπου οι γειτονικές τροχιές απομακρύνονται ασυμπτωτικά από τον οριακό κύκλο (ή τείνουν προς αυτόν για  $t \rightarrow -\infty$ ) ο οριακός κύκλος ονομάζεται **ασταθής**. Στα φυσικά συστήματα, εν γένει μας ενδιαφέρουν οι ευσταθείς οριακοί κύκλοι, οι οποίοι αντιστοιχούν σε ευσταθείς περιοδικές ταλαντώσεις.

**Παράδειγμα 2.** Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}(1 - x^2 - y^2) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Για να επιλύσουμε αναλυτικά το παραπάνω σύστημα εισάγουμε πολικές συντεταγμένες  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ .

Πολλαπλασιάζουμε την 1<sup>η</sup> από τις εξισώσεις (5.6) με  $x$ , την δεύτερη με  $y$  και προσθέτοντας κατά μέλη στη συνέχεια βρίσκουμε

$$x\dot{x} + y\dot{y} = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}(1 - x^2 - y^2) \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(r^2) = r\dot{r} = r(1 - r^2) \Rightarrow$$

$$\dot{r} = 1 - r^2 \quad (5.7)$$

Πολλαπλασιάζουμε την 1<sup>η</sup> από τις εξισώσεις (5.6) με  $y$ , την δεύτερη με  $x$  και αφαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε

$$x\dot{y} - y\dot{x} = x^2 + y^2 \Rightarrow r^2\dot{\theta} = r^2 \Rightarrow \dot{\theta} = 1 \quad (5.8)$$

Από την (5.7) προκύπτει άμεσα ότι η  $r=1$  αποτελεί λύση, και από την (5.8) διαπιστώνουμε ότι η περίοδος της είναι  $2\pi$ . Συγκεκριμένα, αν ολοκληρώσουμε τις δύο εξισώσεις με αρχικές συνθήκες  $r(0)=r_0$  και  $\theta(0)=\theta_0$ , βρίσκουμε

$$r = \frac{ce^{2t} - 1}{ce^{2t} + 1}, \quad c = (1 + r_0)/(1 - r_0), \quad r_0 \neq 0, 1, \quad (5.9)$$

$$\theta = t + \theta_0$$

Διαπιστώνουμε, ότι για κάθε  $r_0 \neq 0$  είναι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 1$$

Άρα η λύση  $r=1$  είναι ένας οριακός κύκλος και μάλιστα ευσταθής.

**Σχόλιο.** Γενικότερα, τα συστήματα της μορφής

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xf(r) \\ \dot{y} = x + yf(r) \end{cases}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5.10)$$

έχουν οριακό κύκλο τον  $r=r_0$  όπου  $r_0$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $f(r)=0$ . Αν η εξίσωση αυτή έχει περισσότερες ρίζες τότε το σύστημα διαθέτει περισσότερους οριακούς κύκλους, ένθετους, τον έναν μέσα στον άλλο (nested limit cycles).

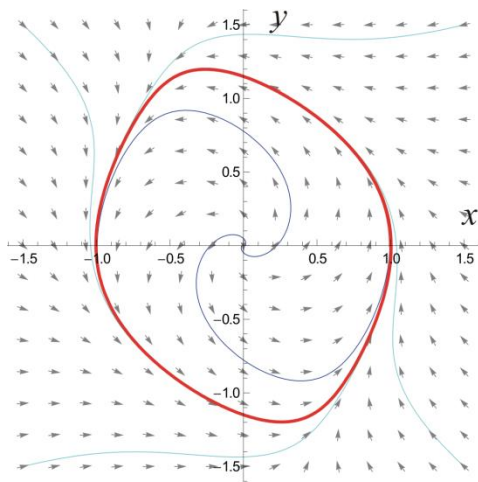
Στη γενική περίπτωση η φασική καμπύλη ενός οριακού κύκλου δεν συμπίπτει με έναν γεωμετρικό κύκλο, όπως συμβαίνει στα παραπάνω απλά παραδείγματα. Επίσης δεν συμπίπτει με το όριο των περιοχών  $D^+$  και  $D^-$ , δηλαδή με τον τόπο όπου  $\text{div} \mathbf{f} = 0$ . Εν γένει ο οριακός κύκλος αντιστοιχεί σε μια κλειστή φασική τροχιά, η οποία δεν τέμνει τον εαυτό της εγκάρσια. Ισχύει το παρακάτω θεώρημα

- Στα επίπεδα συστήματα, ένας οριακός κύκλος περικλείει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας (κρίσιμο σημείο του διανυσματικού πεδίου).

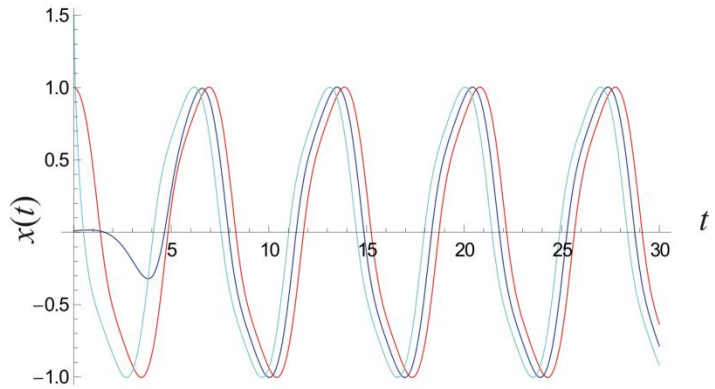
**Παράδειγμα 3.** Το σύστημα

$$\dot{x} = x - y - (x^2 + \frac{3}{2}y^2)x, \quad \dot{y} = x + y - (x^2 + \frac{1}{2}y^2)y \quad (5.11)$$

έχει έναν ευσταθή οριακό κύκλο γύρω από το σημείο  $(0,0)$ , το οποίο είναι ασταθής εστία ( $\lambda_{1,2}=1 \pm i$ ). Ο οριακός αυτός κύκλος δεν είναι γεωμετρικός κύκλος και είναι δύσκολο να βρούμε μια αναλυτική λύση. Καταφεύγουμε στην αριθμητική ολοκλήρωση μερικών τροχιών και διαπιστώνουμε, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5-3, ότι όλες τείνουν ασυμπτωτικά στην κλειστή κόκκινη καμπύλη, η οποία και αποτελεί τη λύση του οριακού κύκλου. Οι ταλαντώσεις των δυναμικών μεταβλητών πάνω στον οριακό κύκλο είναι φυσικά περιοδικές αλλά εν γένει δεν είναι αρμονικές. Επίσης, παρατηρούμε ότι, ο οριακός κύκλος εφάπτεται στο διανυσματικό πεδίο, όπως ισχύει για κάθε άλλη λύση του συστήματος.



(α)



(β)

Σχήμα 5-3. α) Ο ευσταθής οριακός κύκλος του παραδείγματος 3 (κόκκινη καμπύλη) και β) οι ταλαντώσεις της μεταβλητής  $x=x(t)$  για αρχικές συνθήκες μέσα, έξω και πάνω στον οριακό κύκλο.

**Σχόλιο.** Εκτός της περίπτωσης των ευσταθών ή ασταθών οριακών κύκλων, έχουμε και την περίπτωση κατά την οποία οι τροχιές που βρίσκονται μέσα στον οριακό κύκλο τείνουν προς αυτόν καθώς  $t \rightarrow +\infty$ , αλλά οι τροχιές που βρίσκονται έξω από αυτόν απομακρύνονται. Επίσης, μπορεί να συμβαίνει και το αντίθετο. Στις περιπτώσεις αυτές ο οριακός κύκλος ονομάζεται ημι-ευσταθής (semistable). Μια τέτοια περίπτωση είναι εν γένει σπάνια. Εξαιρώντας την σπάνια περίπτωση της ημι-ευστάθειας μπορούμε να κάνουμε την πρόταση : Αν ο οριακός κύκλος περικλείει ένα σημείο ισορροπίας και είναι ο μοναδικός, τότε αν το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ασταθές ο οριακός κύκλος θα είναι εν γένει ευσταθής. Αντίθετα αν το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές ο οριακός κύκλος είναι ασταθής.

## Ασκήσεις

**Άσκηση 5.1.1.** Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες λύστε το σύστημα

$$\dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \quad \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2)$$

και δείξτε ότι η φασική καμπύλη  $x^2 + y^2 = 1$  αποτελεί οριακό κύκλο.

**Άσκηση 5.1.2.** Δείξτε ότι το σύστημα

$$\dot{x} = y + x(x^2 + y^2 - 1), \quad \dot{y} = -x + y(x^2 + y^2 - 1)$$

έχει έναν ασταθή οριακό κύκλο και σχεδιάστε πρόχειρα το φασικό διάγραμμα.

**Άσκηση 5.1.3.** Δείξτε ότι το σύστημα

$$\dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2), \quad \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2);$$

έχει δύο οριακούς κύκλους. Βρείτε την ευστάθειά τους και σχεδιάστε πρόχειρα το φασικό διάγραμμα.

**Άσκηση 5.1.4.** Ένας μεταβλητός αστέρας του τύπου των Κηφείδων έχει ακτίνα που μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση  $r(t) = r_0(1 + x(t))^{1/3}$ , όπου (σε κανονικοποιημένες μονάδες) το  $x=x(t)$  δίνεται από την εξίσωση

$$\ddot{x} = b(1 - x^2)\dot{x} + a\left(1 - \frac{3}{2}a\right)\dot{x}^2 - x + ax^2 + \frac{7}{6}a^2x^3, \quad a > 0, b > 0$$

Επιλύστε αριθμητικά την παραπάνω εξίσωση για  $a=0.05$ ,  $b=0.1$  και για αρχικές συνθήκες  $x(0)=0.1$ ,  $dx/dt(0)=0$  και δείξτε ότι η λύση τείνει προς ένα οριακό κύκλο. Σχεδιάστε τον οριακό κύκλο καθώς και τις ταλαντώσεις της ακτίνας του αστερά.

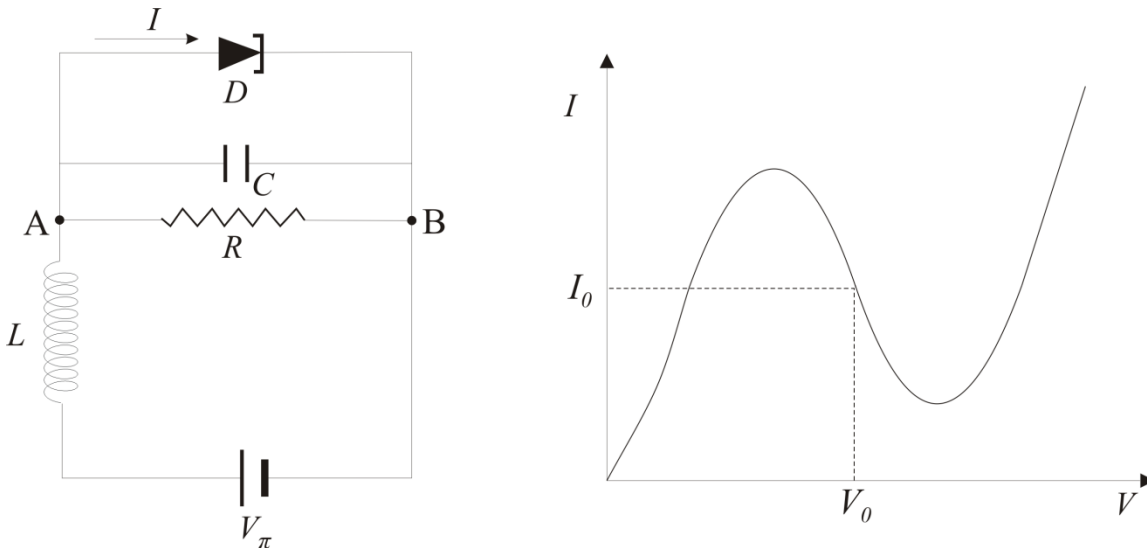
## 5.2 Η εξίσωση Van der Pol

### 5.2.1 Αυτό-διεγυριόμενες ηλεκτρικές ταλαντώσεις

Μια από τις εφαρμογές των διόδων με μη-γραμμική χαρακτηριστική τάσης-ρεύματος είναι η δημιουργία ηλεκτρικών ταλαντωτών με τη χρήση πηγής συνεχούς ρεύματος (electrical self-excited oscillations). Ένα παράδειγμα τέτοιου κυκλώματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 5-4, όπου αναγνωρίζουμε τα γραμμικά στοιχεία του κυκλώματος  $R, L, C$ , και μια δίοδο σήραγγας (tunnel diode) με χαρακτηριστική καμπύλη που φαίνεται στο ίδιο σχήμα (δεξιά). Γύρω από το σημείο λειτουργίας ( $V_0, I_0$ ) της διόδου, η καμπύλη περιγράφεται από τη σχέση

$$i = -av + bv^3, \quad i = I - I_0, \quad v = V_D - V_0 \quad (5.12)$$

όπου  $a, b$  θετικές σταθερές. Επίσης,  $V_D$  είναι η τάση στα άκρα της διόδου, ή, ισοδύναμα στα σημεία AB, άρα  $V_D = V_R = V_C$ , όπου ο δείκτης δηλώνει το αντίστοιχο ηλεκτρικό στοιχείο. Το κύκλωμα τροφοδοτείται από πηγή συνεχούς τάσης  $V_\pi$ .



Σχήμα 5-4. Δεξιά, κύκλωμα αυτό-διεγυριόμενου ηλεκτρικού ταλαντωτή με δίοδο σήραγγας. Αριστερά, η χαρακτηριστική τάσης-ρεύματος της διόδου.

Από το νόμο του Kirchhoff έχουμε για τα ρεύματα που διαπερνούν τα ηλεκτρικά στοιχεία:

$$-I_L + I_R + I_C + I = 0 \quad (5.13)$$

Επίσης είναι

$$I_R = V_R / R = V_D / R, \quad I_C = C \frac{dV_C}{dt} = C \frac{dV_D}{dt}$$

και η (5.13) γράφεται

$$-I_L + \frac{V_0 + v}{R} + C \frac{dv}{dt} + I_0 - av + bv^3 = 0$$

Αν παραγωγίσουμε την παραπάνω σχέση ως προς τον χρόνο και χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\frac{dI_L}{dt} = \frac{V_L}{L} = \frac{V_\pi - V_D}{L} = \frac{V_\pi - V_o - v}{L} = -\frac{v}{L},$$

όπου θεωρήσαμε  $V_\pi = V_o$ , δηλαδή ότι η πηγή δίνει τάση ίση με αυτή του σημείου λειτουργίας της διόδου, παίρνουμε την εξίσωση

$$\frac{v}{L} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + C \frac{d^2v}{dt^2} - a \frac{dv}{dt} + 3bv^2 \frac{dv}{dt} = 0$$

ή

$$v'' + \left( -\frac{a}{C} + \frac{1}{CR} + \frac{3b}{C}v^2 \right) v' + \frac{1}{LC}v = 0, \quad v' = \frac{dv}{dt} \quad (5.14)$$

Θέτουμε  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  και ορίζουμε νέα κλίμακα χρόνου  $\tau = \omega t$  καθώς και την αδιάστατη ηλεκτρική τάση

$$x = \frac{v}{s}, \quad s = \sqrt{\frac{a-1/R}{3b}}.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω ποσότητες, η (5.14) γράφεται τελικά ως

$$\ddot{x} - \varepsilon(1-x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (5.15)$$

όπου  $\varepsilon = (a-1/R)/\omega C$ , και η οποία είναι θετική για  $R > 1/a$ . Οι παράγωγοι είναι ως προς τον κανονικοποιημένο χρόνο  $\tau$ . Η εξίσωση (5.15) είναι γνωστή ως η **εξίσωση του Van der Pol** (ή [ταλαντωτής Van der Pol](#))

## 5.2.2 Σημεία ισοροπίας

Η γενική λύση της (5.15) δεν μπορεί να βρεθεί. Θα θεωρούμε ότι  $\varepsilon > 0$  και την γράφουμε ως σύστημα

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \varepsilon(1-x^2)y. \quad (5.16)$$

Το διανυσματικό πεδίο του συστήματος είναι  $\mathbf{f} = (y, -x + \varepsilon(1-x^2)y)$  και έχουμε  $\text{div} \mathbf{f} = \varepsilon(1-x^2)$ . Άρα στην περιοχή  $-1 \leq x \leq 1$  το σύστημα είναι εκρηκτικό ενώ έξω από αυτήν το σύστημα γίνεται απωλεστικό. Το διανυσματικό πεδίο έχει ένα σημείο ισοροπίας ή κρίσιμο σημείο

$$\mathbf{f} = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0).$$

Ο πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος γύρω από το  $(0,0)$  θα είναι

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2\varepsilon xy & \varepsilon(1-x^2) \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

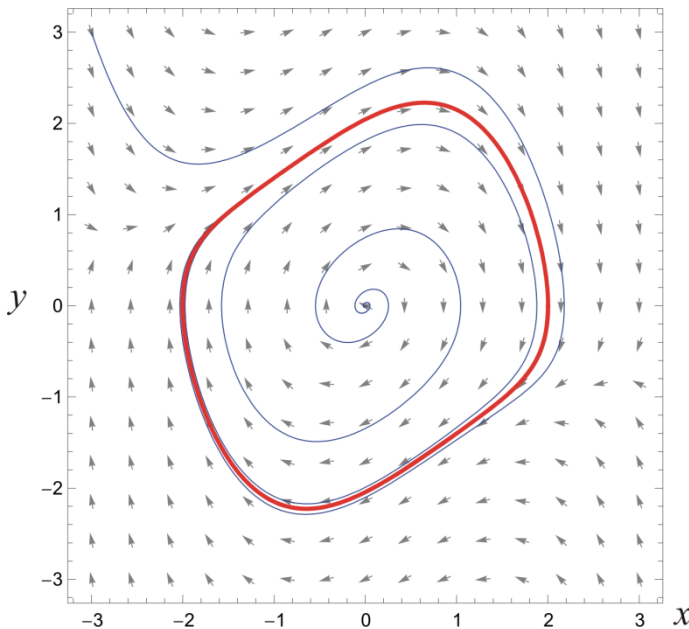
με ιδιοτιμές

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4} \right)$$

Για  $\varepsilon < 2$  οι ιδιοτιμές είναι συζυγείς μιγαδικές. Μάλιστα  $\text{Re}[\lambda_{1,2}] = \varepsilon/2 > 0$  και άρα το σημείο ισοροπίας είναι ασταθής εστία. Έχουμε λοιπόν μια σπείρα γύρω από το  $(0,0)$  η οποία αυξάνει την ακτίνα της έως ότου  $|x| < 1$ . Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι η εστία μεγαλώνει κατά πλάτος κυρίως ως προς το  $y$  και έτσι μένει στην «εκρηκτική» περιοχή. Όμως αύξηση του  $y$  κατά απόλυτη τιμή προκαλεί και σημαντικό ρυθμό αύξησης του  $x$ . Για  $\varepsilon > 2$  οι ιδιοτιμές γίνονται πραγματικές θετικές και το σημείο ισοροπίας είναι ασταθής κόμβος. Οι λύσεις απομακρύνονται γρήγορα από το  $(0,0)$  αλλά και πάλι έως ότου  $|x| < 1$ .

### 5.2.3 Περιοδικές λύσεις – μικρές τιμές $\varepsilon$

Τη συμπεριφορά των λύσεων μακριά από το σημείο ισορροπίας  $(0,0)$  μπορούμε να την δούμε επιλύοντας αριθμητικά την εξίσωση (5.15) (ή ισοδύναμα το σύστημα (5.16)) για κάποια δεδομένη τιμή της παραμέτρου  $\varepsilon$ . Μερικές φασικές καμπύλες που προκύπτουν από την αριθμητική λύση για  $\varepsilon=0.5$  φαίνονται στο Σχήμα 5-5. Παρατηρούμε την ύπαρξη οριακού κύκλου, δηλαδή την ύπαρξη μιας περιοδικής λύσης στην οποία τείνουν ασυμπτωτικά όλες οι λύσεις του συστήματος.



Σχήμα 5-5. Ο οριακός κύκλος της εξίσωσης Van der Pol ( $\varepsilon=0.5$ )

Για την αναλυτική προσέγγιση αυτής της λύσης χρησιμοποιούμε την μέθοδο διαταραχών Lindstedt-Poincaré. Θεωρούμε ότι η παράμετρος  $\varepsilon$  είναι μικρή και ορίζουμε μια νέα κλίμακα χρόνου  $\tau=\Omega t$ , όπου  $t$  ο χρόνος ως προς τον οποίο είναι γραμμένη η (5.16). Επιζητούμε μια περιοδική λύση

$$x(\tau + 2\pi) = x(\tau), \quad \tau = \Omega t .$$

Επίσης γράφουμε τη λύση και τη συχνότητα  $\Omega$  σε μορφή σειράς

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \dots, \quad \Omega = \Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 + \varepsilon^2 \Omega_2 + \dots$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σειρές στην (5.15) παίρνουμε μέχρι όρους  $2^{15}$  τάξης ως προς την μικρή παράμετρο  $\varepsilon$

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0 \quad (O(\varepsilon^0)) \quad (5.17)$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -2\Omega_1 \dot{x}_0 + (1 - x_0^2) \dot{x}_0 \quad (O(\varepsilon^1)) \quad (5.18)$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -(2\Omega_2 + \Omega_1^2) \dot{x}_0 - 2\Omega_1 \ddot{x}_1 + (\Omega_1(1 - x_0^2) - 2x_0 \dot{x}_1) \dot{x}_0 + (1 - x_0^2) \dot{x}_1 \quad (O(\varepsilon^2)) \quad (5.19)$$

Επίσης  $\Omega_0=1$ . Από την (5.17) και για αρχικές συνθήκες  $\dot{x}_0(0) = 0$  έχουμε τη λύση

$$x_0(\tau) = A_0 \cos \tau \quad (5.20)$$

όπου  $A_0$  ένας σταθερός συντελεστής (πλάτος) που πρέπει να προσδιοριστεί. Αντικαθιστώντας την (5.20) στην (5.18) και κάνοντας χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας  $\sin 3\tau = 3\sin \tau - 4\sin^3 \tau$ , παίρνουμε

$$\ddot{x}_1 + x_1 = 2\Omega_1 A_0 \cos \tau + A_0 \left( \frac{A_0^2}{4} - 1 \right) \sin \tau + \frac{A_0^3}{4} \sin 3\tau$$



Η παραπάνω εξίσωση είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση με το μη-ομογενές της μέρος να αποτελεί τριγωνομετρική συνάρτηση με δύο περιοδικούς όρους. Αν θεωρήσουμε την αρχική συνθήκη  $\dot{x}_1(0) = 0$ , το ομογενές μέρος της εξίσωσης,  $\ddot{x}_1 + x_1 = 0$ , μας δίνει τη λύση  $x_{1,o}(\tau) = A_1 \cos \tau$ . Ο μη-ομογενής όρος με περίοδο  $2\pi/3$  δίνει μια μερική λύση της μορφής

$$x_{1,p1} = b_1 \cos(2\pi\tau/3) + b_2 \sin(2\pi\tau/3),$$

ενώ ο μη-ομογενής όρος περιόδου  $2\pi$  (όπως και το ομογενές μέρος) θα δώσει μια μερική λύση της μορφής

$$x_{1,p2} = b_3 \cos(2\pi\tau) + b_4 \sin(2\pi\tau) + b_5 \tau \cos(2\pi\tau) + b_6 \tau \sin(2\pi\tau),$$

όπου οι συντελεστές  $b_i$  προσδιορίζονται με αντικατάσταση των μερικών λύσεων στην διαφορική εξίσωση και με την απαίτηση να την ικανοποιούν. Μετά τον προσδιορισμό των συντελεστών  $b_i$ , η λύση

$x_1 = x_{1,o} + x_{1,p1} + x_{1,p2}$  γράφεται

$$x_1(\tau) = A_1 \cos \tau - \frac{A_0^3}{32} \sin 3\tau + \frac{3}{4} \sin \tau + \frac{1}{2} \tau \left[ A_0 \left( 1 - \frac{A_0^2}{4} \right) \cos \tau + 2\Omega_1 A_0 \sin \tau \right] \quad (5.21)$$

Για να έχουμε τη συνθήκη περιοδικότητας  $x_1(\tau) = x_1(\tau + 2\pi)$  θα πρέπει να μηδενίζεται ο αιώνιος όρος. Δεδομένου ότι  $A_0 \neq 0$  (μη τετριμμένη λύση), θα πρέπει

$$A_0 = 2, \quad \Omega_1 = 0$$

Έτσι η εξίσωση (5.19) γράφεται

$$\ddot{x}_2 + x_2 = \left( 4\Omega_2 + \frac{1}{4} \right) \cos \tau + 2A_1 \sin \tau - \frac{3}{2} \cos 3\tau + 3A_1 \sin 3\tau + \frac{5}{4} \cos 5\tau \quad (5.22)$$

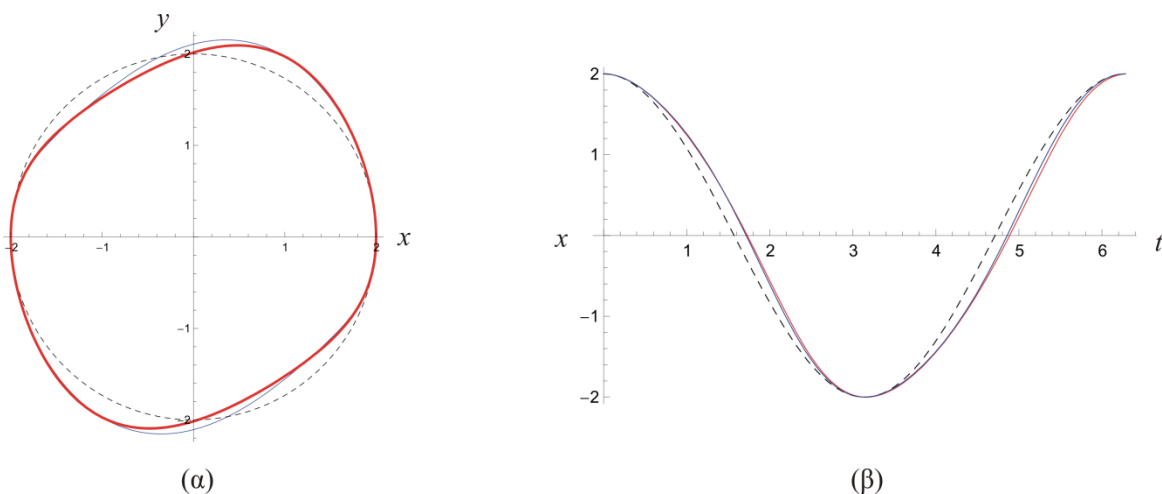
Για να μην έχει η παραπάνω διαφορική εξίσωση αιώνιους όρους στη λύση της, θα πρέπει

$$A_1 = 0, \quad \Omega_2 = -1/16$$

Άρα η περιοδική λύση μέχρι όρους  $1^{\text{ης}}$  τάξης,  $x = x_0 + \varepsilon x_1$  γίνεται

$$x(t) = 2 \cos t + \varepsilon \left( \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t \right) + O(\varepsilon^2) \quad (5.23)$$

Στο Σχήμα 5-6 παρουσιάζεται ο οριακός κύκλος και οι αντίστοιχες ταλαντώσεις για την αριθμητική (πραγματική) λύση και τις προσεγγίσεις (5.20) και (5.23).



Σχήμα 5-6. α) Ο οριακός κύκλος (κόκκινος) της εξίσωσης Van der Pol για  $\varepsilon=0.3$  και οι προσεγγίσεις  $1^{\text{ης}}$  τάξης (διακεκομμένος κύκλος) και  $2^{\text{ης}}$  τάξης ως προς το  $\varepsilon$  (μπλε καμπύλη). β) Οι αντίστοιχες ταλαντώσεις της μεταβλητής  $x$  (κανονικοποιημένη τάση της διόδου)

### 5.2.4 Υπολογιστική μελέτη – μεγάλες τιμές $\varepsilon$

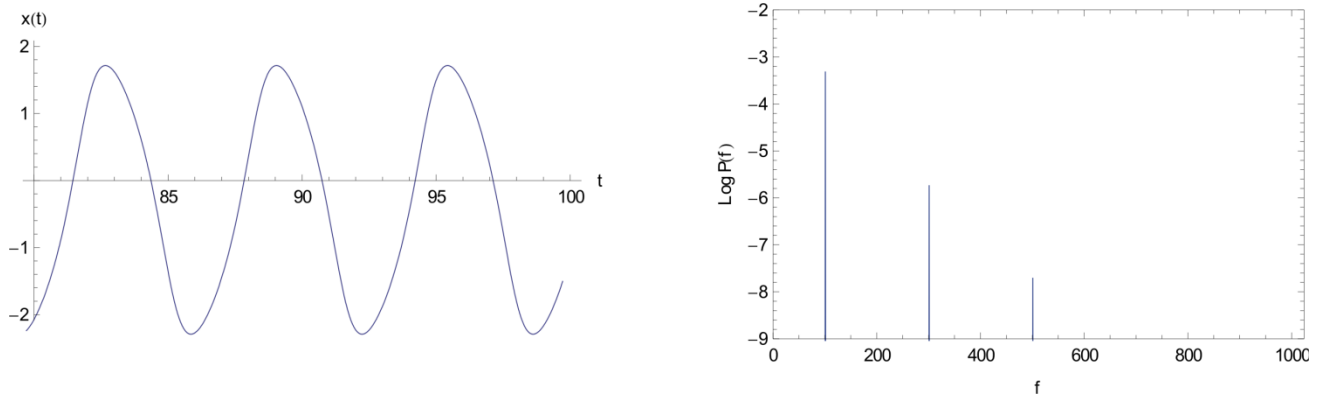
Είδαμε παραπάνω ότι σε όρους μηδενικής τάξης ( $\varepsilon=0$ ), η περιοδική λύση είναι αρμονική με πλάτος  $A_0=2$  και περίοδο  $T=2\pi$ . Για μικρά  $\varepsilon$  έχουμε την παρουσία μιας ακόμα αρμονικής ταλάντωσης με περίοδο  $3T$ . Η προσεγγιστική λύση συνεχίζει να είναι περιοδική με την ίδια περίοδο. Μπορούμε να μελετήσουμε τις ταλαντώσεις με σειρές Fourier ή, υπολογιστικά, με τους Διακριτούς Μετασχηματισμούς Fourier (DFT) που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 2.

Για τον οριακό κύκλο στο Σχήμα 5-5, η ταλάντωση της μεταβλητής  $x=x(t)$  παρουσιάζεται στο Σχήμα 5-7. Δεδομένης της αριθμητικής λύσης, μπορούμε να υπολογίσουμε την περίοδο της ταλάντωσης βρίσκοντας κάποιους χρόνους  $t_1$  και  $t_2$  που συμβαίνουν δύο διαδοχικοί μηδενισμοί της  $x=x(t)$  με  $y(t_i)>0$ .

**[M]** Έχοντας για παράδειγμα την λύση από το Mathematica ως συνάρτηση παρεμβολής, για την ταλάντωση στο Σχήμα 5-7 γράφουμε

```
t1=t/.FindRoot[xt[t]==0,{t,91}]
t2=t/.FindRoot[xt[t]==0,{t,97.5}]
tper=t2-t1
```

Έτσι βρίσκουμε την περίοδο της ταλάντωσης ίση με  $T=6.38$ , τιμή η οποία είναι κοντά στην προσεγγιστική τιμή που βρήκαμε για μικρά  $\varepsilon$ .

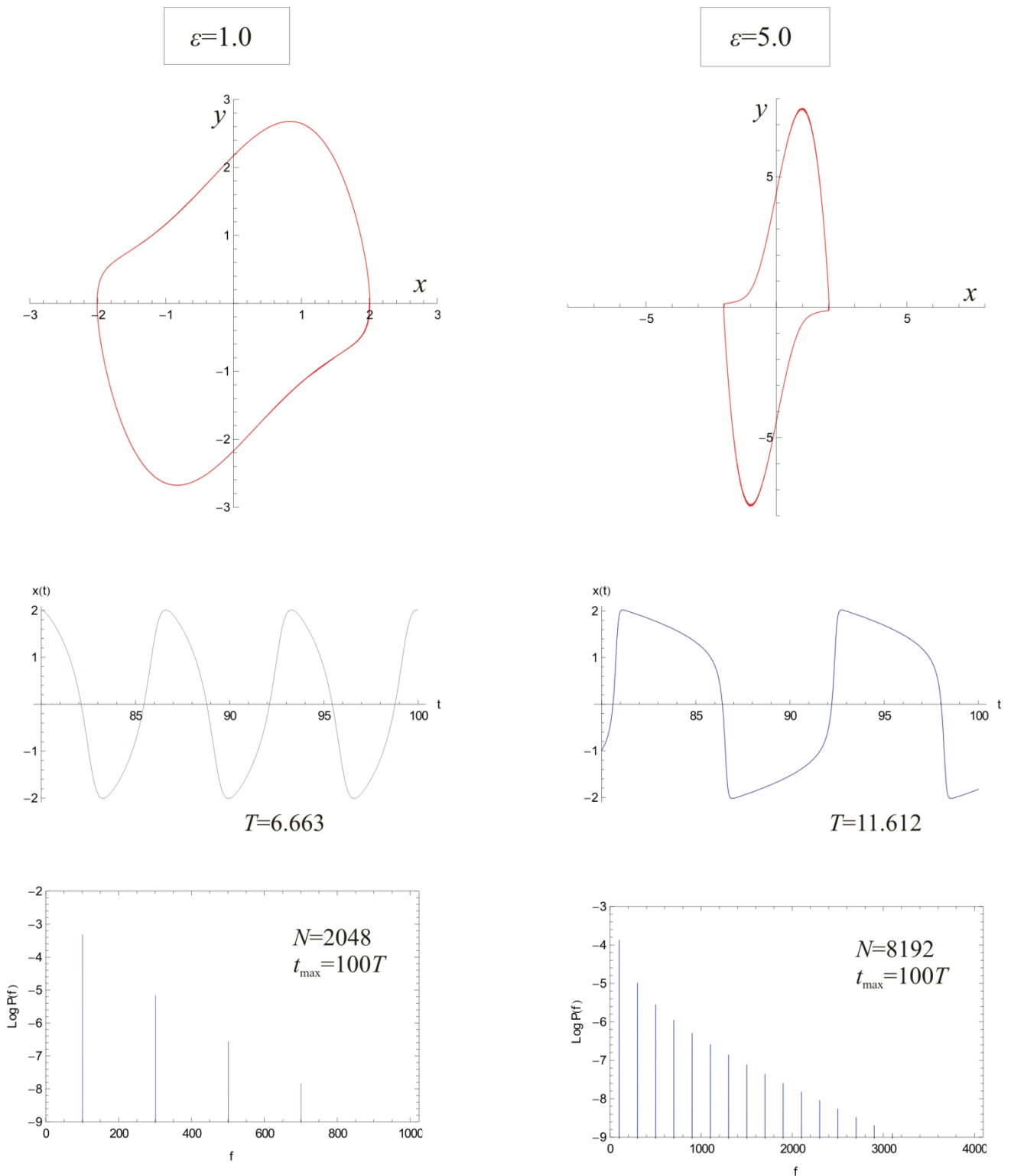


Σχήμα 5-7. Η ταλάντωση (αριστερά)  $x(t)$  της εξίσωσης Van der Pol για  $\varepsilon=0.5$  και το φάσμα ισχύος της με ανάλυση DFT.

Με την εφαρμογή του DFT παίρνουμε το φάσμα ισχύος, το οποίο μας δίνει τις αρμονικές από τις οποίες αποτελείται η ταλάντωση. Χρησιμοποιήσαμε δειγματοληψία 2048 σημείων για  $t_{\max}=100T$  Η μικρότερη συχνότητα και αυτή με το μεγαλύτερο πλάτος είναι η  $f=100$  (η οποία αντιστοιχεί σε περίοδο  $t_{\max}/f$ ). Επίσης παρατηρούμε και μια αρμονική σε συχνότητα  $f=300$ , δηλαδή σε περίοδο  $3T$  όπως προέβλεψε και η προσεγγιστική αναλυτική λύση. Παρατηρούμε όμως και την εμφάνιση μιας ακόμα συχνότητας, μικρότερου πλάτους, στη θέση  $f=500$ , δηλαδή σε περίοδο  $5T$ . Την συχνότητα αυτή θα την προσεγγίζαμε αν χρησιμοποιούσαμε προσέγγιση ανώτερης τάξης επιλύοντας την (5.22).

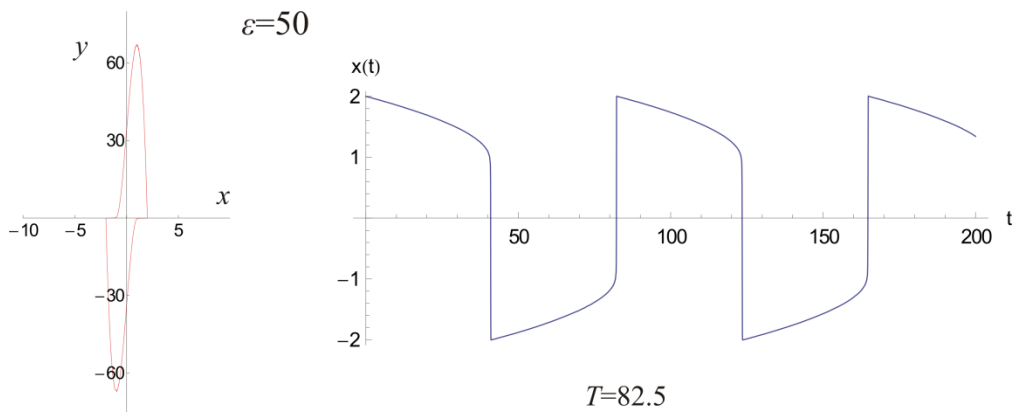
**Σημείωση.** Αν χρησιμοποιούσαμε μικρότερη δειγματοληψία (π.χ. 512 σημεία) το φάσμα μας θα περιοριζόταν στις 256 συχνότητες και έτσι οι συχνότητες 300 και 500 θα εμφανίζονταν «aliased» μέσα στο διάστημα 1–256.

Στο Σχήμα 5-8 παρουσιάζεται ο οριακός κύκλος, η ταλάντωση της δυναμικής μεταβλητής  $x(t)$  και το φάσμα ισχύος για  $\varepsilon=1$  και  $\varepsilon=5$ . Παρατηρούμε πως ο οριακός κύκλος αυξάνει το πλάτος του ως προς την μεταβλητή  $y$ . Επίσης η περίοδος  $T$  αυξάνει με το  $\varepsilon$  και η ταλάντωση διαφέρει πάρα πολύ από μια αρμονική ταλάντωση. Το φάσμα ισχύος δείχνει ότι η μη γραμμική ταλάντωση περιγράφεται με όλο και περισσότερες αρμονικές οι οποίες παρουσιάζουν εκθετική μείωση του πλάτους τους. Η μεγαλύτερη κορυφή του φάσματος συνεχίζει να αντιστοιχεί στην βασική ταλάντωση με περίοδο  $T$ .



Σχήμα 5-8. Υπολογιστικά αποτελέσματα για την εξίσωση Van der Pol για  $\varepsilon=1$  και  $\varepsilon=5$ . Παρουσιάζεται ο οριακός κύκλος, η ταλάντωση  $x(t)$  και το φάσμα ισχύος της ταλάντωσης.

Για ακόμα μεγαλύτερες τιμές του  $\varepsilon$ , η ταλάντωση αρχίζει να μοιάζει με τετραγωνικό παλμό. Υπάρχουν μεγάλα χρονικά διαστήματα όπου το  $x(t)$  μεταβάλλεται αργά, π.χ. για  $x>0$ , και στη συνέχεια μεταβάλλεται σχεδόν στιγμιαία και μεταπηδά σε  $x<0$ . Οι ταλαντώσεις αυτές ονομάζονται και «ταλαντώσεις ηρέμησης» (relaxation oscillations) διότι για αρκετό διάστημα η μεταβλητή μένει σε σχεδόν σταθερή τιμή. Ένα παράδειγμα, για  $\varepsilon=50$ , δίνεται στο Σχήμα 5-9.



Σχήμα 5-9. Ο οριακός κύκλος και οι ταλαντώσεις ηρέμησης για  $\varepsilon=50$ .

## Ασκήσεις

**Άσκηση 5.2.1.** Ο Reileigh το 1877 περιέγραψε τις ταλαντώσεις μιας χορδής ενός βιολιού με την εξίσωση

$$\ddot{x} + \varepsilon\left(\frac{1}{3}\dot{x}^3 - \dot{x}\right) + x = 0$$

- Δείξτε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι της ίδιας μορφής με αυτήν του Van der Pol
- Σχεδιάστε τον οριακό κύκλο και βρείτε την περίοδο του για  $\varepsilon=1$ ,  $\varepsilon=5$ .
- Δείξτε ότι για μεγάλα  $\varepsilon$  η περίοδος δίνεται από τη σχέση  $T=1.61\varepsilon$

**Άσκηση 5.2.2.** Δίνεται η τροποποιημένη εξίσωση Van der Pol

$$\ddot{x} - \varepsilon^2(1 - x^2)\dot{x} + x - \varepsilon x^3 = 0$$

Θεωρώντας το  $\varepsilon$  μικρό, βρείτε την περιοδική λύση μέχρι όρους  $\varepsilon^2$  χρησιμοποιώντας τη μέθοδο διαταραχών Lindstedt-Poincaré.

## 5.3 Θεωρήματα ύπαρξης οριακών κύκλων

Έστω το μη γραμμικό αυτόνομο σύστημα

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y) \quad (5.24)$$

με διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{f} = (f, g)$ , το οποίο είναι συνεχές και διαφορίσιμο στο επίπεδο. Επίσης θεωρούμε ότι η απόκλιση του δεν είναι ταυτοτικά μηδενική, δηλαδή το σύστημα δεν είναι διατηρητικό. Δεν υπάρχει κάποιο γενικό θεώρημα για τα συστήματα (5.24) που να δίνει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη περιοδικών λύσεων. Όμως έχουν δοθεί πολλά θεωρήματα το καθένα από τα οποία, υπό συγκεκριμένες συνθήκες, μπορεί να εγγυηθεί την ύπαρξη οριακού κύκλου. Εκτός από αυτά, υπάρχουν και τα θεωρήματα μη-ύπαρξης οριακών κύκλων, τα οποία βέβαια δίνουν τις αναγκαίες συνθήκες για τα θεωρήματα ύπαρξης. Για παράδειγμα, έστω το σύστημα

$$\dot{x} = x^2 + y^2 + 1, \quad \dot{y} = x^2 - y^2.$$

Με βάση το θεώρημα που αναφέραμε στην §5.1, το παραπάνω σύστημα δεν μπορεί να έχει κάποιον οριακό κύκλο διότι δεν έχει κάποιο κρίσιμο σημείο (σημείο ισορροπίας).

Παρακάτω θα αναφερθούμε σε μερικά από τα θεωρήματα που είναι γνωστά στη θεωρία των μη-γραμμικών συστημάτων

### 5.3.1 Το αρνητικό κριτήριο του Bendixson

- **Θεώρημα Bendixson.** Έστω ένας απλά συνεκτικός τόπος  $D$  στο επίπεδο των φάσεων. Αν

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \neq 0 \quad \forall (x, y) \in D$$

τότε δεν υπάρχει οριακός κύκλος ο οποίος να περιέχεται ολόκληρος στον τόπο  $D$ .

Η απόδειξη στηρίζεται στο θεώρημα του Green (ή του Stokes στο επίπεδο) σύμφωνα με το οποίο

$$\iint_D (\operatorname{div} \mathbf{f}) dx dy = \oint_{\Gamma} f(x, y) dy - g(x, y) dx$$

όπου  $\Gamma$  η κλειστή καμπύλη που περικλείεται στον απλά συνεκτικό τόπο  $D$ . Σύμφωνα με την υπόθεση του κριτηρίου είναι

$$\iint_D (\operatorname{div} \mathbf{f}) dx dy \neq 0 \quad (5.25)$$

Έστω ότι υπάρχει οριακός κύκλος, με λύση  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  που ικανοποιεί το σύστημα (5.24), ο οποίος δίνεται από τη φασική καμπύλη  $\Gamma$ . Τότε θα ισχύει

$$\oint_{\Gamma} f(x, y) dy - g(x, y) dx = \oint_{\Gamma} (f(x, y) \dot{y} - g(x, y) \dot{x}) dt = \oint_{\Gamma} (f(x, y) g(x, y) - g(x, y) f(x, y)) dt \equiv 0.$$

Άρα ερχόμαστε σε αντίφαση με την (5.25) και συνεπώς δεν μπορεί να υπάρχει μια λύση οριακού κύκλου.

**Παράδειγμα 1.** Έστω το σύστημα

$$\dot{x} = x^3 - y^3, \quad \dot{y} = -3x + y^3 + 2y$$

Είναι

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = 3x^2 + 3y^2 + 2 \neq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

και συνεπώς το σύστημα δεν έχει καμία περιοδική λύση

**Παράδειγμα 2.** Έστω το σύστημα (5.16) του Van der Pol. Είναι

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \varepsilon(1 - x^2)$$

Δεν μπορεί λοιπόν να υπάρχει οριακός κύκλος που να ανήκει αποκλειστικά στον τόπο  $D = \{(x, y) \mid x < -1 \text{ ή } x > 1\}$ . Φυσικά μπορεί να υπάρχει οριακός κύκλος, τμήμα του οποίου να είναι στο διάστημα  $-1 \leq x \leq 1$ , και αυτό βέβαια ισχύει όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

**Σχόλιο.** Το κριτήριο μη-ύπαρξης οριακού κύκλου του Bendixson εκφράζεται πολλές φορές με τη συνθήκη ότι η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου έχει το ίδιο πρόσημο σε όλο τον τόπο  $D$ . Δηλαδή δεν μπορούμε να έχουμε οριακό κύκλο σε ένα τόπο αν το σύστημα είναι αποκλειστικά *απωλεστικό* ή *εκρηκτικό* σε όλο τον τόπο.

Το κριτήριο του Bendixson μπορεί να γενικευτεί και να συμπεριλάβει περισσότερες περιπτώσεις αν θεωρήσουμε

$$\operatorname{div}(\psi \mathbf{f}) \neq 0$$

όπου  $\psi = \psi(x, y)$  μια συνεχής και διαφορίσιμη συνάρτηση στον τόπο  $D$ .

**Παράδειγμα 3.** Έστω το σύστημα

$$\dot{x} = x - 4x^2 + xy, \quad \dot{y} = 2y + 3xy - 2y^2$$

Θα είναι  $\operatorname{div} \mathbf{f} = 3 - 5x - 3y$  και συνεπώς δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την μη-ύπαρξη οριακού κύκλου.

Θεωρούμε όμως την συνάρτηση  $\psi = x^\kappa y^\lambda$  και έχουμε

$$\operatorname{div}(\psi \mathbf{f}) = -x^\kappa y^\lambda [-3 - \kappa - 2\lambda + (5 + 4\kappa - 3\lambda)x + (3 - \kappa + 2\lambda)y]$$

Το σύστημα

$$5 + 4\kappa - 3\lambda = 0, \quad 3 - \kappa + 2\lambda = 0$$

μας δίνει ως λύση  $\kappa = -19/5$ ,  $\lambda = -17/5$ . Επιλέγοντας αυτούς τους εκθέτες για την συνάρτηση  $\psi$ , παίρνουμε

$$\operatorname{div}(\psi \mathbf{f}) = -\frac{38}{5} x^{-19/5} y^{-17/5} \neq 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

και συνεπώς δεν μπορεί να υπάρχει οριακός κύκλος σε κανένα τεταρτημόριο. Επίσης οι άξονες  $x=0$  και  $y=0$  είναι αναλλοίωτοι, αφού σε αυτούς  $dx/dt=0$  και  $dy/dt=0$ , αντίστοιχα. Άρα δεν υπάρχει και λύση που τέμνει εγκάρσια τους άξονες και συνεπώς δεν υπάρχει λύση που περικλείει το  $(0,0)$ .

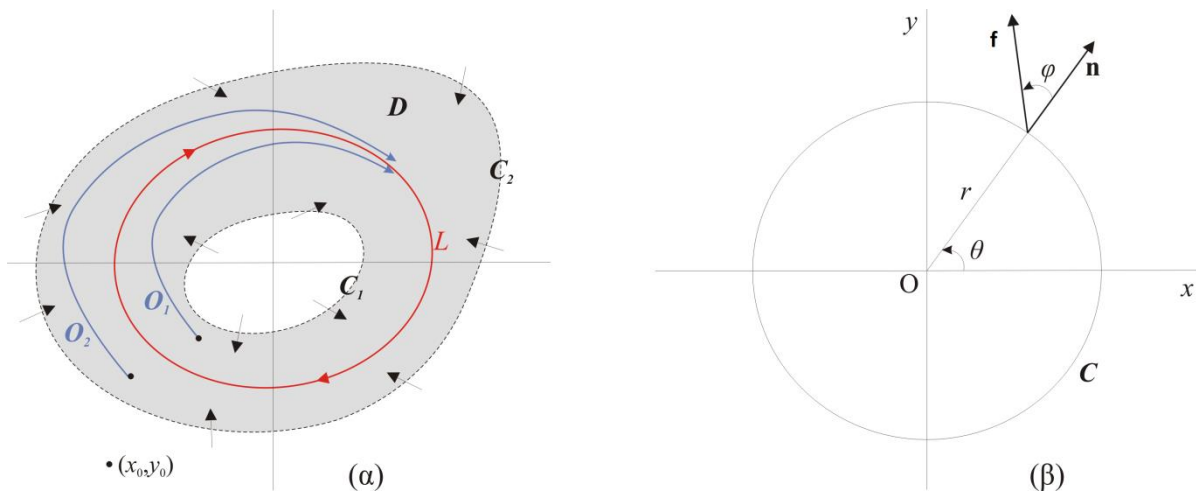
### 5.3.2 Το θεώρημα ύπαρξης Poincaré-Bendixson

- **Θεώρημα Poincaré-Bendixson.** Έστω  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ένας κλειστός περατωμένος τόπος στο επίπεδο και έστω μια τροχιά  $O_t$  με αρχικές συνθήκες  $(x_0, y_0) \in D$  η οποία βρίσκεται εξ' ολοκλήρου στον τόπο  $D$  για  $t > 0$  (συμβολικά γράφουμε  $O_t^+ \in D$ ). Τότε ή η τροχιά είναι κλειστή, δηλαδή περιοδική, ή τείνει προς μια κλειστή τροχιά καθώς  $t \rightarrow +\infty$  ή τερματίζει σε κάποιο κρίσιμο σημείο.

Αν μπορούμε να εντοπίσουμε μια περιοχή του επιπέδου των φάσεων από την οποία δεν μπορεί να ξεφύγει καμία τροχιά για  $t \rightarrow +\infty$ , τότε το παραπάνω θεώρημα μάς περιγράφει τι συμβαίνει στις τροχιές αυτής της περιοχής.

**Σημείωση.** Μπορούμε να θέσουμε το θεώρημα και για το τμήμα  $O_t^-$  της τροχιάς για  $t < 0$ . Τότε θα θεωρήσουμε την ασυμπτωτική τάση της τροχιάς για  $t \rightarrow -\infty$ .

Μπορούμε να ειδικεύσουμε το παραπάνω θεώρημα για την ύπαρξη οριακού κύκλου αν θεωρήσουμε έναν τόπο ο οποίος δεν έχει σημεία ισορροπίας. Επειδή όμως, όπως αναφέραμε στην §5.1 ένας οριακός κύκλος πάντα περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας, μπορούμε να επιλέξουμε ως τόπο  $D$  ένα δακτύλιο μεταξύ δύο κλειστών καμπύλων  $C_1$  και  $C_2$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 5-10α, από τον οποίο δεν ξεφεύγει η τροχιά  $O_t^+$ . Αναγκαία συνθήκη για να μην μπορεί να ξεφύγει η τροχιά είναι το διανυσματικό πεδίο να τέμνει τις καμπύλες  $C_1$  και  $C_2$  με φορά προς την περιοχή του δακτυλίου. Έτσι στην περίπτωση αυτή αν η ίδια η τροχιά δεν είναι περιοδική (με κλειστή φασική καμπύλη έναν οριακό κύκλο στο τόπο  $D$ ) τότε τείνει προς έναν οριακό κύκλο που πρέπει να ανήκει στον τόπο  $D$ . Φυσικά το σημείο ισορροπίας που περικλείει ο οριακός κύκλος  $L$  θα πρέπει να βρίσκεται στον τόπο που περικλείει η καμπύλη  $C_1$ .



Σχήμα 5-10. α) Το θεώρημα Poincaré -Bendixson με εφαρμογή στον δακτύλιο  $D$ . β) Η ροή του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{f}$  τέμνει μια καμπύλη προς τα έξω αν  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ .

Αν  $\mathbf{n}$  είναι το κάθετο διάνυσμα σε ένα τυχόν σημείο μιας καμπύλης  $C$  τότε (δες Σχήμα 5-10β)

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}}{\|\cdot\|}.$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι αν  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} > 0$  η ροή του διανυσματικού πεδίου του συστήματος είναι προς τα έξω ενώ αν  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} < 0$  η ροή θα είναι προς τα μέσα. Συνεπώς αν βρούμε δύο κλειστές καμπύλες  $C_1$  και  $C_2$ , όπως στο σχήμα, που στην πρώτη είναι  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} > 0$  και στη δεύτερη  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} < 0$ , τότε κάθε τροχιά, με αρχικές συνθήκες μεταξύ των δύο καμπύλων, παραμένει μεταξύ αυτών για  $t \rightarrow +\infty$ .

**Παράδειγμα 4.** Θεωρούμε το σύστημα του παραδείγματος 2 της §5.1, που σε πολικές συντεταγμένες γράφεται

$$\dot{r} = r(1-r^2), \quad \dot{\theta} = 1$$

Αν θεωρήσουμε έναν κύκλο με ακτίνα  $r_1 < 1$  και μια ακτίνα  $r_2 > 1$ , τότε

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{r=r_1} > 0 \quad \text{και} \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)_{r=r_2} < 0.$$

Συνεπώς, μια τροχιά που ξεκινάει μέσα από τον δακτύλιο  $r_1 < r < r_2$ , δεν μπορεί να βγει εκτός του δακτυλίου και θα πρέπει να είναι ή οριακός κύκλος ή να τείνει σε κάποιον οριακό κύκλο (που στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι ο κύκλος με  $r=1$ ).

**Παράδειγμα 5.** Έστω το σύστημα

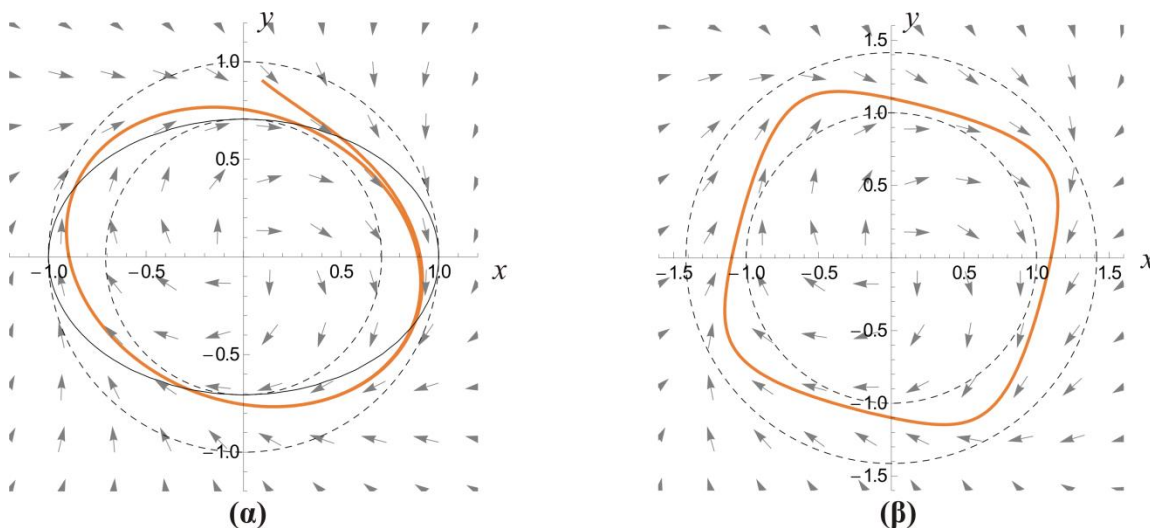
$$\dot{x} = x + y - x(x^2 + 2y^2), \quad \dot{y} = -x + y - y(x^2 + 2y^2) \quad (5.26)$$

Το σύστημα έχει ένα σημείο ισορροπίας, το  $(0,0)$ , το οποίο είναι ασταθής εστία. Έστω δύο κύκλοι,  $C_1$  και  $C_2$ , με κέντρο το  $(0,0)$  και ακτίνες  $R_1 < R_2$ , οπότε ο δακτύλιος μεταξύ τους δεν περιέχει το κρίσιμο σημείο. Το κάθετο διάνυσμα στους κύκλους είναι το  $\mathbf{n}=(x,y)$  και

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} = (x^2 + y^2)(1 - x^2 - 2y^2)$$

Άρα  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} < 0$  αν  $x^2 + 2y^2 > 1$  και  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} > 0$  αν  $x^2 + 2y^2 < 1$ . Παρατηρούμε ότι η έλλειψη  $x^2 + 2y^2 = 1$  έχει ημι-άξονες  $a=1$  και  $b=1/\sqrt{2}$ . Αν λοιπόν θεωρήσουμε ένα κύκλο με ακτίνα  $R_1=1/\sqrt{2}$ , τότε θα είναι στην περιφέρειά του  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} > 0$  και το διανυσματικό πεδίο θα έχει ροή προς τα έξω. Στον κύκλο με ακτίνα  $R_2=1$  είναι  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} < 0$  και η ροή είναι

προς τα μέσα. Συνεπώς οι τροχιές δεν φεύγουν από τον δακτύλιο  $1/\sqrt{2} < r < 1$ , μέσα στον οποίο πρέπει να υπάρχει κάποιος οριακός κύκλος.



Σχήμα 5-11. (α) Μια τροχιά του συστήματος (5.26) που καταλήγει στον οριακό κύκλο. Οι κύκλοι  $x^2 + y^2 = 1$  και  $x^2 + y^2 = 2^{-1/2}$ , που περικλείουν την έλλειψη  $x^2 + 2y^2 = 1$  σχηματίζουν ένα δακτύλιο μέσα στον οποίο βρίσκεται ο οριακός κύκλος. (β) Ο οριακός κύκλος του παραδείγματος 6 μέσα στον δακτύλιο  $1 < x^2 + y^2 < 2^{1/2}$ .

**Σημείωση.** Αν αντί του συστήματος (5.26), θεωρήσουμε το σύστημα

$$\dot{x} = -x - y + x(x^2 + 2y^2), \quad \dot{y} = x - y + y(x^2 + 2y^2)$$

τότε θα διαπιστώσουμε ότι στον κύκλο με ακτίνα  $R_1 = 1/\sqrt{2}$  θα είναι  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} < 0$ , δηλαδή η ροή του πεδίου θα είναι προς τα μέσα, και για την ακτίνα  $R_2 = 1$  θα είναι  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} > 0$ , δηλαδή η ροή του πεδίου θα είναι προς τα έξω. Αν όμως θεωρήσουμε  $t \rightarrow -\infty$ , οι τροχιές παραμένουν στον δακτύλιο και τείνουν σε μια περιοδική λύση. Φυσικά αυτή θα αντιστοιχεί σε έναν ασταθή οριακό κύκλο.

Μια άλλη θεώρηση για τον εντοπισμό κατάλληλων δακτυλίων είναι η ακόλουθη. Έστω μια οικογένεια ένθετων κλειστών καμπύλων (χωρίς κοινά σημεία)

$$h(x, y) = c > 0$$

έτσι ώστε μια καμπύλη με παράμετρο  $c = c_0$  περικλείει όλες τις καμπύλες με παράμετρο  $c < c_0$ . Τότε αν P είναι ένα τυχόν σημείο που ανήκει στην καμπύλη  $h(x, y) = c_0$ , και

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_P = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h}{\partial y} \dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} f + \frac{\partial h}{\partial y} g > 0,$$

η φορά της τροχιάς που περνάει από το P (δηλαδή, από οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης) θα είναι προς τα έξω, δηλαδή προς καμπύλες με μεγαλύτερη τιμή από το  $c_0$ . Προφανώς η ροή θα είναι προς τα μέσα αν  $[\frac{dh}{dt}]_P < 0$ .

**Παράδειγμα 6.** Θα δείξουμε ότι το σύστημα

$$\dot{x} = y - x^3 + x, \quad \dot{y} = -x - y^3 + y \quad (5.27)$$

έχει έναν τουλάχιστον οριακό κύκλο.

Το σύστημα έχει ένα σημείο ισορροπίας στο (0,0) (ασταθής εστία). Έστω η οικογένεια κύκλων  $h(x, y) = x^2 + y^2 = c$ . Έχουμε

$$\frac{dh}{dt} = 2[(x^2 + y^2) - (x^4 + y^4)]$$



Για  $x^2+y^2 < 1$  έχουμε ότι  $x^2+y^2 > x^4+y^4$  και συνεπώς  $dh/dt > 0$ , δηλαδή η ροή στα σημεία του κύκλου με ακτίνα 1 θα έχει φορά από μέσα προς τα έξω. Επίσης για  $x^2+y^2 > 2$  έχουμε ότι  $x^2+y^2 < x^4+y^4$  και συνεπώς  $dh/dt < 0$ , δηλαδή η ροή στα σημεία του κύκλου με ακτίνα  $\sqrt{2}$  θα έχει φορά από έξω προς τα μέσα. Συνεπώς στον δακτύλιο  $1 < x^2+y^2 < \sqrt{2}$  θα υπάρχει οριακός κύκλος (δες Σχήμα 5-11β).

### 5.3.3 Τα συστήματα Lienard

Μια κλάση συστημάτων, η οποία γενικεύει την εξίσωση Van der Pol, είναι τα συστήματα, που μελετήθηκαν από τον [Lienard](#) και τα οποία είναι της μορφής

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (5.28)$$

Η συνάρτηση  $f(x)$  ονομάζεται *συντελεστής απόσβεσης* (damping coefficient), ο οποίος είναι θετικός ή αρνητικός, και η συνάρτηση  $-g(x)$  *δύναμη επαναφοράς* (restoring force). Και οι δύο αυτές συναρτήσεις θα τις θεωρούμε συνεχείς.

Η (5.28) γράφεται ως σύστημα στη μορφή

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x)y - g(x).$$

Θεωρώντας το επίπεδο *Lienard*  $(x, Y)$ , όπου  $Y = y + F(x)$  με  $F(x) = \int_0^x f(\chi) d\chi$  θα έχουμε

$$\dot{y} = \dot{Y} - \frac{d}{dt} \int_0^x f(\chi) d\chi = \dot{Y} - \frac{d}{dt} \int_0^x f(\chi) \dot{\chi} dt = \dot{Y} - f(x)\dot{x}$$

και οι εξισώσεις του συστήματος γράφονται

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Y - F(x) \\ \dot{Y} - f(x)y &= -f(x)y - g(x) \Rightarrow \dot{Y} = -g(x) \end{aligned}$$

Άρα, αλλάζοντας το σύμβολο  $Y$  με το  $y$ , η εξίσωση (5.28) μετασχηματίζεται και ως

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - F(x) \\ \dot{y} &= -g(x) \end{aligned} \quad (5.29)$$

- **Θεώρημα Lienard.** Η εξίσωση (5.28) έχει μια μοναδική περιοδική λύση εάν
  - $f(x)$  είναι μια άρτια συνάρτηση με  $f(0) < 0$  και  $f(x) > 0$  για  $x > a > 0$ .
  - $g(x)$  είναι περιττή συνάρτηση και  $g(x) > 0$  για  $x > 0$ .

Η πρώτη συνθήκη του θεωρήματος σημαίνει ότι η συνάρτηση  $F(x)$  είναι περιττή συνάρτηση, μηδενίζεται στα σημεία  $x=0$ ,  $x=\pm a$  και τείνει μονότονα στο  $+\infty$  καθώς  $x \rightarrow +\infty$ . Η δεύτερη συνθήκη σημαίνει ότι η δύναμη επαναφοράς  $-g(x)$  προέρχεται από δυναμικό με ένα ακρότατο (ελάχιστο) και συνεπώς προκαλεί ευσταθείς ταλαντώσεις.

**Σημείωση.** Αν πληρούνται οι συνθήκες του θεωρήματος Lienard, τότε αν η  $(x(t), y(t))$  είναι λύση του συστήματος (5.29) και η  $(-x(t), -y(t))$  είναι επίσης λύση.

**Παράδειγμα 7.** Για την εξίσωση Van der Pol,

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \varepsilon > 0,$$

είναι  $f(x) = \varepsilon(x^2 - 1)$  και  $g(x) = x$ . Προφανώς η συνθήκη (i) του θεωρήματος πληρείται για  $a=1$ . Επίσης, είναι προφανές ότι πληρείται και η συνθήκη (ii) – η δύναμη επαναφοράς είναι αυτήν του αρμονικού ταλαντωτή. Άρα αποδεικνύεται ότι η εξίσωση Van der Pol έχει έναν οριακό κύκλο.

Από το θεώρημα Lienard μπορούν να προκύψουν διάφορες ειδικές περιπτώσεις (δες Lynch, 2007, σελ. 227).

## Ασκήσεις

**Άσκηση 5.3.1.** Δείξτε ότι τα παρακάτω συστήματα δεν έχουν οριακούς κύκλους

- (i)  $\dot{x} = y + x^3, \quad \dot{y} = x + y + y^3$
- (ii)  $\dot{x} = -x + 4y, \quad \dot{y} = -x - y^3$
- (iii)  $\dot{x} = 2xy - 2y^4, \quad \dot{y} = x^2 - y^2 - xy^3$
- (iv)  $\dot{x} = x(2 - y - x), \quad \dot{y} = y(4x - x^2 - 3) \quad (\psi = 1/xy)$

**Άσκηση 5.3.2.** Δείξτε ότι το σύστημα  $\dot{x} = 1 + y^2 - e^{xy}, \quad \dot{y} = xy + \cos^2 y$  δεν έχει οριακούς κύκλους (βοήθεια : σχεδιάστε τις καμπύλες μηδενικής τιμής, δείξτε ότι δεν τέμνονται και άρα το σύστημα δεν έχει σημεία ισορροπίας).

**Άσκηση 5.3.3.** Δείξτε ότι τα παρακάτω συστήματα έχουν περιοδικές λύσεις (τουλάχιστον έναν οριακό κύκλο)

- (i)  $\dot{x} = 2x + 2y - x(2x^2 + y^2), \quad \dot{y} = -2x + y - y(2x^2 + y^2)$
- (ii)  $\dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2)$
- (iii)  $\dot{x} = 2x + y - 2x^3 - 3xy^2, \quad \dot{y} = -2x + 4y - 4y^3 - 2x^2y \quad (C : 2x^2 + y^2 = c)$

**Άσκηση 5.3.4.** Για το σύστημα

$$\dot{x} = x - y - x(x^2 + 5y^2), \quad \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2)$$

- α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και την ευστάθειά τους
- β) Δείξτε ότι έχει οριακό κύκλο μέσα στον δακτύλιο  $\frac{1}{\sqrt{2}} < r < 1$  (χρησιμοποιήστε πολικές συντεταγμένες).
- γ) Ποια είναι η ευστάθεια του οριακού κύκλου;
- δ) Επιλύστε αριθμητικά το σύστημα και σχεδιάστε τον οριακό κύκλο.

**Άσκηση 5.3.5.** Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις Lienard έχουν μια περιοδική λύση

- (i)  $\ddot{x} + \frac{1}{2}(x^2 - 1) + x + x^3 = 0,$
- (ii)  $\ddot{x} + \frac{x^2 + |x| - 1}{x^2 - |x| + 1} \dot{x} + x^3 = 0$

Λύστε αριθμητικά τις παραπάνω εξισώσεις και σχεδιάστε τον οριακό τους κύκλο.

## 5.4 Βιβλιογραφία

- Abell, M.L. & Braselton, J.P., 1997. *Differential equations with Mathematica*. 2nd ed. Academic Press.
- Enns, R.H. & McGuire, G.C., 2001. *Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers*. Boston: Birkhauser.
- Guckenheimer, J. & Holmes, P., 1997. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. 3rd ed. New York: Springer-Verlag.
- Irwin, M.C., 2001. *Smooth Dynamical Systems*. Singapore: World Scientific.

- Jordan, D. W. & Smith, P., 2007. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. 4th ed. Oxford: Oxford University Press.
- Jose, J.V. & Saletan, E.J., 1998. *Classical Dynamics: a contemporary approach*. Cambridge UK: Cambridge University Press.
- Lynch, S., 2007. *Dynamical systems with applications using Mathematica*. Boston: Birkhauser.
- Marasco, A. & Romano, A., 2001. *Scientific Computing with Mathematica: Mathematical problems of ordinary differential equations*, Boston: Birkhauser.
- Strogatz, S.H., 1994. *Nonlinear Dynamics and Chaos, with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- Tel, T. & Gruiz, M., 2006. *Chaotic Dynamics: an introduction based on Classical Mechanics*. New York: Cambridge University Press.
- Wiggins, S., 1990. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. New York: Dover.
- Χατζηδημητρίου, Ι.Δ., 2000. *Θεωρητική Μηχανική (τόμος Α')*: Νευτώνια Μηχανική. 3η έκδ. Θεσσαλονίκη: Γιαχούδη.

## 6 Διακλαδώσεις

### 6.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί

Στις περισσότερες εφαρμογές, οι εξισώσεις των συστημάτων, πέρα από τις δυναμικές μεταβλητές περιλαμβάνουν παραμέτρους, οι οποίες, ναί μεν είναι σταθερές για μια συγκεκριμένη κατάσταση, αλλά μπορούν να πάρουν διάφορες τιμές. Για παράδειγμα στο ηλεκτρικό σύστημα που περιγράψαμε στην §5.1, οι διάφορες φυσικές παράμετροι του συστήματος, μετά από κατάλληλες απλοποιήσεις, δίνουν μία **παράμετρο ελέγχου**  $\varepsilon$ , η οποία εμφανίζεται στη διαφορική εξίσωση. Γενικά, μπορούμε να αναφερόμαστε σε δυναμικά συστήματα διάστασης  $n$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}), \quad \mathbf{x} \in E^n, \quad \boldsymbol{\mu} \in R^k, \quad (6.1)$$

όπου  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$  είναι οι παράμετροι του συστήματος. Το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{f}$  του συστήματος θα θεωρείται πάντα συνεχές και διαφορίσιμο ως προς τις δυναμικές μεταβλητές.

Μια πλήρης μελέτη του δυναμικού συστήματος απαιτεί την περιγραφή του φασικού χώρου για όλες τις δυνατές τιμές των παραμέτρων του συστήματος. Επειδή όμως μας ενδιαφέρουν κυρίως τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του φασικού χώρου, έχει νόημα να μελετήσουμε ένα σύστημα για τιμές παραμέτρων οι οποίες αντιστοιχούν σε μια διαφορετική τοπολογική εικόνα του φασικού διαγράμματος. Όπως ήδη είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, η τοπολογία του φασικού διαγράμματος και η μορφή των φασικών καμπύλων εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την παρουσία σημείων ισορροπίας και από τον τύπο της ευστάθειάς τους. Μεταβάλλοντας με συνεχή τρόπο την παράμετρο ελέγχου του συστήματος, ο αριθμός των σημείων ισορροπίας ή η ευστάθειά τους μπορεί να αλλάξει. Η κρίσιμη τιμή  $\boldsymbol{\mu}_0$  της παραμέτρου ελέγχου στην οποία διαπιστώνεται μια τέτοια αλλαγή, ονομάζεται **σημείο διακλάδωσης** ([bifurcation point](#)).

Εκτός από τα σημεία ισορροπίας, και οι περιοδικές λύσεις (οριακοί κύκλοι) μπορεί να επηρεάζονται από την παράμετρο ελέγχου. Οι λύσεις αυτές μπορεί να εμφανίζονται, να εξαφανίζονται ή να διπλασιάζονται σε κάποιες κρίσιμες τιμές της παραμέτρου  $\boldsymbol{\mu}$ . Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε διακλαδώσεις του συστήματος.

Τα σημεία διακλάδωσης συνδέονται άμεσα με την έννοια της **δομικής ευστάθειας** ([structural stability](#)). Ένα διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{f}$  (συνεχές και διαφορίσιμο) θα είναι δομικά ευσταθές αν μικρές διαταραχές σε αυτό δεν αλλάζουν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του συστήματος. Η έννοια της μικρής διαταραχής μπορεί να θεωρηθεί και ως μια μικρή μεταβολή των παραμέτρων του συστήματος. Συγκεκριμένα

- Το σύστημα  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu})$  θα είναι **δομικά ευσταθές** γύρω από την τιμή  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$  αν υπάρχει  $\varepsilon > 0$  τέτοιο ώστε, για κάθε  $\boldsymbol{\mu}_1 \in (\boldsymbol{\mu}_0 - \varepsilon, \boldsymbol{\mu}_0 + \varepsilon)$  και  $\boldsymbol{\mu}_2 \in (\boldsymbol{\mu}_0 - \varepsilon, \boldsymbol{\mu}_0 + \varepsilon)$ , τα συστήματα  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}_1)$  και  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}_2)$  είναι τοπολογικά ισοδύναμα, δηλαδή υπάρχει ένας ομοιομορφισμός μεταξύ των τροχιών των δύο συστημάτων που διατηρεί και τον προσανατολισμό (δες §4.4.1). Αν δεν ισχύει το παραπάνω τότε το σύστημα ονομάζεται **δομικά ασταθές** και η τιμή  $\boldsymbol{\mu}_0$  είναι ένα **σημείο διακλάδωσης**.

Με τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να πούμε ότι το σύστημα Lotka-Volterra και το στρατιωτικό μοντέλο ανταγωνισμού, που παρουσιάστηκαν στην §4.5, είναι δομικά ευσταθή συστήματα δεδομένου ότι το φασικό τους διάγραμμα παραμένει ποιοτικά αναλλοίωτο κάτω από τις αλλαγές των θετικών παραμέτρων του συστήματος. Τα σημεία ισορροπίας, καθώς αλλάζουν οι παράμετροι, συνεχίζουν να υπάρχουν και μάλιστα με την ίδια ευστάθεια.

**Σχόλιο.** Ορίσαμε στην §4.4 τη μετάβαση από το γραμμικό στο μη-γραμμικό σύστημα κοντά στα σημεία ισορροπίας. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μη-γραμμικό σύστημα είναι μια διαταραχή του γραμμικού συστήματος και σύμφωνα με το θεώρημα Hartman-Grobman υπάρχει τοπολογική ισοδυναμία μεταξύ των δύο συστημάτων όταν τα σημεία ισορροπίας είναι υπερβολικά.

Ικανές και αναγκαίες συνθήκες για δομική ευστάθεια ορίζει το **θεώρημα του Peixoto**, το οποίο για τα επίπεδα συστήματα έχει ως εξής

- Έστω  $\mathbf{f} \in R^2$  ένα διανυσματικό πεδίο, συνεχές και διαφορίσιμο σε ένα τόπο  $D \subseteq R^2$ . Τότε το σύστημα  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , είναι δομικά ευσταθές αν και εφόσον

1. Ο αριθμός των κρίσιμων σημείων του πεδίου και των οριακών κύκλων του συστήματος είναι πεπερασμένος.
2. Όλα τα κρίσιμα σημεία είναι υπερβολικά και η ευστάθεια των οριακών κύκλων δεν είναι κρίσιμη.
3. Δεν υπάρχουν ετεροκλιτικές τροχιές που συνδέουν σάγματα.

**Παράδειγμα 1.** Το σύστημα (δες παράδειγμα 3, §4.4.3)

$$\dot{x} = 1 - y, \quad \dot{y} = x^2 - y^2 \quad (6.2)$$

παρουσιάζει δύο σημεία ισορροπίας, το σάγμα  $(-1,1)$  και την ευσταθή εστία  $(1,1)$ , και τα δύο υπερβολικά κρίσιμα σημεία. Οι συνθήκες του θεωρήματος του Peixoto ικανοποιούνται και συνεπώς το σύστημα είναι δομικά ευσταθές κάτω από μικρές διαταραχές. Π.χ. αν θεωρήσουμε το σύστημα

$$\dot{x} = 1 - y + \varepsilon x, \quad \dot{y} = x^2 - y^2 + \varepsilon y, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (6.3)$$

τότε αυτό παρουσιάζει και πάλι δύο σημεία ισορροπίας (ένα σάγμα και μια ευσταθή εστία ή κόμβο), σε απόσταση τάξης  $\varepsilon$  από τα αρχικά, και οι τροχιές του είναι τοπολογικά ισοδύναμες με αυτές του συστήματος (6.2).

**Σημείωση.** Η μεταβολή της ευστάθειας από κόμβο σε εστία (ή το αντίστροφο) δεν αποτελεί διακλάδωση. Το φασικό διάγραμμα γύρω από τον κόμβο είναι τοπολογικά ισοδύναμο με αυτό της εστίας.

**Παράδειγμα 2.** Το σύστημα Lotka-Volterra (δες §4.5.1)

$$\dot{x} = -x + xy, \quad \dot{y} = \mu(y - xy), \quad \mu > 0 \quad (6.4)$$

έχει ένα σάγμα στο  $(0,0)$  και ένα κέντρο στο σημείο  $(1,1)$ . Με την αλλαγή της παραμέτρου  $\mu$  δεν παρουσιάζεται κάποια μεταβολή των σημείων ισορροπίας και της ευστάθειάς τους και το φασικό διάγραμμα παραμένει ποιοτικά αναλλοίωτο (δες και Σχήμα 4-16). Έτσι, υπό αυτήν την έννοια, το σύστημα είναι ευσταθές παρόλο που δεν ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος Peixoto, αφού το κέντρο δεν αποτελεί υπερβολικό σημείο. Όμως, το σύστημα δεν είναι δομικά ευσταθές αν θεωρήσουμε μια αυθαίρετη μικρή διαταραχή και όχι αυτή που εισάγει η μεταβολή της παραμέτρου  $\mu$ . Για παράδειγμα, στο διαταραγμένο σύστημα

$$\dot{x} = -x + xy + \varepsilon y, \quad \dot{y} = \mu(y - xy) + \varepsilon x, \quad \mu > 0 \quad (6.5)$$

το σάγμα παραμένει αναλλοίωτο, όμως το κέντρο ( $\varepsilon=0$ ) γίνεται ευσταθής εστία για  $\varepsilon>0$  και η τοπολογία του φασικού διαγράμματος αλλάζει (δες π.χ. Σχήμα 4-17).

Για την ταξινόμηση των διαφόρων τύπων διακλαδώσεων είναι εύχρηστο να γράφονται τα συστήματα σε κάποια **κανονική μορφή** (normal form). Τέτοιες κανονικές μορφές έχουμε ορίσει για τα γραμμικά συστήματα και την ταξινόμηση των σημείων ισορροπίας (δες §4.2). Η κανονική μορφή εν γένει είναι ένα σύστημα με τους κύριους όρους να είναι γραμμικοί, ενώ οι μη-γραμμικοί όροι μετατοπίζονται σε όρους ανώτερης τάξης. Δεν θα αναφερθούμε στο βιβλίο αυτό σε περισσότερες λεπτομέρειες θα σταθούμε μόνο στο παρακάτω παράδειγμα.

**Παράδειγμα 3.** Έστω το σύστημα

$$\dot{x} = 5x + 5x^2, \quad \dot{y} = -y \quad (6.6)$$

με σημείο ισορροπίας το  $(0,0)$ , στο οποίο το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι το

$$\begin{pmatrix} \dot{\chi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

με ιδιοτιμές  $\lambda_1=5>0$ ,  $\lambda_2=-1<0$ . Δηλαδή το σημείο  $(0,0)$  είναι σάγμα. Σύμφωνα με το θεώρημα Hartman-Grobman το σύστημα (6.7) θα παρουσιάζει την ίδια ποιοτικά ροή κοντά στο σημείο ισορροπίας με αυτή του

συστήματος (6.6) και ο όρος που διαφοροποιεί τα δύο συστήματα είναι δεύτερης τάξης  $O(u^2)$ . Θεωρούμε τώρα τον μετασχηματισμό

$$x = u + u^2, \quad y = v \quad (6.8)$$

και έχουμε  $\dot{x} = \dot{u} + 2u\dot{u} = (1 + 2u)\dot{u}$  και  $\dot{y} = \dot{v}$ . Αντικαθιστώντας τις παραπάνω στην (6.6) και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση

$$\frac{1}{1 + 2u} = 1 - 2u + 4u^2 - O(u^3)$$

παίρνουμε τελικά

$$\dot{u} = 5u + O(u^3), \quad \dot{v} = -v \quad (6.9)$$

Συνεπώς το ισοδύναμο σύστημα (6.9) είναι γραμμικό (συμπίπτει με το (6.7)) και διαφέρει από το μη γραμμικό σε όρους τρίτης τάξης. Το (6.9) αποτελεί μια κανονική μορφή για το σύστημα (6.6).

## 6.2 Διακλαδώσεις σημείων ισοροπίας

### 6.2.1 Διακλαδώσεις σε διατηρητικά συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας

Θα μελετήσουμε τις διακλαδώσεις σε διατηρητικά μηχανικά συστήματα της μορφής

$$\ddot{x} = f(x; \mu), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (6.10)$$

όπου  $\mu$  είναι μια παράμετρος ελέγχου του συστήματος. Σημειώνουμε ότι η δυναμική αυτών των συστημάτων μελετήθηκε αναλυτικά στο κεφάλαιο 3.

Τα σημεία ισοροπίας προκύπτουν από την εξίσωση  $f(x; \mu) = 0$  και εν γένει θα εξαρτώνται από την παράμετρο  $\mu$ . Το δυναμικό του συστήματος ορίζεται από την παρακάτω σχέση και εξαρτάται επίσης από την παράμετρο

$$V(x; \mu) = -\int f(x; \mu) dx \quad (6.11)$$

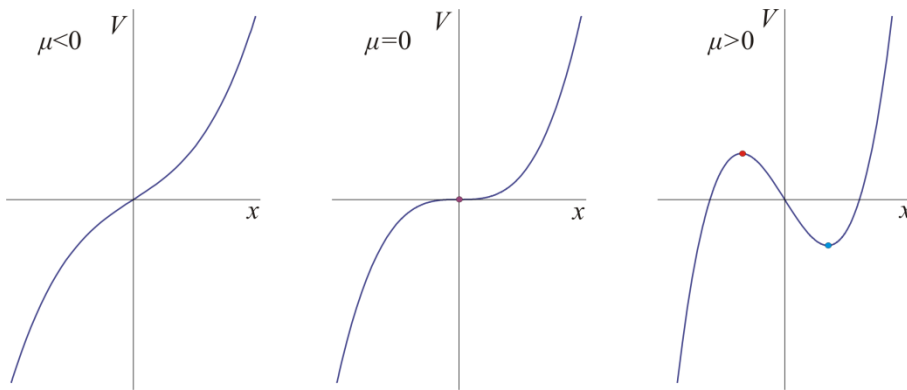
Τα σημεία ισοροπίας θα είναι τα ακρότατα του δυναμικού  $V = V(x; \mu)$ . Μάλιστα τα ελάχιστα αντιστοιχούν σε ευσταθή σημεία ισοροπίας και τα μέγιστα σε ασταθή. Με την  $f$  να αποτελεί μια διαφορίσιμη και συνεχή συνάρτηση ως προς την μεταβλητή αλλά και την παράμετρο, μπορούμε να μελετήσουμε τις διακλαδώσεις του συστήματος παρακολουθώντας τις μεταβολές των ακρότατων της συνάρτησης δυναμικού καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος ελέγχου. Έχουμε τις παρακάτω τυπικές περιπτώσεις

#### i) Διακλάδωση Αναδίπλωσης (*fold bifurcation*)

Έστω το σύστημα

$$\ddot{x} = -x^2 + \mu, \quad V = \frac{1}{3}x^3 - \mu x \quad (6.12)$$

Το δυναμικό έχει τη μορφή που παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.

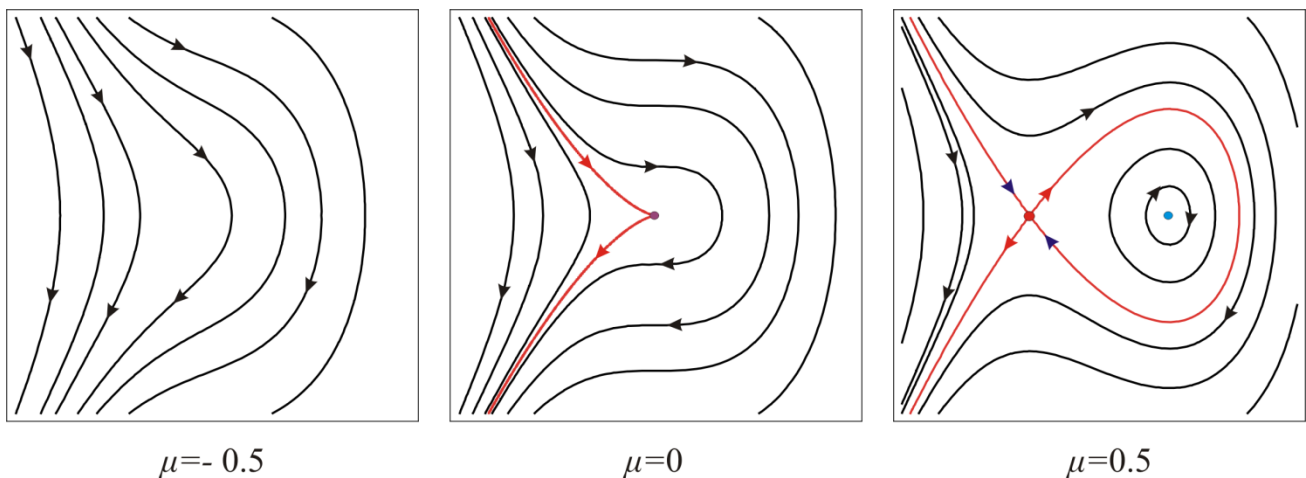


Σχήμα 6-1. Το δυναμικό (6.12) και η διακλάδωση αναδίπλωσης.

Για  $\mu < 0$  δεν έχουμε σημεία ισορροπίας. Για  $\mu = 0$  έχουμε το σημείο ισορροπίας στο  $x=0$ , με δείκτη ευστάθειας

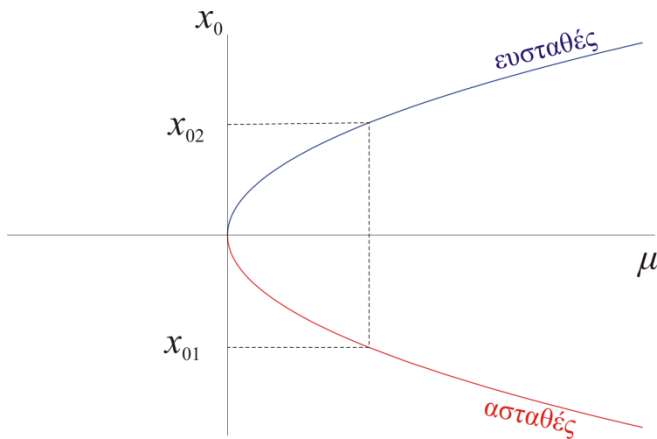
$$k = -\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_0 = 0,$$

δηλαδή έχουμε σημείο καμπής για το δυναμικό και κρίσιμη ευστάθεια για το σημείο ισορροπίας. Για  $\mu > 0$ , παρουσιάζεται η αναδίπλωση του δυναμικού (fold) και δημιουργούνται ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο, δηλαδή δύο σημεία ισορροπίας, ένα ευσταθές και ένα ασταθές. Συνεπώς έχουμε μια διακλάδωση αναδίπλωσης για  $\mu=0$ . Τα αντίστοιχα φασικά διαγράμματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 6-2. Κατά την διακλάδωση, η φασική καμπύλη που αντιστοιχεί στην ενέργεια του κρίσιμου σημείου ( $E=0$ ) παρουσιάζει *κορυφή* (cusp)



Σχήμα 6-2. Τα φασικά διαγράμματα του συστήματος (6.12) για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\mu$ .

Για την παρουσίαση μιας διακλάδωσης χρησιμοποιούμε τα **διαγράμματα διακλάδωσης**, τα οποία απεικονίζουν τη θέση του σημείου ισορροπίας (καθώς και την ευστάθειά τους) ως συνάρτηση της παραμέτρου του συστήματος. Για το σύστημα (6.12) τα σημεία ισορροπίας παρουσιάζονται στις θέσεις  $x_{0i} = \pm\sqrt{\mu}$ , με το θετικό πρόσημο να αντιστοιχεί στο ευσταθές σημείο ισορροπίας και το αρνητικό στο ασταθές. Έτσι το διάγραμμα διακλάδωσης έχει τη μορφή που δίνεται στο Σχήμα 6-3.



Σχήμα 6-3. Διάγραμμα διακλάδωσης (αναδίπλωση) για το σύστημα (6.12).

**Παράδειγμα 1.** Θεωρούμε το σύστημα

$$\ddot{x} = x - x^3 - (1 - \mu), \quad V = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + (1 - \mu)x \quad (6.13)$$

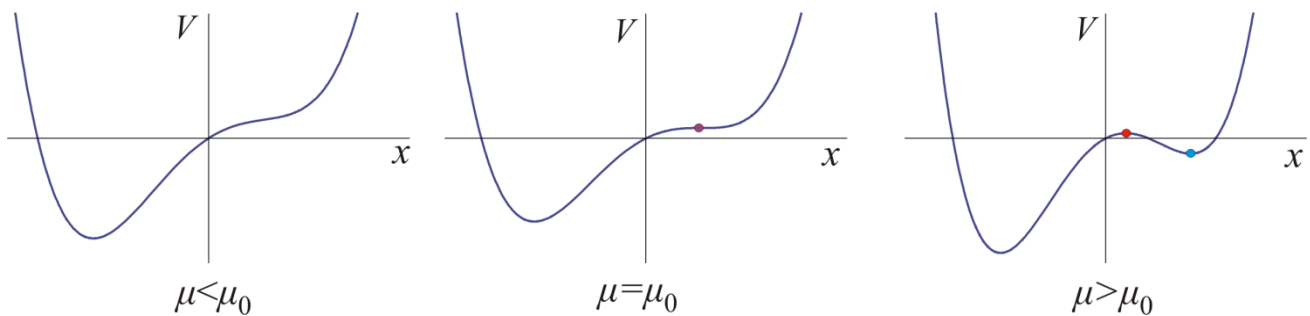
Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος δίνονται από την [εξίσωση 3ου βαθμού](#) που ο αριθμός των λύσεων της εξαρτάται από την διακρίνουσα

$$D(\mu) = (1 - \mu)^2 - \frac{4}{27}$$

Αν  $D(\mu) > 0$  έχουμε μια πραγματική λύση ενώ για  $D(\mu) < 0$  έχουμε τρεις λύσεις. Άρα έχουμε σημείο διακλάδωσης για  $D(\mu_0) = 0$ , δηλαδή για

$$\mu_0 = 1 - \sqrt{\frac{4}{27}} \approx 0.615$$

Η μορφή του δυναμικού παρουσιάζεται στο Σχήμα 6-4.



Σχήμα 6-4. Το δυναμικό (6.13) με σημείο διακλάδωσης το  $\mu_0 = 0.615$ .

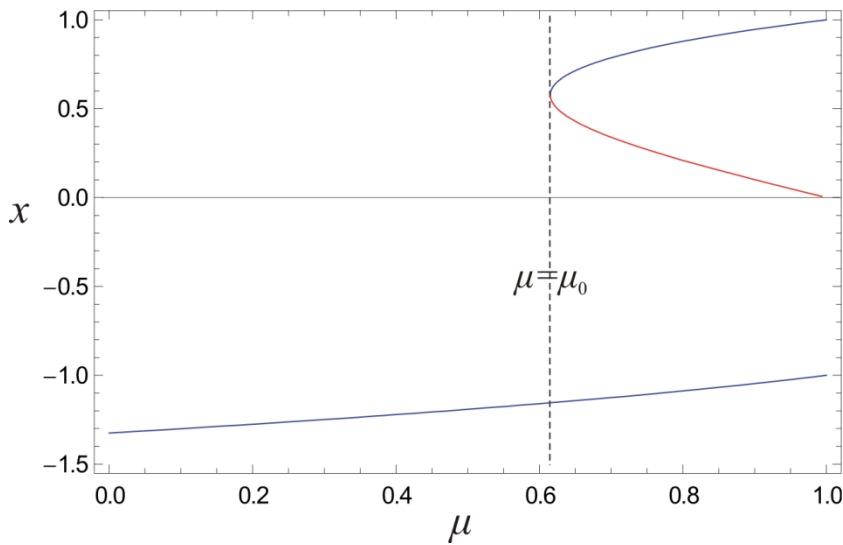
Παρατηρούμε ότι το ευσταθές σημείο ισορροπίας προς τα αριστερά υπάρχει για κάθε τιμή  $\mu \in \mathbb{R}$  και διατηρεί την ευστάθειά του. Για  $\mu = \mu_0$  παρουσιάζεται ένα σημείο καμπής (σημείο ισορροπίας με κρίσιμη ευστάθεια) ενώ για  $\mu > \mu_0$  έχουμε αναδίπλωση και τη δημιουργία δύο νέων σημείων ισορροπίας.

**[M]** Το διάγραμμα διακλάδωσης μπορεί να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί άμεσα με το Mathematica, Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μπλε καμπύλες για τα ευσταθή σημεία ισορροπίας και κόκκινες για τα ασταθή.

$$V = x^4/4 - x^2/2 + (1 - \mu)x$$



```
sol=Solve[D[V,x]==0,x] //Simplify
Plot[{x/.sol[[1]],x/.sol[[2]],x/.sol[[3]]},{μ,0,1}, PlotStyle->{Blue,Blue,Red}]
```



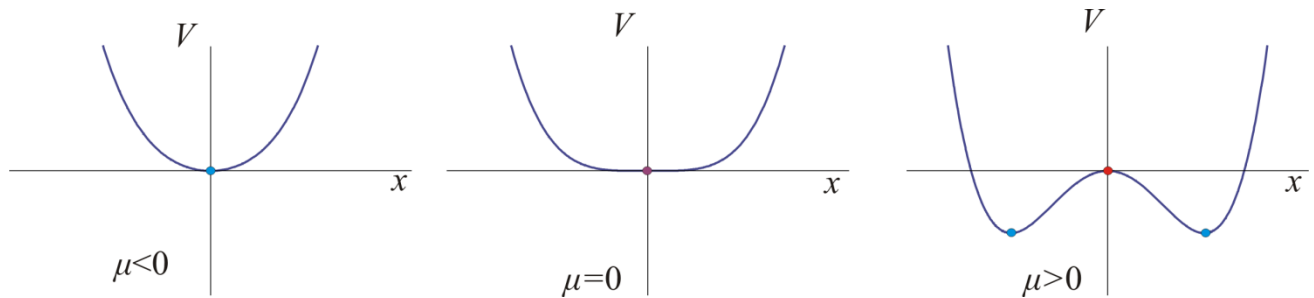
Σχήμα 6-5. Το διάγραμμα διακλάδωσης για το σύστημα (6.13).

**ii) Διακλάδωση Διχάλας (pitchfork bifurcation)**

Θα θεωρήσουμε τώρα το σύστημα

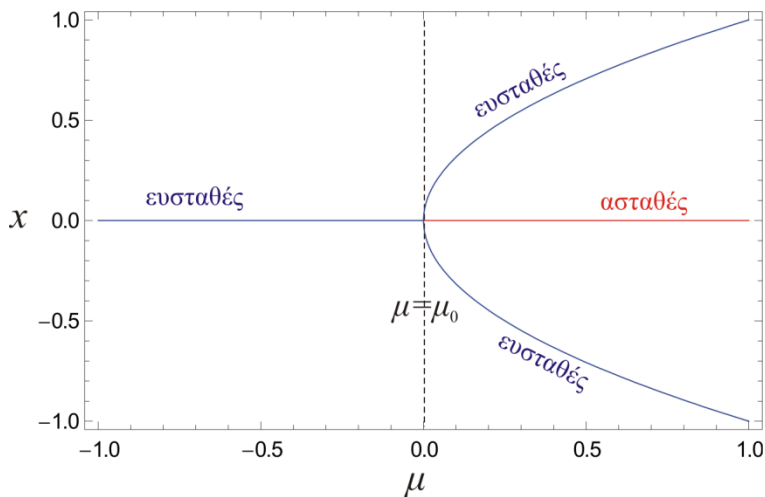
$$\ddot{x} = -x^3 + \mu x, \quad V = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\mu x^2 \tag{6.14}$$

Η γραφική παράσταση του δυναμικού παρουσιάζεται στο Σχήμα 6-6.

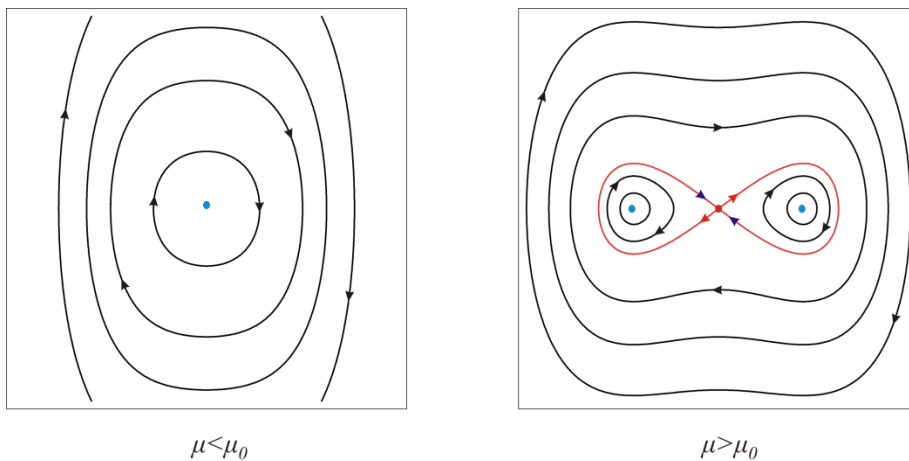


Σχήμα 6-6. Το δυναμικό (6.14) και τα σημεία ισορροπίας του.

Για  $\mu < 0$  το σύστημα έχει ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας στο  $x=0$ . Για  $\mu=0$ , το σημείο είναι ευσταθές κατά Lyapunov (δες §4.3.2) όμως η γραμμική ευστάθεια του σημείου γίνεται κρίσιμη. Για  $\mu > 0$ , το δυναμικό κάμπτεται, το ελάχιστο γίνεται μέγιστο και παρουσιάζονται δύο ελάχιστα εκατέρωθεν του μεγίστου στο  $x=0$ . Άρα, το μοναδικό ευσταθές σημείο ισορροπίας γίνεται ασταθές για  $\mu > 0$  και δημιουργούνται δύο νέα ευσταθή σημεία ισορροπίας. Έχουμε δηλαδή σημείο διακλάδωσης στο  $\mu=0$ . Μια τέτοια διακλάδωση ονομάζεται διακλάδωση διχάλας και το διάγραμμά της παρουσιάζεται στο Σχήμα 6-7. Το διάγραμμα φάσεων πριν και μετά την διακλάδωση παρουσιάζεται στο Σχήμα 6-8.



Σχήμα 6-7. Το διάγραμμα διακλάδωσης διχάλας.



Σχήμα 6-8. Το διάγραμμα φάσεων για το σύστημα (6.14) πριν και μετά την διακλάδωση διχάλας.

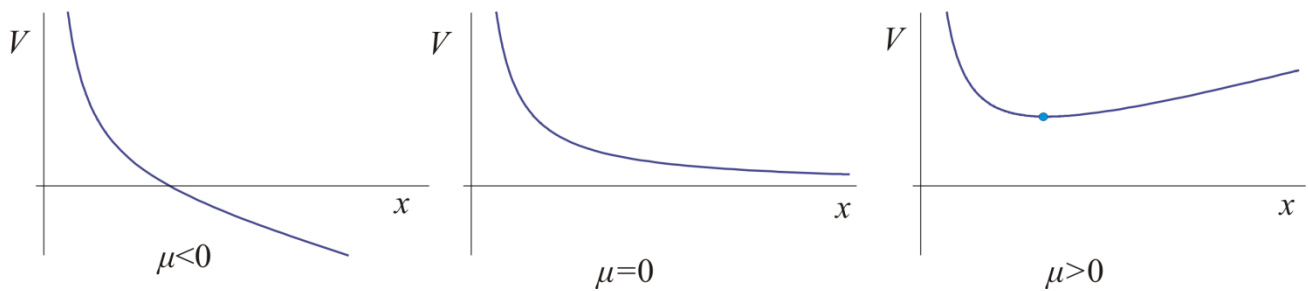
**Σημείωση.** Μπορούμε να έχουμε διακλάδωση διχάλας με αντίστροφη ευστάθεια (anti-pitchfork bifurcation). Δηλαδή να έχουμε ένα ασταθές σημείο ισορροπίας το οποίο μετατρέπεται σε ευσταθές και δημιουργούνται εκατέρωθεν δύο νέα ασταθή σημεία.

Εκτός των παραπάνω τυπικών διακλαδώσεων, μπορούμε να συναντήσουμε και άλλες περιπτώσεις (λιγότερο γενικές) όπως στο παρακάτω παράδειγμα

**Παράδειγμα 2.** Έστω το σύστημα

$$\ddot{x} = \frac{1}{x^2} - \mu, \quad V = \frac{1}{x} + \mu x, \quad (x > 0) \quad (6.15)$$

Για το δυναμικό έχουμε τρεις διαφορετικές τάσεις καθώς  $x \rightarrow \infty$ , όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 6-9. Για  $\mu < 0$  δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας ενώ για  $\mu = 0$  το δυναμικό τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν χωρίς σημείο ισορροπίας σε κάποια πεπερασμένη τιμή του  $x$ . Ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας εμφανίζεται για  $\mu > 0$  και η τοπολογία του φασικού διαγράμματος αλλάζει, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε διακλάδωση για  $\mu = 0$ . Όμως σημειώνουμε ότι, η αλλαγή στην τοπολογία, για τιμές του  $\mu$  πολύ κοντά στο μηδέν, παρουσιάζονται στο  $x \rightarrow \infty$  και καθώς αυξάνει η παράμετρος  $\mu$  η αλλαγή στην τοπολογία των τροχιών γίνεται με συνεχή τρόπο.



Σχήμα 6-9. Το δυναμικό του συστήματος (6.15).

### 6.2.2 Τυπικές διακλαδώσεις στο επίπεδο.

Στη γενικότερη κλάση των αυτόνομων επίπεδων συστημάτων

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y; \mu) \\ \dot{y} &= g(x, y; \mu) \end{aligned} \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (6.16)$$

όπου  $f$  και  $g$  ορίζουν ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο με μεμονωμένα κρίσιμα σημεία, έχουμε διακλαδώσεις που οφείλονται στην αλλαγή του αριθμού των σημείων ισορροπίας του συστήματος ή της αλλαγής της ευστάθειά τους. Περιγράφουμε μερικές τυπικές διακλαδώσεις σημείων ισορροπίας μέσω απλών παραδειγμάτων σε κανονική μορφή

#### i) Διακλάδωση Σάγματος – Κόμβου ([saddle-node bifurcation](#)).

Έστω το σύστημα

$$\dot{x} = \mu - x^2, \quad \dot{y} = -y \quad (6.17)$$

Τα κρίσιμα σημεία θα είναι οι λύσεις του συστήματος  $\mu - x^2 = 0, y = 0$  και ο πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος θα είναι ο

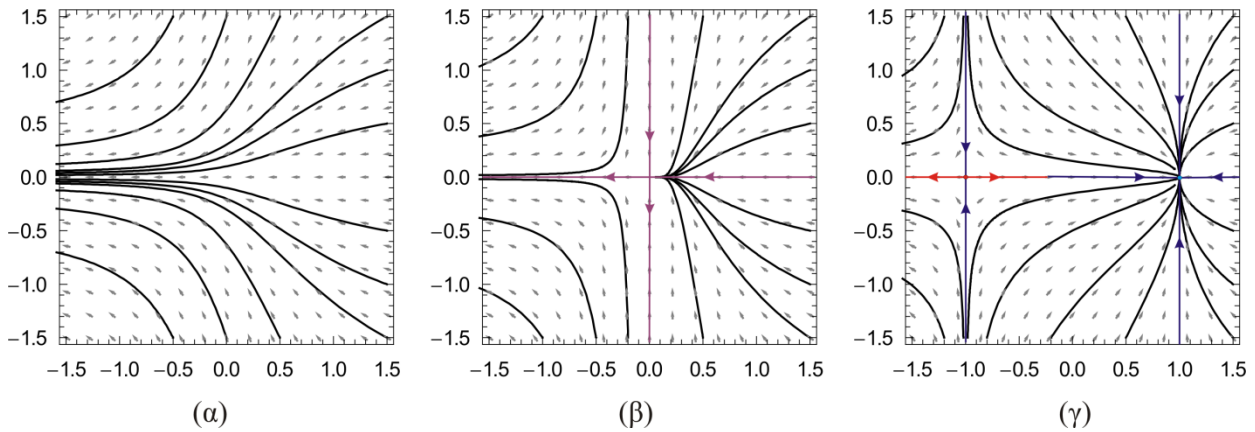
$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Για  $\mu < 0$  δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας. Η ροή έχει πάντα κατεύθυνση από τα αριστερά προς τα δεξιά και προς τον άξονα  $y=0$  (Σχήμα 6-10α).
- Για  $\mu=0$ , το σημείο  $(0,0)$  είναι μη-υπερβολικό αφού ο  $\mathbf{J}$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1=0, \lambda_2=-1$ . Οι φασικές καμπύλες θα ικανοποιούν την εξίσωση  $y dx + x^2 dy = 0$ . Οι άξονες  $x$  και  $y$  αποτελούν φασικές καμπύλες με σταθερή φορά ροής (Σχήμα 6-10β)
- Για  $\mu > 0$  έχουμε δύο σημεία ισορροπίας

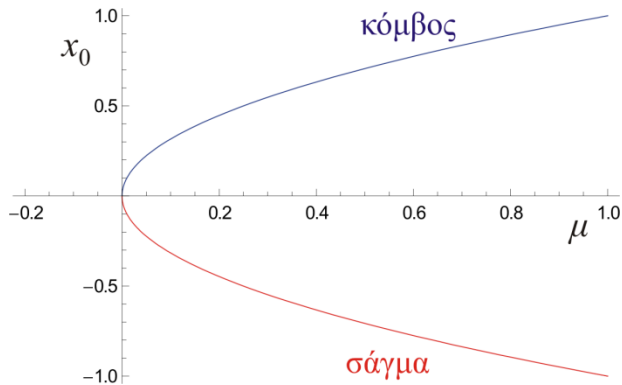
$$\mathbf{A}: (x_{01}, y_{01}) = (\sqrt{\mu}, 0), \quad \mathbf{B}: (x_{02}, y_{02}) = (-\sqrt{\mu}, 0),$$

στα οποία ο  $\mathbf{J}$  έχει ιδιοτιμές  $(\lambda_1, \lambda_2) = (-2\sqrt{\mu}, -1)$  και  $(\lambda_1, \lambda_2) = (2\sqrt{\mu}, -1)$ , αντίστοιχα. Συνεπώς το  $\mathbf{A}$  είναι ευσταθής κόμβος και το  $\mathbf{B}$  σάγμα (Σχήμα 6-10γ).



Σχήμα 6-10. Φασικά διαγράμματα, πριν, κατά και μετά την διακλάδωση σάγματος-κόμβου στο σύστημα (6.17). α)  $\mu=-1$ , β)  $\mu=0$ , γ)  $\mu=0.5$ .

Αφού για τα παραπάνω σημεία ισορροπίας είναι πάντα  $y_0 = 0$  η θέση τους καθορίζεται από την τιμή  $x_0$  και το διάγραμμα διακλάδωσης θα είναι το επίπεδο  $\mu-x_0$ . Αυτό δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 6-11. Το διάγραμμα διακλάδωσης σάγματος-κόμβου.

## ii) Μετακρίσιμη Διακλάδωση ([Transcritical bifurcation](#)).

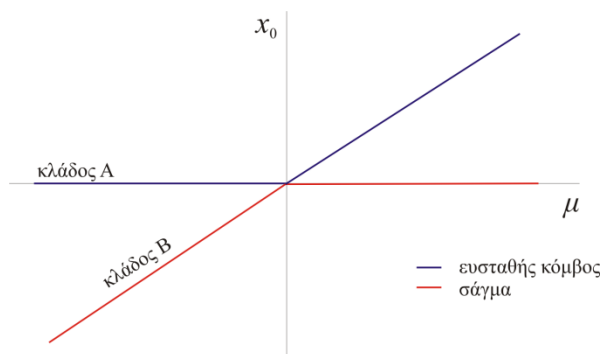
Έστω το σύστημα

$$\dot{x} = \mu x - x^2, \quad \dot{y} = -y \quad (6.18)$$

Τα κρίσιμα σημεία θα είναι οι λύσεις του συστήματος  $\mu x - x^2 = 0, y = 0$ , δηλαδή τα σημεία

$$A(0,0), \quad B(\mu,0).$$

Άρα έχουμε πάντα δύο σημεία ισορροπίας στο σύστημα τα οποία, σχηματίζουν δύο κλάδους με παράμετρο τη  $\mu$ , τον A και τον B (Σχήμα 6-12).



Σχήμα 6-12. Το διάγραμμα διακλάδωσης για το σύστημα (6.18). Έχουμε δύο κλάδους σημείων ισορροπίας με παράμετρο το  $\mu$ . Στο σημείο διακλάδωσης  $\mu=0$  έχουμε ένα σημείο ισορροπίας μη-υπερβολικό.

Ο πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι ο

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mu - 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

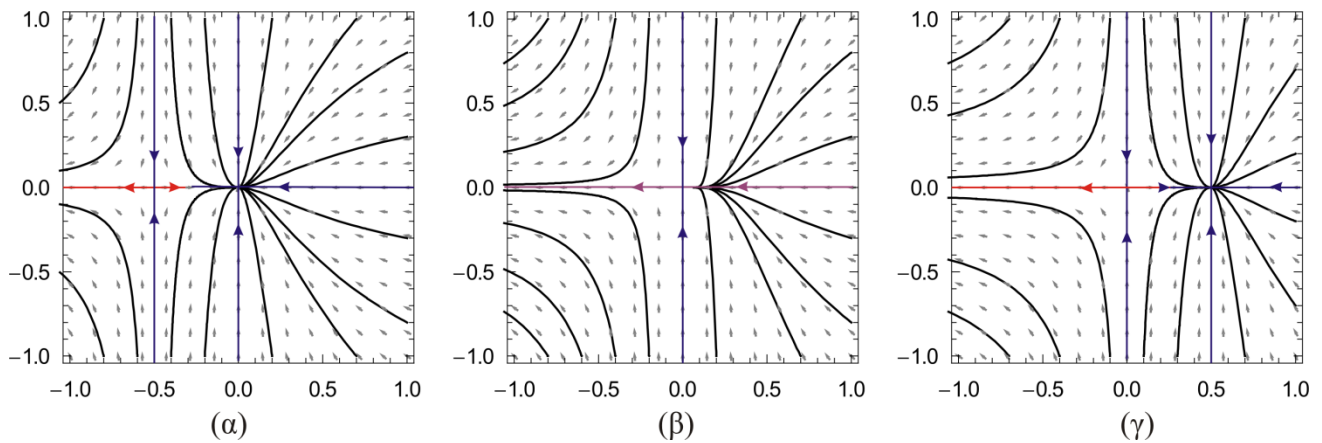
και για τα δύο σημεία ισορροπίας

$$\mathbf{J}_A = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_B = \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Για  $\mu < 0$  στα σημεία A αντιστοιχούν αρνητικές ιδιοτιμές και άρα ο κλάδος A αποτελείται από ευσταθείς κόμβους με ιδιοδιανύσματα τα  $(0,1)$  και  $(1,0)$ . Για τον κλάδο B, έχουμε μια θετική και μια αρνητική ιδιοτιμή και, άρα, τα σημεία ισορροπίας είναι σάγματα, με τον ευσταθή και ασταθή υπόχωρο να ορίζονται από το ιδιοδιάνυσμα  $(0,1)$  και  $(1,0)$ , αντίστοιχα.
- Για  $\mu = 0$ , το σημείο  $(0,0)$  είναι μη-υπερβολικό αφού ο  $\mathbf{J}$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -1$ . Οι φασικές καμπύλες θα ικανοποιούν την εξίσωση  $ydx - x^2dy = 0$ . Ο άξονας των  $x$  αποτελεί φασική καμπύλη με σταθερή φορά ροής από τα αριστερά προς τα δεξιά. Ο άξονας των  $y$  αποτελεί έναν ευσταθή υπόχωρο για το κρίσιμο σημείο.
- Για  $\mu > 0$  οι δύο κλάδοι έχουν ανταλλάξει τύπο ευστάθειας. Ο κλάδος A γίνεται σάγμα, με ιδιοτιμές  $\lambda_1 = \mu > 0$  και  $\lambda_2 = -1 < 0$ . Ο κλάδος B αποτελείται πλέον από ευσταθείς κόμβους. Οι διευθύνσεις των γραμμικών υπόχωρων παραμένουν αμετάβλητες.

Το φασικό διάγραμμα του συστήματος πριν, κατά και μετά την διακλάδωση παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 6-13. Φασικό διάγραμμα για την υποκρίσιμη διακλάδωση στο  $\mu=0$  για το σύστημα (6.18). α)  $\mu=-0.5$ , β)  $\mu=0$ , γ)  $\mu=0.5$

### iii) Διακλάδωση Διχάλας (pitchfork bifurcation)

Σε αντιστοιχία με την διακλάδωση διχάλας στα διατηρητικά συστήματα (δες §6.2.1) η διακλάδωση αυτή μπορεί να οριστεί γενικότερα για τα συστήματα (6.16).

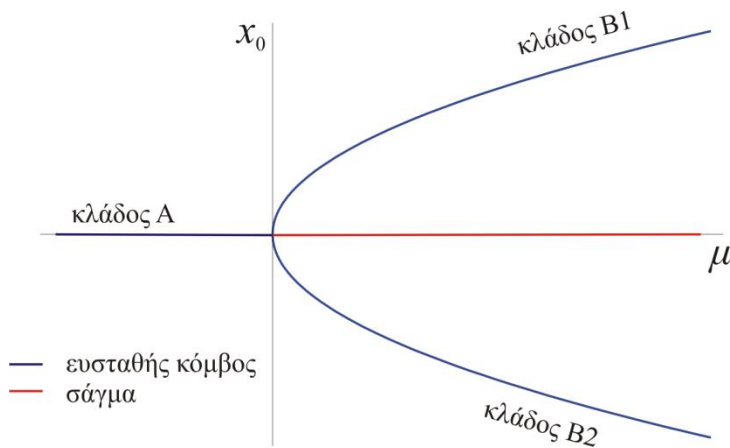
Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = \mu x - x^3, \quad \dot{y} = -y \quad (6.19)$$

Τα κρίσιμα σημεία θα είναι οι λύσεις του συστήματος  $x(\mu-x^2)=0, y=0$ . Συνεπώς έχουμε τους παρακάτω κλάδους σημείων ισορροπίας

$$A(0,0) \quad (\forall \mu \in R) \quad \text{και} \quad B_1(\sqrt{\mu},0), \quad B_2(-\sqrt{\mu},0) \quad (\mu > 0)$$

Άρα για  $\mu < 0$  έχουμε ένα σημείο ισορροπίας και για  $\mu > 0$  τρία σημεία ισορροπίας. Συνεπώς για  $\mu=0$  έχουμε σημείο διακλάδωσης.



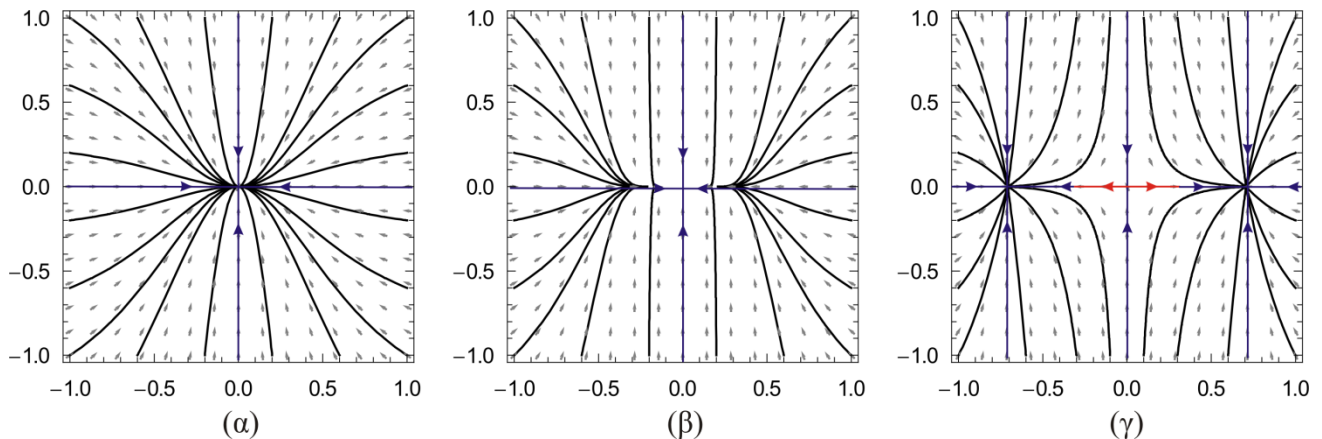
Σχήμα 6-14. Διάγραμμα διακλάδωσης διχάλας.

Ο πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος θα είναι ο

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mu - 3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Για  $\mu < 0$  ο κλάδος A αποτελείται από ευσταθείς κόμβους με υπόχωρους τους  $(1,0)$  και  $(0,1)$ . Για κάθε  $\mu < 0$  όλες οι τροχιές του συστήματος τείνουν προς το  $(0,0)$ .
- Για  $\mu = 0$ , το σημείο  $(0,0)$  είναι μη-υπερβολικό αφού ο  $\mathbf{J}$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$ . Όμως το σημείο είναι ασυμπτωτικά ευσταθές κατά Lyapunov. Οι φασικές καμπύλες θα ικανοποιούν την εξίσωση  $ydx - x^3 dy = 0$ . Οι άξονες  $x$  και  $y$  αποτελούν φασικές καμπύλες με φορά ροής προς το  $(0,0)$  (Σχήμα 6-10β)
- Για  $\mu > 0$  έχουμε την συνύπαρξη και των τριών κλάδων. Όμως για τον κλάδο A αντιστοιχούν οι ιδιοτιμές  $\lambda_1 = \mu, \lambda_2 = -1$ , δηλαδή το σημείο  $(0,0)$  γίνεται σάγμα. Οι κλάδοι B που προκύπτουν αντιστοιχούν σε αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές και άρα είναι ευσταθείς κόμβοι.



Σχήμα 6-15. Φασικό διάγραμμα για την διακλάδωση διγάλας στο  $\mu=0$  για το σύστημα (6.19). α)  $\mu=-0.5$ , β)  $\mu=0$ , γ)  $\mu=0.5$ .

**Σημείωση.** Η διακλάδωση διγάλας συνδέεται με το φαινόμενο που ονομάζεται «σπάσιμο συμμετρίας». Θεωρούμε ότι ένα σύστημα γενικά ακολουθεί (με την αλλαγή της παραμέτρου  $\mu$ ) την ευσταθή κατάσταση του κλάδου A για  $\mu < 0$ . Όμως για  $\mu > 0$  έχουμε δύο ευσταθείς καταστάσεις. Το σύστημα επιλέγει μια ή μεταπηδά από τον κλάδο  $B_1$  στον κλάδο  $B_2$ .

## Ασκήσεις

**Άσκηση 6.2.1.** Στο διατηρητικό σύστημα με δυναμικό  $V = \frac{x^3}{3} + \mu(x^2 + x)$  δείξτε ότι έχουμε διακλάδωση για  $\mu=0$  και  $\mu=1$ . Σχεδιάστε το διάγραμμα διακλάδωσης.

**Άσκηση 6.2.2.** Μελετήστε την ύπαρξη και την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας στο διατηρητικό σύστημα με δυναμικό  $V = x^4/4 + \mu(x - x^2/2)$ . Εντοπίστε το σημείο διακλάδωσης και σχεδιάστε το διάγραμμα διακλάδωσης.

**Άσκηση 6.2.3.** Για το σύστημα με συνάρτηση δύναμης την  $f = x^3 - ax^2 + x$ , όπου  $a$  μια πραγματική παράμετρος ελέγχου, προσδιορίστε αναλυτικά τα σημεία ισορροπίας, την ευστάθειά τους καθώς και τα σημεία διακλάδωσης. Σχεδιάστε το διάγραμμα διακλαδώσεων

**Άσκηση 6.2.4.** Βρείτε το τύπο της διακλάδωσης που συναντάμε στα παρακάτω συστήματα και σχεδιάστε πρόχειρα τις πολλαπλότητες του συστήματος πριν και μετά την διακλάδωση.

α)  $\ddot{x} = x^2 - \dot{x} + \mu$

β)  $\ddot{x} = -x^2 - \dot{x} + \mu x$

γ)  $\ddot{x} = -x^3 - \dot{x} + \mu x$

**Άσκηση 6.2.5.** Για τα παρακάτω συστήματα α) Μελετήστε τα σημεία ισορροπίας και την ευστάθειά τους και εντοπίστε τα σημεία διακλάδωσης β) Σχεδιάστε τα φασικά διαγράμματα για τιμές της παραμέτρου  $\mu$  πριν και μετά τις διακλαδώσεις.

α)  $\dot{x} = -x + xy, \quad \dot{y} = \mu y - xy$

β)  $\dot{x} = -\mu x - y^2, \quad \dot{y} = y - xy$

γ)  $\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = -\mu x + (x + y)^3$

**Άσκηση 6.2.6.** Για το σύστημα

$$\dot{x} = x - 2y - \mu, \quad \dot{y} = y - x^2 + \mu$$

σχεδιάστε το διάγραμμα διακλάδωσης στο επίπεδο  $(\mu, x_0)$  και στο επίπεδο  $(\mu, y_0)$ .

**Άσκηση 6.2.7.** Μελετήστε (με αριθμητικές τεχνικές) τις διακλαδώσεις στα διατηρητικά συστήματα με τα παρακάτω δυναμικά

α)  $V = \mu x^2 - e^{-x}, \quad -1 \leq \mu \leq 3$

β)  $V = \frac{1}{2} kx^2 - 6\epsilon k \sin(3x), \quad 0 < \epsilon < 1$

**Άσκηση 6.2.8.** Δείξτε ότι στο σύστημα

$$\dot{x} = \mu x + y + \sin x, \quad \dot{y} = x - y$$

παρουσιάζεται διακλάδωση διχάλας στο  $(0,0)$  και προσδιορίστε την κρίσιμη τιμή  $\mu_0$  στην οποία συμβαίνει.

**Άσκηση 6.2.9.** Μελετήστε τα σημεία ισορροπίας και τις διακλαδώσεις τους στο σύστημα

$$\dot{x} = -ax + y, \quad \dot{y} = \frac{x^2}{1+x^2} - by \quad (a, b > 0),$$

όπου  $a, b$  οι παράμετροι ελέγχου του συστήματος.

## 6.3 Διακλαδώσεις οριακών κύκλων

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε κάποιες περιπτώσεις εμφάνισης ή εξαφάνισης οριακών κύκλων μεταβάλλοντας την παράμετρο ελέγχου  $\mu$  του συστήματος. Στις φυσικές εφαρμογές οι ευσταθείς οριακοί κύκλοι συνδέονται με ευσταθείς ταλαντώσεις των δυναμικών μεταβλητών, και συνεπώς οι διακλαδώσεις μπορεί να συνδέονται άμεσα με την καθολική ευστάθεια του συστήματος. Θα αναφερθούμε στα επίπεδα δυναμικά συστήματα (6.16). Θα συμβολίζουμε μια περιοδική λύση σε μια τιμή της παραμέτρου  $\mu$  ως

$$(x, y) = \gamma(t; \mu)$$

### 6.3.1 Διακλάδωση Hopf

Σε ένα σύστημα με παράμετρο ελέγχου  $\mu$ , το οποίο διαθέτει έναν κλάδο σημείων ισορροπίας, είναι δυνατή η γένεση μιας περιοδικής λύσης σε κάποιο σημείο  $\mu = \mu_0$  αυτού του κλάδου. Η διακλάδωση αυτή ονομάζεται **διακλάδωση Hopf** και την μελετούμε μέσα από το παρακάτω παράδειγμα.

Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = -y + x(\mu - x^2 - y^2), \quad \dot{y} = x + y(\mu - x^2 - y^2), \quad (6.20)$$

το οποίο έχει ένα σημείο ισορροπίας το  $(0,0)$ , στο οποίο ο πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος θα είναι

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$



με μιγαδικές ιδιοτιμές, τις  $\lambda_{1,2}=\mu\pm i$ . Άρα η γραμμική ευστάθεια του  $(0,0)$  θα είναι

- Ευσταθής εστία για  $\mu<0$
- Κέντρο για  $\mu=0$  (ή ευσταθής εστία κατά Lyapunov)
- Ασταθής εστία για  $\mu>0$

Αν γράψουμε το σύστημα σε πολικές συντεταγμένες  $r,\theta$ , (δες παράδειγμα 2, §5.1) θα πάρουμε

$$\dot{r} = r(\mu - r^2), \quad \dot{\theta} = 1 \quad (6.21)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει άμεσα ότι το σύστημα έχει μια περιοδική λύση για  $\mu>0$ , την

$$r = \sqrt{\mu}, \quad \theta = t + t_0 \quad (6.22)$$

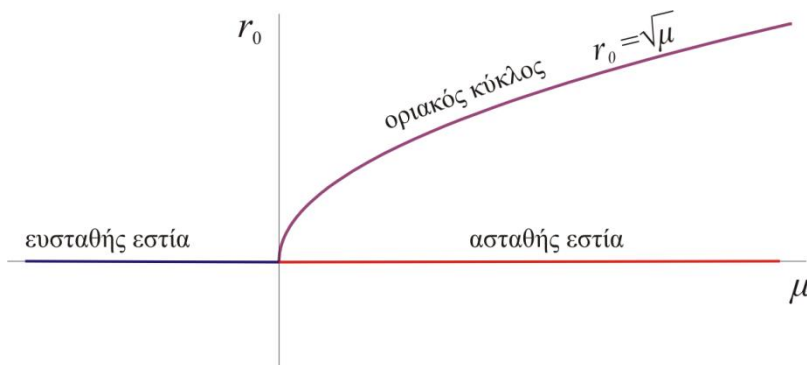
ή

$$\gamma(t) = \sqrt{\mu}(\cos(t + t_0), \sin(t + t_0)),$$

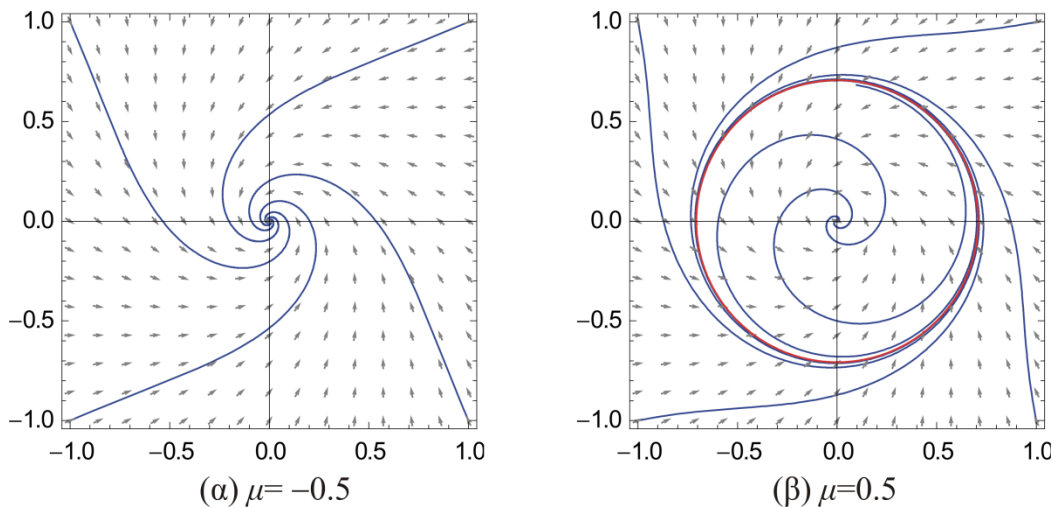
με περίοδο  $T=2\pi$ , ανεξάρτητη του  $\mu$ . Επειδή ισχύει

$$r < \sqrt{\mu} \Rightarrow \dot{r} > 0 \quad \text{και} \quad r > \sqrt{\mu} \Rightarrow \dot{r} < 0$$

η περιοδική λύση (6.22) θα είναι ένας ευσταθής οριακός κύκλος. Συνεπώς για  $\mu=0$  έχουμε μια διακλάδωση Hopf. Μπορούμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα διακλάδωσης στο επίπεδο  $(\mu,r)$ , όπου για τα σημεία ισορροπίας θεωρούμε  $r=0$  (δες Σχήμα 6-16).



Σχήμα 6-16. Το διάγραμμα διακλάδωσης Hopf για το σύστημα (6.20).



Σχήμα 6-17. Φασικό διάγραμμα πριν και μετά τη διακλάδωση Hopf στο  $\mu=0$ . Η λύση του οριακού κύκλου που διακλαδώθηκε για  $\mu>0$  παρουσιάζεται με κόκκινη γραμμή.

### 6.3.2 Διακλάδωση από κέντρο

Έστω το επίπεδο σύστημα

$$\dot{x} = f_1(x, y), \quad \dot{y} = f_2(x, y)$$

ή

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y), \quad (6.23)$$

το οποίο είναι διατηρητικό,

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$$

και διαθέτει μια μονοπαραμετρική οικογένεια από κλειστές φασικές καμπύλες. Τέτοια συστήματα είναι π.χ. ο αρμονικός ταλαντωτής, μηχανικά συστήματα με κοιλότητες στο δυναμικό, τα παραδείγματα στην §4.1, το σύστημα Lotka-Volterra της §4.5.1 κλπ. Έστω  $\rho \in I$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , η παράμετρος μιας τέτοιας οικογένειας περιοδικών λύσεων, την οποία θα την συμβολίσουμε με  $\gamma_\rho(t)$  και τις αντίστοιχες περιόδους με  $T_\rho$ .

Θεωρούμε τώρα το διαταραγμένο σύστημα

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}, \varepsilon) \quad (6.24)$$

και ορίζουμε την συνάρτηση Melnikov κατά μήκος μιας περιοδικής λύσης  $\gamma_\rho(t)$ ,  $0 \leq t \leq T_\rho$ , ως

$$M(\rho) = \int_0^{T_\rho} |\mathbf{f}(\gamma_\rho(t)) \times \mathbf{g}(\gamma_\rho(t), 0)| dt \quad (6.25)$$

- **Θεώρημα.** Έστω ότι για  $\rho = \rho_0$  είναι

$$M(\rho_0) = 0 \quad \text{και} \quad \left. \frac{dM}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} \neq 0$$

τότε για  $0 < \varepsilon \ll 1$  το σύστημα (6.24) έχει έναν υπερβολικό (ευσταθή ή ασταθή) οριακό κύκλο κοντά στην περιοδική λύση  $\gamma_{\rho_0}(t)$ . Το σύστημα δεν έχει οριακό κύκλο (για αρκούντως μικρό  $\varepsilon$ ) αν

$$M(\rho) \neq 0 \text{ για κάθε } \rho \in I.$$

Με το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να αποδείξουμε την δημιουργία του οριακού κύκλου στην εξίσωση Van der Pol που περιγράψαμε στην §5.2, όπως δείχνουμε στο παράδειγμα που ακολουθεί

**Παράδειγμα.** Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \varepsilon(1-x^2)y$$

Είναι

$$\mathbf{f}(x, y) = (y, -x), \quad \mathbf{g}(x, y, \varepsilon) = (0, (1-x^2)y)$$

Για  $\varepsilon=0$  το σύστημα είναι ο αρμονικός ταλαντωτής με μια οικογένεια κλειστών φασικών καμπύλων

$$\gamma_r(t) = (r \cos t, r \sin t), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad T_r = 2\pi.$$

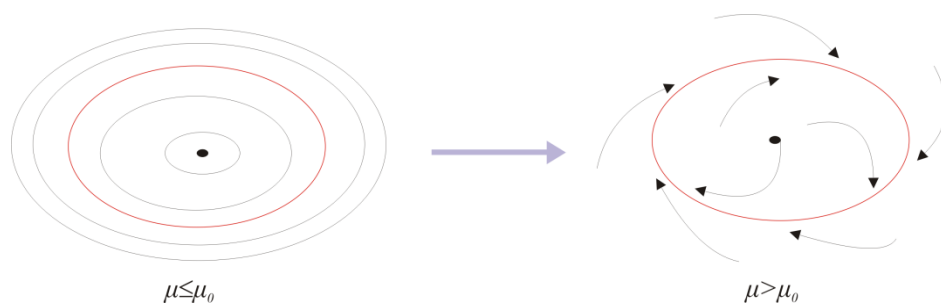
Έχουμε

$$|\mathbf{f}(\gamma_r(t)) \times \mathbf{g}(\gamma_r(t), 0)|_{\gamma_r} = y^2(1-x^2)|_{\gamma_r} = r^2 \sin^2 t(1-r^2 \cos^2 t)$$

και η συνάρτηση Melnikov θα είναι

$$M(r) = \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 t(1-r^2 \cos^2 t) dt = \frac{\pi r^2}{4}(4-r^2).$$

Η συνάρτηση μηδενίζεται για  $r=2$  και μάλιστα  $(dM/dr)_{r=2} = -4\pi \neq 0$ . Συνεπώς, για μικρές τιμές του  $\varepsilon$  θα υπάρχει λύση οριακού κύκλου κοντά στο κύκλο με ακτίνα  $r=2$ . Αυτό είχαμε δείξει σε όρους μηδενικής τάξης με την μέθοδο *Lindstedt-Poincare* στην §5.2.3. Άρα λοιπόν, από τους κύκλους γύρω από το κέντρο για  $\mu=0$ , επιβιώνει ο κύκλος με  $r=2$  για  $\mu>0$  και ο οποίος είναι πλέον ένας οριακός κύκλος.



Σχήμα 6-18. Σχηματικό διάγραμμα διακλάδωσης οριακού κύκλου από κέντρο για  $\mu=\mu_0$ .

### 6.3.3 Διακλάδωση από ομοκλινικό βρόγχο

Ο ομοκλινικός βρόγχος ή ομοκλινική πολλαπλότητα είναι μια περατωμένη φασική καμπύλη που ξεκινάει ασυμπτωτικά από ένα σάγμα (ως ασταθής πολλαπλότητα) και καταλήγει στο ίδιο σημείο (ως ευσταθής πολλαπλότητα). Ένα σύστημα με ομοκλινική πολλαπλότητα δίνεται στο παράδειγμα 2 της §4.1. Η ύπαρξη μιας τέτοιας λύσης σε ένα σύστημα με παράμετρο ελέγχου  $\mu$ , εν γένει, παρουσιάζεται μόνο σε μια κρίσιμη τιμή της παραμέτρου. Με την μεταβολή της παραμέτρου είναι δυνατή η δημιουργία ενός οριακού κύκλου όπως δείχνουμε με το παράδειγμα που ακολουθεί.

Θεωρούμε το σύστημα

$$\ddot{x} = x + x^2 - (x + \mu)\dot{x}, \quad (6.26)$$

με σημεία ισορροπίας το  $A(0,0)$  και το  $B(-1,0)$ , η θέση και η ύπαρξη των οποίων δεν εξαρτάται από την παράμετρο  $\mu$  του συστήματος. Στο  $A$  αντιστοιχούν οι πραγματικές ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-\mu - \sqrt{\mu^2 + 4}) < 0, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 4}) > 0$$

και άρα θα είναι σάγμα με μια ευσταθή πολλαπλότητα κατά την διεύθυνση του ιδιοδιανύσματος  $\mathbf{u}_1$  και μια ασταθή κατά την διεύθυνση του ιδιοδιανύσματος  $\mathbf{u}_2$ , όπου

$$\mathbf{u}_1 = \left\{ \frac{1}{2}(\mu - \sqrt{\mu^2 + 4}), 1 \right\}, \quad \mathbf{u}_2 = \left\{ \frac{1}{2}(\mu + \sqrt{\mu^2 + 4}), 1 \right\}.$$

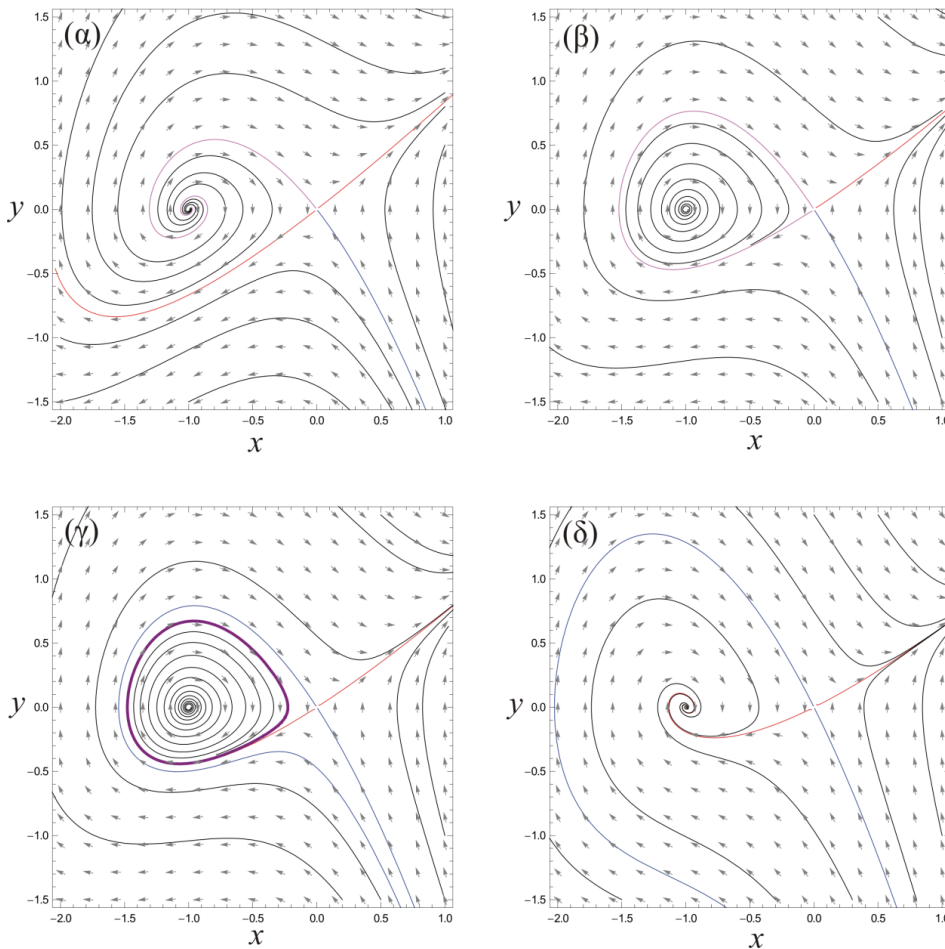
Το σημείο Β αντιστοιχούν οι ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \mu - \sqrt{-3 - 2\mu + \mu^2} \right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \mu + \sqrt{-3 - 2\mu + \mu^2} \right)$$

και έχουμε τις περιπτώσεις

- $\mu < -1$ , ασταθής κόμβος
- $-1 < \mu < 1$  ασταθής εστία
- $1 < \mu < 3$  ευσταθής εστία
- $\mu > 3$  ευσταθής κόμβος

Τα φασικά διαγράμματα για κάποιες τιμές της παραμέτρου  $\mu$  δίνονται στο Σχήμα 6-19. Για  $\mu=0.5$  παρατηρούμε ότι όλες οι τροχιές τείνουν προς το άπειρο με εξαίρεση τις ευσταθείς πολλαπλότητες του σώματος, μια εκ των οποίων καταλήγει για  $t \rightarrow \infty$  στην ασταθή εστία. Καθώς αυξάνεται το  $\mu$  η ευσταθής και η ασταθής πολλαπλότητα αριστερά του σώματος αρχίζουν και πλησιάζουν μεταξύ τους και παρατηρείται μια ομαλή ένωσή τους για  $\mu \approx 0.865$ . Έχουμε λοιπόν τη δημιουργία ενός ομοκλινικού βρόγχου. Μέσα στον ομοκλινικό βρόγχο έχουμε μια ασταθή εστία και οι τροχιές τείνουν προς τον βρόγχο για  $t \rightarrow \infty$ . Για μεγαλύτερη τιμή του  $\mu$  (π.χ.  $\mu=0.9$ , Σχήμα 6-19γ) ο ομοκλινικός κόμβος διασπάται αφήνοντας και πάλι τέσσερις ξεχωριστές πολλαπλότητες για το σώμα στο  $(0,0)$ . Όμως έχει δημιουργηθεί ένας ευσταθής οριακός κύκλος. Έτσι έχουμε μια ομοκλινική διακλάδωση ([homoclinic bifurcation](#)). Για  $\mu \geq 1$  η ασταθής εστία γίνεται ευσταθής και ο οριακός κύκλος παύει να υπάρχει.



Σχήμα 6-19. Ομοκλινική διακλάδωση (α)  $\mu=0.5$ , παρουσία σώματος και ασταθούς εστίας (β)  $\mu=0.865$ , δημιουργία ομοκλινικού βρόγχου (μωβ) (γ)  $\mu=0.9$ , δημιουργία ευσταθούς οριακού κύκλου (έντονη μωβ καμπύλη) (δ)  $\mu=1.5$ , παρουσία σώματος και ευσταθούς εστίας.

## Ασκήσεις

**Άσκηση 6.3.1.** Δείξτε ότι το σύστημα

$$\dot{x} = -\mu x - y + \frac{x}{1+x^2+y^2}, \quad \dot{y} = x - \mu y + \frac{y}{1+x^2+y^2}$$

παρουσιάζει διακλάδωση Hopf για  $\mu=1$ . Ποιά η ακτίνα του οριακού κύκλου που εμφανίζεται για  $\mu < 1$ ; (βοήθεια: γράψτε το σύστημα σε πολικές συντεταγμένες)

**Άσκηση 6.3.2.** Στο σύστημα

$$\ddot{x} = -x - (x^2 + \dot{x}^2 - \mu)\dot{x},$$

τι είδους διακλάδωση παρουσιάζεται στο  $\mu=0$ ;

**Άσκηση 6.3.3.** Δείξτε υπολογιστικά ότι το σύστημα

$$\dot{x} = \mu x - y + xy^2, \quad \dot{y} = x + \mu y + y^3$$

παρουσιάζει διακλάδωση Hopf με ασταθή οριακό κύκλο.

**Άσκηση 6.3.4.** Δίνεται σε πολικές συντεταγμένες το σύστημα

$$\dot{r} = -r/\mu + r^2 - r^3, \quad \dot{\theta} = -1, \quad \mu > 0$$

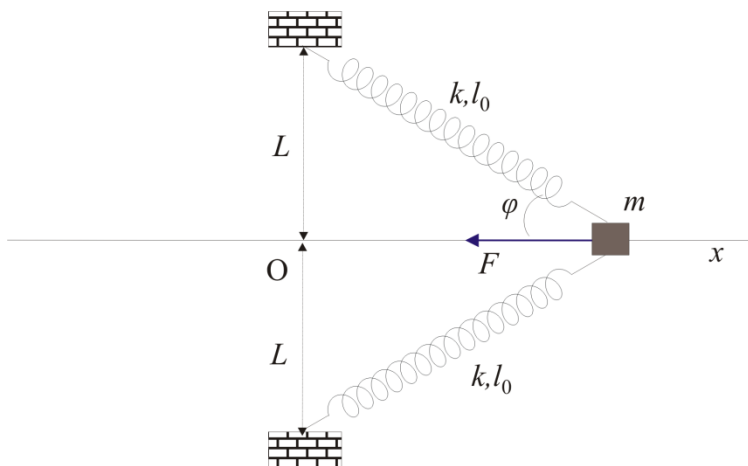
Δείξτε ότι καθώς αυξάνει το  $\mu$ , στην τιμή  $\mu=4$  έχει οριακό κύκλο με ακτίνα  $r_0=1/2$ . Τι συμβαίνει για  $\mu > 4$ ; Σχεδιάστε πρόχειρα το φασικό διάγραμμα για  $\mu < 4$ ,  $\mu=4$  και  $\mu > 4$ .

## 6.4 Εφαρμογές

### 6.4.1 Μη γραμμικός ταλαντωτής με ελατήρια

Θεωρούμε στο επίπεδο  $Oxy$  το παρακάτω μηχανικό σύστημα (Σχήμα 6-20). Αυτό αποτελείται από ένα σώμα μάζας  $m$  το οποίο συνδέεται με δύο ίδια γραμμικά ελατήρια σταθεράς  $k > 0$  και φυσικού μήκους  $l_0 > 0$ . Το άλλο άκρο των ελατηρίων είναι συνδεδεμένο σε σταθερό σημείο απόστασης  $L > 0$  από την αρχή των αξόνων  $O$ , δηλαδή στη θέσεις  $(0, \pm L)$ . Λόγω της συμμετρίας η κίνηση περιορίζεται πάνω στον άξονα  $x'Ox$  και η θέση του συστήματος θα καθορίζεται από την απόσταση  $x$  του σώματος από το  $O$ . Η εξίσωση του συστήματος θα είναι η

$$m\ddot{x} = F.$$



Σχήμα 6-20. Μη γραμμικός ταλαντωτής με γραμμικά ελατήρια.

Η δύναμη  $F$  που ενεργεί στο σώμα αποτελεί την συνισταμένη των δυνάμεων των δύο ελατηρίων στο σώμα με μέτρο  $F_{ελ} = -k(l - l_0)$ , όπου  $l$  το τρέχων μήκος του ελατηρίου, και διεύθυνση γωνίας  $\varphi$  ως προς την διεύθυνση της κίνησης,

$$F = -2k(l - l_0) \cos \varphi \quad (6.27)$$

Τα  $l$  και  $\varphi$  μεταβάλλονται κατά την κίνηση, και σε σχέση με τη θέση  $x$  του σώματος θα δίνονται από τις σχέσεις

$$l = \sqrt{x^2 + L^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{l} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + L^2}}$$

Έτσι η (6.27) γράφεται

$$F = -2k \left( 1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + L^2}} \right) x \quad (6.28)$$

και προέρχεται από το δυναμικό

$$V = -\int F dx = k \left( x^2 + L^2 - 2l_0 \sqrt{x^2 + L^2} \right) \quad (6.29)$$

Τα ακρότατα του δυναμικού ή τα σημεία ισορροπίας του συστήματος βρίσκονται από την εξίσωση  $F=0$ , η οποία μας δίνει τις λύσεις

$$x_{01} = 0, \quad x_{02}, x_{03} = \pm \sqrt{l_0^2 - L^2}$$

Η ευστάθεια προσδιορίζεται από τον δείκτη (δες §3.3.2)

$$\kappa = -\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_0} = -2k \left( 1 - \frac{L^2 l_0}{(L^2 + x^2)^{3/2}} \right).$$

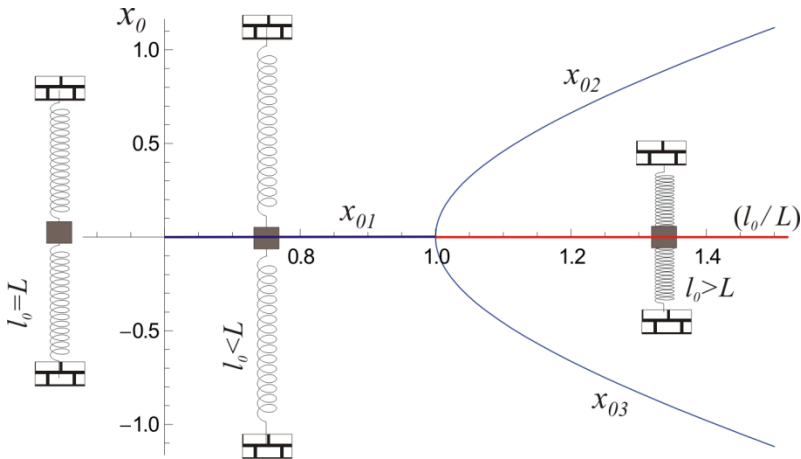
Το σημείο  $x_{10}$  υπάρχει πάντα, ανεξάρτητα των τιμών των παραμέτρων του συστήματος, με δείκτη ευστάθειας

$$\kappa = -2k \left( 1 - \frac{l_0}{L} \right).$$

Άρα, για  $l_0 < L$  είναι  $\kappa < 0$  (ελάχιστο του δυναμικού) και το  $x=0$  είναι ευσταθές. Για  $l_0 > L$  έχουμε  $\kappa > 0$  (μέγιστο του δυναμικού) και, συνεπώς, αστάθεια. Τα σημεία  $x_{02}$  και  $x_{03}$  υπάρχουν μόνο για  $l_0 > L$ . Σε αυτά αντιστοιχεί ο δείκτης

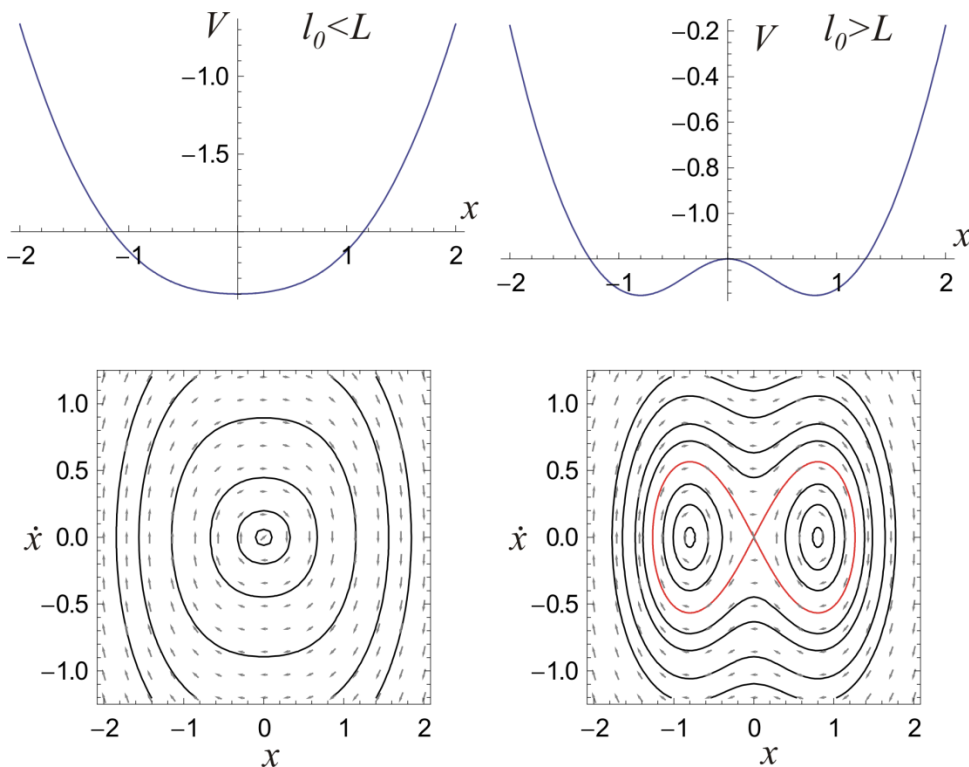
$$\kappa = -2k \left( 1 - \frac{L^2}{l_0^2} \right) < 0 \quad (L < l_0)$$

και άρα είναι ευσταθή. Συνεπώς, για  $\mu_0=L/l_0=1$  έχουμε μια διακλάδωση διχάλας που το διάγραμμά της φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 6-21. Διάγραμμα διακλάδωσης για τον μη γραμμικό ταλαντωτή ( $k=1$ ).

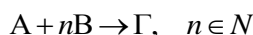
Το δυναμικό πριν και μετά τη διακλάδωση καθώς και το διάγραμμα φάσεων δίνεται στο Σχήμα 6-22. Πριν τη διακλάδωση έχουμε έναν τρόπο ταλαντώσεων γύρω από το 0. Μετά την διακλάδωση το σώμα ταλαντώνεται είτε γύρω από το  $x_{02}$  ή το  $x_{03}$ . Για μεγαλύτερες τιμές ενέργειας η ταλάντωση γίνεται γύρω απ' όλα τα σημεία ισορροπίας. Άρα με την διακλάδωση διχάλας περνάμε από έναν τρόπο ταλάντωσης σε τρεις δυνατούς τρόπους ταλάντωσης.



Σχήμα 6-22. Το δυναμικό και το φασικό διάγραμμα του μη-γραμμικού ταλαντωτή πριν (αριστερά,  $l_0 < L$ ) και μετά (δεξιά,  $l_0 > L$ ) την διακλάδωση.

## 6.4.2 Χημικές ταλαντώσεις. Το μοντέλο Brusselator.

Έστω μια απλή τυπική χημική αντίδραση κατά την οποία τα στοιχεία A και B ενώνονται για να μας δώσουν το στοιχείο Γ,



και οι συγκεντρώσεις των στοιχείων, σε mole/V, όπου V ένας όγκος διαλύματος, είναι  $x_A$ ,  $x_B$  και  $x_\Gamma$ .

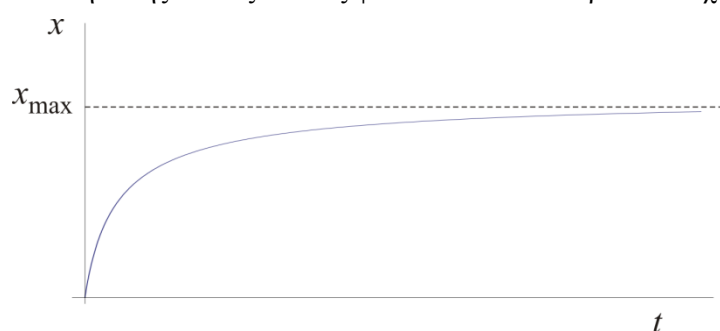
Αν η αντίδραση γίνεται με ταχύτητα  $k$ , ο ρυθμός παραγωγής του στοιχείου Γ θα είναι

$$\dot{x}_\Gamma = k x_A x_B^n$$

Αν αρχικά έχουμε συγκεντρώσεις  $x_A(0)=a$ ,  $x_B(0)=b$  και  $x_\Gamma(0)=0$ , τότε την χρονική στιγμή κατά την οποία  $x_\Gamma=x$ , θα είναι  $x_A(t)=a-x$ ,  $x_B(t)=b-nx$ , και η παραπάνω εξίσωση έχει τη μορφή

$$\dot{x} = k(a-x)(b-nx)^n \quad (6.30)$$

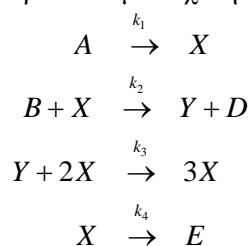
Οι λύσεις τις παραπάνω εξίσωσης τείνουν πάντα, καθώς  $t \rightarrow \infty$ , προς μια μέγιστη τιμή για την παραγόμενη ποσότητα της ουσίας Γ όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 6-23. Η συγκέντρωση της παραγόμενης ουσίας σε μια απλή χημική αντίδραση.

Πέρα από την παραπάνω τυπική περίπτωση, το 1950 ο βιοχημικός Belousov παρατήρησε ότι σε μια χημική αντίδραση το χρώμα του διαλύματος να αλλάζει περιοδικά. Αυτό σημαίνει ότι δεν καταλήγει το σύστημα σε μια συγκεκριμένη κατάσταση αλλά παρουσιάζει αμφίδρομη εξέλιξη με τις συγκεντρώσεις των προϊόντων να αυξομειώνονται περιοδικά. Στο σύστημα, λοιπόν, από δυναμική άποψη έχουμε την παρουσία ενός οριακού κύκλου. Ένα κλασικό μοντέλο που χρησιμοποιείται για την περιγραφή αυτής της δυναμικής συμπεριφοράς είναι αυτό των Prigogine-Lefever, γνωστό ως [Brusselator](#), και το οποίο περιγράφουμε παρακάτω.

Έστω το σύνολο χημικών αντιδράσεων με ταχύτητες  $k_i$



Τα στοιχεία A και B διατίθενται σε σταθερή ποσότητα στο σύστημα ενώ οι συγκεντρώσεις των στοιχείων X και Y μεταβάλλονται. Αν  $X$ ,  $Y$  συμβολίζουν τις αντίστοιχες συγκεντρώσεις τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{X} &= k_1 A - k_2 B X + k_3 X^2 Y - k_4 X \\ \dot{Y} &= k_2 B X - k_3 X^2 Y \end{aligned} \quad (6.31)$$

Αν εισάγουμε τις κανονικοποιημένες μεταβλητές και παραμέτρους

$$x = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} X, \quad y = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} Y, \quad \tau = k_4 t, \quad a = \frac{k_3^{1/2} k_1}{k_4^{3/2}} A, \quad b = \frac{k_2}{k_4} B,$$



το σύστημα (6.31) γράφεται

$$\begin{cases} \dot{x} = a - bx + x^2 y - x \\ \dot{y} = bx - x^2 y \end{cases}, \quad (6.32)$$

όπου η παραγωγή αναφέρεται ως προς τον κανονικοποιημένο χρόνο  $\tau$ .

Το σύστημα (6.32) έχει ένα σημείο ισορροπίας, το

$$(x_0, y_0) = \left( a, \frac{b}{a} \right).$$

Ο γραμμικοποιημένος πίνακας για το παραπάνω σύστημα καθώς και οι ιδιοτιμές του θα είναι

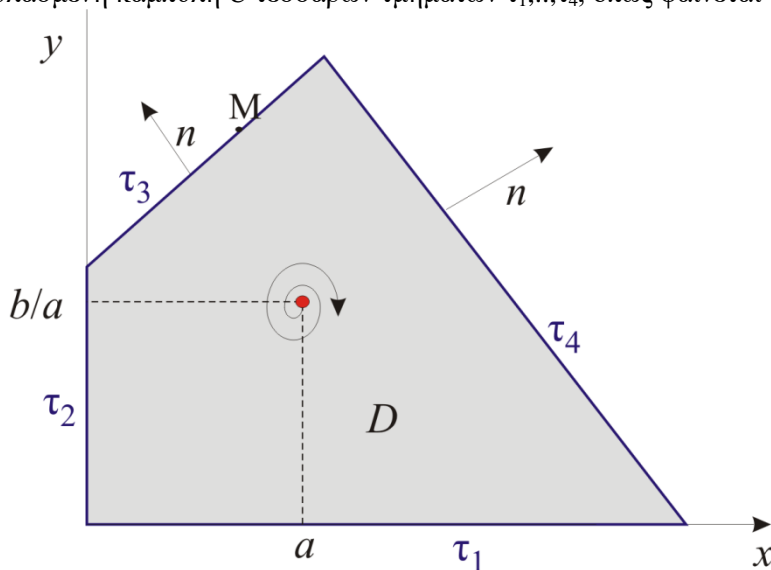
$$J = \begin{pmatrix} -1+b & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -\gamma + b \pm \sqrt{(\gamma - b)^2 - 4a^2} \right), \quad \gamma = 1 + a^2.$$

Έτσι, για την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας θα έχουμε τις περιπτώσεις

- Ευσταθής κόμβος για  $b < 1 + a^2 - 2a$
- Ευσταθής εστία για  $1 + a^2 - 2a < b < 1 + a^2$
- Ασταθής εστία για  $1 + a^2 < b < 1 + a^2 + 2a$
- Ασταθής κόμβος για  $b > 1 + a^2 + 2a$

Έχουμε λοιπόν πιθανή διακλάδωση Hopf για  $b = 1 + a^2$ .

Η ύπαρξη οριακού κύκλου για  $b > 1 + a^2$  μπορεί ναδειχτεί με το θεώρημα Poincare-Bendixson (δες §5.3.2 και Enns & McGuire, 2001), το οποίο το εφαρμόζουμε στον τόπο  $D$  που περικλείεται από μια τεθλασμένη καμπύλη  $C$  τεσσάρων τμημάτων  $\tau_1, \dots, \tau_4$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 6-24. Περιοχή γύρω από το σημείο ισορροπίας  $(a, b/a)$  στην οποία εφαρμόζουμε το θεώρημα Poincare – Bendixson.

Υπολογίζουμε το πρόσημο της ποσότητας

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} = n_1 f(x, y) + n_2 g(x, y) = n_1 (a - bx + x^2 y - x) + n_2 (bx - x^2 y)$$

όπου  $\mathbf{f}$  το διανυσματικό πεδίο του συστήματος και  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  το κάθετο διάνυσμα στην καμπύλη  $C$  που ορίζει τον τόπο  $D$ . Θεωρούμε ότι το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές, δηλαδή  $b > 1 + a^2$ , οπότε αν δείξουμε ότι η ροή σε όλη την  $C$  είναι προς τα μέσα, δηλαδή  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} < 0$ , τότε θα υπάρχει οριακός κύκλος γύρω από το σημείο ισορροπίας και μέσα στον τόπο  $D$ .

Για το τμήμα  $\tau_1$  είναι  $\mathbf{n}=(0,-1)$ ,  $y=0$  και  $x>0$ , οπότε  $\mathbf{n}\cdot\mathbf{f}=-bx<0$ . Για το τμήμα  $\tau_2$  είναι  $\mathbf{n}=(-1,0)$ ,  $x=0$  και  $y>0$ , οπότε  $\mathbf{n}\cdot\mathbf{f}=-a<0$ . Το τμήμα  $\tau_4$  το επιλέγουμε να δίνεται από τη σχέση  $y=c_1-x$ , όπου  $c_1$  μια αυθαίρετη, προς το παρόν σταθερά. Άρα στο τμήμα  $\tau_4$  θα είναι  $\mathbf{n}=(1,1)$  και προκύπτει

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{f}=a-x<0 \quad \text{αν} \quad x>a$$

Περιορίζουμε λοιπόν το τμήμα  $\tau_4$  στο διάστημα  $x>a$ . Για  $x<a$  θεωρούμε ως πάνω σύνορο της  $D$  το τμήμα  $\tau_3$  που δίνεται από τη σχέση  $y=c_2+x$  και  $\mathbf{n}=(-1,1)$ . Οπότε για το  $\tau_3$  θα έχουμε

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{f}=-a+2bx-2x^2y+x$$

Για να είναι η παραπάνω σχέση αρνητική πρέπει

$$y < \frac{(2b+1)x-a}{2x^2}$$

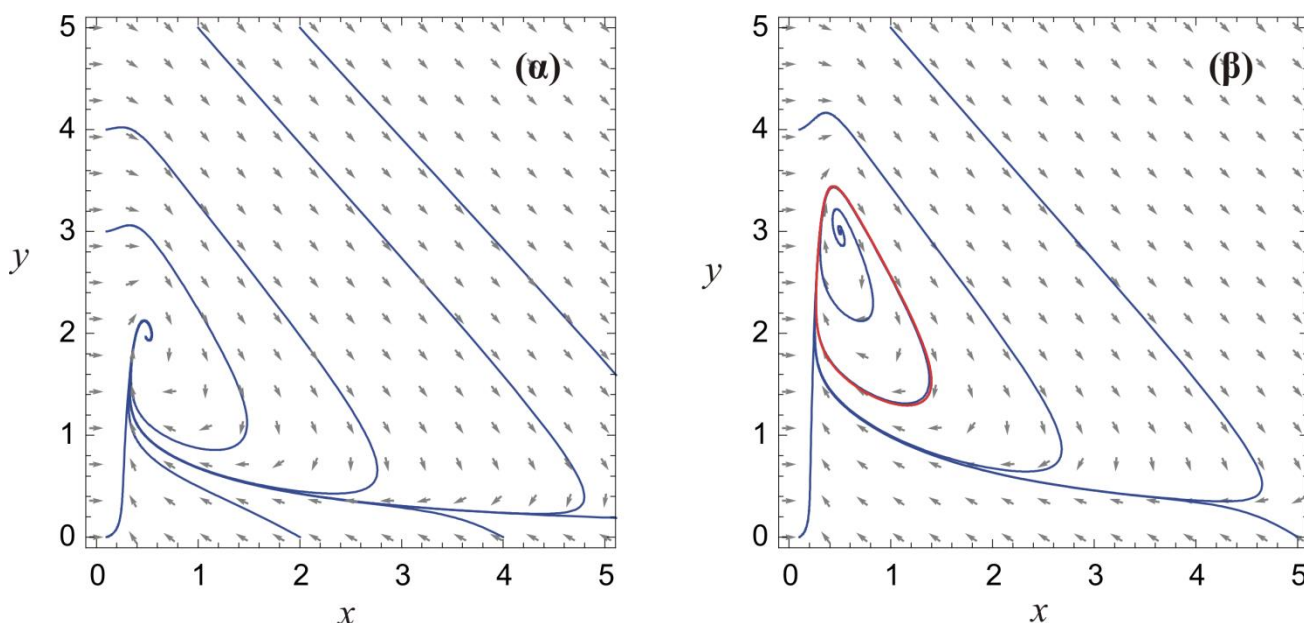
Το δεξί μέλος της παραπάνω έχει μέγιστο στο σημείο

$$M = \left( \frac{2a}{2b+1}, \frac{(2b+1)^2}{8a} \right),$$

οπότε και επιλέγουμε την  $y=c_2+x$  να περνάει από το  $M$  και έτσι θα ικανοποιείται η παραπάνω ανισότητα. Έτσι βρίσκουμε

$$c_2 = \frac{(2b+1)^3 - 16a^2}{8a(2b+1)} > 0 \quad (\text{για } b > 1+a^2)$$

Άρα και για το  $\tau_3$  θα είναι  $\mathbf{n}\cdot\mathbf{f} < 0$ . Σημειώνουμε ότι, για  $b > 1+a^2$ , είναι  $M_x = 2a/(2b+1) < a$ . Άρα το τμήμα  $\tau_3$  το εκτείνουμε για  $x > a$  οπότε η ανισότητα  $\mathbf{n}\cdot\mathbf{f} < 0$  ισχύει ταυτόχρονα και για το τμήμα  $\tau_3$  και για το  $\tau_4$ , Δηλαδή για όλο το σύνορο της  $D$ . Έτσι αποδείχτηκε η ύπαρξη οριακού κύκλου για  $b > 1+a^2$ , ο οποίος φαίνεται στο Σχήμα 6-25β. Ο οριακός κύκλος συρρικνώνεται, καθώς το  $b$  πλησιάζει (από τα δεξιά) την κρίσιμη τιμή  $1+a^2$ , προς το σημείο ισορροπίας. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι έχουμε μια διακλάδωση Hopf.



Σχήμα 6-25. Φασικά διαγράμματα για το σύστημα (6.32) και  $a=0.5$ . Η διακλάδωση Hopf παρουσιάζεται για  $b_c=1.25$  (α)  $b=1.0 < b_c$  (β)  $b=1.5 > b_c$ .

**Σημείωση.** Ένα άλλο γνωστό σύστημα χημικών ταλαντώσεων είναι και το σύστημα [oregonator](#).

## Ασκήσεις

**Άσκηση 6.4.1.** Υλικό σημείο είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω σε μια περιφέρεια κύκλου με κέντρο το  $O$  και ακτίνα  $R$ , η οποία περιστρέφεται γύρω από την κατακόρυφη διάμετρό της, κατά τον άξονα  $Oz$  με σταθερή γωνιακή συχνότητα  $\omega$ . Στο υλικό σημείο ενεργεί το βάρος του  $B=mg$ . Αν  $\theta$  είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου με τον άξονα  $Oz$ , η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση είναι η

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{R} \sin \theta.$$

Βρείτε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος. Για ποια τιμή του  $\omega=\omega_c$  παρουσιάζεται διακλάδωση; Προσδιορίστε το τύπο της διακλάδωσης και σχεδιάστε το φασικό διάγραμμα για  $\omega < \omega_c$  και  $\omega > \omega_c$ .

**Άσκηση 6.4.2.** Στην αντίδραση διοξειδίου του χλωρίου με Ιώδιο, οι κανονικοποιημένες συγκεντρώσεις των δύο αυτών χημικών ουσιών περιγράφονται από το δυναμικό σύστημα

$$\dot{x} = a - x - \frac{4xy}{1+x^2}, \quad \dot{y} = b \left( x - \frac{xy}{1+x^2} \right).$$

Μελετήστε την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας και τις διακλαδώσεις. Δείξτε ότι έχουμε παρουσία οριακού κύκλου που εξηγεί τις χημικές ταλαντώσεις της αντίδρασης.

**Άσκηση 6.4.3.** Κατά την διαδικασία της γλυκόλυσης, όπου στα κύτταρα διασπάται ζάχαρη για παραγωγή ενέργειας, συμμετέχουν οι ενώσεις διφωσφορική αδενοσίνη (ADP) και η 6-φωσφορική φρουκτόζη (F6P). Οι συγκεντρώσεις τους σε κανονικοποιημένες μονάδες δίνονται από το σύστημα

$$\dot{x} = -x + ay + x^2 y, \quad \dot{y} = b - ay - x^2 y,$$

όπου  $a, b$  σταθερές. Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και μελετήστε την γραμμική τους ευστάθεια. Εφαρμόστε το θεώρημα Poincare-Bendixson και δείξτε ότι έχουμε οριακό κύκλο όταν  $(b^2 - a) > (b^2 + a)^2$  (χρησιμοποιήστε ένα τόπο που περικλείεται από τμήματα των ευθειών  $x=0, y=0, y=c_1, y=c_2-x, x=c_3$ ). Για  $a=0.05, b=0.5$  σχεδιάστε το διάγραμμα φάσεων και υπολογίστε την περίοδο του οριακού κύκλου.

## 6.5 Βιβλιογραφία

- Arrowsmith, D.K. & Place, C.M., 1990. *An Introduction to Dynamical Systems*. New York: Cambridge University Press.
- Enns, R.H. & McGuire, G.C., 2001. *Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers*. Boston: Birkhauser.
- Guckenheimer, J. & Holmes, P., 1997. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. 3rd ed. New York: Springer-Verlag.
- Irwin, M.C., 2001. *Smooth Dynamical Systems*. Singapore: World Scientific.
- Jordan, D. W. & Smith, P., 2007. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. 4th ed. Oxford: Oxford University Press.
- Marasco, A. & Romano, A., 2001. *Scientific Computing with Mathematica: Mathematical problems of ordinary differential equations*, Boston: Birkhauser.
- Rasband, S. N., 1990. *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*. New York: Wiley.
- Strogatz, S.H., 1994. *Nonlinear Dynamics and Chaos, with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- Tel, T. & Gruiz, M., 2006. *Chaotic Dynamics: an introduction based on Classical Mechanics*. New York: Cambridge University Press.
- Wiggins, S., 1990. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. New York: Dover.

- Κυπριανίδης, Ι.Μ. & Πετράνη, Μ.Λ., 2008. *Μη γραμμικά ηλεκτρικά κυκλώματα*. Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Σύγχρονη Παιδεία.
- Μπούντης, Α., 1990. *Μη γραμμικές συνήθειες διαφορικές εξισώσεις*. Αθήνα: Πνευματικός.
- Μπούντης, Α., 2000. *Δυναμικά Συστήματα και Χάος*, τόμος Β'. Πάτρα: εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.
- Πνευματικός Σπ., 2002. *Τοπολογία: θεμελιώδεις έννοιες της γενικής Τοπολογία.*, Αθήνα: εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικού.
- Σούρλας, Δ., 2012. *Δυναμικά συστήματα και εφαρμογές με τη χρήση του Maple*. Σημειώσεις. Διαθέσιμο στη: [http://www.physics.upatras.gr/UploadedFiles/course\\_182\\_1516.pdf](http://www.physics.upatras.gr/UploadedFiles/course_182_1516.pdf). Πανεπιστήμιο Πάτρας.

## 7 Μη-αυτόνομα συστήματα. Εξαναγκασμένοι ταλαντωτές

Τα μη αυτόνομα συνεχή δυναμικά συστήματα ορίζονται με το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in E^n \subseteq R^n.$$

Τα βασικά χαρακτηριστικά αυτών των συστημάτων συζητήθηκαν στην παράγραφο §1.3.2. Επισημάναμε ότι, οι τροχιές του συστήματος μπορούν να τέμνονται στο χώρο των φάσεων  $E^n$ . Έτσι τώρα δεν εφαρμόζονται άμεσα οι τοπολογικές μέθοδοι, οι οποίες εφαρμόστηκαν στην ποιοτική μελέτη της δυναμικής των αυτόνομων συστημάτων. Επίσης, τα συστήματα αυτά, για  $n \geq 2$ , μπορούν να δώσουν λύσεις με πολύπλοκη συμπεριφορά και απρόβλεπτη εξέλιξη. Τέτοιου είδους τροχιές ονομάζονται **χαοτικές τροχιές**, οι οποίες έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες, προκύπτουν υπό συγκεκριμένες δυναμικές συνθήκες και απασχολούν προχωρημένες θεωρίες των δυναμικών συστημάτων. Σημειώνουμε ότι, πρωτοπόρος αυτής της θεωρίας των δυναμικών συστημάτων και του χάους ήταν ο [Henri Poincaré](#). Στο παρόν κεφάλαιο η χαοτική συμπεριφορά θα αναδειχτεί μέσα από απλά συστήματα και θα αναδειχθούν οι ιδιότητές τους υπολογιστικά. Συγκεκριμένα θα αναφερθούμε σε ταλαντωτές ενός βαθμού ελευθερίας οι οποίοι διεγείρονται από εξωτερικές περιοδικές διαταραχές.

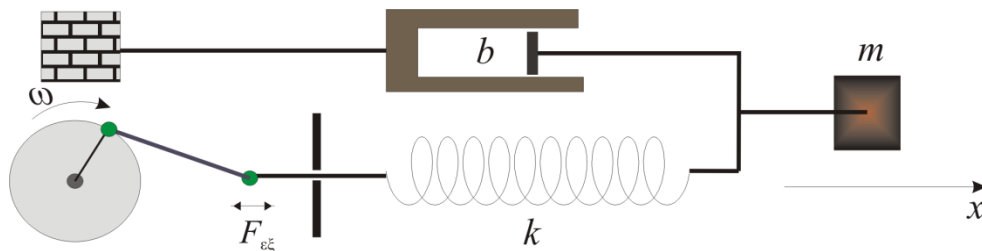
### 7.1 Ο γραμμικός εξαναγκασμένος ταλαντωτής

Στην παράγραφο §3.2.3 γνωρίσαμε τον γραμμικό ταλαντωτή με απόσβεση που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (7.1)$$

όπου  $b$  ο συντελεστής αντίστασης και  $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ , η γωνιακή συχνότητα του ταλαντωτή με σώμα μάζας  $m$  και με ελατήριο σταθεράς  $k$ . Θεωρούμε τώρα ότι στο σύστημα επιδρά και μία εξωτερική δύναμη,  $F_{εξ}$  η οποία είναι περιοδική με κυκλική συχνότητα  $\omega$  και πλάτος  $F_0$ ,

$$F_{εξ} = F_0 \sin \omega t$$



Σχήμα 7-1. Ταλαντωτής με γραμμικό ελατήριο, γραμμική απόσβεση και εξωτερική περιοδική διέγερση

Η διαφορική εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \sin \omega t \quad (7.2)$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι μια γραμμική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές αλλά όχι ομογενής, όπως η εξίσωση (7.1). Η γενική λύση της θα είναι της μορφής

$$x(t) = x_0(t; c_1, c_2) + x_\mu(t), \quad (7.3)$$

όπου  $x(t) = x_0(t; c_1, c_2)$  η γενική λύση της ομογενούς (7.1), με  $c_1, c_2$  οι αυθαίρετες σταθερές που εκφράζονται συναρτήσει των αρχικών συνθηκών  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ . Η  $x(t) = x_\mu(t)$  είναι μια μερική λύση της (7.2), η οποία δεν εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες παρά μόνο από τους σταθερούς συντελεστές της εξίσωσης. Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις μηδενικής και μη μηδενικής απόσβεσης.

### 7.1.1 Το διατηρητικό σύστημα ( $b=0$ ) με εξωτερική διέγερση

Θα έχουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \sin \omega t \quad (7.4)$$

με το ομογενές μέρος,  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$  (αρμονικός ταλαντωτής) να έχει τη λύση

$$x_o(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t = D \cos(\omega_0 t - \theta_0), \quad (7.5)$$

όπου  $D$  το πλάτος της αρμονικής ταλάντωσης και  $\theta_0$  η αρχική φάση (δες επίσης §3.2.1).

Στην γενική περίπτωση όπου η συχνότητα  $\omega$  του εξωτερικού διεγέρτη είναι διαφορετική της ιδιοσυχνότητας  $\omega_0$  του συστήματος ( $\omega_0 \neq \omega$ ), μια μερική λύση είναι η

$$x_\mu = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (7.6)$$

Άρα η γενική λύση της (7.4) θα είναι η

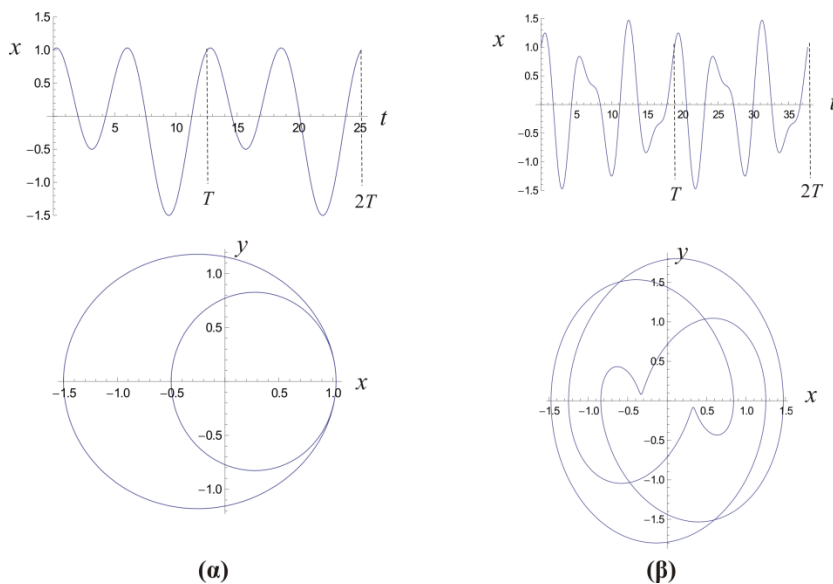
$$x(t) = D \cos(\omega_0 t - \theta_0) + \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t \quad (7.7)$$

Η παραπάνω λύση αποτελεί γραμμική επαλληλία δύο ταλαντώσεων με συχνότητες  $\omega$  και  $\omega_0$ . Αντίστοιχα οι περίοδοι των δύο ταλαντώσεων θα είναι οι  $T_{εξ} = 2\pi/\omega$  και  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις

i)  $T_{εξ}/T_0 = p/q \in \mathbb{Q}$ , όπου  $p, q$  είναι πρώτοι μεταξύ τους ακέραιοι. Στην περίπτωση αυτή η (7.7) θα έχει περίοδο

$$T = qT_{εξ} = pT_0,$$

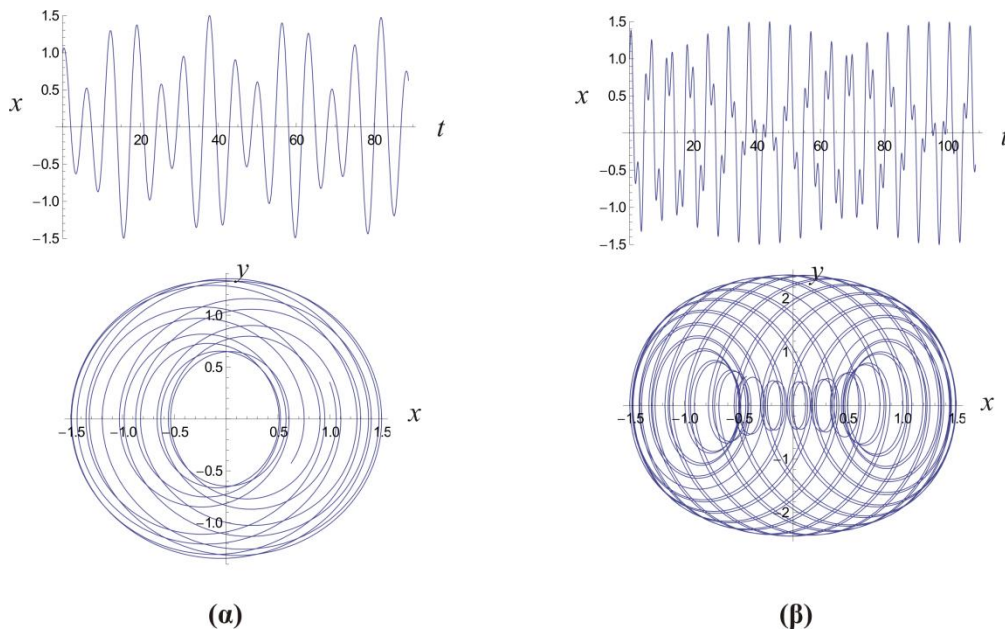
δηλαδή η ταλάντωση θα ολοκληρώσει τον κύκλο της σε  $q$  περιόδους της εξωτερικής διέγερσης ή σε  $p$  περιόδους της ιδιο-ταλάντωσης του συστήματος. Στο Σχήμα 7-2 παρουσιάζονται δύο παραδείγματα περιοδικής ταλάντωσης



Σχήμα 7-2. Παραδείγματα περιοδικών ταλαντώσεων και οι αντίστοιχες φασικές καμπύλες  $(x, y)$ , όπου  $y = dx/dt$  α)  $p=2, q=1$  β)  $p=3, q=5$ . (ως προς τον υπολογισμό, θέσαμε  $\omega_0=1, D=1, F_0=(\omega_0^2 - \omega^2)/2$ ).

Οι φασικές τροχιές, οι οποίες αντιστοιχούν στις ταλαντώσεις, κλείνουν μετά από χρόνο  $T$ , αλλά ενδιάμεσα τέμνουν εγκάρσια τον εαυτό τους.

ii)  $T_{εξ}/T_0 \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ , δηλαδή ο λόγος περιόδων είναι άρρητος. Στην περίπτωση αυτή η (7.7) εκφράζει περατωμένες ταλαντώσεις οι οποίες όμως δεν είναι περιοδικές. Οι ταλαντώσεις αυτές ονομάζονται **ημιπεριοδικές (quasi-periodic)**.



Σχήμα 7-3. Ημιπεριοδικές ταλαντώσεις στον γραμμικό ταλαντωτή με εξωτερική διέγερση α)  $p/q = \sqrt{2}/b$  β)  $p/q = \sqrt{3}/5$ .

Οι φασικές τροχιές που αντιστοιχούν στις ημιπεριοδικές ταλαντώσεις δεν κλείνουν ποτέ. Έτσι γεμίζουν πυκνά μια περιοχή του επιπέδου των φάσεων καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Για το παράδειγμα του παραπάνω σχήματος, η φασική τροχιά θα γεμίσει έναν δακτύλιο στην περίπτωση (α) ή μια οβάλ περιοχή στην περίπτωση (β).

**Σχόλιο.** Αν  $\omega = \omega_0$ , τότε έχουμε την περίπτωση του *συντονισμού 1/1*. Τότε προκύπτει για την εξίσωση (7.4) η λύση

$$x(t) = D \cos(\omega_0 t - \theta_0) + t \frac{F_0}{2\omega} \cos \omega t .$$

Η μερική λύση εκφράζει μη περατωμένη ταλάντωση με γραμμικά αυξανόμενο πλάτος.

### 7.1.2 Το απωλεστικό σύστημα ( $b \neq 0$ ) με εξωτερική διέγερση

Θεωρούμε τώρα την εξίσωση (7.2) με  $b > 0$ . Η λύση της ομογενούς αναλύθηκε στην παράγραφο §3.2.3. Για μεγάλη τιμή του συντελεστή αντίστασης,  $b > 2\omega_0$ , η λύση  $x = x_0(t)$  τείνει γρήγορα στο μηδέν, ενώ για μικρή τιμή αντίστασης,  $b < 2\omega_0$ , η λύση  $x = x_0(t)$  περιγράφει ταλαντώσεις με εκθετικά μειούμενο πλάτος και εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Η μερική λύση της πλήρους εξίσωσης θα είναι της μορφής

$$x_\mu = A \cos(\omega t - \varphi_0) , \quad (7.8)$$

όπου

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{b^2 \omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}} , \quad \varphi_0 = \tan^{-1} \left( \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{b\omega} \right) . \quad (7.9)$$

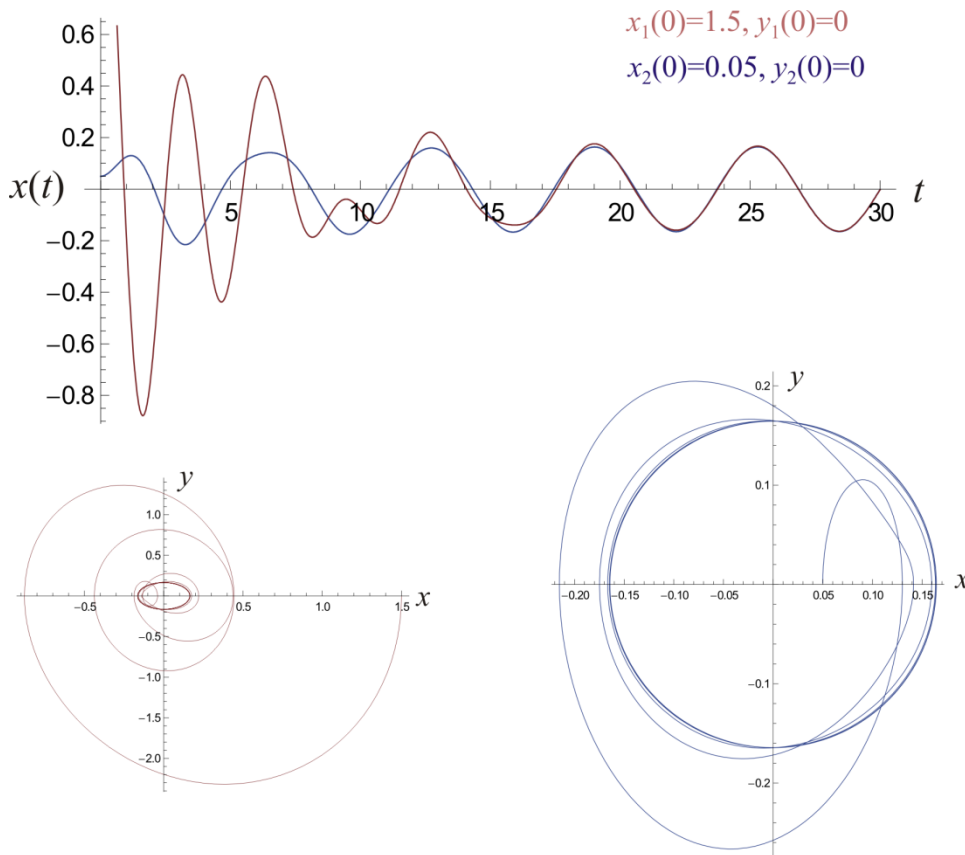
Άρα η λύση του απωλεστικού συστήματος θα είναι το άθροισμα μιας **μεταβατικής** λύσης που τείνει στο μηδέν, καθώς αυξάνει ο χρόνος, και μιας **μόνιμης** (ή στάσιμης) λύσης,

$$x(t) = \underbrace{x_0(t)}_{\text{μεταβατική λύση}} + \underbrace{x_\mu(t)}_{\text{μόνιμη λύση}} .$$

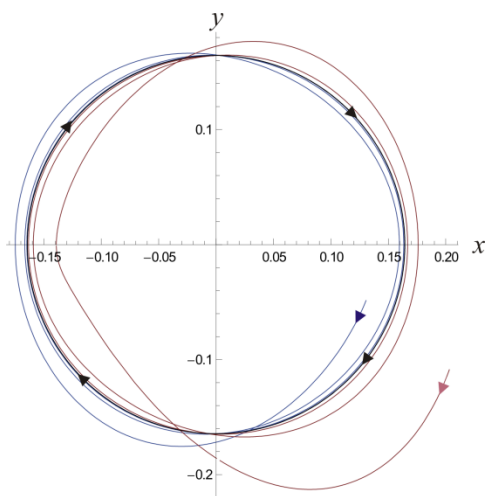
Η μόνιμη λύση εκφράζει ταλαντώσεις με κυκλική συχνότητα αυτήν της εξωτερικής διέγερσης και πλάτος  $A$ , όπως δίνεται παραπάνω, και το οποίο εξαρτάται μόνο από τις παραμέτρους του συστήματος και όχι από τις αρχικές συνθήκες. Αν περιγράψουμε τη λύση (7.8) στο φασικό επίπεδο  $x$ - $y$ , όπου

$$y = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t - \varphi_0),$$

παίρνουμε μια γεωμετρική έλλειψη, και δεδομένου ότι όλες οι λύσεις τείνουν προς την μόνιμη λύση, αυτή θα εκφράζει έναν *οριακό κύκλο*.



Σχήμα 7-4. (επάνω) Ταλαντώσεις της εξίσωσης (7.2) για δύο διαφορετικές αρχικές συνθήκες και για τις παραμέτρους  $\omega_0=2, \omega=1, b=0.5, F_0=0.5$ . (κάτω) οι αντίστοιχες φασικές τροχιές.



Σχήμα 7-5. Ο οριακός κύκλος (μαύρη καμπύλη) στον οποίο τείνουν οι λύσεις-τροχιές που παρουσιάζονται στο Σχήμα 7-4.



Οι ταλαντώσεις που παρουσιάζονται στο Σχήμα 7-4 παρουσιάζουν αρχικά μια μη τακτική χρονική εξέλιξη και αυτό αποτυπώνεται και στην σχετικά ανώμαλη μορφή των φασικών τροχιών. Μετά όμως από ένα χρονικό διάστημα, στο οποίο η μεταβατική συνιστώσα της λύσης εξασθενεί, οι λύσεις τείνουν προς μια αρμονική ταλάντωση με συγκεκριμένο πλάτος και συχνότητα. Η λύση αυτή είναι ο οριακός κύκλος που φαίνεται στο Σχήμα 7-5.

## Ασκήσεις

**Άσκηση 7.1.1.** Ένα γραμμικό ηλεκτρικό κύκλωμα RLC (σε σειρά) περιγράφεται από την εξίσωση Kirchhoff

$$RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t),$$

όπου  $I=I(t)$  το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα  $R$  η ωμική αντίσταση,  $L$  ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου,  $C$  η χωρητικότητα του πυκνωτή,  $E(t)$  η τάση της γεννήτριας που τροφοδοτεί το κύκλωμα και  $Q$  το φορτίο του πυκνωτή.

α) Δεδομένου ότι  $I=dQ/dt$ , γράψτε την διαφορική εξίσωση που περιγράφει την ένταση του ρεύματος.

β) Έστω ένα κύκλωμα με  $R=100 \text{ Ohm}$ ,  $L=10^{-1} \text{ Henry}$ ,  $C=10^{-3} \text{ Farad}$ , τροφοδοτείται από πηγή εναλλασσόμενης τάσης  $E(t)=12\sin(100t)$ . Βρείτε το μόνιμο ρεύμα.

γ) Βρείτε (με τη βοήθεια του Mathematica) την συνολική λύση για αρχικές συνθήκες  $I(0)=0$ ,  $dI/dt(0)=0$  και σχεδιάστε το ρεύμα  $I=I(t)$  (επιλέξτε χρονικό διάστημα  $(0, t^*)$ , όπου  $t^* \ll 1$ , έτσι ώστε να φανούν οι μεταβατικές ταλαντώσεις μέχρι την σταθεροποίησή τους στη μόνιμη κατάσταση).

## 7.2 Η στροβοσκοπική απεικόνιση του Poincaré

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 7-3 και στο Σχήμα 7-4, οι φασικές τροχιές τέμνουν τον εαυτό τους ή τις τροχιές με διαφορετικές αρχικές συνθήκες, και συνεπώς, χάνεται το πλεονέκτημα της τοπολογικής δομής των φασικών καμπύλων στο επίπεδο  $x$ - $y$  το οποίο είχαμε στα αυτόνομα συστήματα. Αντίθετα, όπως έχουμε αναφέρει στην §1.2, οι φασικές τροχιές δεν τέμνονται στον εκτεταμένο χώρο φάσεων. Όμως ο χώρος αυτός έχει μια διάσταση παραπάνω. Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί στην περίπτωση που το διανυσματικό πεδίο του συστήματος είναι περιοδικό, με περίοδο  $T$ .

Έστω το σύστημα

$$\dot{x} = f(x, y, t), \quad \dot{y} = g(x, y, t), \quad (7.10)$$

όπου

$$f(x, y, t) = f(x, y, t + kT), \quad g(x, y, t) = g(x, y, t + kT), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Το παραπάνω σύστημα παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μια παράλληλη μετατόπιση του χρόνου  $t' = t + T$ , και συνεπώς οι αρχικές συνθήκες  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$  είναι ισοδύναμες με τις αρχικές συνθήκες  $x_0 = x(t_0 + kT)$ ,  $y_0 = y(t_0 + kT)$ , για κάθε ακέραιο  $k$ , υπό την έννοια ότι παράγουν την ίδια λύση. Έτσι, υπό την προϋπόθεση ότι ισχύουν οι συνθήκες μοναδικότητας των λύσεων (δες §1.2), καταλήγουμε στην παρακάτω πρόταση

- Αν δύο λύσεις  $x_i = x_i(t)$ ,  $y_i = y_i(t)$ ,  $i=1, 2$ , της (7.10) έχουν κοινό σημείο, δηλαδή,

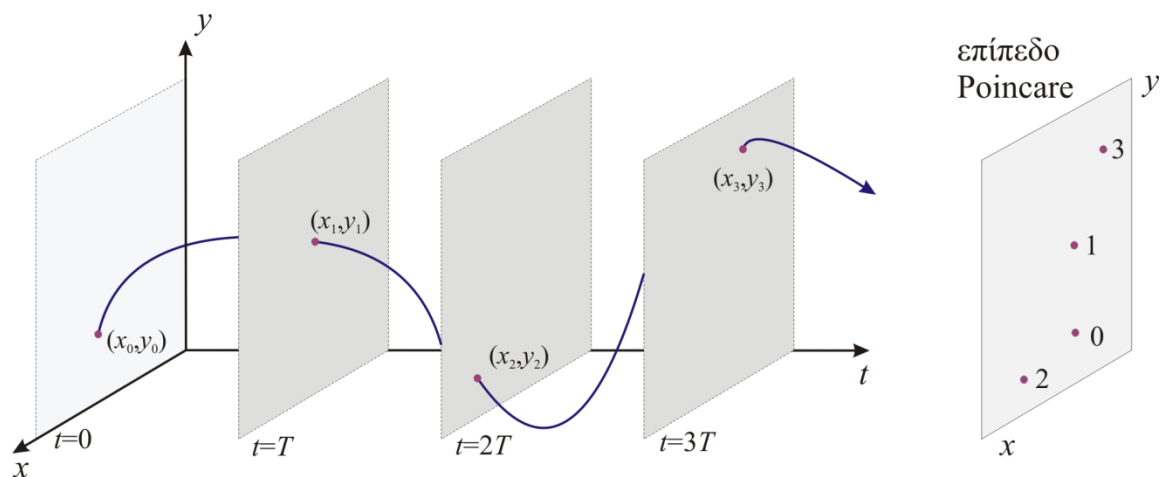
$$\exists t_1, t_2 \text{ έτσι ώστε } x_1(t_1) = x_2(t_2) \text{ και } y_1(t_1) = y_2(t_2),$$

τότε αν υπάρχει ακέραιος  $k$  για τον οποίο  $t_1 - t_2 = kT$ , οι λύσεις συμπίπτουν. Αντίστροφα, αν δύο λύσεις είναι διαφορετικές δεν μπορούν να έχουν κοινό σημείο σε χρονικές στιγμές που διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου του συστήματος.

Για μια λύση του συστήματος (7.10), που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ , ορίζουμε τη διακριτή ακολουθία σημείων (ακολουθία Poincaré),

$$\Pi = \{(x_k, y_k), k = 0, 1, 2, \dots \mid x_k = x(t_0 + kT), y_k = y(t_0 + kT)\} \quad (7.11)$$

Έτσι, σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, δύο διαφορετικές λύσεις δεν θα έχουν κανένα κοινό σημείο στις ακολουθίες τους. Μπορούμε λοιπόν να απεικονίσουμε τις λύσεις του συστήματος στις αντίστοιχες ακολουθίες Poincaré πάνω στο επίπεδο  $x$ - $y$ . Στην πράξη δηλαδή, επιλέγουμε από μια συνεχή φασική καμπύλη μόνο τα σημεία τα οποία αντιστοιχούν σε ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου του συστήματος. Μια τέτοια απεικόνιση ονομάζεται **στροβοσκοπική απεικόνιση** (stroboscopic map). Το επίπεδο  $x$ - $y$ , στο οποίο προβάλλεται η ακολουθία Poincaré, ονομάζεται **επίπεδο ή τομή Poincaré**.



Σχήμα 7-6. Η στροβοσκοπική απεικόνιση μιας τροχιάς ενός περιοδικού συστήματος με περίοδο  $T$ .

Θεωρούμε τώρα την **απεικόνιση Poincaré**, την οποία συμβολίζουμε με  $\mathbf{P}_\Sigma$ , και η οποία αποτελεί έναν αναδρομικό τύπο της ακολουθίας  $\Pi$ , δηλαδή μας μεταβαίνει από ένα σημείο της στο επόμενο

$$(x_k, y_k) \xrightarrow{\mathbf{P}_\Sigma} (x_{k+1}, y_{k+1}) \quad \text{ή} \quad (x_{k+1}, y_{k+1}) = \mathbf{P}_\Sigma(x_k, y_k)$$

Επίσης, για τη σύνθεση δυο απεικονίσεων ορίζουμε τον συμβολισμό  $\mathbf{P}_\Sigma^2 = \mathbf{P}_\Sigma \circ \mathbf{P}_\Sigma$ , δηλαδή  $(x_2, y_2) = \mathbf{P}_\Sigma(x_1, y_1) = \mathbf{P}_\Sigma^2(x_0, y_0)$ , ή γενικότερα

$$(x_k, y_k) = \mathbf{P}_\Sigma^k(x_0, y_0)$$

Αν  $(x_1, y_1) = (x_0, y_0)$  τότε προφανώς θα είναι και  $(x_k, y_k) = (x_0, y_0)$ , για κάθε  $k$ . Δηλαδή η απεικόνιση  $\mathbf{P}_\Sigma$  είναι περιοδική και η ακολουθία  $\Pi$  θα αποτελείται μόνο από ένα σημείο, το  $(x_0, y_0)$ , το οποίο ονομάζεται **σταθερό σημείο** της απεικόνισης. Η αντίστοιχη τροχιά του συστήματος θα είναι περιοδική με περίοδο  $T$ , όση δηλαδή και η περίοδος του συστήματος. Γενικότερα :

- Μια περιοδική τροχιά του συστήματος (7.10) οφείλει να έχει περίοδο  $T'$  που είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου  $T$  του συστήματος, δηλαδή  $T' = kT$ , και η απεικόνιση Poincaré θα είναι περιόδου  $k$ , δηλαδή

$$\mathbf{P}_\Sigma^k(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$$

Η απεικόνιση Poincaré εν γένει δεν μπορεί να βρεθεί αναλυτικά, αλλά τα σημεία της ακολουθίας Poincaré βρίσκονται από την αριθμητική λύση και την στροβοσκοπική απεικόνιση.

**[M] Παράδειγμα** . Θεωρούμε το διαταραγμένο εκκρεμές

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sin x + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{2t}{3}\right)$$

και βρίσκουμε την αριθμητική του λύση για  $0 \leq t \leq 50$  και για αρχικές συνθήκες  $x(0)=1, y(0)=0$ .

```
In[1] := deq1=x'[t]==y[t];
deq2=y'[t]==-Sin[x[t]]+Cos[2t/3]/3;
```

```

tmax=50; x0=1; y0=0;
sol=NDSolve[{deq1, deq2, x[0]==x0, y[0]==y0}, {x,y}, {t,0,tmax}];
xt=x[t]/.sol[[1]]
yt=y[t]/.sol[[1]]

```

```
Out[5]= InterpolatingFunction[{{0.,50.}},<>][t]
```

```
Out[6]= InterpolatingFunction[{{0.,50.}},<>][t]
```

Το σύστημα έχει περίοδο  $T=3\pi$  και η ακολουθία Poincaré για το παραπάνω χρονικό διάστημα περιέχει 6 σημεία, τα οποία προκύπτουν ως

```
In[7]:= tp=3 Pi;
```

```
pnc=Table[{xt,yt}, {t,0,tmax,tp}]
```

```
Out[8]= {{1.,0},{0.441751,-0.174005},{0.803118,0.236214},{0.817798,-
0.230359},{0.430672,0.162236},{0.999647,0.0115457}}
```

Η σχεδίαση της ταλάντωσης και της τομής Poincaré προκύπτει με τον παρακάτω κώδικα και παρουσιάζεται στο Σχήμα 7-7

```
lx=Table[{t,xt},{t,0,tmax,tp}];
```

```
px1=ListPlot[lx,PlotStyle->{Red,PointSize[0.02]}];
```

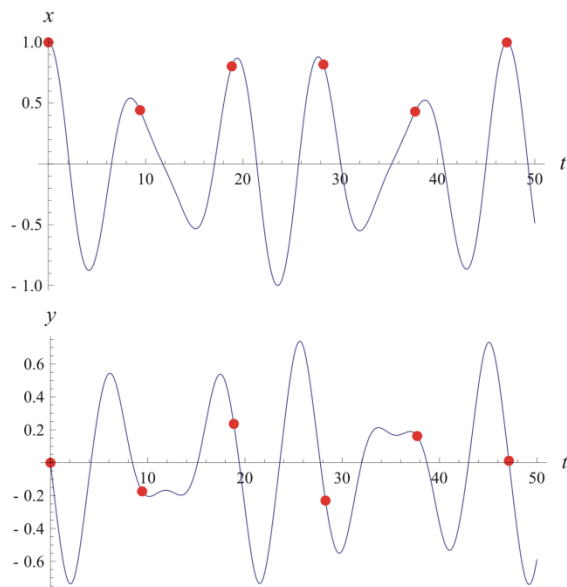
```
px2=Plot[xt,{t,0,tmax}, AxesLabel->{"t","x"}];
```

```
Show[px2,px1]
```

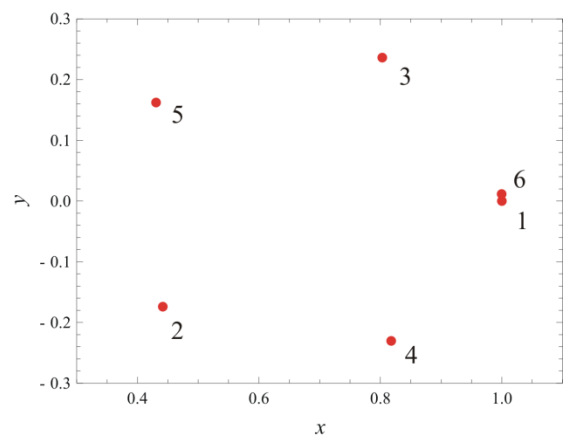
... παρόμοια για την μεταβλητή  $y(t)$ .

Η τομή Poincaré θα σχεδιαστεί με την εντολή

```
ListPlot[pnc,PlotStyle->{Red,PointSize[0.02]},Frame->True,
Axes->None,FrameLabel->{"x","y"}]
```



(α)



(β)

Σχήμα 7-7. (α) η χρονική εξέλιξη των μεταβλητών  $x(t)$ ,  $y(t)$  του παραδείγματος και οι τιμές που αντιστοιχούν στα πολλαπλάσια της περιόδου (β) τα σημεία της απεικόνισης Poincaré.

### 7.3 Η απεικόνιση Poincaré των γραμμικών ταλαντώσεων

Η απεικόνιση Poincaré για τις ταλαντώσεις της παραγράφου §7.1 παρουσιάζει ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, τα οποία περιγράφουμε παρακάτω.

#### 7.3.1 Το διατηρητικό γραμμικό σύστημα

Θεωρούμε τον διαταραγμένο ταλαντωτή (7.4) με λύση την (7.7). Παρακάτω θα θεωρούμε  $y = \dot{x}$ . Το σύστημα έχει περίοδο  $T=2\pi/\omega$  και τα σημεία της ακολουθίας Poincaré,  $\Pi$ , θα δίνονται από τη σχέση

$$\begin{aligned}x_k &= D \cos\left(2k\pi \frac{\omega_0}{\omega} - \theta_0\right) \\y_k &= -D\omega_0 \sin\left(2k\pi \frac{\omega_0}{\omega} - \theta_0\right) + \frac{\omega F_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\end{aligned}\tag{7.12}$$

Οι σταθερές  $D$  και  $\theta_0$  εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες  $x_0=x(0)$ ,  $y_0=y(0)$ ,

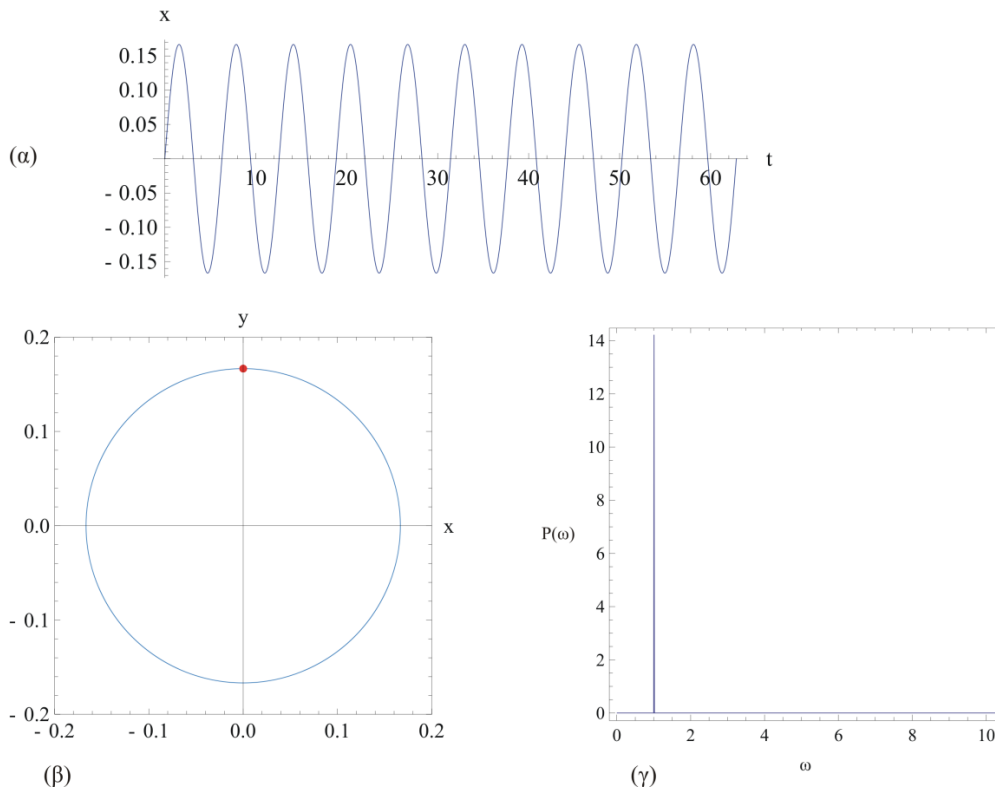
$$D = \sqrt{x_0^2 + \bar{y}_0^2 / \omega_0^2}, \quad \theta_0 = \tan^{-1}(\bar{y}_0 / (\omega_0 x_0)), \quad \text{όπου } \bar{y}_0 = y_0 - \frac{\omega F_0}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

**i) Αρμονικές ταλαντώσεις (harmonic).** Για οποιεσδήποτε τιμές των παραμέτρων του συστήματος με  $\omega \neq \omega_0$ , μπορούμε να επιλέξουμε αρχικές συνθήκες  $x_0=0$  και  $y_0 = \omega F_0 / (\omega_0^2 - \omega^2)$  έτσι ώστε  $D=0$ . Στην περίπτωση αυτή (δες σχέση (7.7)) παίρνουμε την αρμονική λύση

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t, \tag{7.13}$$

η οποία αντιστοιχεί σε σταθερό σημείο της απεικόνισης Poincaré, δηλαδή  $\Pi = \{x_0, y_0\}$ .

Στο Σχήμα 7-8 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα αρμονικής ταλάντωσης για  $\omega=1$ ,  $\omega_0=2$ ,  $F_0=1/2$ , η οποία προκύπτει για τις αρχικές συνθήκες  $x_0=0$  και  $y_0=1/6$ . Η καμπύλη καθώς και το σταθερό σημείο της τομής Poincaré παρουσιάζονται στο πάνελ (β). Το φάσμα ισχύος της ταλάντωσης, που παρουσιάζεται στο πάνελ (γ) θα αποτελείται φυσικά από μία κορυφή στη συχνότητα  $\omega=1$ .



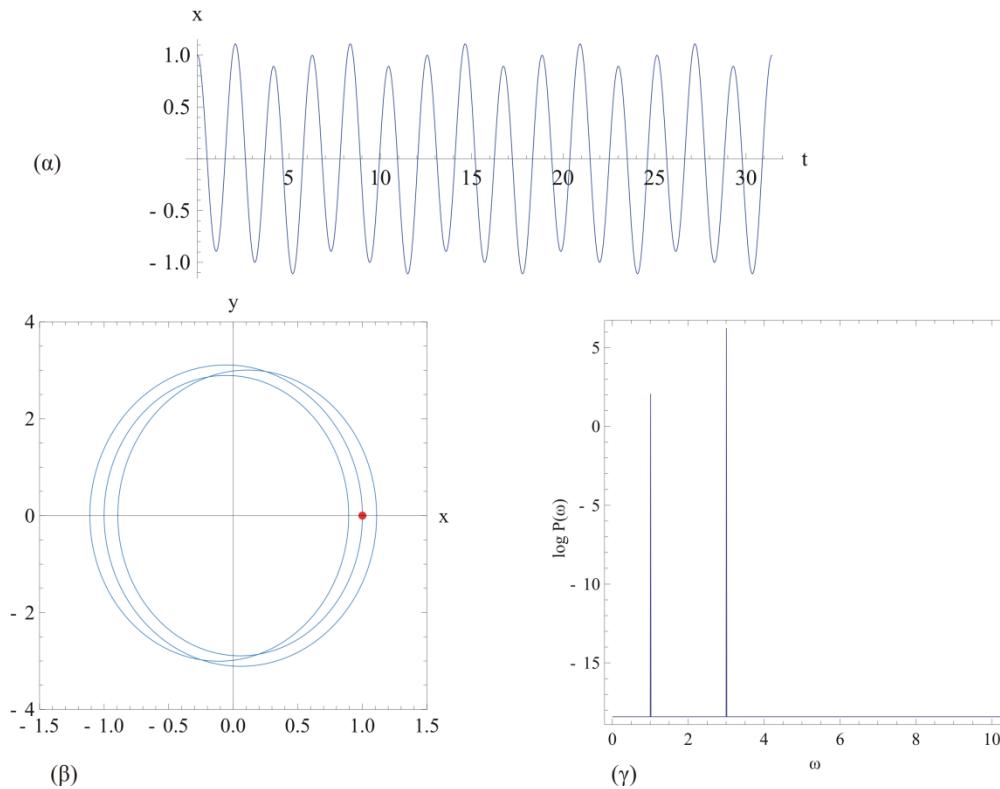
Σχήμα 7-8. Αρμονική ταλάντωση για  $\omega=1$ ,  $\omega_0=2$ ,  $F_0=1/2$ ,  $x_0=0$  και  $y_0=1/6$  α)  $x=x(t)$  β) φασική καμπύλη και το σημείο (κόκκινο) της τομής Poïncaré γ) Το φάσμα ισχύος.

**Σημείωση.** Το φάσμα ισχύος της αρμονικής ταλάντωσης υπολογίστηκε αριθμητικά με τη χρήση DFT (δες §2.3) με δειγματοληψία 2048 σημείων σε ένα τμήμα της τροχιάς 100 περιόδων. Επίσης, κανονικοποιούμε τον οριζόντιο άξονα σε μονάδες κυκλικής συχνότητας  $\omega=2\pi f$ . Η ίδια μέθοδος θα χρησιμοποιείται και στα παρακάτω παραδείγματα.

**ii) Υπερ-αρμονικές ταλαντώσεις (ultraharmonic).** Θεωρούμε την περίπτωση όπου  $\omega_0=n\omega$ ,  $n=2,3,\dots$ , δηλαδή η συχνότητα του αρμονικού ταλαντωτή είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της συχνότητας της εξωτερικής διέγερσης. Η λύση (7.7) θα έχει τη μορφή

$$x(t) = D \cos(n\omega t - \theta_0) + \frac{F_0}{(n^2 - 1)\omega^2} \sin \omega t,$$

και φυσικά είναι περιοδική με περίοδο  $T=2\pi/\omega$ . Βέβαια εδώ, όπως και στις παρακάτω περιπτώσεις, επιλέγουμε τυχαίες αρχικές συνθήκες ώστε  $D \neq 0$  (γενική περίπτωση). Η ακολουθία Poïncaré θα αποτελείται από ένα σημείο, ενώ το φάσμα ισχύος θα περιέχει δύο κορυφές μία στη συχνότητα  $\omega$  και μία στην συχνότητα  $n\omega$ .

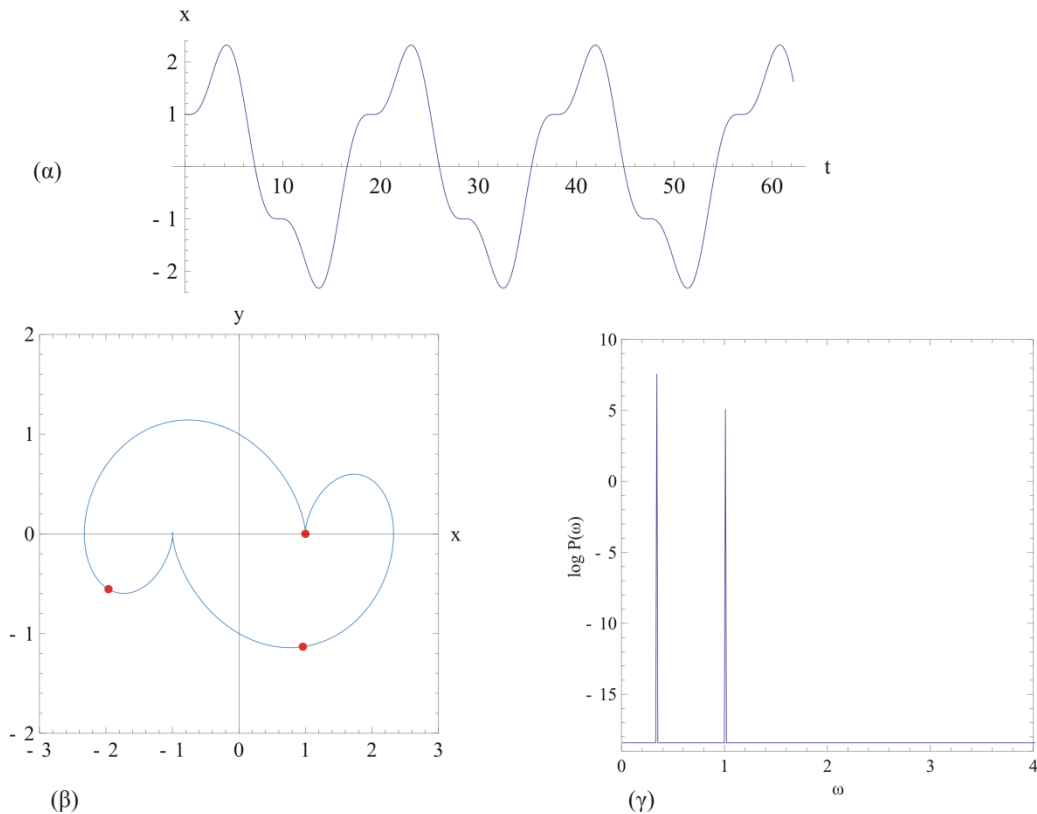


Σχήμα 7-9. Υπερ-αρμονική ταλάντωση για  $\omega=1$ ,  $\omega_0=3$ ,  $F_0=1$ ,  $x_0=1$  και  $y_0=0$  α)  $x=x(t)$  β) φασική καμπύλη και το σημείο (κόκκινο) της τομής Poincaré γ) Το φάσμα ισχύος.

**iii) Υπο-αρμονικές ταλαντώσεις (subharmonic).** Θεωρούμε την περίπτωση όπου  $\omega_0=\omega/n$ ,  $n=2,3,\dots$ , δηλαδή η συχνότητα του αρμονικού ταλαντωτή είναι ακέραιο υποπολλαπλάσιο της συχνότητας της εξωτερικής διέγερσης. Η λύση (7.7) θα έχει τη μορφή

$$x(t) = D \cos\left(\frac{\omega}{n}t - \theta_0\right) + \frac{F_0}{(1/n^2 - 1)\omega^2} \sin \omega t .$$

Η παραπάνω λύση είναι περιοδική με περίοδο  $T=2\pi n/\omega$ . Άρα σε μια περίοδο αντιστοιχούν  $n$  σημεία στην ακολουθία Poincaré. Το φάσμα ισχύος θα περιέχει δύο κορυφές μία στη συχνότητα  $\omega$  και μία στην  $\omega/n$ .



Σχήμα 7-10. Υπο-αρμονική ταλάντωση για  $\omega=1$ ,  $\omega_0=1/3$ ,  $F_0=1/2$ ,  $x_0=1$  και  $y_0=0$  α)  $x=x(t)$  β) φασική καμπύλη και τα (κόκκινα) σημεία της τομής Poincaré γ) Το φάσμα ισχύος. Υπολογίστηκε σε δείγμα 99 περιόδων, το οποίο είναι κοινό πολλαπλάσιο των δύο περιόδων της ταλάντωσης και έτσι αποφεύγουμε το φαινόμενο leakage.

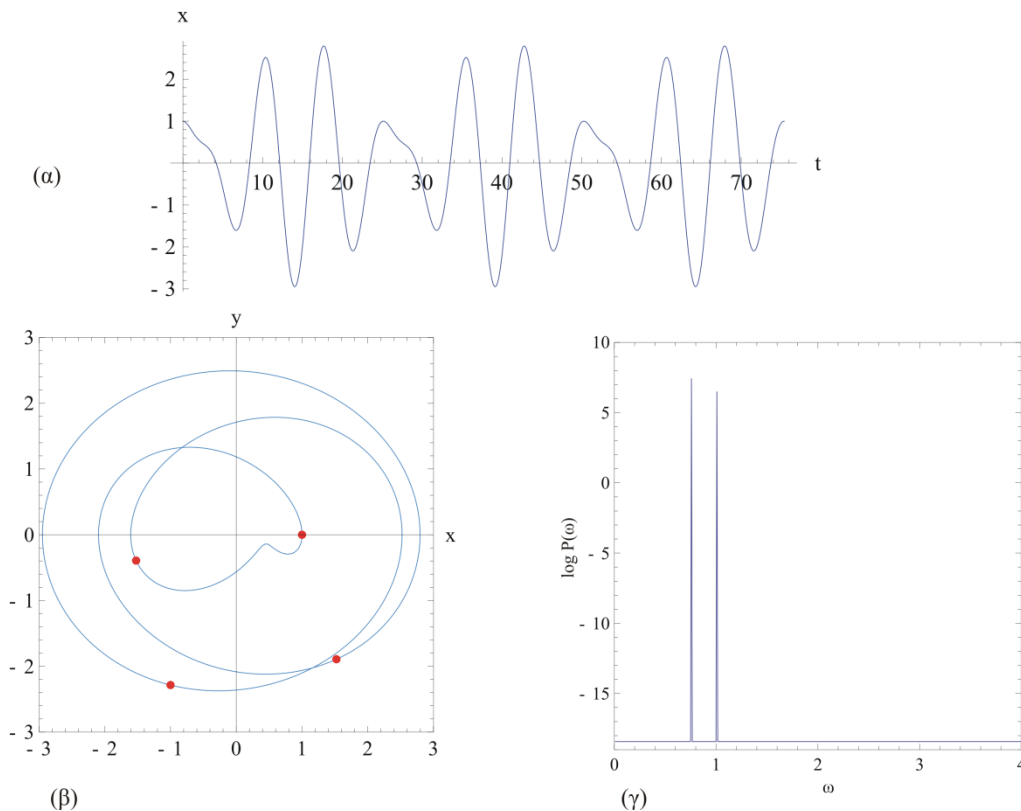
iv) Υπο-αρμονικές & υπερ-αρμονικές ταλαντώσεις (ultrasubharmonic). Θεωρούμε την περίπτωση όπου

$$\omega_0 = \frac{m}{n} \omega, \quad n, m \text{ πρώτοι μεταξύ τους}$$

Η λύση (7.7) θα έχει τη μορφή

$$x(t) = D \cos\left(\frac{m}{n} \omega t - \theta_0\right) + \frac{F_0}{(m^2/n^2 - 1)\omega^2} \sin \omega t.$$

Η παραπάνω λύση είναι περιοδική με περίοδο  $T=2\pi n/\omega$ . Άρα σε μια περίοδο αντιστοιχούν  $n$  σημεία στην ακολουθία Poincaré. Το φάσμα ισχύος θα περιέχει δύο κορυφές, μία στη συχνότητα  $\omega$  και μία στην  $m\omega/n$ .



Σχήμα 7-11. Υπερ-υπο-αρμονική ταλάντωση για  $\omega=1$ ,  $\omega_0=3/4$ ,  $F_0=1/2$ ,  $x_0=1$  και  $y_0=0$  α)  $x=x(t)$  β) φασική καμπύλη και τα τέσσερα σημεία (κόκκινα) της τομής Poincaré που αντιπροσωπεύουν την ταλάντωση γ) Το φάσμα ισχύος.

**Σημείωση.** Πολλές φορές αναφερόμαστε σε μια περιοδική τροχιά με την διατύπωση «**τροχιά περιόδου  $k$** », όπου  $k$  ο αριθμός των σημείων της τομής Poincaré που την χαρακτηρίζουν. Προφανώς μια τέτοια τροχιά έχει περίοδο  $T=2\pi k/\omega$ , όπου  $\omega$  η κυκλική συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης.

**ν) Ημιπεριοδικές ταλαντώσεις.** Ήδη ορίσαμε αυτήν την μη-περιοδική ταλάντωση στην §7.1.1 όταν έχουμε άρρητο λόγο μεταξύ των συχνοτήτων της αρμονικής ταλάντωσης και της εξωτερικής διέγερσης. Η ακολουθία Poincaré, η οποία δίνεται αναλυτικά από τις σχέσεις (7.12), θα αποτελείται από άπειρα σημεία. Ποτέ ένα σημείο δεν μπορεί να συμπίπτει με κάποιο άλλο σημείο της ακολουθίας διότι στην περίπτωση αυτή θα είχαμε επαναλαμβανόμενα σημεία και άρα περιοδική κίνηση. Επίσης αφού έχουμε περατωμένες ταλαντώσεις τα σημεία της ακολουθίας θα πρέπει να ανήκουν σε ένα περατωμένο τόπο του επιπέδου  $x$ - $y$ . Συγκεκριμένα από την (7.12) προκύπτει ότι τα σημεία ικανοποιούν τη σχέση

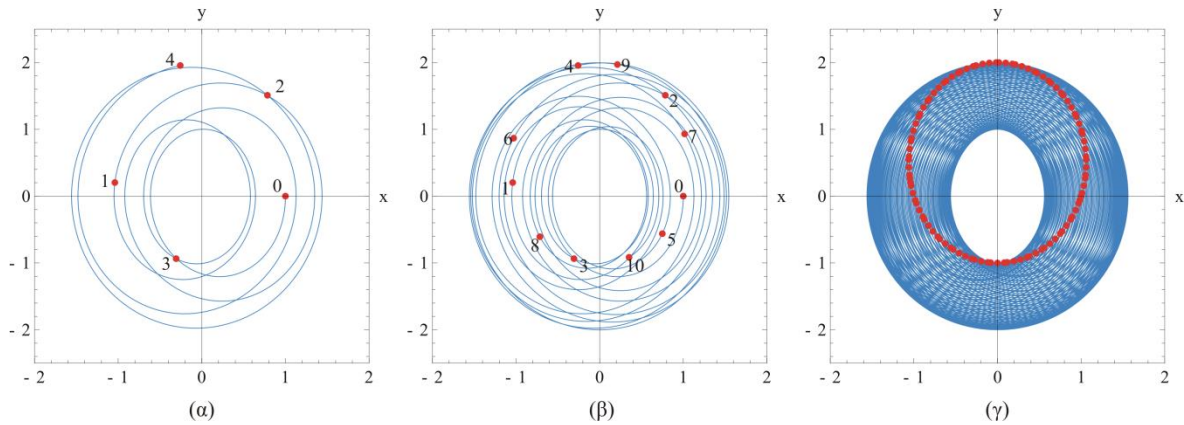
$$\frac{x_k^2}{D^2} + \frac{(y_k - \tilde{y}_0)^2}{(D\omega_0)^2} = 1 \quad (7.14)$$

όπου  $\tilde{y}_0 = \frac{\omega F_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$ , δηλαδή θα βρίσκονται πάνω σε μία καμπύλη και συγκεκριμένα σε μια έλλειψη. Στο

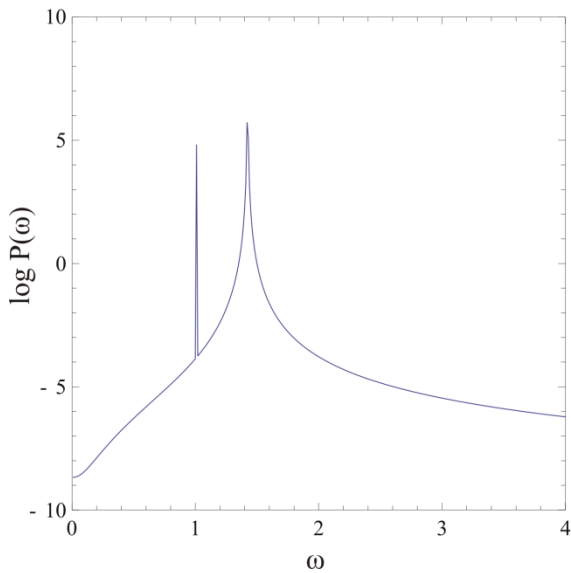
Σχήμα 7-12 παρουσιάζεται η φασική καμπύλη καθώς και τα σημεία της απεικόνισης Poincaré για διαφορετικά χρονικά διαστήματα  $[0, t_{\max}]$ . Καθώς αυξάνεται ο χρόνος η φασική καμπύλη γεμίζει μια περιοχή του επιπέδου  $x$ - $y$ . Τα σημεία της απεικόνισης Poincaré ανήκουν πάνω στην έλλειψη (7.14), την οποία την γεμίζουν πυκνά καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

Το φάσμα ισχύος θα πρέπει να αποτελείται και πάλι μόνο από δύο συχνότητες, την  $\omega$  και την  $\omega_0$ . Όμως ο υπολογισμός του DFT μπορεί να γίνει σε ένα πολλαπλάσιο της περιόδου της εξωτερικής διέγερσης αλλά όχι ταυτόχρονα και της αρμονικής περιόδου. Έτσι γύρω από την  $\omega_0$  το φάσμα θα παρουσιάζεται αλλοιωμένο με ένα υπόβαθρο, το οποίο επεκτείνεται σε όλο το διάστημα συχνοτήτων (δες Σχήμα 7-13)



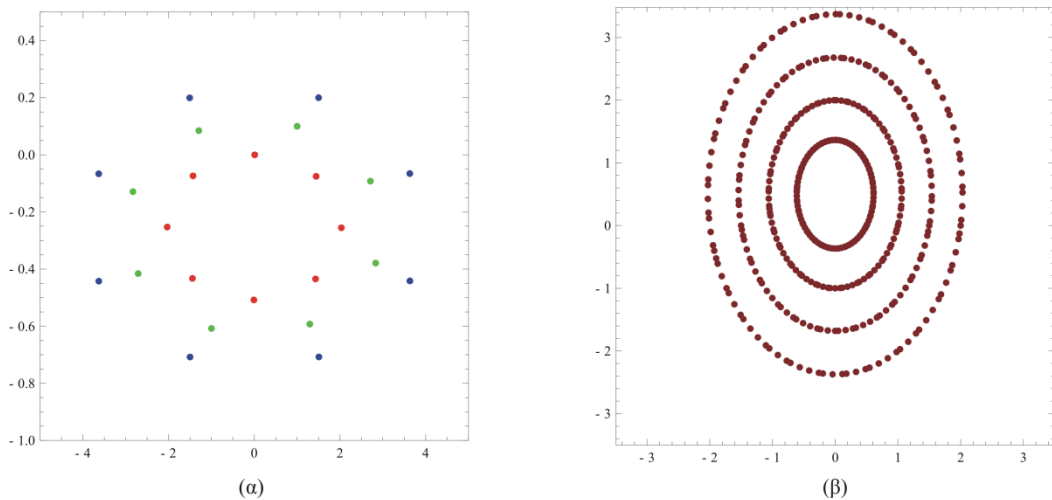


Σχήμα 7-12. Φασική καμπύλη και τα σημεία ακολουθίας Poincaré για  $\omega=1$ ,  $\omega_0=\sqrt{2}$ ,  $F_0=1/2$ ,  $x_0=1$ ,  $y_0=0$ . α) για  $0 \leq t \leq 4T$  β)  $0 \leq t \leq 10T$  γ)  $0 \leq t \leq 100T$ . Τα σημεία της ακολουθίας Poincaré αυξάνουν με το χρόνο και γεμίζουν πυκνά μια έλλειψη.



Σχήμα 7-13. Φάσμα ισχύος της ημιπεριοδικής γραμμικής ταλάντωσης που παρουσιάζεται στο Σχήμα 7-12.

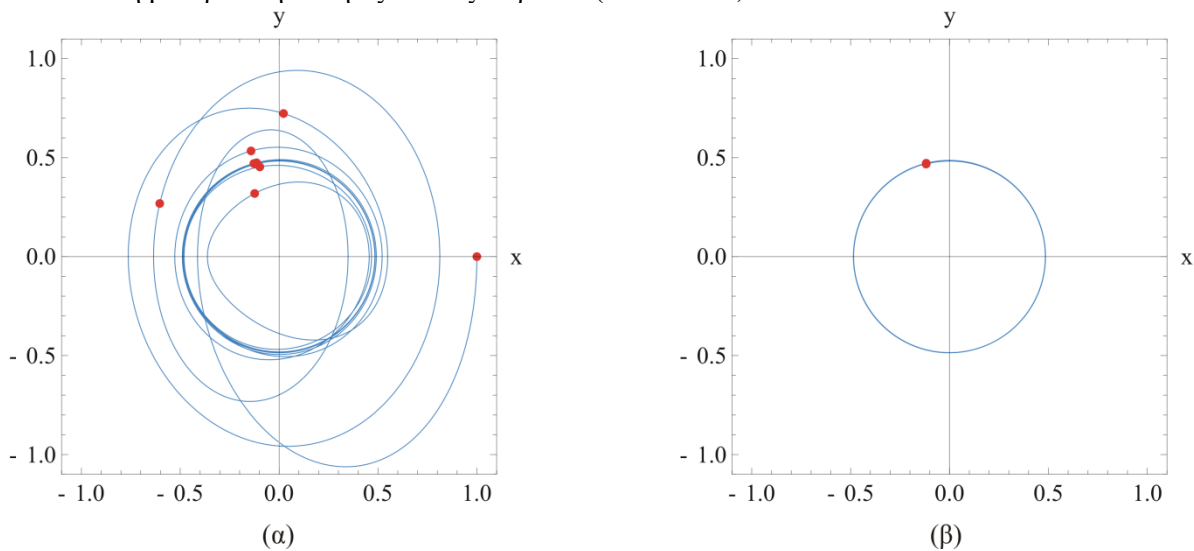
Εκτός από την αρμονική λύση, η οποία προκύπτει για συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες, όλες οι υπόλοιπες ταλαντώσεις είναι ποιοτικά του ίδιου τύπου ανεξάρτητα των αρχικών συνθηκών. Ο τύπος τους εξαρτάται αποκλειστικά από το λόγο  $\omega/\omega_0$ . Έτσι αν παρουσιάσουμε μια τομή Poincaré που να συμπεριλαμβάνει τροχιές διαφορετικών αρχικών συνθηκών, τότε οι ακολουθίες των σημείων θα είναι είτε πεπερασμένες, στην περίπτωση ρητού λόγου  $\omega/\omega_0$  (περιοδικές λύσεις), ή θα γεμίζουν πυκνά ελλείψεις, όταν ο λόγος  $\omega/\omega_0$  είναι άρρητος (ημιπεριοδικές λύσεις). Ένα παράδειγμα παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 7-14 Τομές Poincaré του γραμμικού συστήματος για διάφορες αρχικές συνθήκες α)  $\omega/\omega_0=1/8$ , περιοδικές τροχιές β)  $\omega/\omega_0=1/\sqrt{2}$ , ημιπεριοδικές τροχιές.

### 7.3.2 Το γραμμικό σύστημα με απόσβεση

Στην περίπτωση που έχουμε απόσβεση ( $b \neq 0$ ), η λύση δίνεται, όπως αναφέραμε στην §7.1.2, από έναν μεταβατικό όρο και από τον περιοδικό όρο της σχέσης (7.8). Ο τελευταίος όρος αποτελεί έναν οριακό κύκλο στον οποίο τείνουν όλες οι λύσεις. Ο οριακός κύκλος έχει περίοδο  $T=2\pi/\omega$  και θα αντιπροσωπεύεται από ένα σημείο στην τομή Poincaré. Για μια οποιαδήποτε λύση, ο μεταβατικός όρος θα δώσει μια σειρά σημείων στην ακολουθία Poincaré τα οποία θα τείνουν προς ένα σημείο, το οποίο αντιπροσωπεύει τον οριακό κύκλο. Κατά τους υπολογισμούς, αν θέλουμε να περιγράψουμε μόνο την οριακή κατάσταση, δεν λαμβάνουμε υπόψη μας το μεταβατικό στάδιο και θεωρούμε την λύση και την ακολουθία Poincaré για  $t > t_{tr}$ , όπου  $t_{tr}$  ο χρόνος κατά τον οποίο η μεταβατική λύση εξασθενίζει αρκετά (transit time).



Σχήμα 7-15. Φασική καμπύλη και ακολουθία Poincaré για ταλαντώσεις στο σύστημα με απόσβεση ( $b=1/4$ ) α) για όλο το χρονικό διάστημα  $0 \leq t \leq t_{max}$  β) μετά το μεταβατικό στάδιο,  $t_{tr} \leq t \leq t_{max}$ . Είναι  $t_{max}=20\pi$ ,  $t_{tr}=16\pi$ .

## Ασκήσεις

**Άσκηση 7.3.1.** Βρείτε αναλυτικά την ακολουθία Poincaré για τον ταλαντωτή

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 10\cos t$$

και για αρχικές συνθήκες  $x(0)=x_0$ ,  $y(0)=y_0$ . Ποιο είναι το οριακό σημείο της απεικόνισης;

**Άσκηση 7.3.2.** Βρείτε τα σημεία της ακολουθίας Poincaré για τον ταλαντωτή

$$\ddot{x} + ax = \frac{3}{4} \sin t$$

με  $a=1/4$ ,  $a=4$ ,  $a=3/4$  και  $a=\sqrt{2}$ . Χαρακτηρίστε την ταλάντωση σε κάθε περίπτωση.

## 7.4 Μη γραμμικές ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση

Έστω ένας ταλαντωτής με δυναμικό  $U=U(x)$  ο οποίος δέχεται μια εξωτερική περιοδική διέγερση. Η εξίσωση των ταλαντώσεων θα είναι

$$\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} + F_0 \sin \omega t . \quad (7.15)$$

Ένα τυπικό μη γραμμικό δυναμικό που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω είναι το

$$U = -\frac{\alpha}{2} x^2 + \frac{\beta}{4} x^4$$

και η (7.15) γράφεται

$$\ddot{x} = \alpha x - \beta x^3 + F_0 \sin \omega t \quad (7.16)$$

ή, ως σύστημα,

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \alpha x - \beta x^3 + F_0 \sin \omega t . \quad (7.17)$$

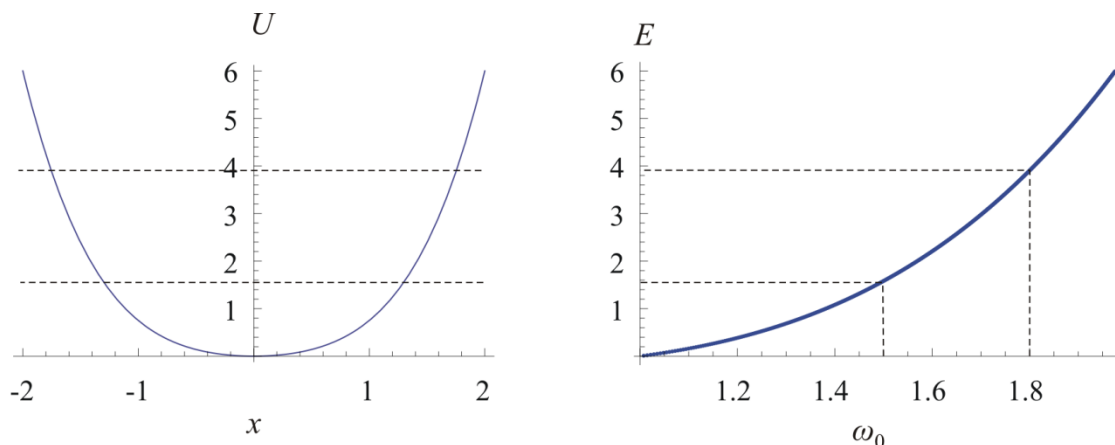
Αν χρησιμοποιήσουμε την αλλαγή κλίμακας  $\tau = \omega t$  και  $\chi = \delta x$ , όπου  $\delta^2 = \beta/\omega^2$ , η (7.16) γράφεται

$$\chi'' = a\chi - \chi^3 + f_0 \sin \tau ,$$

όπου ο τόνος εκφράζει παράγωγο ως προς  $\tau$ . Επίσης είναι  $a = \alpha/\omega^2$ ,  $f_0 = F_0 \sqrt{\beta/\omega^2}$ , και, συνεπώς, μόνο δύο παράμετροι αρκούν για τη μελέτη της δυναμικής. Όμως, για τα παρακάτω είναι εύχρηστο να κάνουμε χρήση της γωνιακής συχνότητας  $\omega$  ως παράμετρο.

### 7.4.1 Το αδιατάρακτο σύστημα

Θεωρούμε το σύστημα (7.17) με  $F_0=0$ ,  $\alpha=-1$  και  $\beta=1$ . Το δυναμικό για  $\alpha < 0$  παρουσιάζει ένα ελάχιστο (δες Σχήμα 7-16) και συνεπώς έχουμε περατωμένη κίνηση, δηλαδή ταλαντώσεις για κάθε θετική τιμή της ενέργειας. Η περίοδος της ταλάντωσης  $T$ , και συνεπώς η γωνιακή της συχνότητα  $\omega_0 = 2\pi/T$ , υπολογίζεται όπως περιγράψαμε στην §3.3.3 και παρουσιάζεται στο ίδιο σχήμα. Σημειώνονται ιδιαίτερα οι θέσεις των ταλαντώσεων με γωνιακή συχνότητα  $\omega_0 = 3/2$  και  $9/5$ .

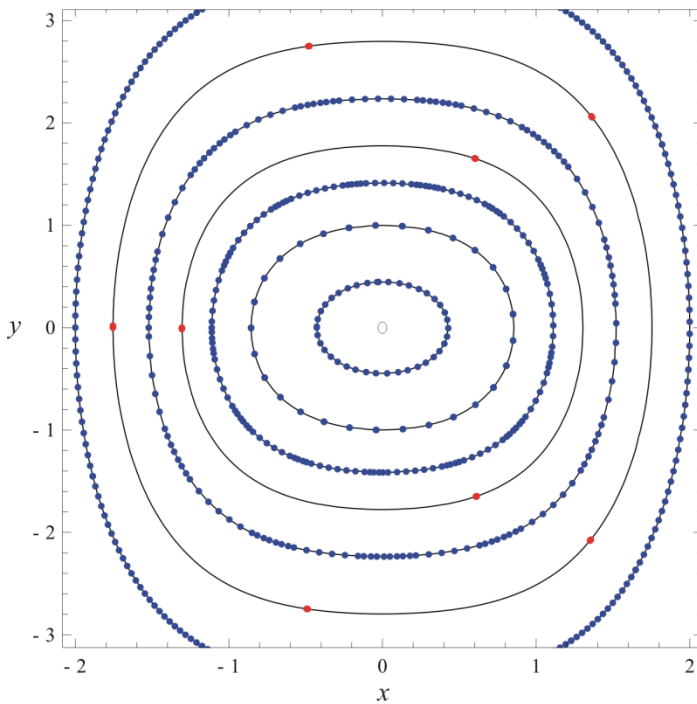


Σχήμα 7-16. (αριστερά) Το δυναμικό για το σύστημα (7.16) με  $\alpha=-1$  και (δεξιά) η γωνιακή συχνότητα των ταλαντώσεων του συστήματος  $\omega_0$  (οριζόντιος άξονας) ως συνάρτηση της ενέργειας των ταλαντώσεων. Οι διακεκομμένες γραμμές δηλώνουν την θέση όπου έχουμε  $\omega_0=3/2$  και  $\omega_0=9/5$ .

Το φασικό διάγραμμα προκύπτει από τις ισο-ενεργειακές καμπύλες του συστήματος, οι οποίες είναι κλειστές καμπύλες υποδηλώνοντας την περιοδικότητα των κινήσεων. Μπορούμε από τις λύσεις των ταλαντώσεων να σχηματίσουμε μια διακριτή ακολουθία σημείων Poincaré  $\Pi_\omega$  με μια χρονική περίοδο  $T=2\pi/\omega$ , όπου το  $\omega$  το επιλέγουμε αυθαίρετα. Έστω για παράδειγμα η τιμή  $\omega=9/2$ . Τα σημεία των ακολουθιών Poincaré, που προκύπτουν για την κάθε φασική τροχιά, παρουσιάζονται στο Σχήμα 7-17. Φυσικά τα σημεία βρίσκονται πάνω στην φασική καμπύλη της εκάστοτε τροχιάς, η οποία αντιστοιχεί σε κάποια ταλάντωση συχνότητας  $\omega_0$ . Ο λόγος  $\omega_0/\omega$  είναι άρρητος εν γένει, και συνεπώς, η ακολουθία Poincaré θα αποτελείται από άπειρα σημεία τα οποία, καθώς εξελίσσεται η ταλάντωση, θα καλύψουν πυκνά την φασική καμπύλη. Υπάρχουν όμως και τροχιές στις οποίες ο λόγος  $\omega_0/\omega$  είναι ρητός. Για παράδειγμα στις τιμές ενέργειας  $E=1.58$  και  $3.91$  αντιστοιχούν οι ταλαντώσεις με γωνιακή συχνότητα  $\omega=3/2$  και  $9/5$  αντίστοιχα και άρα

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{3/2}{9/2} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{9/5}{9/2} = \frac{2}{5} .$$

Σε αντιστοιχία με τις γραμμικές ταλαντώσεις, που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο, έχουμε για την πρώτη περίπτωση ( $\omega_0/\omega=1/3$ ) μια υπο-αρμονική ταλάντωση η οποία θα αντιπροσωπεύεται από μια ακολουθία Poincaré τριών σημείων. Για την δεύτερη περίπτωση ( $\omega_0/\omega=2/5$ ) έχουμε μια υπερ-υπο-αρμονική ταλάντωση που θα αντιπροσωπεύεται από μια ακολουθία Poincaré πέντε σημείων. Οι δύο αυτές ακολουθίες παρουσιάζονται στο Σχήμα 7-17 με κόκκινα σημεία.



Σχήμα 7-17. Το φασικό διάγραμμα και οι ακολουθίες σημείων Poincaré με περίοδο  $T=4\pi/9$ . Οι ακολουθίες με τα κόκκινα σημεία αντιστοιχούν σε υπο-αρμονικές ταλαντώσεις ως προς την ιδεατή εξωτερική διαταραχή ( $F_0=0$ ) συχνότητας  $\omega=9/2$ .

Επειδή η γωνιακή συχνότητα  $\omega_0$  είναι μια συνεχής συνάρτηση της ενέργειας, σε οποιαδήποτε γειτονιά του χώρου φάσεων πάντα μπορούμε να επιλέξουμε τροχιά με τέτοια ενέργεια ώστε ο λόγος  $\omega_0/\omega$  να είναι ρητός. Βέβαια ο ρητός αυτός εν γένει θα έχει μεγάλο παρανομαστή και πρακτικά η ακολουθία Poincaré θα αποτελείται από πολλά σημεία. Μια τέτοια περίπτωση είναι η φασική καμπύλη για  $E=0.5$ , η οποία φαίνεται να αντιπροσωπεύεται από 29 σημεία (Σχήμα 7-17, 3<sup>η</sup> καμπύλη από το κέντρο).

#### 7.4.2 Το διαταραγμένο σύστημα

Θεωρούμε και πάλι το σύστημα (7.17) με  $\alpha=-1$  και  $\beta=1$ , αλλά τώρα με  $F_0 \neq 0$ . Η τομή Poincaré του διαταραγμένου συστήματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 7-18. Σε σύγκριση με το αδιατάρακτο σύστημα (Σχήμα 7-17) έχουμε τα εξής

i) Το σημείο ισορροπίας  $(0,0)$  στο αδιατάρακτο σύστημα αντιπροσωπεύεται, ανεξάρτητα της επιλογής του  $\omega$ , με ένα σημείο στην ακολουθία Poincaré,  $\Pi_0 = \{(0,0)\}$ . Κάτω από την επίδραση μιας σχετικά μικρής διαταραχής, με  $0 < F_0 < \epsilon$  ( $\epsilon \ll 1$ ) και για κάποια γωνιακή συχνότητα  $\omega$ , αποδεικνύεται ότι, εν γένει, και στο διαταραγμένο σύστημα η ακολουθία  $\Pi_0$  συνεχίζει να υπάρχει ως ακολουθία  $\Pi'_0 = \{(x_0, y_0)\}$ , με το σημείο της στη γειτονιά του  $(0,0)$ . Τώρα όμως το  $(x_0, y_0)$  αντιπροσωπεύει μια περιοδική τροχιά περιόδου 1, δηλαδή με περίοδο  $T=2\pi/\omega$  (κεντρικό σημείο στο Σχήμα 7-18α) (δες [συνέχιση σταθερών σημείων](#)).

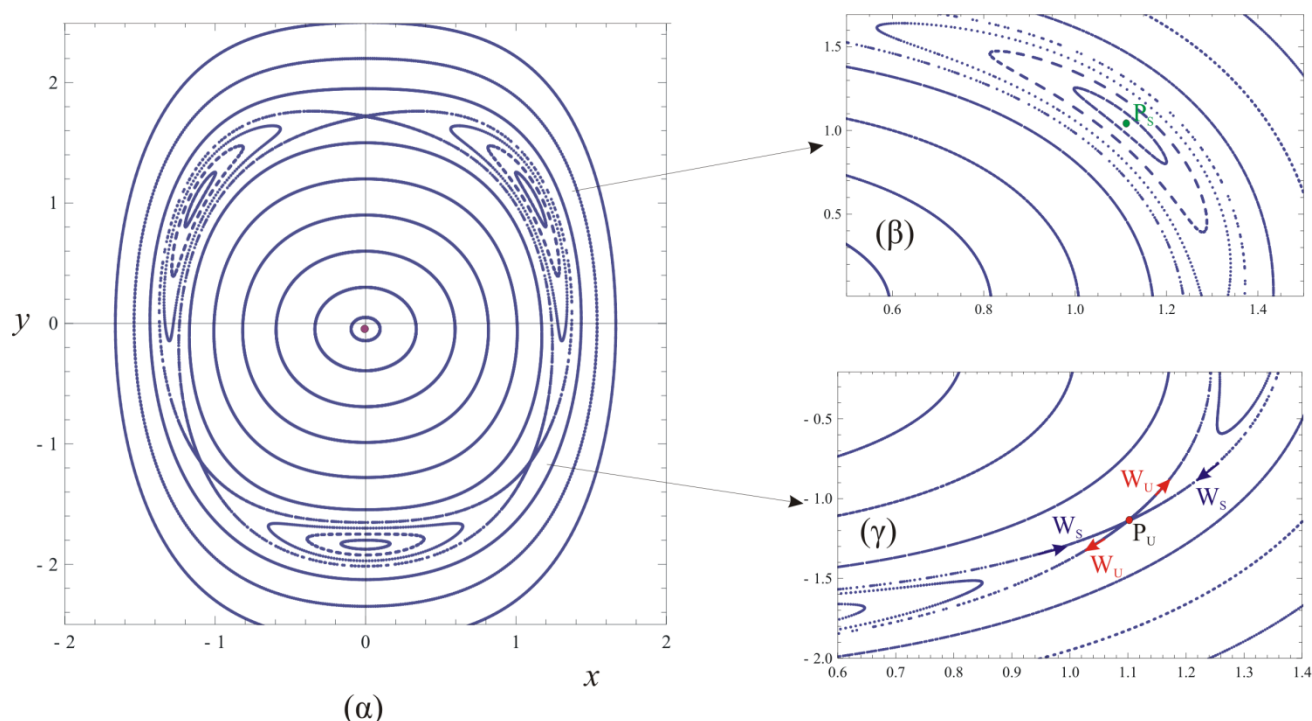
ii) Οι τροχιές οι οποίες στο αδιατάρακτο σύστημα αντιστοιχούσαν σε περιοδικές τροχιές με συχνότητα  $\omega_0$ , αλλά δεν είναι κοντά σε ρητό λόγο (με μικρό παρανομαστή) με την συχνότητα της διέγερσης  $\omega$ , στο διαταραγμένο σύστημα θα αντιπροσωπεύονται με ακολουθίες Poincaré άπειρων σημείων (ημιπεριοδικές ταλαντώσεις), οι οποίες, καθώς  $t \rightarrow \infty$ , γεμίζουν πυκνά καμπύλες, οι οποίες ονομάζονται *αναλλοίωτες καμπύλες*. Ονομάζονται αναλλοίωτες διότι, αν ξεκινήσουμε με αρχικές συνθήκες πάνω σε μια τέτοια καμπύλη, όλα τα σημεία της ακολουθίας Poincaré θα ανήκουν πάνω σε αυτήν την καμπύλη. Για μικρές διαταραχές, οι αναλλοίωτες καμπύλες γεωμετρικά βρίσκονται κοντά στις αντίστοιχες φασικές καμπύλες του αδιατάρακτου συστήματος.

iii) Για αρχικές συνθήκες στις οποίες  $\omega_0/\omega = p/q$ , ( $p, q$  ακέραιοι), το αδιατάρακτο σύστημα αντιπροσωπεύεται από μια ακολουθία Poincaré με  $q$  σημεία, τα οποία βρίσκονται πάνω στην αντίστοιχη φασική καμπύλη. Φυσικά, από όποιο σημείο αυτής της φασικής καμπύλης και αν ξεκινήσουμε θα πάρουμε και πάλι μια

ακολουθία  $q$  σημείων. Άρα, στην τομή Poincaré, για  $F_0=0$ , έχουμε άπειρες ακολουθίες  $q$  σημείων, οι οποίες ανήκουν στην ίδια φασική καμπύλη του αδιατάρακτου συστήματος.

Υπό την επίδραση της διαταραχής,  $F_0 \neq 0$ , αποδεικνύεται ότι, από όλες τις άπειρες  $q$ -περιοδικές λύσεις επιβιώνει μόνο ένας ζυγός αριθμός, συνήθως μόνο δύο, που η κάθε μια αντιπροσωπεύεται από  $q$ -σημεία. Στο Σχήμα 7-1 περιλαμβάνεται η περίπτωση μιας φασικής καμπύλης με  $\omega_0/\omega=1/3$  ( $q=3$ ). Η μια περιοδική τροχιά που επιβιώνει της διαταραχής αντιπροσωπεύεται με τρία σημεία, τα οποία περικλείονται από σχεδόν ελλειπτικές αναλλοίωτες καμπύλες που ονομάζονται **νησίδες** (islands). Η τοπολογία του επιπέδου Poincaré στη γειτονιά αυτών των σημείων, μοιάζει με **κέντρο** (πάνελ β) και λεμέ ότι έχουμε μια **ευσταθή περιοδική τροχιά** πολλαπλότητας 3. Η δεύτερη περιοδική τροχιά αντιπροσωπεύεται από τρία σημεία στο επίπεδο Poincaré, γύρω από τα οποία η τοπολογία των αναλλοίωτων καμπύλων μοιάζει με αυτήν του **σάγματος**. Μάλιστα αποδεικνύεται η ύπαρξη στην επιφάνεια Poincaré ευσταθών ( $W^s$ ) και ασταθών ( $W^u$ ) ασυμπτωτικών πολλαπλοτήτων, οι οποίες αποτελούνται από σημεία που τείνουν ασυμπτωτικά προς τα σημεία που αντιπροσωπεύουν την περιοδική τροχιά ή απομακρύνονται από αυτά, αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μια **ασταθή περιοδική τροχιά** πολλαπλότητας  $q$ .

**Σημείωση.** Η έννοια της ευστάθειας ορίζεται με σκεπτικό αντίστοιχο με αυτό που χαρακτηρίσαμε τα σημεία ισορροπίας στο κεφάλαιο 3.

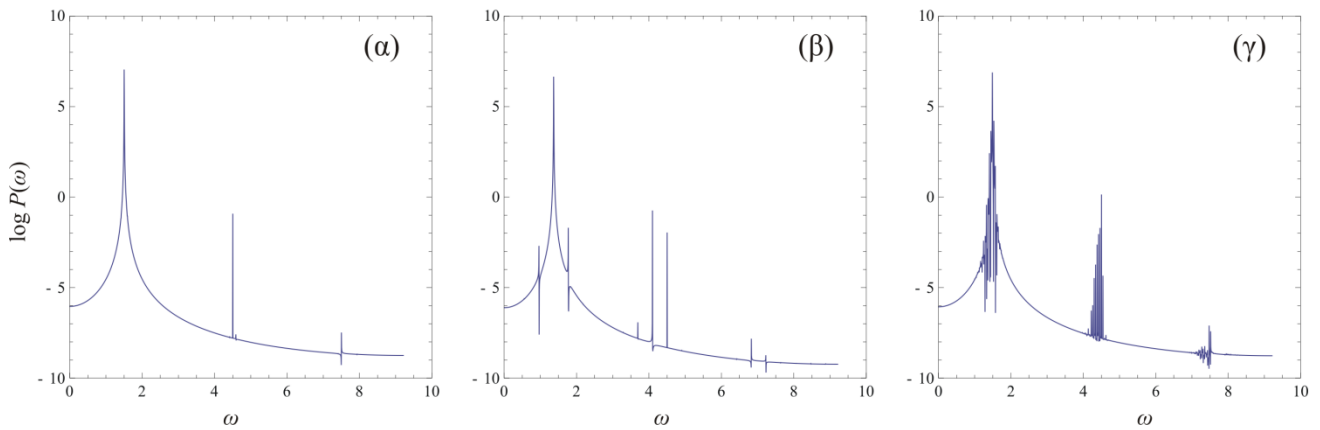


Σχήμα 7-18. Το επίπεδο Poincaré, όπως αυτό στο Σχήμα 7-17, αλλά για το διαταραγμένο σύστημα με  $f=0.2$ . Τα πάνελ (β) και (γ) παρουσιάζουν μια μεγέθυνση της περιοχής γύρω από το ένα από τα τρία σημεία που αντιπροσωπεύουν την ευσταθή ( $P_s$ ) και την ασταθή περιοδική τροχιά ( $P_u$ ), αντίστοιχα. Επίσης παρουσιάζονται οι ευσταθείς ( $W^s$ ) και οι ασταθείς ( $W^u$ ) πολλαπλότητες.

Στο Σχήμα 7-19 παρουσιάζονται τα φάσματα ισχύος κάποιων τροχιών. Στο πάνελ (α) παρουσιάζεται το φάσμα της ευσταθούς περιοδικής τροχιάς (φυσικά τώρα οι αρχικές συνθήκες δίνονται με περιορισμένη ακρίβεια). Παρατηρούμε την παρουσία σημαντικών κορυφών στις συχνότητες  $\omega_0=3/2$  και  $\omega=9/2$ . Γενικά το φάσμα μιας περιοδικής τροχιάς στο μη γραμμικό σύστημα μπορεί να έχει κορυφές στα πολλαπλάσια της  $\omega_0$  (δες §2.3).

Στο πάνελ (β) έχουμε το φάσμα μιας ημιπεριοδικής τροχιάς. Παρατηρούμε τώρα την ύπαρξη και άλλων κορυφών σε θέσεις που δεν αποτελούν πολλαπλάσια της θέσης μιας βασικής κορυφής. Γενικά το φάσμα μιας ημιπεριοδικής τροχιάς αποτελείται από έναν μεγάλο αριθμό φασματικών κορυφών. Θεωρητικά μπορεί να δείχτει ότι το φάσμα μιας ημιπεριοδικής τροχιάς αποτελείται από άπειρες αλλά διακριτές κορυφές. Βέβαια στην πράξη λίγες από αυτές είναι σημαντικού πλάτους.

Στο πάνελ (γ) έχουμε το φάσμα μιας τροχιάς με αρχικές συνθήκες κοντά στην ασταθή περιοδική τροχιά. Μια τέτοια τροχιά πρακτικά εξελίσσεται κοντά στην ασταθή και ευσταθή πολλαπλότητα της περιοδικής τροχιάς. Παρατηρούμε πλέον την παρουσία πολλών φασματικών γραμμών γύρω από τις βασικές φασματικές γραμμές της ευσταθούς περιοδικής τροχιάς. Αποδεικνύεται ότι οι ασυμπτωτικές τροχιές έχουν συνεχή φάσματα. Σημειώνουμε ότι, η ομαλή συνέχεια των φασμάτων στις προηγούμενες περιπτώσεις έχει να κάνει με την υπολογιστική προσέγγιση. Τώρα όμως έχουμε την παρουσία πολλών σημαντικών κορυφών πολύ κοντά της μιας με την άλλη.

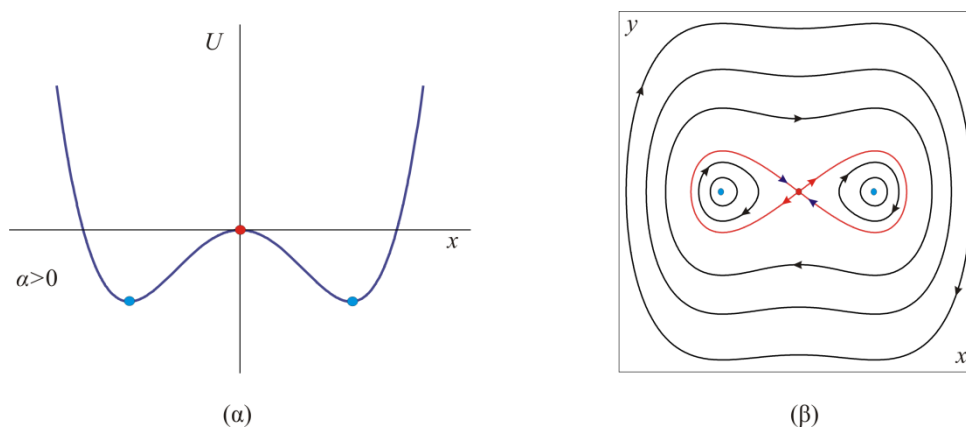


Σχήμα 7-19. Φάσματα ισχύος για (α) μια τροχιά πολύ κοντά στην ευσταθή περιοδική τροχιά (β) μια ημιπεριοδική τροχιά (γ) μια τροχιά πολύ κοντά στην ασταθή περιοδική τροχιά.

**Σχόλιο.** Το σύστημα (7.17) είναι ένα Χαμιλτονιανό σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας αλλά μη-αυτόνομο. Τα δυναμικά του χαρακτηριστικά είναι ποιοτικά ισοδύναμα με αυτά που παρουσιάζουν τα αυτόνομα Χαμιλτονιανά συστήματα δύο βαθμών ελευθερίας, τα οποία θα τα συζητήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Ένα ιδιαίτερο και νέο στοιχείο της δυναμικής σχετίζεται με την τοπολογία των ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων της επιφάνειας Poincaré. Στο Σχήμα 7-18 φαίνονται ότι οι πολλαπλότητες αυτές, οι οποίες αντιστοιχούν στα τρία σημεία  $P_U$  της ασταθούς περιοδικής τροχιάς ενώνονται ομαλά. Εν γένει όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει, και όπως θα περιγραφεί αναλυτικά στα κεφάλαια 8 και 10 έχουμε την δημιουργία χαοτικών τροχιών.

### 7.4.3 Το διατηρητικό σύστημα Duffing

Η δυναμική του συστήματος (7.17) αλλάζει ουσιαστικά αν θεωρήσουμε  $\alpha > 0$ . Το αυτόνομο σύστημα για  $\alpha = 0$  παρουσιάζει διακλάδωση διχάλας (δες §6.2.1) και για  $\alpha > 0$  έχουμε την παρουσία δύο ευσταθών σημείων ισορροπίας στις θέσεις  $x_0 = \pm \sqrt{\alpha}$  ενώ το  $x_0 = 0$  γίνεται ασταθές. Το δυναμικό και το αντίστοιχο φασικό διάγραμμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 7-20.



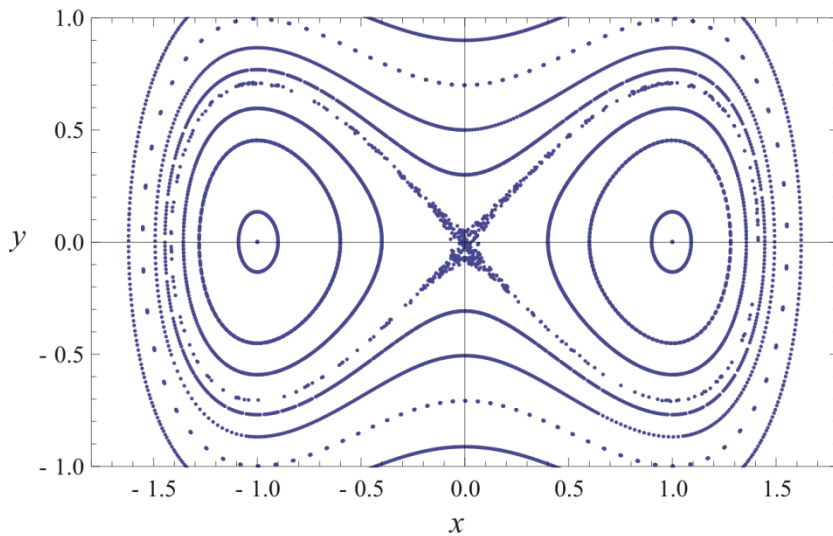
Σχήμα 7-20. α) το δυναμικό  $U = -x^2/2 + x^4/4$  και β) το αντίστοιχο φασικό διάγραμμα.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε το σύστημα ως προς το πλάτος της εξωτερικής διαταραχής. Κανονικοποιώντας τις κλίμακες μονάδων και θέτοντας  $a=1$ , έχουμε το σύστημα,

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x - x^3 + f_0 \sin t \tag{7.18}$$

Η απεικόνιση Poincaré θα ορίζεται πάντα με περίοδο  $T=2\pi$ . Για το αδιατάρακτο σύστημα ( $f_0=0$ ), τα σημεία των ακολουθιών Poincaré θα βρίσκονται πάνω στις αντίστοιχες φασικές καμπύλες και, είτε θα τις καλύπτουν πυκνά αν ο λόγος συχνοτήτων  $\omega_0/\omega$  είναι άρρητος ή, θα έχουμε πεπερασμένο αριθμό σημείων όταν ο λόγος είναι ρητός. Αν ξεκινήσουμε με αρχικές συνθήκες πάνω στην ευσταθή ή την ασταθή πολλαπλότητα του ασταθούς σημείου ισορροπίας, θα έχουμε μια ακολουθία σημείων Poincaré που θα συσσωρεύονται ασυμπτωτικά προς το  $(0,0)$ , κατά μήκος της ευσταθούς πολλαπλότητας για  $t \rightarrow \infty$  ή κατά μήκος της ασταθούς πολλαπλότητας για  $t \rightarrow -\infty$ .

Υπολογίζουμε την επιφάνεια Poincaré για το διαταραγμένο σύστημα και για ένα σύνολο αρχικών συνθηκών. Για  $f_0=0.001$ , έχουμε το Σχήμα 7-21.

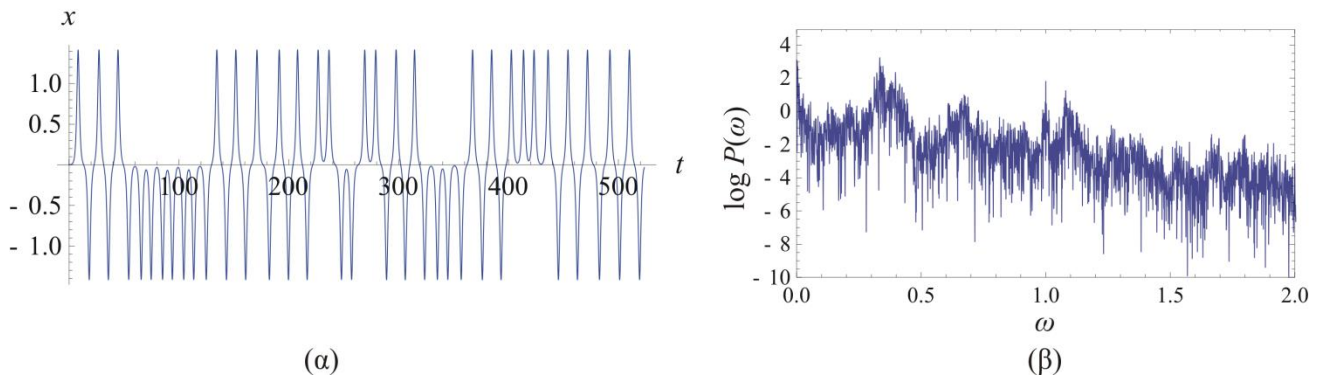


Σχήμα 7-21. Η επιφάνεια Poincaré του συστήματος (7.18) για πολύ μικρό πλάτος διαταραχής  $f_0=0.001$ .

Παρατηρούμε ότι η επιφάνεια Poincaré περιέχει σημεία που κατανέμονται σε καμπύλες πολύ κοντά με τις αντίστοιχες φασικές καμπύλες του αδιατάρακτου. Τα ευσταθή σημεία ισορροπίας γίνονται πλέον ευσταθείς περιοδικές τροχιές. Όμως μια σημαντική διαφοροποίηση είναι αυτή που παρουσιάζεται γύρω από το ασταθές σημείο ισορροπίας και γύρω από τις ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες. Τα σημεία μιας τροχιάς σε αυτήν την περιοχή δείχνουν να καταλαμβάνουν ένα δισδιάστατο υποσύνολο της επιφάνειας και μάλιστα η ροή με την οποία γεμίζουν αυτήν την περιοχή είναι αρκετά άτακτη. Το δισδιάστατο αυτό υποσύνολο είναι αρκετά πιο εμφανές γύρω από το αρχικά ασταθές σημείο ισορροπίας. Το σημείο αυτό επίσης έχει γίνει υπό την επίδραση της διαταραχής μια ασταθής περιοδική τροχιά, το περιοδικό της σημείο της οποίας βρίσκεται κάπου (!) μέσα στην άτακτη κατανομή των σημείων Poincaré γύρω από το  $(0,0)$ .

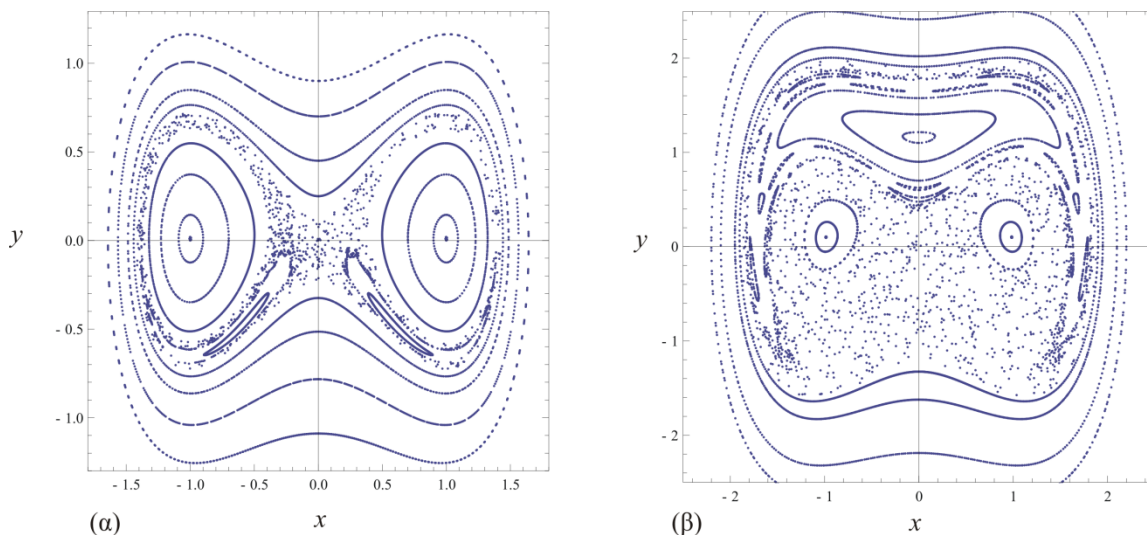
Η χρονική εξέλιξη της μεταβλητής  $x=x(t)$  για αρχικές συνθήκες κοντά στο  $(0,0)$  παρουσιάζεται στο Σχήμα 7-22(α). Το σχήμα δείχνει ότι η ταλάντωση γίνεται είτε γύρω από την αριστερή ευσταθή περιοδική τροχιά ( $x < 0$ ) ή γύρω από την δεξιά ( $x > 0$ ). Το πότε η τροχιά θα εξελιχθεί στην μια ή στην άλλη περιοχή φαίνεται να είναι αρκετά απρόβλεπτο γεγονός και θυμίζει τη ρίψη νομίσματος. Το φάσμα ισχύος της τροχιάς (Σχήμα 7-22 (β)) παρουσιάζει μια ανώμαλη συνεχή κατανομή φασματικών κορυφών που υποδεικνύει την ακανόνιστη εξέλιξη της. Μια τέτοια τροχιά ονομάζεται **χαοτική τροχιά**. Η δημιουργία της οφείλεται σε μια ιδιόμορφη τοπολογική εικόνα που σχηματίζουν οι ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες και η οποία θα περιγραφεί στα κεφάλαια 8 και 10. Φυσικά δεν είναι δυνατή η ύπαρξη τέτοιων τροχιών στο αυτόνομο σύστημα.





Σχήμα 7-22. (α) Χαοτική ταλάντωση για  $f=0.001$  με αρχικές συνθήκες  $(x_0, y_0) \approx (0, 0)$ . (β) Το φάσμα ισχύος της χαοτικής ταλάντωσης υπολογισμένο με DFT στο τμήμα της τροχιάς  $0 \leq t \leq 2000\pi$  και με δειγματοληψία 4096 σημείων.

Στο Σχήμα 7-23 παρουσιάζονται οι επιφάνειες Poincaré για μεγαλύτερες τιμές της διαταραχής. Καθώς αυξάνεται η τιμή διαταραχής στην τιμή  $f_0=0.01$  (πάνελ (α)), η χαοτική περιοχή γύρω από το  $(0,0)$  διευρύνεται και οι ταλαντώσεις γίνονται ακόμα πιο ακανόνιστες. Ταυτόχρονα παρατηρούμε τη δημιουργία δύο περιοχών (αριστερά και δεξιά) με νησίδες μέσα στην χαοτική περιοχή. Στο κέντρο κάθε νησίδας υπάρχει από μια ευσταθή περιοδική τροχιά περιόδου 1 ( $T=2\pi$ ). Για ακόμα μεγαλύτερη διαταραχή,  $f_0=0.1$ , πάνελ (β), παρατηρούμε ότι η χαοτική περιοχή καλύπτει μια μεγάλη περιοχή του χώρου φάσεων. Μια τροχιά που ξεκινάει με αρχικές συνθήκες μέσα σε αυτήν την περιοχή θα έχει μια ακολουθία Poincaré με σημεία που περνούν αυθαίρετα κοντά από κάθε σημείο της χαοτικής περιοχής. Ο σχηματισμός πολλών ομάδων νησίδων είναι εμφανής. Σε κάθε ομάδα νησίδων θα αντιστοιχεί και μια ευσταθής περιοδικής τροχιάς πολλαπλότητας τόσο όσο υποδεικνύει ο αριθμός των νησίδων. Αν και η διαταραχή είναι αρκετά μεγάλη, ημiperiodικές ταλαντώσεις συνεχίζουν να υπάρχουν γύρω από τις ευσταθείς περιοδικές τροχιές που είχαν διακλαδωθεί από τα ευσταθή σημεία ισορροπίας για  $f_0=0$  (δηλαδή γύρω από τα σημεία με  $x_0=\pm 1, y_0=0$ ). Επίσης να επισημάνουμε και τη δημιουργία μιας νέας ευσταθούς περιοδικής τροχιάς, περιόδου 1, περίπου στο σημείο  $(0, 1.17)$ , και γύρω από την οποία έχουμε το σχηματισμό μιας νέας περιοχής με αναλλοίωτες καμπύλες (ημiperiodικές τροχιές).



Σχήμα 7-23. Επιφάνειες Poincaré του συστήματος (7.18) με (α)  $f_0=0.01$  (β)  $f_0=0.1$ .

## Ασκήσεις

**Άσκηση 7.4.1.** Για το διατηρητικό σύστημα

$$\ddot{x} = 1 + x - x^3 + a \cos t$$

α) Για  $a=0$  υπολογίστε την περίοδο των ταλαντώσεων ως συνάρτηση της ενέργειας

α) Σχεδιάστε τις τομές Poincaré για  $a=0.05$ , και  $a=0.3$ .

β) Για  $a=0.3$ , εντοπίστε αρχικές συνθήκες για μια περιοδική, μια ημιπεριοδική και μια χαοτική τροχιά και σχεδιάστε τη χρονική εξέλιξη  $x=x(t)$ .

**Άσκηση 7.4.2.** Αν στο σύστημα της παραπάνω άσκησης θεωρήσουμε και μια επιπλέον διαταραχή,

$$\ddot{x} = 1 + x - x^3 + a \cos t + b \sin 4t,$$

υπολογίστε την τομή Poincaré για  $a=b=0.3$  και κάντε μια σύγκριση με την περίπτωση για  $b=0$ .

**Άσκηση 7.4.3.** Για το διαταραγμένο εκκρεμές

$$\ddot{\theta} = \sin \theta + \varepsilon \sin \omega t,$$

επιλέξτε κατάλληλη τιμή για τη συχνότητα της εξωτερικής διαταραχής  $\omega$  ώστε να διεγείρετε το σύστημα στο συντονισμό  $\omega_0/\omega=1/3$ . Σχεδιάστε την τομή Poincaré για το  $\omega$  που εκτιμήσατε και για  $\varepsilon=0.2$ .

**Άσκηση 7.4.4.** Το διαταραγμένο εκκρεμές  $\ddot{\theta} = \sin \theta + \varepsilon \sin \omega t$  παρουσιάζει χάος για  $x=\pm\pi$ . Για  $\omega=1$ ,  $\varepsilon=0.02$  και  $\varepsilon=0.2$  σχεδιάστε την τομή Poincaré για την τροχιά με αρχικές συνθήκες  $\theta(0)=3.14$ ,  $\dot{\theta}(0)=0$  για να διαπιστώσετε ότι το εύρος της χαοτικής περιοχής αυξάνει καθώς το  $\varepsilon$  αυξάνει. Σχεδιάστε επίσης την τομή της ίδιας τροχιάς με  $\varepsilon=0.2$  αλλά με  $\omega=10$ . Τι παρατηρείτε;

## 7.5 Το σύστημα Duffing με απόσβεση

Η [εξίσωση Duffing](#) προτάθηκε από τον G. Duffing για την μελέτη εξαναγκασμένων ταλαντώσεων υπό την επίδραση απόσβεσης. Είναι, λοιπόν περισσότερο γνωστή στη μορφή

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x - x^3 - d \dot{x} + f_0 \sin t \quad (7.19)$$

όπου  $d$  ο συντελεστής απόσβεσης.

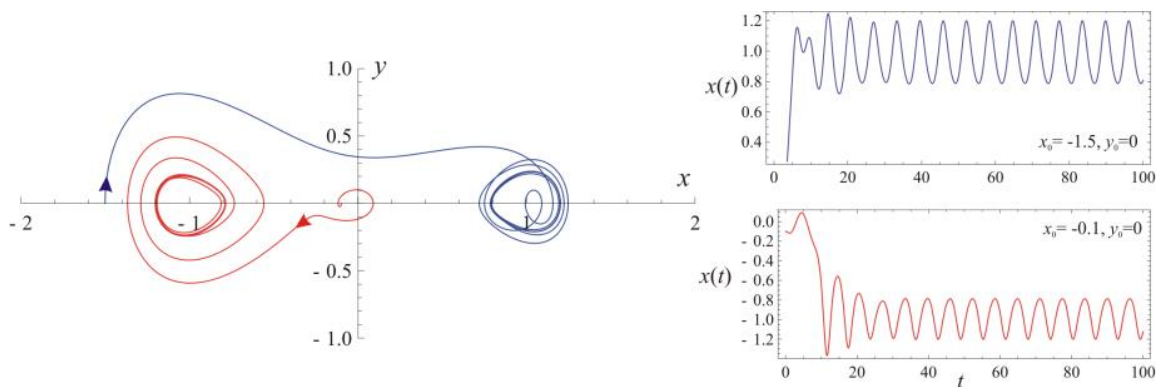
### 7.5.1 Περιοδικές λύσεις

Μια πρώτη εκτίμηση για την συμπεριφορά των λύσεων της (7.19) προκύπτει από τα παρακάτω γνωστά σημεία :

i) Για το αδιατάρακτο μη γραμμικό σύστημα ( $f_0=0$ ), η προσθήκη μιας μικρής απόσβεσης μετατρέπει τα ευσταθή σημεία ισορροπίας (κέντρα) σε ευσταθείς εστίες (δες παράδειγμα 2, §3.5.2).

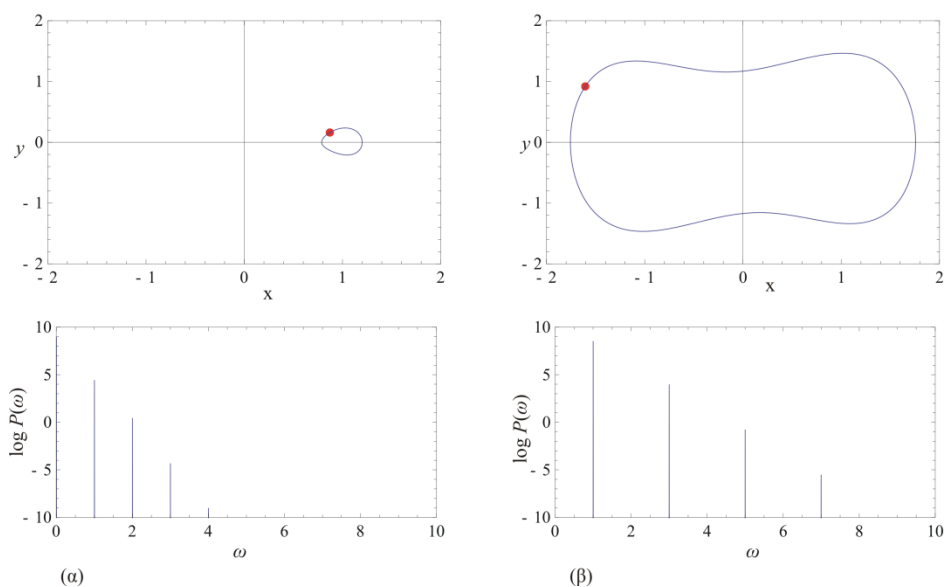
ii) Το διαταραγμένο σύστημα χωρίς τον μη γραμμικό όρο  $x^3$ , παρουσιάζει λύσεις που τείνουν σε περιοδικές λύσεις (οριακοί κύκλοι), ενώ δεν μπορούμε να έχουμε σημεία ισορροπίας (δες §7.1.2).

Περαιτέρω, λοιπόν, ο όρος της απόσβεσης να οδηγεί τις λύσεις της (7.19) προς κάποιο ελκτικό σύνολο, το οποίο θα πρέπει να είναι κάποια περιοδική λύση όπως και στο γραμμικό σύστημα. Για μικρή τιμή του πλάτους της διαταραχής  $f_0$ , το ελκτικό αυτό σύνολο (οριακός κύκλος) θα βρίσκεται κοντά στα σημεία ισορροπίας. και ένα παράδειγμα παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



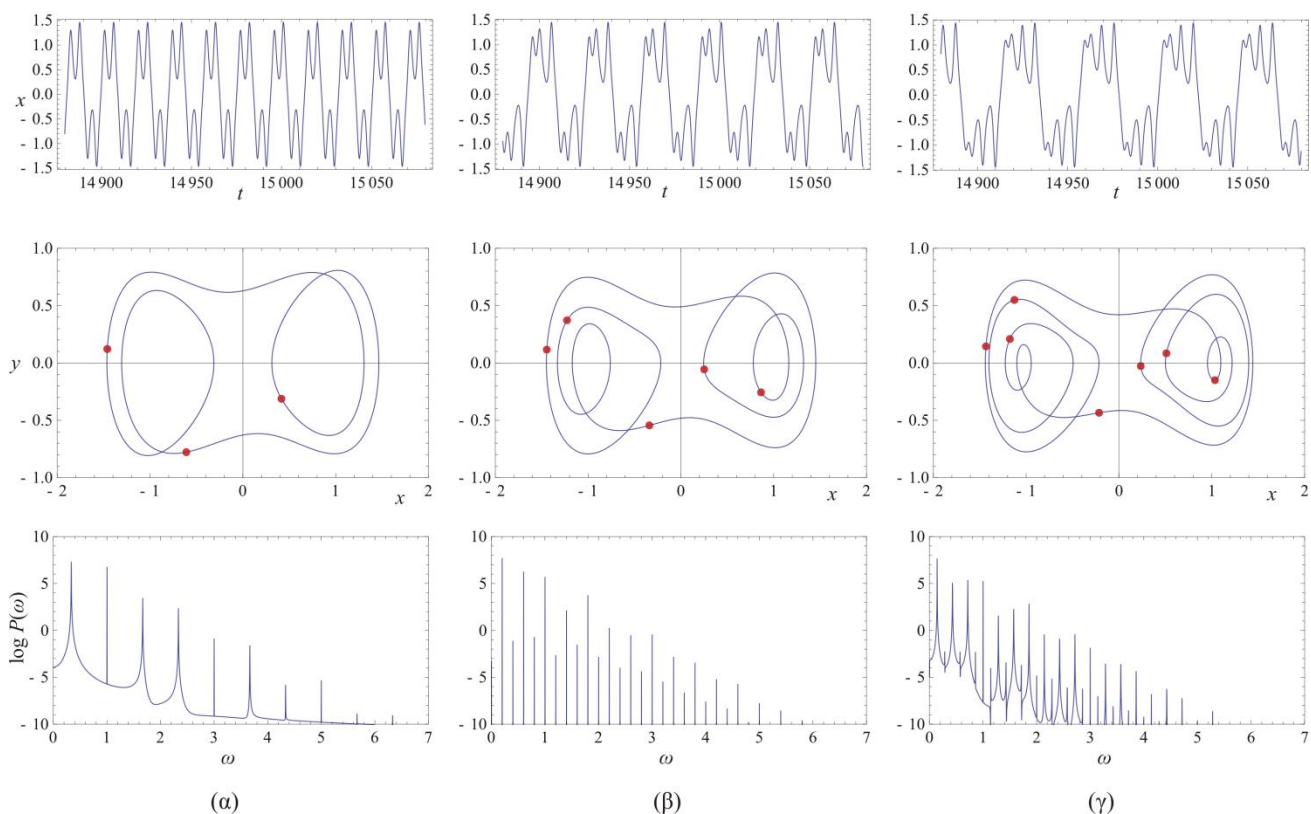
Σχήμα 7-24. Λύσεις για διαφορετικές αρχικές συνθήκες που τείνουν προς έναν οριακό κύκλο, η μία γύρω από το σημείο  $(-1,0)$  και η δεύτερη γύρω από το  $(1,0)$ . Οι τιμές των παραμέτρων είναι  $d=1/3, f_0=0.2$ .

Οι παραπάνω οριακοί κύκλοι αντιπροσωπεύονται από ένα σημείο στην ακολουθία Poincaré, είναι δηλαδή περιόδου-1 ( $T=2\pi$ ) και παρουσιάζονται στο Σχήμα 7-25α. Τώρα έχουμε εξαιρέσει το μεταβατικό στάδιο των λύσεων και απεικονίζουμε την οριακή κατάσταση. Για μεγάλες τιμές του πλάτους της διαταραχής έχουμε την εμφάνιση περιοδικών κύκλων περιόδου 1, οι οποίοι αντιστοιχούν σε ταλαντώσεις μεγάλου πλάτους (Σχήμα 7-25β)



Σχήμα 7-25. Οριακοί κύκλοι, σημείο Poincaré και φάσματα ισχύος για  $d=1/3$  και α)  $f_0=0.2$  β)  $f_0=0.6$ .

Οι οριακοί κύκλοι περιόδου-1, που αναφέραμε παραπάνω έχουν στα φάσματα ισχύος κορυφές οι οποίες παρουσιάζονται σε πολλαπλάσια της συχνότητας της διαταραχής  $\omega=1$ . Εξερευνώντας αριθμητικά τις οριακές λύσεις του συστήματος για διάφορες τιμές των παραμέτρων, μπορούμε να διαπιστώσουμε την ύπαρξη περιοδικών λύσεων διαφόρων περιόδων. Μερικά παραδείγματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 7-26. Είναι φανερό ότι το φάσμα ισχύος καθώς και η επιφάνεια Poincaré αποτυπώνουν με μεγάλη σαφήνεια την περιοδικότητα του έλκτου μιας οποιασδήποτε τροχιάς του συστήματος αρκεί αυτή να μελετηθεί μετά από έναν επαρκή χρόνο μετάβασης.

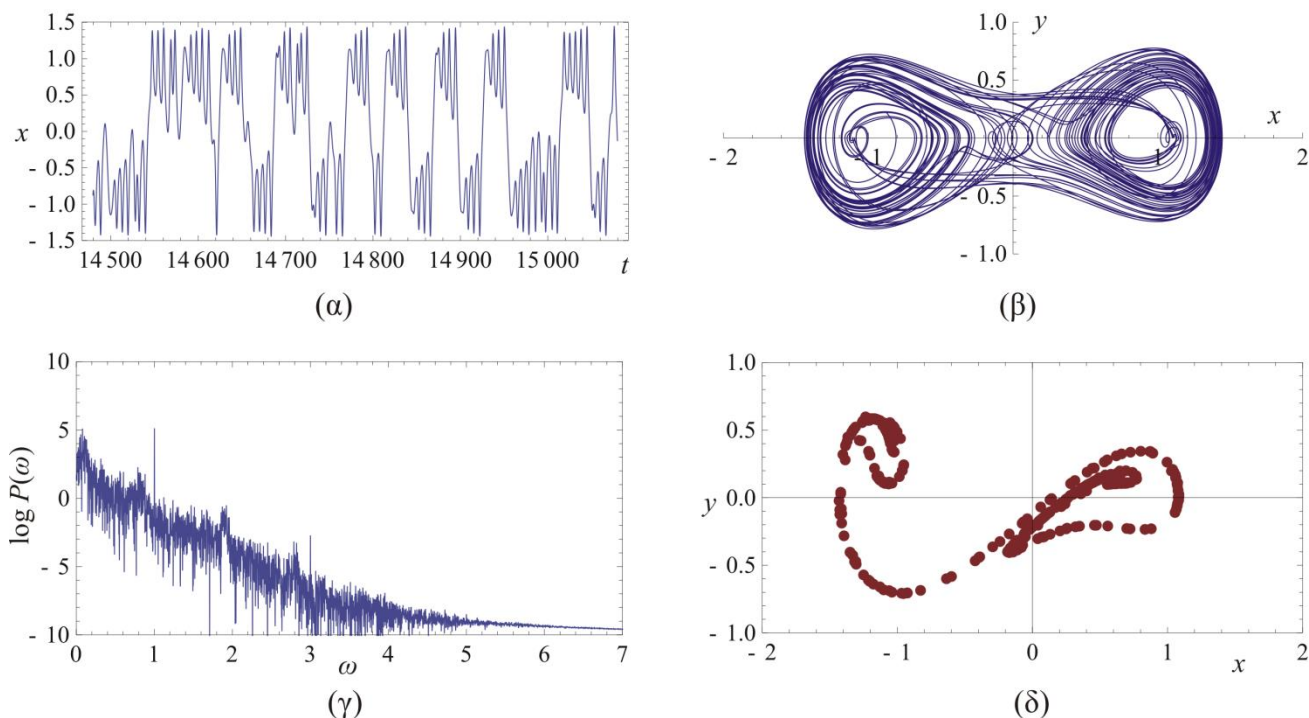


Σχήμα 7-26. Ταλαντώσεις, οριακοί κύκλοι, σημεία Poincaré και φάσματα ισχύος α) Οριακός κύκλος περιόδου 3,  $d=1/3$ ,  $f_0=0.4$  β) Οριακός κύκλος περιόδου 5,  $d=1/3$ ,  $f_0=0.33$  γ) Οριακός κύκλος περιόδου 7,  $d=1/3$ ,  $f_0=0.306$ .

## 7.5.2 Ο παράξενος ελκυστής

Όπως έχουμε αναφέρει, η παρουσία της απόσβεσης οδηγεί τις λύσεις προς οριακά σύνολα στο χώρο φάσεων τα οποία θα πρέπει να είναι μικρότερης διάστασης από αυτόν του χώρου φάσεων. Αυτό ισχύει και για την επιφάνεια Poincaré και την ακολουθία σημείων. Έτσι οι περιοδικές λύσεις, που είδαμε προηγουμένως αντιστοιχούν σε σημεία (διάσταση μηδέν) μέσα στο επίπεδο.

Έχειδειχτεί ότι μπορούμε να έχουμε οριακούς κύκλους με μεγάλες περιόδους. Μάλιστα αποδεικνύεται και η ύπαρξη διακλάδωσης των οριακών κύκλων. Π.χ. ένας οριακός κύκλος περιόδου  $T$ , με μια αλλαγή των παραμέτρων του συστήματος, μετατρέπεται σε έναν κύκλο περιόδου  $2T$ , στη συνέχεια σε κύκλο περιόδου  $4T$  κ.ο.κ. Το σενάριο αυτό καλείται «διακλάδωση διπλασιασμού περιόδων» και θα το μελετήσουμε με τη λογιστική απεικόνιση στο κεφάλαιο 9. Μια τέτοια διαδικασία μας οδηγεί τελικά σε μια λύση «άπειρης περιόδου» δηλαδή μιας μη-περιοδικής λύσης η οποία, μάλιστα, αποτελεί έλκτη για ένα μεγάλο σύνολο αρχικών συνθηκών του χώρου φάσεων. Μια τέτοια λύση περιγράφεται με διάφορους τρόπους στο Σχήμα 7-27



Σχήμα 7-27. Λύση της εξίσωσης Duffing για  $d=1/3$   $f_0=0.3$ ,  $x_0=y_0=0$ . α) χρονική εξέλιξη της ταλάντωσης β) η φασική τροχιά γ) το φάσμα ισχύος δ) η επιφάνεια Poincaré.

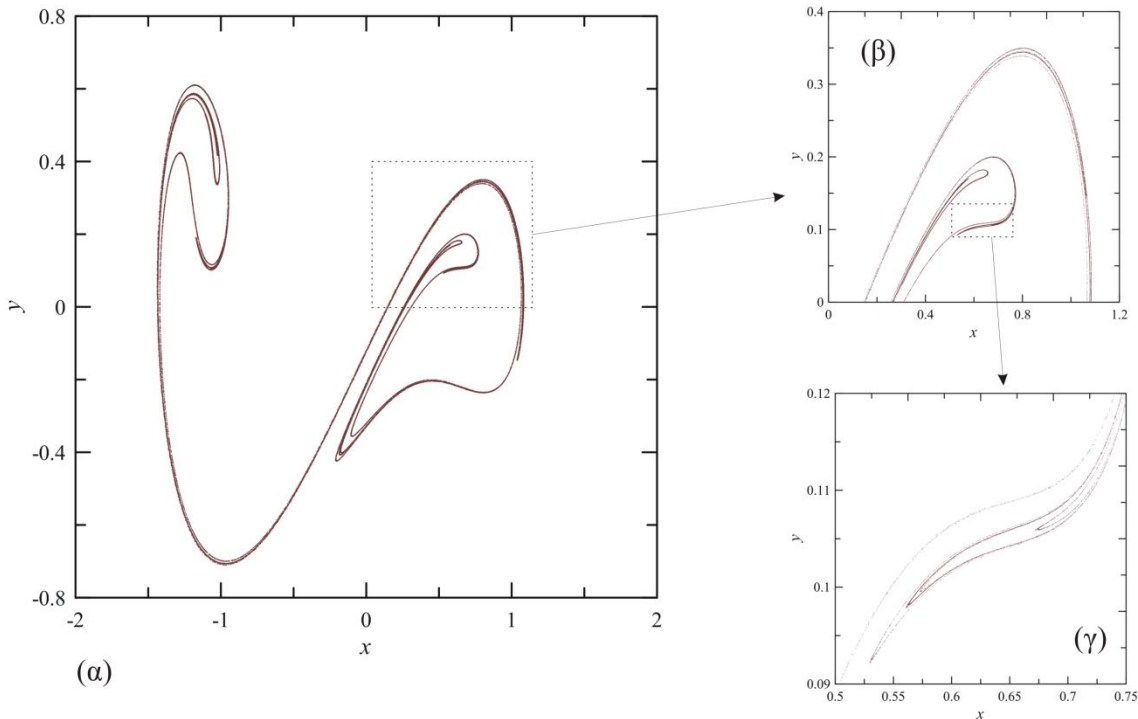
Από το πάνελ (α) του παραπάνω σχήματος φαίνεται αρκετά καθαρά ο μη περιοδικός χαρακτήρας των ταλαντώσεων, ο οποίος μάλιστα δείχνει αρκετά ακανόνιστος. Η φασική καμπύλη (πάνελ β) αν απεικονιστεί για μεγάλο χρονικό διάστημα, θα γεμίσει πυκνά και με ακανόνιστο ρυθμό ένα υποσύνολο του επιπέδου. Επίσης το φάσμα ισχύος (πάνελ γ), αν και μπορούμε σ' αυτό να διακρίνουμε τη βασική συχνότητα  $\omega=1$  της εξωτερικής διαταραχής, είναι θορυβώδες και συνεχές. Μάλιστα μπορεί να διακρίνει κανείς ότι, κατά μέσο όρο παρουσιάζει μια αύξηση του πλάτους των κορυφών καθώς  $\omega \rightarrow 0$  με νόμο δύναμης

$$P(\omega) \sim \frac{1}{\omega^a}, \quad a \approx 1. \quad (7.20)$$

Η μορφή αυτή του φάσματος είναι γνωστή ως «έγχρωμος θόρυβος  $1/f$ » ( $1/f$  noise).

Λόγω όλων των παραπάνω θα χαρακτηρίσουμε μια τέτοια εξέλιξη ως **χαοτική**, η οποία έχει τα ίδια γενικά χαρακτηριστικά με τις χαοτικές ταλαντώσεις του διατηρητικού συστήματος. Όμως στο διατηρητικό σύστημα τα σημεία της ακολουθίας Poincaré γεμίζουν πυκνά ένα διδιάστατο σύνολο του επιπέδου  $xy$ . Στην περίπτωση της εξίσωσης Duffing με απόσβεση, όπως παρατηρούμε στο πάνελ (δ), τα σημεία τείνουν να καλύψουν μια καμπύλη παράξενου σχήματος. Υπολογίζουμε την ακολουθία Poincaré με περισσότερα και ακριβέστερα σημεία και την παρουσιάζουμε στο Σχήμα 7-28.

Παρατηρούμε ότι η καμπύλη που αντιπροσωπεύει το ελκτικό σύνολο παρουσιάζει γραμμές οι οποίες αποτελούνται από πολλές ξεχωριστές γραμμές, και κάθε μια από αυτές (σε περισσότερη μεγέθυνση) φαίνεται να αποτελείται από περισσότερες γραμμές. Επίσης παρατηρούμε αναδιπλώσεις, οι οποίες παρουσιάζονται γενικά η μία μέσα στην άλλη. Το παράξενο αυτό γεωμετρικό αντικείμενο παρουσιάζει «αυτό-ομοιότητα υπό κλίμακα». Είναι ένα μορφολογικό σύνολο (**fractal**) με κλασματική διάσταση μεταξύ του ενός (καμπύλη) και του δύο (επίπεδο). Το ελκτικό αυτό σύνολο σε συνδυασμό με την χαοτική εξέλιξη της τροχιάς δημιουργεί μια πολύπλοκη και απρόβλεπτη χρονική εξέλιξη αλλά πάντα μέσα στα όρια του ελκτικού αυτού συνόλου που ονομάζεται **παράξενος ελκυστής** (strange attractor).



Σχήμα 7-28. Ο παράξενος ελκυστής της εξίσωσης Duffing για  $d=1/3$ ,  $f_0=0.3$ . Τοπικές μεγεθύνσεις αυτού παρουσιάζονται στα πάνελ (β) και (γ).

**[C]** Ο παράξενος ελκυστής στο Σχήμα 7-28 μπορεί να υπολογιστεί αρκετά αποδοτικά με τον κώδικα `coderk4sa.c`<sup>10</sup>, ο οποίος χρησιμοποιεί τη συνάρτηση αριθμητικής ολοκλήρωσης RK4 που περιγράψαμε στην §2.2.2. Τα δεξιά μέλη των διαφορικών εξισώσεων του συστήματος δηλώνονται στη συνάρτηση `odevectorfield`

ενώ η συνάρτηση

```
PoincaréMap(double x0, double y0, double *xp, double *yp)
```

δέχεται αρχικές συνθήκες  $x_0$ ,  $y_0$  και επιστρέφει το επόμενο σημείο της ακολουθίας Poincaré ( $x_p$ ,  $y_p$ ) μετά από χρόνο  $\Delta t=2\pi$ . Τα σημεία αυτά αποθηκεύονται σε ένα αρχείο μετά από έναν αριθμό αρχικών σημείων μετάβασης (`transit_points`), τα οποία θεωρούμε αρκετά για να έχει κατασταλάξει η τροχιά στο ελκτικό της σύνολο ικανοποιητικά. Το πρόγραμμα τερματίζει αφού αποθηκεύσει έναν ζητούμενο αριθμό σημείων (`Poincaré_points`) στο αρχείο `"strngattractor.txt"`.

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

#define N 2
#define PI2 6.2831853071795865
double d, f0;

void odevectorfield(double X[], double f[]){
    f[1] = X[2];
    f[2] = X[1]-X[1]*X[1]*X[1]-d*X[2]+f0*sin(X[0]);
}
```

<sup>10</sup> Ο κώδικας `coderk4sa.c` είναι διαθέσιμος στην ιστοσελίδα του παρόντος συγγράμματος/κεφαλαίου στον Ελληνικό Συσσωρευτή Ακαδημαϊκών Ηλεκτρονικών Βιβλίων (<http://repfiles.kallipos.gr/file/14149>)

```

void RK4(double X0[], const double dt, double X1[]) { . . . .}

void PoincaréMap(double x0, double y0, double *xp, double *yp)
{
    double X[N + 1], Y[N + 1];
    X[0] = 0.0;
    X[1] = x0; X[2] = y0;
    int Niterations=6000;
    double dt = PI2/Niterations; /*RK4 integration step: sub-multiple of 2π */
    for (int i = 0; i < Niterations; i++)
    {
        RK4(X, dt, Y);
        for (int i = 0; i <= N; i++) X[i] = Y[i];
    }
    *xp = Y[1]; *yp = Y[2];
}

void main()
{
    double x0, y0, x1, y1;
    int transit_points = 10000;
    int Poincaré_points = 100000;
    d = 0.3333333333333333; f0 = 0.3; /*parameters*/
    x0 = 0.0; y0 = 0.0; /* initial conditions */
    FILE *datafile = fopen("strngattractor.txt", "w");
    printf("Wait for integrating transit stage ");
    for (int n = 0; n < Poincaré_points+transit_points; n++)
    {
        PoincaréMap(x0, y0, &x1, &y1);
        if (n>transit_points) {
            fprintf(datafile, "% f % f\n", x1, y1);
            printf("%4d % f % f\n", n-transit_points, x1, y1);
        }
        else if (!(n % 1000)) printf(".");
        x0 = x1; y0 = y1;
    }
    fclose(datafile);
}

```

## Ασκήσεις

**Άσκηση 7.5.1.** Για το μη διατηρητικό σύστημα

$$\ddot{x} = x - x^3 - \frac{1}{2}\dot{x} + f_0 \cos t$$

α) Εντοπίστε μια τιμή του  $f_0$  για την οποία εμφανίζεται οριακός κύκλος περιόδου-1 και μια τιμή για την οποία εμφανίζεται οριακός κύκλος μεγαλύτερης περιόδου. Σχεδιάστε τους δύο οριακούς κύκλους στο επίπεδο  $(x, \dot{x})$ .

β) Εντοπίστε μια τιμή του  $f_0$  στην οποία παρουσιάζεται παράξενος ελκυστής.

**Άσκηση 7.5.2.** Για ποια τιμή της  $f_0$  το απωλεστικό και διαταραγμένο εκκρεμές, το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση

$$\ddot{\theta} = -4 \sin \theta - \frac{1}{12} \dot{\theta} + f_0 \sin t,$$

παρουσιάζει παράξενo ελκυστή; Σχεδιάστε τον ελκυστή στο επίπεδο  $(\theta, \dot{\theta})$  δεδομένου ότι  $\theta = \theta \bmod(2\pi)$

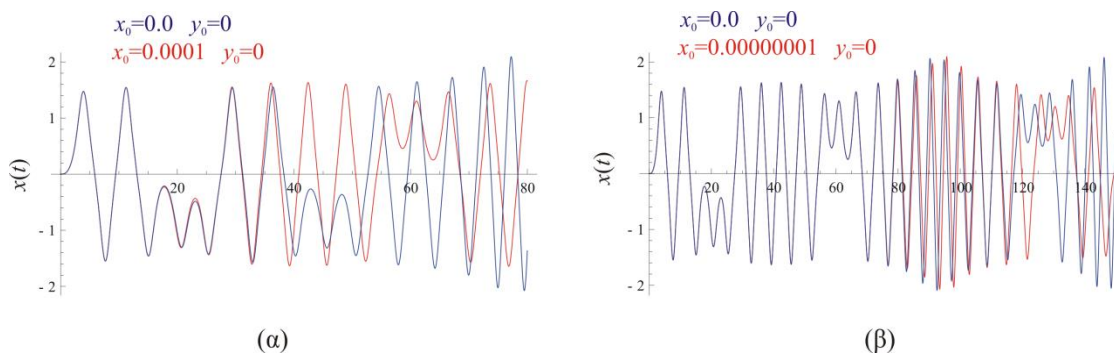
## 7.6 Χάος και ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες

Οι χαοτικές τροχιές που περιγράψαμε, τόσο για το διατηρητικό σύστημα όσο και για το απωλεστικό σύστημα, δείχνουν μια ακανόνιστη εξέλιξη. Πίσω από αυτήν την ιδιότητα κρύβεται η *ευαίσθητη εξάρτηση των χαοτικών τροχιών από τις αρχικές συνθήκες*.

### 7.6.1 Η ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες

Εν γένει οι αναλυτικές λύσεις των διαφορικών εξισώσεων είναι κοντά η μια με την άλλη όταν αναφέρονται σε κοντινές αρχικές συνθήκες ή η απομάκρυνσή τους γίνεται με έναν ομαλό και προβλέψιμο ρυθμό. Στην περίπτωση των χαοτικών τροχιών μικρές αλλαγές στις αρχικές συνθήκες προκαλούν μη προβλέψιμες και ασυσχέτιστες εξελίξεις.

Στο Σχήμα 7-29 παρουσιάζουμε την εξέλιξη δύο λύσεων  $x(t)$  της διατηρητικής απεικόνισης Duffing με  $f_0=0.01$ . Όπως έχουμε δει η λύση με αρχικές συνθήκες  $x_0=y_0=0$  είναι χαοτική. Στο σχήμα παρουσιάζεται με την μπλε γραμμή και στα δύο πάνελ. Αν αλλάξουμε την αρχική συνθήκη  $x_0$  στο 4ο δεκαδικό ψηφίο, παρατηρούμε στο πάνελ (α) ότι οι δύο λύσεις σχεδόν συμπίπτουν μέχρι τις 40 χρονικές μονάδες. Στη συνέχεια όμως δείχνουν μια ασυσχέτιστη εξέλιξη. Δεν αλλάζει η κατάσταση αν ξεκινήσουμε ακόμη πιο κοντά στην μπλε λύση, π.χ. αν αλλάξουμε την αρχική συνθήκη  $x_0$  στο 8<sup>ο</sup> δεκαδικό. Τώρα οι δύο λύσεις παραμένουν πολύ κοντά για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, όμως και πάλι σύντομα (για  $t>120$ ) καθίστανται ασυσχέτιστες.



Σχήμα 7-29. Ταλαντώσεις για τροχιές που ξεκινούν με κοντινές αρχικές συνθήκες ( $d=0, f_0=0.01$ ).

**Σημείωση.** Στο φασικό χώρο η γρήγορη απομάκρυνση δύο αρχικά κοντινών τροχιών παρουσιάζεται στο video `ic_sensitivity.avi`<sup>11</sup>.

Η παραπάνω ιδιότητα, ουσιαστικά εκφράζει την αδυναμία πρόβλεψης της εξέλιξης είτε ενός μαθηματικού μοντέλου, λόγω των υπολογισμών με πεπερασμένη ακρίβεια αλλά κυρίως ενός φυσικού μοντέλου όπου εν γένει και οι αρχικές συνθήκες είναι γνωστές με μικρή ακρίβεια. Σε κάθε περίπτωση η υπολογιζόμενη λύση θα είναι κοντά στην πραγματική λύση μόνο προσωρινά. Το χάος δεν αποτελεί μια αδυναμία από μέρους μας αλλά μια ιδιότητα των δυναμικών συστημάτων, την οποία θα τη δούμε με αυστηρότερη μαθηματική περιγραφή στα τελευταία κεφάλαια.

### 7.6.2 Ο εκθέτης Lyapunov

Αν δύο τροχιές αντιστοιχούν σε αρχικές συνθήκες που διαφέρουν στο χώρο φάσεων κατά απόσταση  $\delta(0)$ , τότε η απόστασή τους  $\delta(t)$  κατά την εξέλιξή τους στο χρόνο την αποτυπώνουμε με τον εκθέτη Lyapunov  $\lambda$  ([Lyapunov exponent](#))

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left( \frac{\delta(t)}{\delta(0)} \right) \quad (7.21)$$

<sup>11</sup> Το video `ic_sensitivity.avi` είναι διαθέσιμο στην ιστοσελίδα του παρόντος συγγράμματος/κεφαλαίου στον Ελληνικό Σύσφωρευτή Ακαδημαϊκών Ηλεκτρονικών Βιβλίων (<http://repfiles.kallipos.gr/file/14233>)



Στην πράξη, αφού έχουμε λύσεις για περατωμένο χρονικό διάστημα, υπολογίζουμε τον χαρακτηριστικό αριθμό Lyapunov (*Lyapunov characteristic number, LCN*).

Έστω το δυναμικό σύστημα

$$\dot{x} = f_1(x, y, t), \quad \dot{y} = f_2(x, y, t), \quad (7.22)$$

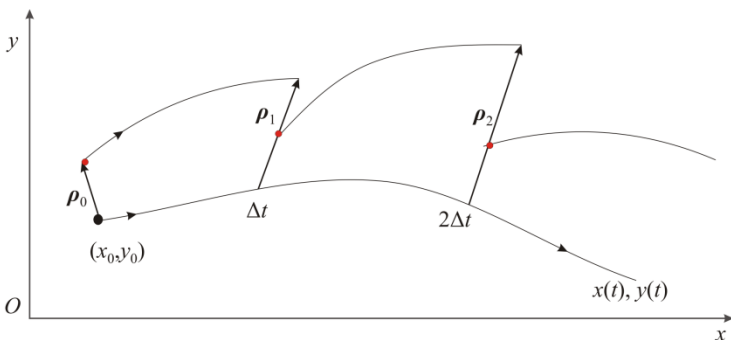
και μια λύση του συστήματος η  $x_0=x_0(t; x_{00}, y_{00})$ ,  $y_0=y_0(t; x_{00}, y_{00})$  για αρχικές συνθήκες  $(x_{00}, y_{00})$ . Για τις αρχικές συνθήκες  $x_{00}+\xi_0$ ,  $y_{00}+\eta_0$  θεωρούμε ότι θα έχουμε τη λύση στη μορφή

$$x(t) = x_0(t) + \xi(t), \quad y(t) = y_0(t) + \eta(t)$$

Αν το διάνυσμα της αρχικής απόκλισης των τροχιών  $\rho_0=(\xi_0, \eta_0)$  είναι μικρό, και θεωρήσουμε και την απόκλιση  $\rho(t)=(\xi(t), \eta(t))$  μικρή, τότε μπορούμε να την προσδιορίσουμε επιλύοντας το γραμμικό σύστημα

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}_0 \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (7.23)$$

όπου ο δείκτης 0 σημαίνει ότι ο Ιακωβιανός πίνακας, που τα στοιχεία του αποτελούν τους συντελεστές του γραμμικού συστήματος, υπολογίζεται κατά μήκος της λύσης  $x_0=x_0(t)$ ,  $y_0=y_0(t)$ . Υπολογίζουμε λοιπόν τα  $\xi=\xi(t)$ ,  $\eta=\eta(t)$  με αρχικά αυθαίρετες αρχικές συνθήκες αλλά με  $|\rho_0|=1$ , συνήθως επιλέγουμε  $\xi(0)=1$ ,  $\eta(0)=0$ . Μετά από χρονικό διάστημα  $t_1=\Delta t$  θα έχουμε  $\xi_1=\xi(t_1)$ ,  $\eta_1=\eta(t_1)$ . Στο σημείο αυτό επανακανονικοποιούμε τις αρχικές συνθήκες ως  $\xi(0)=\xi(t_1)/|\rho_1|$ ,  $\eta(0)=\eta(t_1)/|\rho_1|$ , όπου  $\rho_1=(\xi_1, \eta_1)$  και υπολογίζουμε μετά από χρόνο  $\Delta t$  τα  $\xi_2=\xi(t_2)$ ,  $\eta_2=\eta(t_2)$ , όπου  $t_2=2\Delta t$ , κοκ. Η διαδικασία αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα 7-30 και την επαναλαμβάνουμε για  $N$  βήματα.



Σχήμα 7-30. Διαδικασία υπολογισμού του χαρακτηριστικού αριθμού Lyapunov.

Ο χαρακτηριστικός αριθμός Lyapunov μπορεί να υπολογιστεί μετά από κάθε βήμα της διαδικασίας ως

$$LCN(t_k) = \frac{1}{t_k} \sum_i^k \log \frac{\rho_i}{\rho_0}, \quad (\max k = N) \quad (7.24)$$

και θεωρητικά  $\lim_{k \rightarrow \infty} LCN(t_k) = \lambda$ . Ουσιαστικά, μετράμε τη μέση εκθετική απομάκρυνση μιας γειτονικής τροχιάς από την τροχιά αναφοράς.

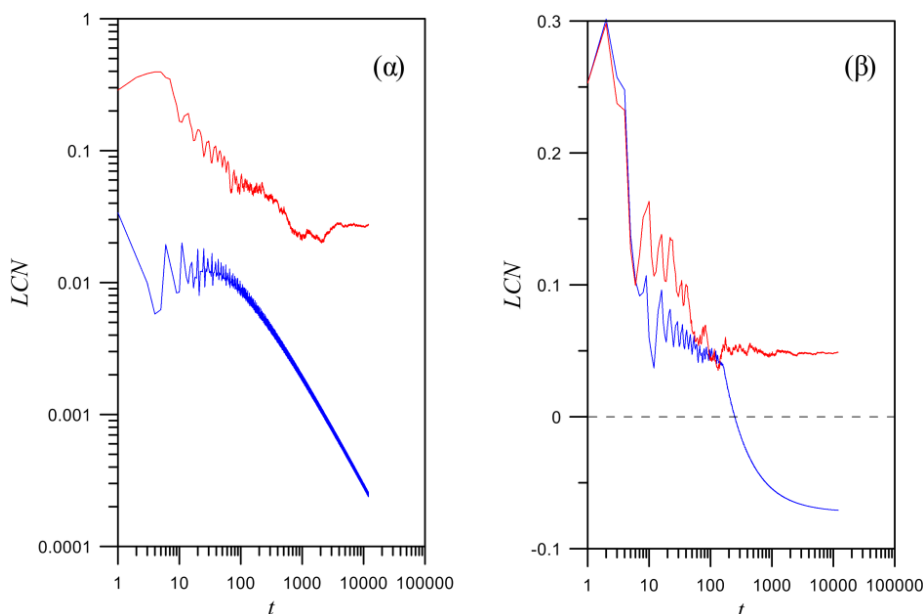
Στο Σχήμα 7-31 παρουσιάζουμε την εξέλιξη του  $LCN$  για μια κανονική και μια χαοτική τροχιά της εξίσωσης Duffing. Το γραμμικοποιημένο σύστημα θα είναι

$$\dot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = (1-3x^2)\xi - d\eta \quad (7.25)$$

Η (7.25) λύνεται αριθμητικά μαζί με τις εξισώσεις (7.19), για να έχουμε διαθέσιμη τη μεταβλητή  $x=x(t)$  κατά μήκος της τροχιάς. Το πάνελ (α) αναφέρεται στην διατηρητική εξίσωση Duffing. Παρατηρούμε ότι για την κανονική τροχιά ο  $LCN$  δείχνει, καθώς αυξάνει ο χρόνος, να τείνει προς το μηδέν. Αντίθετα για την χαοτική

τροχιά τείνει προς μια σταθερή θετική τιμή (για το παράδειγμά μας είναι  $\lambda \approx 0.276$ ), η οποία εκφράζει την ευαισθησία της τροχιάς στις αρχικές συνθήκες και συνεπώς την χαοτική της ιδιότητα.

Η τιμή  $\lambda=0$ , στην οποία τείνει ο  $LCN$  για τις τακτικές (περιοδικές ή ημιπεριοδικές τροχιές) τροχιές, δείχνει ότι, κατά μέσο όρο δύο κοντινές τροχιές διατηρούν την μεταξύ τους απόσταση. Στην περίπτωση του απωλεστικού συστήματος δύο τροχιές που τείνουν προς ένα κανονικό ελκυστή (π.χ. έναν οριακό κύκλο) πλησιάζουν μεταξύ τους και έτσι  $\lambda < 0$ . Έτσι ο  $LCN$  τείνει προς μια αρνητική τιμή που δείχνει το ρυθμό με τον οποίο δύο γειτονικές τροχιές συγκλίνουν. Η συμπεριφορά αυτή του  $LCN$  φαίνεται στο πάνελ (β). Όταν η τροχιά πέφτει στον παράξενο ελκυστή, έχουμε και πάλι ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες και εκθετική απομάκρυνση των γειτονικών τροχιών. Ο  $LCN$  τείνει και πάλι προς μια θετική τιμή<sup>12</sup>.



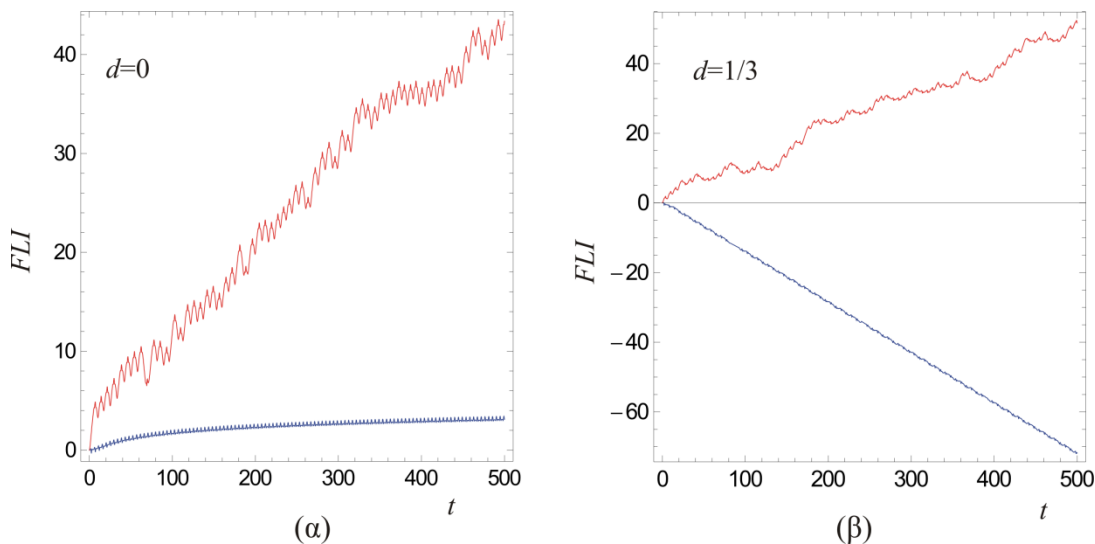
Σχήμα 7-31. Ο χαρακτηριστικός αριθμός Lyapunov για μια κανονική (μπλε γραμμή) και μια χαοτική τροχιά (κόκκινη γραμμή) α) για το διατηρητικό σύστημα ( $d=0$ ) με  $f_0=0.01$  και αρχικές συνθήκες  $x_0=0.8, y_0=0$  (κανονική τροχιά),  $x_0=y_0=0$  (χαοτική τροχιά) β) για το απωλεστικό σύστημα,  $x_0=y_0=0, d=1/3$  και  $f_0=0.25$  (τροχιά προς οριακό κύκλο) και  $f_0=0.3$  (τροχιά προς παράξενο ελκυστή).

### 7.6.3 Ο γρήγορος δείκτης Lyapunov (FLI)

Ο χαρακτηριστικός αριθμός Lyapunov μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένας τρόπος για την διάκριση μεταξύ κανονικών και χαοτικών τροχιών. Μάλιστα η τελική του τιμή έχει σημασία υπό την έννοια ότι μετράει τη μέση εκθετική απομάκρυνση των τροχιών γύρω από την τροχιά αναφοράς και συνεπώς μετράει και το πόσο ισχυρό είναι το χάος. Στην περίπτωση που θέλουμε να διακρίνουμε μόνο αν μια τροχιά είναι κανονική ή χαοτική τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον γρήγορο δείκτη Lyapunov (fast Lyapunov indicator,  $FLI$ ), ο οποίος προτάθηκε από τον C. Froeshle. Στηρίζεται στον ίδιο υπολογισμό με αυτόν του  $LCN$  μόνο που δεν προβαίνουμε σε επανακανονικοποίηση των διανυσμάτων απόκλισης. Επιλύουμε τις εξισώσεις του συστήματος μαζί με το γραμμικοποιημένο σύστημα και παρακολουθούμε την αύξηση του μέτρου του διανύσματος απόκλισης  $\rho$ . Αν και υπάρχουν διάφοροι ορισμοί του  $FLI$ , ο πιο απλός είναι το μέτρο του διανύσματος απόκλισης  $\rho$ ,

$$FLI(t) = \log |\rho(t)| = \log \left( \sqrt{\xi(t)^2 + \eta(t)^2} \right) \quad (7.26)$$

<sup>12</sup> Ο κώδικας `codeLCN.c`, ο οποίος υπολογίζει τον  $LCN$ , είναι διαθέσιμος στην ιστοσελίδα του παρόντος συγγράμματος/κεφαλαίου στον Ελληνικό Συσσωρευτή Ακαδημαϊκών Ηλεκτρονικών Βιβλίων (<http://repfiles.kallipos.gr/file/14148>)



Σχήμα 7-32. Ο δείκτης  $FLI$  για τις τροχιές με παραμέτρους και αρχικές συνθήκες όπως αυτές στο Σχήμα 7-31 . α) για το διατηρητικό σύστημα β) για το απωλεστικό σύστημα.

Στο Σχήμα 7-32 παρουσιάζουμε την συμπεριφορά του  $FLI$  για τις ίδιες τροχιές που παρουσιάζονται στο Σχήμα 7-31. Σε μια κανονική τροχιά του διατηρητικού συστήματος, ο  $FLI$  αυξάνει αλλά με αργό ρυθμό καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Αντίθετα για μια χαοτική τροχιά έχουμε μια ταχύτατη αύξηση. Έτσι μετά από ένα μικρό σχετικά χρονικό διάστημα, ο  $FLI$  είτε έχει μια μικρή τιμή, που υποδεικνύει κανονικότητα ή έχει μια μεγάλη τιμή που υποδεικνύει χαοτική συμπεριφορά. Για το απωλεστικό σύστημα η ύπαρξη παράξενου ελκυστή (χαοτική εξέλιξη) χαρακτηρίζεται επίσης από μεγάλη τιμή του  $FLI$ . Αντίθετα για μια τροχιά που τείνει σε έναν οριακό κύκλο, ο  $FLI$  μειώνεται συνεχώς και μάλιστα παίρνει αρνητικές τιμές.

## 7.7 Βιβλιογραφία

- Baker, G.L. & Gollub, J.P., 1990. *Chaotic Dynamics: an introduction*. New York: Cambridge University Press.
- Bauman, G., 2005. *Mathematica for Theoretical Physics: Classical Mechanics and nonlinear dynamics*. New York: Springer.
- Bountis, T. & Skokos, H., 2012. *Complex Hamiltonian Dynamics*. Berlin: Springer-Verlag.
- Enns, R.H. & McGuire, G.C., 2001. *Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers*. Boston: Birkhauser.
- Froeschlé, Cl. & Gonczi, R. & Lega, E., 1997. *The fast Lyapunov indicator: a simple tool to detect weak chaos. Application to the structure of the main asteroidal belt*. Planetary and Space Science, 75, pp. 881-886.
- Jordan, D. W. & Smith, P., 2007. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. 4th ed. Oxford: Oxford University Press.
- Jose, J.V. & Saletan, E.J., 1998. *Classical Dynamics: a contemporary approach*. Cambridge UK: Cambridge University Press.
- Korsch, H.J. & Jodl, H.J., 1998. *Chaos: A program Collection*. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag.
- Lynch, S., 2007. *Dynamical systems with applications using Mathematica*. Boston: Birkhauser.
- Ott, E., 2002. *Chaos in Dynamical Systems*. 2nd ed. New York: Cambridge University Press.
- Rasband, S. N., 1990. *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*. New York: Wiley.
- Sagdeev, R.Z. & Usikov, D.A. & Zaslavsky, G.M., 1988. *Nonlinear Physics: from pendulum to turbulence and chaos*. Chur-Switzerland: Harwood Academic publ.
- Schuster, H.G., 1984. *Deterministic Chaos: an introduction*. Weinheim-Germany: Physik-Verlag.
- Wiggins, S., 1990. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. New York: Dover.
- Κυπριανίδης, Ι.Μ. & Πετράνη, Μ.Α., 2008. *Μη γραμμικά ηλεκτρικά κυκλώματα*. Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Σύγχρονη Παιδεία.

- Μπούντης, Α., 1995. *Δυναμικά Συστήματα και Χάος*. Αθήνα: Γ. Παπασωτηρίου.
- Μπούντης, Α., 2000. *Δυναμικά Συστήματα και Χάος*, τόμος Β'. Πάτρα: εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.
- Μπούντης, Α., 2004. *Ο θαυμαστός κόσμος των Fractals*. Αθήνα: LeaderBooks.
- Σούρλας, Δ., 2012. *Δυναμικά συστήματα και εφαρμογές με τη χρήση του Maple*. Σημειώσεις. Διαθέσιμο στη: [http://www.physics.upatras.gr/UploadedFiles/course\\_182\\_1516.pdf](http://www.physics.upatras.gr/UploadedFiles/course_182_1516.pdf). Πανεπιστήμιο Πάτρας.

## 8 Συστήματα με περισσότερες διαστάσεις

Είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια ότι ο χώρος φάσεων των αυτόνομων επίπεδων συστημάτων (διάσταση  $n=2$ ) απεικονίζεται καθαρά με φασικές καμπύλες που έχουν συγκεκριμένες τοπολογικές ιδιότητες. Επίσης, στα μη αυτόνομα συστήματα δύο διαστάσεων (με περιοδική εξάρτηση ως προς το χρόνο) και πάλι έχουμε μια ξεκάθαρη εικόνα του χώρου φάσεων όταν χρησιμοποιούμε την στροβοσκοπική απεικόνιση. Όταν όμως αυξηθούν οι διαστάσεις του συστήματος οι τροχιές μπορούν να γίνουν αρκετά περίπλοκες και η δομή του χώρου των φάσεων μπορεί να είναι δυσνόητη. Στο κεφάλαιο αυτό θα προσεγγίσουμε την δυναμική ενός αυτόνομου απωλεστικού συστήματος τριών διαστάσεων μέσω του [συστήματος του Lorenz](#) και στη συνέχεια θα μελετήσουμε τη δυναμική των αυτόνομων [Χαμιλτονιανών συστημάτων](#) δύο βαθμών ελευθερίας, τα οποία αποτελούν διατηρητικά δυναμικά συστήματα τεσσάρων διαστάσεων.

Όπως ορίσαμε και στο 1<sup>ο</sup> κεφάλαιο, ένα αυτόνομο συνεχές δυναμικό σύστημα  $n$  διαστάσεων, με δυναμικές μεταβλητές  $x_i$ , θα περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}, \quad (8.1)$$

όπου  $f_i$  συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο ανοιχτό υποσύνολο του  $R^n$ , το οποίο γράφεται συνοπτικά σε διανυσματική μορφή ως

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \triangleq (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Τα γενικά χαρακτηριστικά των τροχιών και του χώρου φάσεων αυτών των συστημάτων περιγράφηκαν στο πρώτο κεφάλαιο.

### 8.1 Το γραμμικοποιημένο σύστημα

#### 8.1.1 Γραμμικοποίηση

Θεωρούμε μια λύση  $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)=(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  του συστήματος (8.1), η οποία αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες  $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$ . Η λύση  $\mathbf{x}'=\mathbf{x}'(t)$  που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες  $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0+\boldsymbol{\chi}_0$ , όπου  $|\boldsymbol{\chi}_0| \ll |\mathbf{x}_0|$ , γράφεται ως  $\mathbf{x}'(t)=\mathbf{x}(t)+\boldsymbol{\chi}(t)$ . Αν την αντικαταστήσουμε στο σύστημα (8.1) θα πάρουμε

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + \dot{\chi}_1 &= f_1(x_1 + \chi_1, x_2 + \chi_2, \dots, x_n + \chi_n) \\ \dot{x}_2 + \dot{\chi}_2 &= f_2(x_1 + \chi_1, x_2 + \chi_2, \dots, x_n + \chi_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n + \dot{\chi}_n &= f_n(x_1 + \chi_1, x_2 + \chi_2, \dots, x_n + \chi_n) \end{aligned}, \quad \dot{\mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\chi})$$

Αν αναπτύξουμε σε σειρά Taylor γύρω από την  $\mathbf{x}(t)$  και κρατήσουμε μόνο όρους 1<sup>ης</sup> τάξης ως προς  $\boldsymbol{\chi}(t)$  θα έχουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_1 &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}(t)} \chi_1 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}(t)} \chi_2 + \dots + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}(t)} \chi_n \\ \dot{\chi}_2 &= \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}(t)} \chi_1 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}(t)} \chi_2 + \dots + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}(t)} \chi_n \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{\chi}_n &= \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}(t)} \chi_1 + \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}(t)} \chi_2 + \dots + \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}(t)} \chi_n \end{aligned}$$

ή συνοπτικά

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad (8.2)$$

όπου  $\mathbf{A}$  ο Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος (8.1) υπολογιζόμενος στη λύση  $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ .

**Σημείωση.** Οι λύσεις του γραμμικοποιημένου συστήματος (8.2) μπορούν να χρησιμοποιηθούν όπως και στην περίπτωση των μη αυτόνομων συστημάτων για τον υπολογισμό του εκθέτη Lyapunov και του γρήγορου δείκτη Lyapunov (δες §7.6).

### 8.1.2 Γραμμικοποίηση γύρω από τα σημεία ισορροπίας

Έστω μια λύση ισορροπίας  $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}^*$ , η οποία πρέπει να ικανοποιεί το αλγεβρικό σύστημα  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$ .

Στην περίπτωση αυτή ο Ιακωβιανός πίνακας  $\mathbf{A}$  για το γραμμικοποιημένο σύστημα (8.2) θα έχει σταθερά στοιχεία και, συνεπώς θα έχουμε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα με σταθερούς συντελεστές. Όπως και στις δύο διαστάσεις (δες §4.2) οι λύσεις του συστήματος εξαρτώνται από τις ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathbf{A}$ .

i) *Πραγματικές διακριτές ιδιοτιμές*  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$

Αν  $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}) (i=1, \dots, n)$  είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, τότε για κάθε ιδιοτιμή αντιστοιχεί η λύση

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{u}_i e^{\lambda_i t}, \quad \mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}), \quad (8.3)$$

και ο γραμμικός υπόχωρος

$$\frac{x_{i1}}{u_{i1}} = \frac{x_{i2}}{u_{i2}} = \dots = \frac{x_{in}}{u_{in}}. \quad (8.4)$$

Ο γραμμικός υπόχωρος (8.4) είναι ευσταθής ( $E^s$ ) αν  $\lambda_i < 0$  και ασταθής ( $E^u$ ) αν  $\lambda_i > 0$ .

Η γενική λύση του γραμμικού συστήματος προκύπτει από τον γραμμικό συνδυασμό των λύσεων (8.3). Προκύπτει ότι

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1})\mathbf{x}(0) \quad (8.5)$$

όπου  $\mathbf{P} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ ,  $\mathbf{\Lambda}(t) = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$ .

**Παράδειγμα 1.** Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\dot{x} = -y + z, \quad \dot{y} = -2x + y + 2z, \quad \dot{z} = z$$

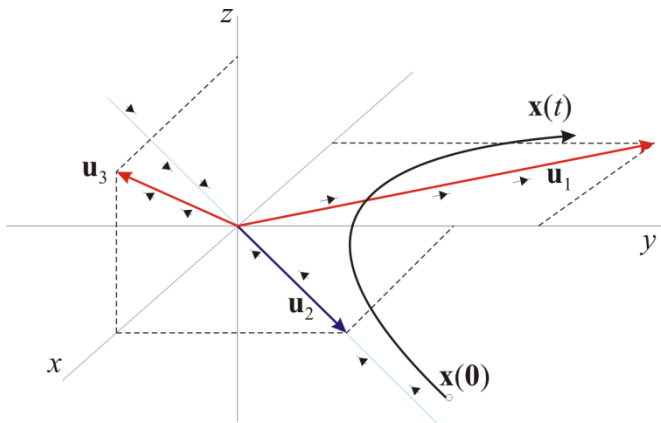
Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 1$$

και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\mathbf{u}_1 = (-1, 2, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{u}_3 = (1, 0, 1).$$

Άρα έχουμε δύο ασταθείς και έναν ευσταθή γραμμικό υπόχωρο, οι οποίοι παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 8-1. Οι διευθύνσεις  $u_i$  των γραμμικών υπόχωρων του παραδείγματος 1. Σχηματικά παρουσιάζεται μια τροχιά του συστήματος η οποία τείνει προς την διεύθυνση του ασταθή υπόχωρου με τη μέγιστη ιδιοτιμή καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

Πολλές φορές αναφερόμαστε στον **ευσταθή υπόχωρο**  $E^s$  του συστήματος ως το υπερ-επίπεδο το οποίο ορίζεται από τα ιδιοδιανύσματα των αρνητικών ιδιοτιμών. Αντίστοιχα ορίζεται και ο **ασταθής υπόχωρος**  $E^u$ . Η διάστασή τους είναι αυτή του αριθμού των ομόσημων ιδιοτιμών.

ii) *Μιγαδικές ιδιοτιμές (διακριτές)  $\lambda_i = \alpha_i \pm i\beta_i$ .*

Οι μιγαδικές ιδιοτιμές είναι πάντα ζυγές σε αριθμό αφού εμφανίζονται συζυγείς ανά ζεύγη. Θεωρούμε μια μιγαδική ιδιοτιμή  $\lambda_i = \alpha_i \pm i\beta_i$  που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{w}_i = \mathbf{u}_i + i\mathbf{v}_i$  στην ιδιοτιμή αυτήν καθώς και στη συζυγή της αντιστοιχούν οι λύσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= e^{\alpha_i t} (\mathbf{u}_i \cos \beta_i t - \mathbf{v}_i \sin \beta_i t), \\ \mathbf{x}_{i+1} &= e^{\alpha_i t} (\mathbf{u}_i \cos \beta_i t + \mathbf{v}_i \sin \beta_i t) \end{aligned} \quad (8.6)$$

Ο γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω λύσεων αποτελεί επίσης λύση του συστήματος – το ίδιο ισχύει για όλες τις λύσεις που αντιστοιχούν σε όλες τις ιδιοτιμές του συστήματος. Οι σχέσεις (8.6) εισάγουν στη γενική λύση όρους που εκφράζουν ταλαντώσεις για τις δυναμικές μεταβλητές με πλάτος που αυξάνει ή μειώνεται εκθετικά ανάλογα με το πρόσημο του πραγματικού μέρους της ιδιοτιμής.

**Παράδειγμα 2.** Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}x, \quad \dot{y} = \frac{1}{10}y - 16z, \quad \dot{z} = y + \frac{1}{10}z$$

με ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = -1/2, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{10} \pm 4i,$$

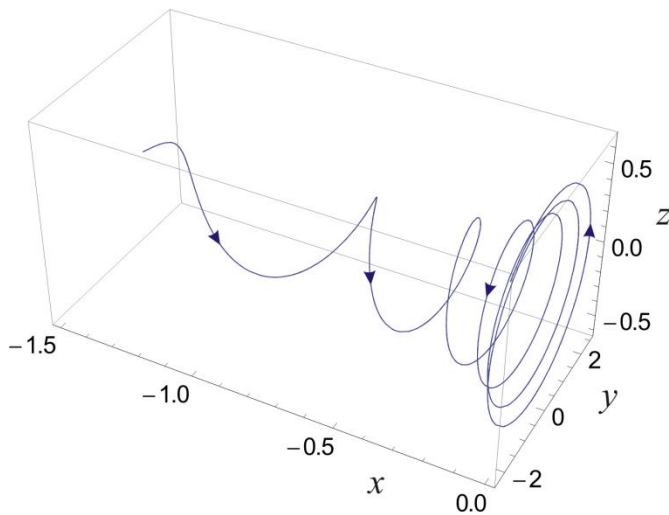
και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{w}_{2,3} = (0, \pm 4i, 1).$$

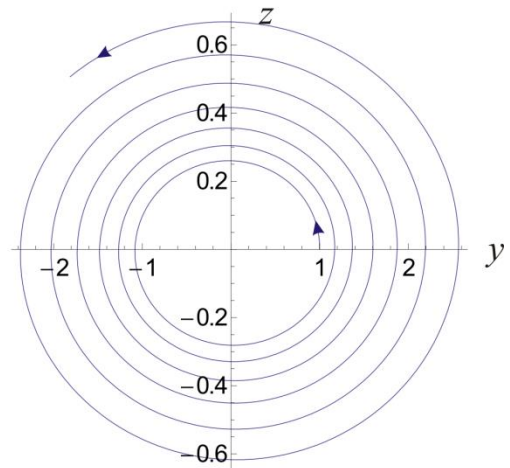
Στην πραγματική ιδιοτιμή αντιστοιχεί η λύση  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{u}_1 e^{-t/2}$  και στη μιγαδική ιδιοτιμή οι λύσεις  $\mathbf{x}_{2,3} = e^{t/10} (\mathbf{u}_{2,3} \cos 4t \pm \mathbf{v}_{2,3} \sin 4t)$ . Συνολικά παίρνουμε τη γενική λύση

$$x = c_1 e^{-t/2}, \quad y = e^{t/10} (c_2 \cos 4t - 4c_3 \sin 4t), \quad z = e^{t/10} ((c_2/4) \sin 4t + c_3 \cos 4t),$$

όπου  $c_1, c_2$  και  $c_3$  αυθαίρετες σταθερές που εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες. Ο άξονας των  $x$  αποτελεί τον ευσταθή γραμμικό υπόχωρο, ενώ στο επίπεδο  $yz$  έχουμε ταλαντώσεις με αυξανόμενο πλάτος. Μια τυπική μορφή φασικής τροχιάς παρουσιάζεται στο Σχήμα 8-2.



(α)



(β)

Σχήμα 8-2. (α) φασική τροχιά του συστήματος του παραδείγματος 2 για αρχικές συνθήκες  $x(0)=-1.5, y(0)=1, z(0)=0$ . (β) η προβολή της τροχιάς στο επίπεδο  $yz$ .

Αν οι ιδιοτιμές είναι καθαρά φανταστικές τότε οι αντίστοιχες λύσεις δεν περιέχουν εκθετικούς όρους αλλά μόνο τριγωνομετρικούς. Στην περίπτωση αυτή τα φανταστικά ιδιοδιανύσματα ορίζουν ένα (υπερ)επίπεδο, το οποίο ονομάζεται **κεντρικός υπόχωρος** ( $E^c$ ). Ξεκινώντας με αρχικές συνθήκες σε αυτόν τον υπόχωρο, έχουμε ως λύσεις περιοδικές ή ημιπεριοδικές ταλαντώσεις.

### iii) Πολλαπλές ιδιοτιμές

Αν έχουμε δύο ή περισσότερες ίσες ιδιοτιμές τότε εν γένει σε αυτές ορίζονται τα ίδια ιδιοδιανύσματα, οι αντίστοιχοι γραμμικοί υπόχωροι και οι αντίστοιχες ανεξάρτητες λύσεις όπως παραπάνω. Οι  $n$  ανεξάρτητες λύσεις  $x_i=x_i(t)$  που απαιτούνται για το σχηματισμό της γενικής λύσης συμπληρώνονται με αιώνιους όρους της μορφής  $t^k \mathbf{u} e^{\lambda t}$ . Αν στις ίσες ιδιοτιμές αντιστοιχούν διαφορετικά ιδιοδιανύσματα τότε ισχύουν ότι αναφέραμε στις προηγούμενες περιπτώσεις.

### Παράδειγμα 3. Το σύστημα

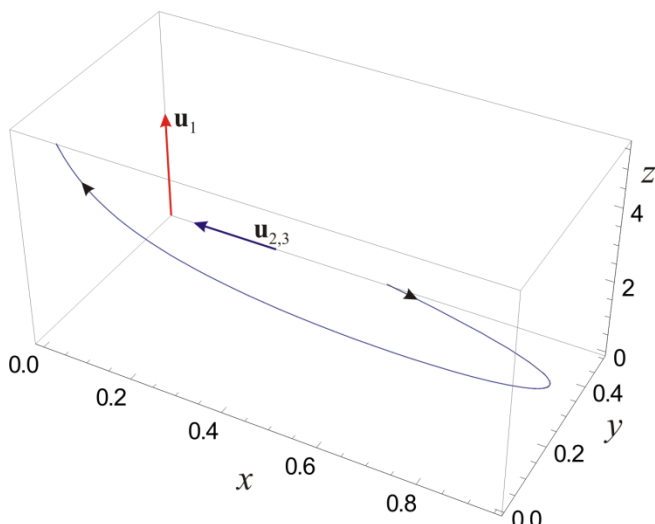
$$\dot{x} = -x + ay, \quad \dot{y} = -y, \quad \dot{z} = ay + z/4 \quad (a \neq 0)$$

έχει ιδιοτιμές την  $\lambda_1=1/4$  με ιδιοδιάνυσμα το  $\mathbf{u}_1=(0,0,1)$ , και την  $\lambda_{2,3}=-1$  (διπλή) με ιδιοδιάνυσμα το  $\mathbf{u}_{2,3}=(1,0,0)$ . Η γενική λύση του συστήματος θα είναι η

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 a t e^{-t}, \quad y = c_2 e^{-t}, \quad z = -\frac{4}{5} a c_2 e^{-t} + \left( \frac{4}{5} a c_2 + c_3 \right) e^{t/4}$$

Στο Σχήμα 8-3 παρουσιάζεται η φασική καμπύλη μιας τυπικής λύσης. Παρατηρούμε ότι αν και  $\lambda_{2,3} < 0$ , το  $x(t)$  αυξάνει αρχικά λόγω του *αιώνιου* όρου  $t e^{-t}$ . Όμως καθώς  $t \rightarrow \infty$  το  $x(t)$  ακολουθεί τον ευσταθή υπόχωρο  $\mathbf{u}_{2,3}$  και τείνει προς το μηδέν. Επίσης η λύση οδηγείται και από τον ασταθή υπόχωρο  $\mathbf{u}_1$  και η φασική καμπύλη ακολουθεί τελικά τον άξονα  $z$ .





Σχήμα 8-3. Φασική τροχιά για το σύστημα του παραδείγματος 3 με αρχικές συνθήκες  $x(0)=0.5$ ,  $y(0)=0.5$ ,  $z(0)=0$  και  $a=4$ .

## Ασκήσεις

**Άσκηση 8.1.1.** Βρείτε τις ιδιοτιμές και περιγράψτε την ευστάθεια του κρίσιμου σημείου  $(0,0,0)$  για το γραμμικό σύστημα

$$\dot{x} = x + 2z, \quad \dot{y} = y - 3z, \quad \dot{z} = 2y + z.$$

**Άσκηση 8.1.2.** Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\dot{x} = y - x, \quad \dot{y} = y - 17x + 16, \quad \dot{z} = -z$$

Βρείτε την αναλυτική λύση του συστήματος. Πως χαρακτηρίζετε την ευστάθεια του σημείου  $(0,0,0)$ ; Σχεδιάστε πρόχειρα την συμπεριφορά μιας τροχιάς με αρχικές συνθήκες  $x(0)=y(0)=z(0)=1$ .

## 8.2 Δυναμική του μη γραμμικού συστήματος

Το γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από ένα σημείο ισορροπίας μας δίνει λύσεις οι οποίες θα πρέπει να προσεγγίζουν τις λύσεις του μη γραμμικού συστήματος πολύ κοντά στο σημείο ισορροπίας. Σε αναλογία με αυτά που αναφέραμε στην §4.4 και το θεώρημα Hartman-Grobman, η τοπολογία του χώρου των φάσεων του μη γραμμικού συστήματος παρουσιάζει την ίδια εικόνα με αυτήν του γραμμικοποιημένου συστήματος μόνο αν

$$\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Όταν το σημείο ισορροπίας είναι μη-υπερβολικό, δηλαδή έχει κάποια ιδιοτιμή με μηδενικό πραγματικό μέρος τότε η ισοδυναμία μεταξύ του γραμμικοποιημένου και του μη γραμμικού συστήματος μπορεί να μην ισχύει. Δίνουμε τα παρακάτω θεωρήματα:

- **Θεώρημα 1.** Έστω το μη γραμμικό σύστημα (8.1) και  $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$  ένα σημείο ισορροπίας στο οποίο αντιστοιχεί ο ιακωβιανός πίνακας  $\mathbf{A}$  του γραμμικοποιημένου συστήματος. Έστω ότι ο  $\mathbf{A}$  δεν διαθέτει ιδιοτιμές με μηδενικό πραγματικό μέρος και επίσης το γραμμικοποιημένο σύστημα έχει έναν ευσταθή  $\mathbf{E}^s$  και έναν ασταθή υπόχωρο  $\mathbf{E}^u$  με διάσταση  $n_s$  και  $n_u$ , αντίστοιχα. Τότε σε μια μικρή περιοχή του  $\mathbf{x}^*$ , το μη γραμμικό σύστημα διαθέτει μια ευσταθή πολλαπλότητα  $\mathbf{W}^s$  και μια ασταθή πολλαπλότητα  $\mathbf{W}^u$  με διαστάσεις  $n_s$  και  $n_u$ , αντίστοιχα. Μάλιστα οι  $\mathbf{W}^s$  και  $\mathbf{W}^u$  εφάπτονται στους υπόχωρους  $\mathbf{E}^s$  και  $\mathbf{E}^u$  αντίστοιχα.

Αν ο πίνακας  $\mathbf{A}$  έχει ιδιοτιμές με πραγματικό μέρος μηδέν, τότε υπάρχει τουλάχιστον μια **κεντρική πολλαπλότητα** ([center manifold](#)) και ισχύει το παρακάτω θεώρημα (*θεώρημα κεντρικής πολλαπλότητας*)

- **Θεώρημα 2.** Αν ο πίνακας  $A$  του γραμμικοποιημένου συστήματος στο σημείο ισορροπίας  $x=x^*$  έχει  $n_s$  ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος,  $n_u$  ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος, και  $n_c=n-n_s-n_u$  ιδιοτιμές με μηδενικό πραγματικό μέρος, τότε υπάρχει μια κεντρική πολλαπλότητα  $W^c$  με διάσταση  $n_c$  η οποία εφάπτεται στον γραμμικό κεντρικό υπόχωρο  $E^c$  του γραμμικοποιημένου συστήματος.

Ένα σημείο ισορροπίας είναι *ασυμπτωτικά ευσταθές* αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του γραμμικοποιημένου συστήματος έχουν πραγματικό μέρος αρνητικό. Αν έστω και μια ιδιοτιμή έχει πραγματικό μέρος θετικό, τότε το σημείο ισορροπίας θα είναι *ασυμπτωτικά ασταθές*. Αν το σημείο ισορροπίας είναι *μη-υπερβολικό*, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή με πραγματικό μέρος ίσο με το μηδέν, τότε η ευστάθειά του μπορεί να μελετηθεί με τη [μέθοδο του Lyapunov](#) (δες §4.3.3).

Τα μη γραμμικά και μη διατηρητικά συστήματα με διάσταση  $n \geq 3$ , εκτός από ασυμπτωτικά ευσταθή σημεία ισορροπίας, στα οποία καταλήγουν οι φασικές καμπύλες καθώς  $t \rightarrow \infty$ , μπορούμε να έχουμε και ελκτικά σύνολα μη μηδενικής διάστασης, τα οποία καλούμε **ελκυστές** (attractors). Ένα τέτοιο σύνολο, διάστασης ένα, είναι ο οριακός κύκλος που γνωρίσαμε στα επίπεδα συστήματα (δες κεφάλαιο 5). Γενικά ένας ελκυστής είναι ένα αναλλοίωτο σύνολο του χώρου φάσεων του συστήματος στο οποίο τείνουν ασυμπτωτικά οι τροχιές με αρχικές συνθήκες σε μια περιοχή της γειτονιάς του ελκυστή. Η περιοχή αυτή ονομάζεται *λεκάνη έλξης* ([basin of attraction](#)). Επίσης στα παραπάνω συστήματα μπορούμε να έχουμε και [παράξενους ελκυστές](#). Το αναλλοίωτο σύνολο ενός παράξενου ελκυστή έχει γενικά κλασματική διάσταση και παρουσιάζει ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες. Συνεπώς η εξέλιξη του δυναμικού συστήματος είναι χαοτική. Έναν παράξενo ελκυστή γνωρίσαμε στο μη αυτόνομο απωλεστικό σύστημα Duffing (δες §7.5).

## Ασκήσεις

**Άσκηση 8.2.1.** Βρείτε και ταξινομήστε ως προς την ευστάθεια τα σημεία ισορροπίας του συστήματος

$$\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = y + y^2, \quad \dot{z} = x - z.$$

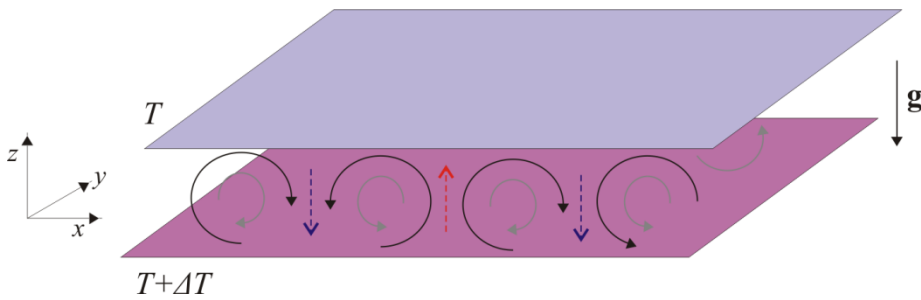
**Άσκηση 8.2.2.** Βρείτε τις ιδιοτιμές και περιγράψτε την ευστάθεια του κρίσιμου σημείου  $(0,0,0)$  για το μη γραμμικό σύστημα

$$\dot{x} = -ax + xyz, \quad \dot{y} = -by + xyz, \quad \dot{z} = -cz + xyz,$$

όπου  $a, b, c$  πραγματικές σταθερές.

## 8.3 Το σύστημα του Lorenz

Οι Reyleigh και Bernard μελέτησαν την κίνηση ενός ρευστού και την ροή της θερμοκρασίας μεταξύ δύο πλακών διαφορετικής θερμοκρασίας (δες Σχήμα 8-4). Για μικρή διαφορά θερμοκρασίας  $\Delta T$  μεταξύ των πλακών, η μεταφορά θερμικής ενέργειας γίνεται μέσω θερμικής αγωγιμότητας (heat conduction) χωρίς κίνηση του ρευστού. Όταν όμως η διαφορά θερμοκρασίας μεγαλώσει αρκετά τότε παρατηρείται μεταφορά θερμοκρασίας μέσω κίνησης του ρευστού (fluid convection). Ο Reyleigh παρατήρησε τον σχηματισμό κυλινδρικών ρολών από το ρευστό με εναλλασσόμενη διεύθυνση περιστροφής. Έτσι, ανάμεσα στους κυλίνδρους δημιουργούνται περιοχές με καθοδικά ρεύματα και περιοχές με ανοδικά ρεύματα. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως [Rayleigh-Bernard convection](#).



Σχήμα 8-4. Σχηματική παράσταση του φαινομένου “Rayleigh-Bernard convection”.

Ο [Lorenz](#) μελέτησε το παραπάνω φαινόμενο στην ατμοσφαιρική ροή θεωρώντας την πάνω πλάκα να αντιπροσωπεύει ένα ανώτερο στρώμα ατμόσφαιρας και την κάτω πλάκα ως την επιφάνεια της Γης. Η προσπάθειά του να βρει προσεγγιστικές λύσεις 1<sup>ης</sup> τάξης για την κατανομή θερμότητας στο χώρο και το πεδίο ταχυτήτων κατέληξε σε ένα δυναμικό σύστημα γνωστό ως το μοντέλο του Lorenz.

### 8.3.1 Το μοντέλο του Lorenz

Στο χώρο  $xyz$  μεταξύ των πλακών στο Σχήμα 8-4, θεωρούμε το πεδίο ταχυτήτων του ρευστού

$$\mathbf{u} = u_x(x, y, z, t)\mathbf{i} + u_y(x, y, z, t)\mathbf{j} + u_z(x, y, z, t)\mathbf{k},$$

και τη συνάρτηση θερμοκρασίας

$$T = T(x, y, z, t).$$

Θεωρούμε ομογένεια ως προς τον άξονα των  $y$ , δηλαδή

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}(x, 0, z, t), \quad T(x, y, z, t) = T(x, 0, z, t) \quad \forall y.$$

Οι βασικές εξισώσεις που περιγράφουν την εξέλιξη του πεδίου ταχυτήτων και της θερμοκρασιακής κατανομής είναι οι ακόλουθες

i) Οι εξισώσεις *Navier-Stokes*

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (8.7)$$

όπου  $\rho$  πυκνότητα του ρευστού,  $p$  η πίεση και  $\mu = \rho\nu$ , όπου  $\nu$  είναι ο συντελεστής ιξώδους. Το διάνυσμα  $\mathbf{F}$  παριστάνει την πυκνότητα των εξωτερικών δυνάμεων που στην προκειμένη περίπτωση είναι η βαρύτητα

$$\mathbf{F} = \rho g \mathbf{k}$$

ii) Η εξίσωση της *θερμικής αγωγιμότητας*

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \nabla^2 T, \quad (8.8)$$

όπου  $T$  η θερμοκρασία και  $\kappa$  ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας. Επίσης θεωρούμε τις συνοριακές συνθήκες

$$T(x, y, z=0, t) = T_0 + \Delta T, \quad T(x, y, z=h, t) = T_0$$

όπου  $h$  το ύψος του πάνω ορίου της ατμόσφαιρας.

iii) Η *εξίσωση της συνέχειας*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (8.9)$$

Επίσης κάνουμε τις παρακάτω απλουστεύσεις

α) Θεωρούμε ότι το σύστημα είναι πρακτικά απεριόριστο κατά τη διεύθυνση του άξονα  $y$ .

β) Παραβλέπουμε την εξάρτηση όλων των συντελεστών από τη διαφορά θερμοκρασίας  $\Delta T = T - T_0$ , εκτός της πυκνότητας για την οποία ισχύει

$$\rho = \rho_0(1 - aT) \quad (8.10)$$

όπου  $a$  είναι συντελεστής θερμικής διαστολής του ρευστού,  $\rho_0$  η αρχική τιμή της πυκνότητας και θεωρούμε  $\mu = \rho_0 \nu = \text{σταθ.}$

γ) Δεχόμαστε ότι το ρευστό του συστήματος είναι ασυμπίεστο και κατά προσέγγιση δισδιάστατο, αφού οι κύλινδροι εκτείνονται πρακτικά μέχρι το άπειρο.

$$\nabla \bar{u}(x, z, t) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (8.11)$$

Από την παραδοχή (γ) προκύπτει πως υπάρχει συνάρτηση  $\psi = \psi(x, z, t)$  τέτοια ώστε το πεδίο ταχυτήτων να δίνεται από τις σχέσεις

$$u_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (8.12)$$

Επίσης ορίζουμε την συνάρτηση  $\theta = \theta(x, z, t)$ , η οποία εκφράζει την εκτροπή της θερμοκρασίας από την γραμμικότητα, συγκεκριμένα θεωρούμε

$$T = T(x, z, t) = T_0 + \Delta T - \frac{\Delta T}{h} z + \theta(x, z, t) \quad (8.13)$$

Γραμμική μεταβολή Μη γραμμική μεταβολή

Αν υπολογιστούν οι συναρτήσεις  $\psi$  και  $\theta$  τότε οι κατανομές ταχυτήτας και θερμοκρασίας  $T$  γίνονται γνωστές μέσω των σχέσεων (8.12) και (8.13) αντίστοιχα.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (8.12) και (8.13) στις εξισώσεις (8.7) και (8.8) παίρνουμε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial t} &= -\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, z)} + \nu \nabla^4 \psi + ga \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= -\frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\Delta T}{h} + \kappa \nabla^2 T \end{aligned} \quad (8.14)$$

Θεωρούμε λύσεις της μορφής (πρώτοι όροι της σειράς Fourier)

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(x, z, t) = \frac{\kappa(1+a^2)}{a} \sqrt{2} X(t) \sin\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \\ \theta &= \theta(x, z, t) = \frac{R_c \Delta T}{\pi R} \left[ \sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h} z\right) \right] \end{aligned} \quad (8.15)$$

όπου

$$R = \frac{gah^3 \Delta T}{\nu \kappa}, \quad R_c = \frac{\pi^4 (1+a^2)^3}{a^2}$$

Οι συναρτήσεις  $X=X(t)$ ,  $Y=Y(t)$  και  $Z=Z(t)$  αποτελούν τους συντελεστές στη σειρά Fourier, θεωρούνται μόνο συναρτήσεις του χρόνου και οι οποίοι πρέπει να υπολογιστούν για να πάρουμε την κατανομή των συναρτήσεων  $\psi$  και  $\theta$ . Αντικαθιστώντας τις (8.15) στις (8.14), και δεδομένου ότι  $\partial X / \partial t = \dot{X}$  κοκ, παίρνουμε το δυναμικό σύστημα του Lorenz

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= \sigma(Y - X) \\
\dot{Y} &= -XZ + rX - Y \\
\dot{Z} &= XY - bZ
\end{aligned} \tag{8.16}$$

όπου

$$\sigma = \frac{\nu}{\kappa} > 0, \quad b = \frac{1}{1+a^2} > 0, \quad r = \frac{R_c}{R} > 0$$

### 8.3.2 Σημεία ισοροπίας και ασυμπτωτική ευστάθεια

Τα σημεία ισοροπίας του (8.16) θα προκύψουν από τις εξισώσεις

$$\sigma(Y - X) = 0, \quad -XZ + rX - Y = 0, \quad XY - bZ = 0,$$

οι οποίες μας δίνουν

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 : (X_1^*, Y_1^*, Z_1^*) &= (0, 0, 0) \\
\Sigma_2 : (X_2^*, Y_2^*, Z_2^*) &= (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, (r-1)) \\
\Sigma_3 : (X_3^*, Y_3^*, Z_3^*) &= (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, (r-1))
\end{aligned} \tag{8.17}$$

Προφανώς τα σημεία  $\Sigma_2$  και  $\Sigma_3$  υπάρχουν για  $r > 1$ , άρα στο  $r=1$  έχουμε μια διακλάδωση διχάλας. Ο πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος θα είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-Z & -1 & -X \\ Y & X & -b \end{pmatrix}.$$

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε το σύστημα για την τυπική τιμή

$$b=3.$$

**Σημείωση.** Ο Lorenz είχε χρησιμοποιήσει την τιμή  $b=8/3$  και αυτή χρησιμοποιείται κυρίως στη βιβλιογραφία. Τα αποτελέσματα είναι ποιοτικά τα ίδια με την περίπτωση  $b=3$ .

**i) Ευστάθεια του  $\Sigma_1$ .**

Οι ιδιοτιμές θα είναι οι

$$\lambda_1 = -b, \quad \lambda_2 = \frac{-(\sigma+1) + \sqrt{(\sigma+1)^2 + 4\sigma(r-1)}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{-(\sigma+1) - \sqrt{(\sigma+1)^2 + 4\sigma(r-1)}}{2}$$

και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$u_1 = (0, 0, 1), \quad u_2 = \left( \frac{1 - \sigma - \sqrt{(\sigma+1)^2 + 4\sigma(r-1)}}{2r}, 1, 0 \right), \quad u_3 = \left( \frac{1 - \sigma + \sqrt{(\sigma+1)^2 + 4\sigma(r-1)}}{2r}, 1, 0 \right)$$

Για  $r < 1$  όλες οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές και συνεπώς τα τρία ιδιοδιανύσματα ορίζουν τρεις ευσταθείς γραμμικούς υπόχωρους. Άρα το  $(0, 0, 0)$  είναι το μοναδικό σημείο ισοροπίας (ασυμπτωτικά ευσταθές) και αποτελεί έναν ελκυστή με λεκάνη έλξης όλο το χώρο φάσεων. Για  $r > 1$ , η  $\lambda_3$  γίνεται θετική και η διεύθυνση του  $u_3$  γίνεται ασταθής γραμμικός υπόχωρος, ενώ το επίπεδο που ορίζουν τα  $u_1$  και  $u_2$  αποτελεί έναν ευσταθή υπόχωρο.

**ii) Ευστάθεια των  $\Sigma_2, \Sigma_3$ .**

Οι ιδιοτιμές (και για τα δύο σημεία) δίνονται από τις σχέσεις

$$\lambda_1 = \frac{1}{6} \left[ -2(4 + \sigma) - \frac{2^{4/3} B}{(A - C)^{1/3}} + 2^{2/3} (A - C)^{1/3} \right]$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{12} \left( \left[ -4(4 + \sigma) + \frac{2^{4/3} B}{(A - C)^{1/3}} - 2^{2/3} (A - C)^{1/3} \right] + i \left[ \frac{2^{4/3} B \sqrt{3}}{(A - C)^{1/3}} + 2^{2/3} \sqrt{3} (A - C)^{1/3} \right] \right)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{12} \left( \left[ -4(4 + \sigma) + \frac{2^{4/3} B}{(A - C)^{1/3}} - 2^{2/3} (A - C)^{1/3} \right] - i \left[ \frac{2^{4/3} B \sqrt{3}}{(A - C)^{1/3}} + 2^{2/3} \sqrt{3} (A - C)^{1/3} \right] \right)$$

όπου

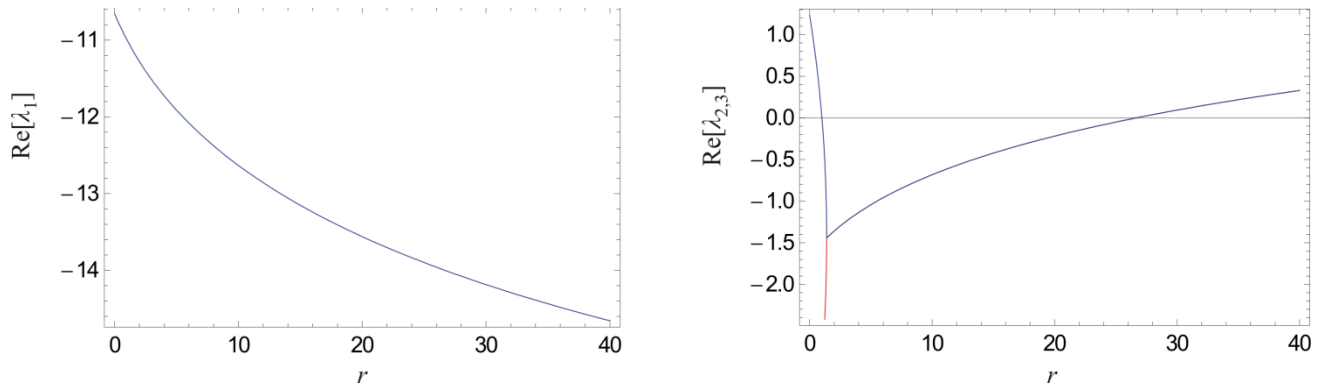
$$A = \sqrt{4(-16 + 9r + \sigma - \sigma^2) + (162(r - 1)\sigma + 2(4 + \sigma)^3 - 27(4 + \sigma)(r + \sigma))^2}$$

$$B = -16 + 9r + \sigma - \sigma^2$$

$$C = 162(r - 1)\sigma + 2(4 + \sigma)^3 - 27(4 + \sigma)(r + \sigma)$$

Βρίσκουμε ότι η  $\lambda_1$  είναι πάντα πραγματική και αρνητική. Οι  $\lambda_2$  και  $\lambda_3$  γίνονται μιγαδικές για  $r > r_1$  (όταν  $A > C$ ). Το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών ως συνάρτηση της παραμέτρου  $r$  παρουσιάζεται στο Σχήμα 8-5 για  $\sigma = 10$ . Παρατηρούμε ότι το πραγματικό μέρος των  $\lambda_2, \lambda_3$  είναι αρχικά επίσης αρνητικό, όμως γίνεται θετικό μετά την κρίσιμη τιμή  $r > r_c$  όπου

$$r_c = \frac{\sigma(\sigma + 6)}{\sigma - 4}$$



Σχήμα 8-5. Το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών για τα σημεία ισορροπίας  $\Sigma_2, \Sigma_3$  όπου θέσαμε  $\sigma = 10$ . Για την τιμή αυτή είναι  $r_1 \approx 1.3714$  και η κρίσιμη τιμή είναι  $r_c = 26.6666$ .

Σε αντιστοιχία με τα επίπεδα συστήματα μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τα σημεία  $\Sigma_2$  και  $\Sigma_3$  ως ευσταθείς κόμβους για  $r < r_1$  και για μεγαλύτερες τιμές και έως την κρίσιμη τιμή  $r_c$  ως ευσταθείς εστίες. Για  $r > r_c$  δεν υπάρχει κανένα ευσταθές σημείο ισορροπίας για το σύστημα.

### 8.3.3 Τροχιές

Το σύστημα (8.16) είναι μη γραμμικό και απωλεστικό αφού η απόκλιση του διανυσματικού του πεδίου είναι

$$\nabla \mathbf{f} = -(\sigma + b + 1) < 0$$

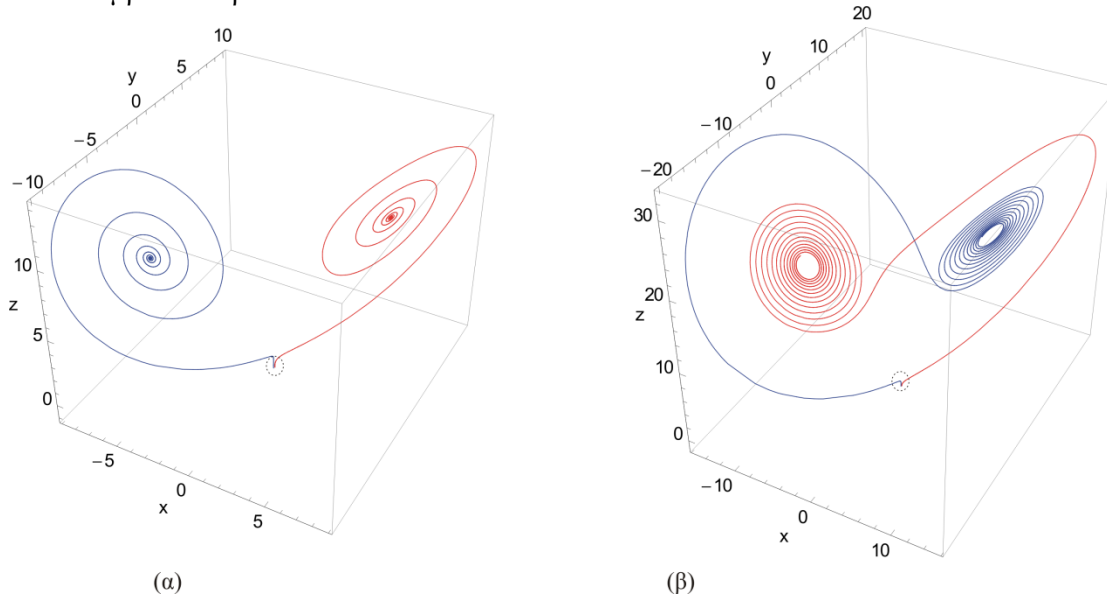
Συνεπώς καθώς  $t \rightarrow \infty$ , οι όγκοι στο χώρο φάσεων πρέπει να τείνουν στο μηδέν, δηλαδή οι τροχιές θα πρέπει να τείνουν προς ένα υποσύνολο  $U$  του χώρου φάσεων με

$$\dim U < 3$$

Επίσης παρατηρούμε ότι ο άξονας  $Oz$  είναι αναλλοίωτος, και το σύστημα έχει την συμμετρία

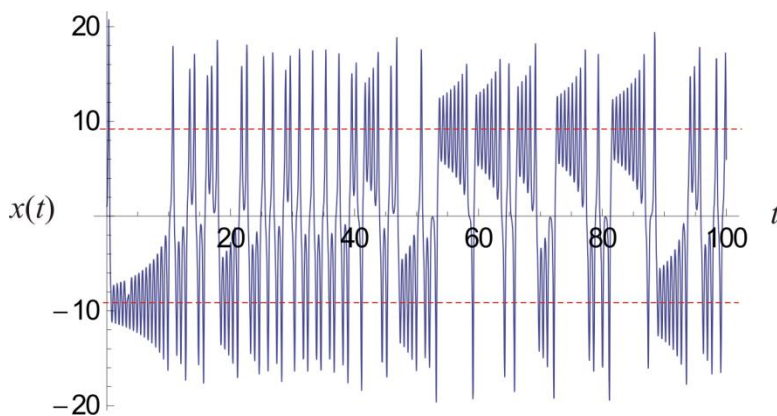
$$(X, Y, Z) \rightarrow (-X, -Y, Z)$$

Όπως έχουμε αναφέρει, για  $r < 1$  το σύστημα έχει ένα ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο στο  $(0,0,0)$ , το οποίο αποτελεί έλκυστή για όλες τις τροχιές του συστήματος. Για  $1 < r < r_c$  έχουμε δύο ευσταθή ασυμπτωτικά σημεία ισορροπίας, τα οποία αποτελούν έλκτες για τις τροχιές. Ένα παράδειγμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 8-1. Παρατηρούμε ότι για  $r=20$  οι τροχιές περνούν από την περιοχή μιας εστίας αλλά στη συνέχεια καταλήγουν στην άλλη εστία. Αυτό οφείλεται στην ύπαρξη μιας «ομοκλινικής διακλάδωσης» (βλ. §6.3.3), η οποία συμβαίνει περίπου στο  $r \approx 14$ .



Σχήμα 8-6. Τροχιές (με αρχικές συνθήκες μέσα στον διακεκομμένο κύκλο) α)  $r=10$  β)  $r=20$ .

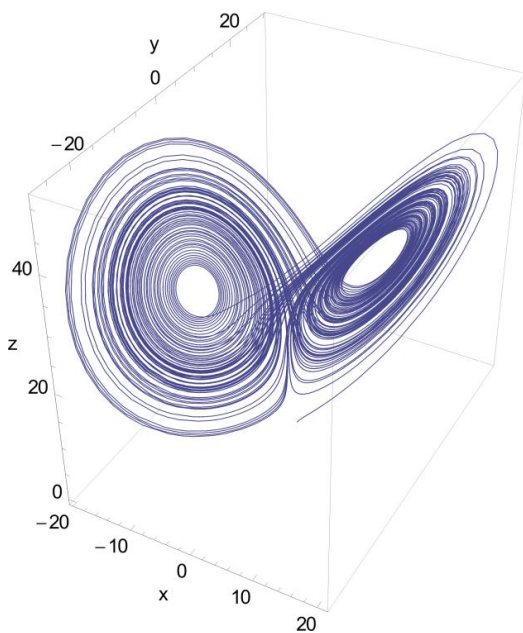
Για  $r > r_c$  τα σημεία  $\Sigma_2$  και  $\Sigma_3$  χάνουν την ασυμπτωτική τους ευστάθεια ενώ το  $\Sigma_1$  παραμένει επίσης ευσταθές. Όμως, αφού το σύστημα είναι απωλεστικό θα πρέπει να υπάρχει κάποιος έλκτης για τις τροχιές. Αυτό που συμβαίνει στο  $r=r_c$  είναι μια διακλάδωση Hopf (δες §6.3.1) με την δημιουργία ασταθών οριακών κύκλων γύρω από τα  $\Sigma_2$  και  $\Sigma_3$  οι οποίοι υπάρχουν για  $r < r_c$  (υποκρίσιμη διακλάδωση). Για  $r > r_c$  οι τροχιές γυρίζουν γύρω από τα  $\Sigma_2$  και  $\Sigma_3$  χωρίς να καταλήγουν σε ένα από αυτά, αφού είναι ασταθή. Μάλιστα η δυαδική ακολουθία που περιγράφει τις περιστροφές γύρω από το σημείο  $\Sigma_1$  και γύρω από το  $\Sigma_2$  μοιάζει τυχαία όπως φαίνεται και από τη χρονική εξέλιξη της μεταβλητής  $X=X(t)$  στο Σχήμα 8-7.



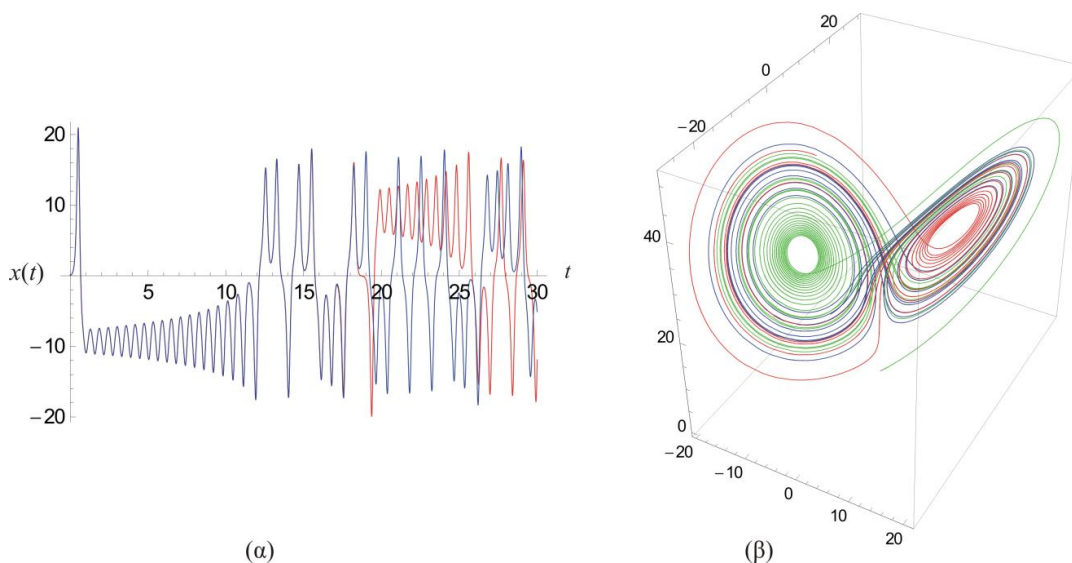
Σχήμα 8-7. Η χρονική εξέλιξη της μεταβλητής  $x=x(t)$  για μια τροχιά του συστήματος με  $r=30$ .

Η φασική τροχιά στο τρισδιάστατο χώρο φάσεων έχει τη μορφή του παρακάτω σχήματος (Σχήμα 8-8) και είναι γνωστή ως η *πεταλούδα του Lorenz*. Καθώς η τροχιά εξελίσσεται, συνεχώς ακολουθεί νέα μονοπάτια αλλά για μεγάλους χρόνους η τροχιά φαίνεται να περιορίζεται σε ένα συγκεκριμένο υποσύνολο του χώρου φάσεων με κλασματική διάσταση ( $\dim U \approx 2.1$ ). Το υποσύνολο αυτό αποτελεί έναν **παράξενο ελκυστή**, ο οποίος έλκει όλες τις τροχιές του συστήματος.

Μια ακόμη χαρακτηριστική ιδιότητα του παράξενου ελκυστή είναι η ευαίσθητη εξάρτηση των τροχιών ως προς τις αρχικές συνθήκες. Ένα παράδειγμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 8-9. Ξεκινώντας δύο τροχιές με κοντινές αρχικές συνθήκες αυτές εξελίσσονται αρχικά παρόμοια. Όμως κάποια χρονική στιγμή οι δύο τροχιές διαχωρίζονται και ακολουθούν ασυσχέτιστες ταλαντώσεις ή, ισοδύναμα, ακολουθούν διαφορετικά μονοπάτια στο χώρο των φάσεων. Το χαρακτηριστικό αυτό αποτελεί την βασική ιδιότητα της χαοτικής συμπεριφοράς, όπως είδαμε και στον παράξενο ελκυστή της εξίσωσης Duffing (δες §7.5.2).



Σχήμα 8-8. Ο παράξενος ελκυστής του Lorenz ( $\sigma=10, \beta=3, r=30$ ).



Σχήμα 8-9. Η εξέλιξη δύο τροχιών με κοντινές αρχικές συνθήκες  $X(0)=0.1$  (κόκκινη) και  $X(0)=0.101$  (μπλέ) ( $Y(0)=Z(0)=0.1$ ) α) η χρονική εξέλιξη της μεταβλητής  $X=X(t)$ . Για  $t > 18.5$  οι ταλαντώσεις γίνονται ασυσχέτιστες β) τα μονοπάτια των τροχιών στο χώρο φάσεων. Με πράσινο χρώμα δηλώνεται το μονοπάτι όπου οι δύο τροχιές εξελίσσονται μαζί ( $t < 18.5$ ). Στη συνέχεια οι δύο τροχιές ακολουθούν διαφορετικά μονοπάτια, το κόκκινο και το μπλε, αντίστοιχα.



## Ασκήσεις

**Άσκηση 8.3.1.** Ο Lorenz χρησιμοποίησε για το σύστημα (8.16) τις παραμέτρους  $\sigma=10$  και  $b=8/3$ . Για ποια τιμή του  $r$  δημιουργείται παράξενος ελκυστής.

**Άσκηση 8.3.2.** Για το δυναμικό σύστημα του Rossler

$$\dot{x} = -(y+z), \quad \dot{y} = x+0.2y, \quad \dot{z} = 0.2+z(x-c)$$

- Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και την ευστάθειά τους για  $c=-0.5$ ,  $c=1.5$  και  $c=10$ .
- Σχεδιάστε τον οριακό κύκλο του συστήματος για  $c=1.5$  και βρείτε την περίοδό του.
- Σχεδιάστε τον ελκυστή που παρουσιάζεται για  $c=5$ .
- Για ποια τιμή του  $c>3$  (προσεγγιστικά) παρουσιάζεται για πρώτη φορά παράξενος ελκυστής;

**Άσκηση 8.3.3.** Το [σύστημα του Rossler](#) περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\dot{x} = -(y+z), \quad \dot{y} = a+ay, \quad \dot{z} = b-cz+zx,$$

όπου  $a, b, c$  πραγματικές θετικές σταθερές.

- Βρείτε αναλυτικά τα σημεία ισορροπίας του συστήματος και δείξτε ότι υπάρχουν μόνο για  $c > \sqrt{4ab}$ .
- Βρείτε την τριτοβάθμια εξίσωση που δίνει τις ιδιοτιμές του γραμμικοποιημένου συστήματος στα σημεία ισορροπίας.
- Για  $a=b=1/4$  σχεδιάστε το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών ως συνάρτηση του  $c$ . Για ποια τιμή του  $c$  όλες οι ιδιοτιμές έχουν θετικό πραγματικό μέρος;

## 8.4 Χαμιλτονιανά Συστήματα

Ένα Χαμιλτονιανό σύστημα  $n$  βαθμών ελευθερίας περιγράφεται από  $2n$  δυναμικές μεταβλητές  $q_i, p_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , και τις εξισώσεις

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8.18)$$

όπου

$$H = H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t) \quad (8.19)$$

η **συνάρτηση Χάμιλτον** του συστήματος. Οι μεταβλητές  $q_i, p_i$  καλούνται *συζυγείς κανονικές μεταβλητές* (γενικευμένες συντεταγμένες και γενικευμένες ορμές, αντίστοιχα). Η ιδιαίτερη δομή των εξισώσεων που παρουσιάζουν τα Χαμιλτονιανά συστήματα (8.18) ονομάζεται [συμπλεκτική δομή](#). Επίσης, όπως είδαμε στην §1.4.1 τα συστήματα αυτά είναι διατηρητικά.

Τα Χαμιλτονιανά συστήματα αποτελούν έναν μεγάλο κλάδο των δυναμικών συστημάτων με συγκεκριμένη μαθηματική θεωρία και σημαντικές εφαρμογές κυρίως σε θέματα θεωρητικής Φυσικής. Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε μόνο περιγραφικά τα σημαντικότερα στοιχεία της δυναμικής τους και θα αναφερθούμε μόνο σε **συστήματα δύο βαθμών ελευθερίας** ( $n=2$ ). Τα συστήματα με  $n>2$  παρουσιάζουν ιδιαίτερα δυναμικά χαρακτηριστικά και η πλήρη μελέτη τους, έστω και υπολογιστικά, είναι ιδιαίτερα σύνθετη. Ο αναγνώστης μπορεί να απευθυνθεί στην υπάρχουσα πλούσια βιβλιογραφία των Χαμιλτονιανών συστημάτων.

### 8.4.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί

Έστω ένα Χαμιλτονιανό σύστημα με  $n=2$  και  $H=H(x,y,p_x,p_y)$ . Ο χώρος φάσεων είναι τεσσάρων διαστάσεων και οι εξισώσεις του συστήματος θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x}, & \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y}, & \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Σε μια μεγάλη κατηγορία μηχανικών συστημάτων, τα οποία περιγράφουν την κίνηση ενός υλικού σημείου μάζας  $m$  μέσα σε δυναμικό  $V=V(x,y)$ , η συνάρτηση Χάμιλτον ορίζεται ως

$$H = T + V = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y) \quad (8.21)$$

όπου  $p_x = m\dot{x}$ ,  $p_y = m\dot{y}$  οι συνιστώσες της ορμής του υλικού σημείου. Αν εφαρμόσουμε τις (8.20) στην (8.21) τότε παίρνουμε τις διαφορικές εξισώσεις του Νεύτωνα

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

**Σχόλιο.** Αν θεωρήσουμε μια αλλαγή μεταβλητών  $(x,y,p_x,p_y) \rightarrow (x',y',p_x',p_y')$  τότε η Χαμιλτονιανή γίνεται  $H=H(x',y',p_x',p_y')$  αλλά οι εξισώσεις (8.20) ισχύουν εφόσον ο μετασχηματισμός είναι **κανονικός**. Οι κανονικοί μετασχηματισμοί διέπονται από συγκεκριμένα κριτήρια (δες Ιχτιάρογλου, 2003). Επίσης στο παραπάνω σύστημα η Χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται από το χρόνο και, συνεπώς, το σύστημα είναι αυτόνομο. Αν η συνάρτηση  $H$  εξαρτάται άμεσα από το χρόνο τότε με κατάλληλο κανονικό μετασχηματισμό μπορούμε να μετατρέψουμε το σύστημα σε αυτόνομο αλλά θα αυξηθούν οι βαθμοί ελευθερίας κατά ένα.

#### i) Σημεία Ισορροπίας

Το διανυσματικό πεδίο του συστήματος θα ορίζεται ως

$$\mathbf{f} = \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_x}, \frac{\partial H}{\partial p_y}, -\frac{\partial H}{\partial x}, -\frac{\partial H}{\partial y} \right\}$$

και τα σημεία ισορροπίας  $\Sigma(x^*,y^*,p_x^*,p_y^*)$  θα προκύπτουν ως ρίζες του αλγεβρικού συστήματος  $\mathbf{f}=0$ . Το γραμμικοποιημένο σύστημα θα περιγράφεται από τον πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p_x} & \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial p_x} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_x \partial p_y} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p_y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial p_y} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_x \partial p_y} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_y^2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial^2 x} & -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p_x} & -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p_y} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & -\frac{\partial^2 H}{\partial^2 y} & -\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial p_x} & -\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial p_y} \end{pmatrix}. \quad (8.22)$$

Αποδεικνύεται ότι

α)  $\det|\mathbf{A}|=1$

β) Αν  $\lambda_1, \lambda_2$  είναι δύο ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathbf{A}$  τότε και οι  $-\lambda_1, -\lambda_2$  είναι επίσης ιδιοτιμές. Οπότε αν  $\lambda_1=\alpha+i\beta$  τότε

$$\lambda_2=\alpha-i\beta, \lambda_3=-\alpha+i\beta, \lambda_4=-\alpha-i\beta.$$

Συνεπώς, αν  $\alpha \neq 0$ , τότε θα υπάρχει ιδιοτιμή με θετικό πραγματικό μέρος και άρα το σημείο ισορροπίας θα είναι ασταθές. Μάλιστα θα υπάρχει, αντίστοιχα, και ιδιοτιμή με αρνητικό πραγματικό μέρος. Έτσι αν οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές λέμε ότι το σημείο ισορροπίας είναι *υπερβολικό*, ενώ αν είναι μιγαδικές έχουμε

μιαδική αστάθεια. Η μόνη περίπτωση να έχουμε ευστάθεια είναι αν  $a=0$  (κέντρο) και το σημείο ισορροπίας ονομάζεται *ελλειπτικό*.

ii) *Αγκύλη Poisson και ολοκληρωσιμότητα*

Η αγκύλη Poisson δύο συναρτήσεων  $A=A(x,y,p_x,p_y)$  και  $B=B(x,y,p_x,p_y)$  ορίζεται ως

$$[A, B] = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial p_x} - \frac{\partial A}{\partial p_x} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial p_y} - \frac{\partial A}{\partial p_y} \frac{\partial B}{\partial y}. \quad (8.23)$$

Αν  $F=F(x,y,p_x,p_y)$  είναι μια συνάρτηση των κανονικών μεταβλητών τότε κατά μήκος των τροχιών του συστήματος η ολική παράγωγος ως προς το χρόνο της  $F$  θα δίνεται από τη σχέση

$$\frac{dF}{dt} = [F, H]. \quad (8.24)$$

Άρα η  $F=F(x,y,p_x,p_y)$  αποτελεί ένα **ολοκλήρωμα** της κίνησης αν

$$[F, H] = 0. \quad (8.25)$$

Προφανώς ισχύει πάντα ότι  $[H, H]=0$  οπότε η συνάρτηση Χάμιλτον αποτελεί πάντα ολοκλήρωμα της κίνησης. Σημειώνουμε ότι, για το μηχανικό σύστημα (8.21) η  $H$  συμπίπτει με το ολοκλήρωμα της ενέργειας.

Αν ένα Χαμιλτονιανό σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας διαθέτει ένα επιπλέον ολοκλήρωμα  $F=F(x,y,p_x,p_y)$ , πλην της  $H$ , και το οποίο βέβαια είναι συναρτησιακά ανεξάρτητο της  $H$ , τότε λέμε ότι το σύστημα είναι **ολοκληρώσιμο κατά Liouville**.

iii) *Δυναμική ολοκληρώσιμων συστημάτων.*

Έστω ένα ολοκληρώσιμο Χαμιλτονιανό σύστημα  $H=H(x,y,p_x,p_y)$ . Αποδεικνύεται ότι μπορούμε στο χώρο φάσεων (έστω τοπικά), όπου οι τροχιές είναι περατωμένες να ορίσουμε έναν κανονικό μετασχηματισμό σε νέες μεταβλητές  $J_1, J_2$ , οι οποίες ονομάζονται **δράσεις**, και τις συζυγείς τους  $w_1$  και  $w_2$ , οι οποίες ορίζονται με  $\text{mod } 2\pi$  και ονομάζονται **μεταβλητές γωνίας**. Σε αυτές τις μεταβλητές (**action-angle variables**) η ολοκληρώσιμη συνάρτηση Χάμιλτον γράφεται ως

$$H = H(J_1, J_2), \quad (8.26)$$

δηλαδή οι μεταβλητές γωνίας αποτελούν *αγνοήσιμες συντεταγμένες* (δεν εμφανίζονται μέσα στην Χαμιλτονιανή). Για την (8.26) οι εξισώσεις του συστήματος θα είναι

$$\begin{aligned} \dot{J}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial w_1} = 0, & \dot{w}_1 &= \frac{\partial H}{\partial J_1} = \omega_1(J_1, J_2), \\ \dot{J}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial w_2} = 0, & \dot{w}_2 &= \frac{\partial H}{\partial J_2} = \omega_2(J_1, J_2). \end{aligned} \quad (8.27)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι άμεσα ολοκληρώσιμες. Προκύπτει προφανώς ότι

$$J_1 = c_1, \quad J_2 = c_2, \quad (8.28)$$

όπου  $c_1, c_2$  σταθερές που εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες. Συνεπώς οι ποσότητες  $\omega_i = \omega_i(J_1, J_2)$  είναι επίσης σταθερές που εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες και ονομάζονται **συχνότητες** της κίνησης. Έτσι, ολοκληρώνοντας και τις εξισώσεις για τις μεταβλητές γωνίας, παίρνουμε

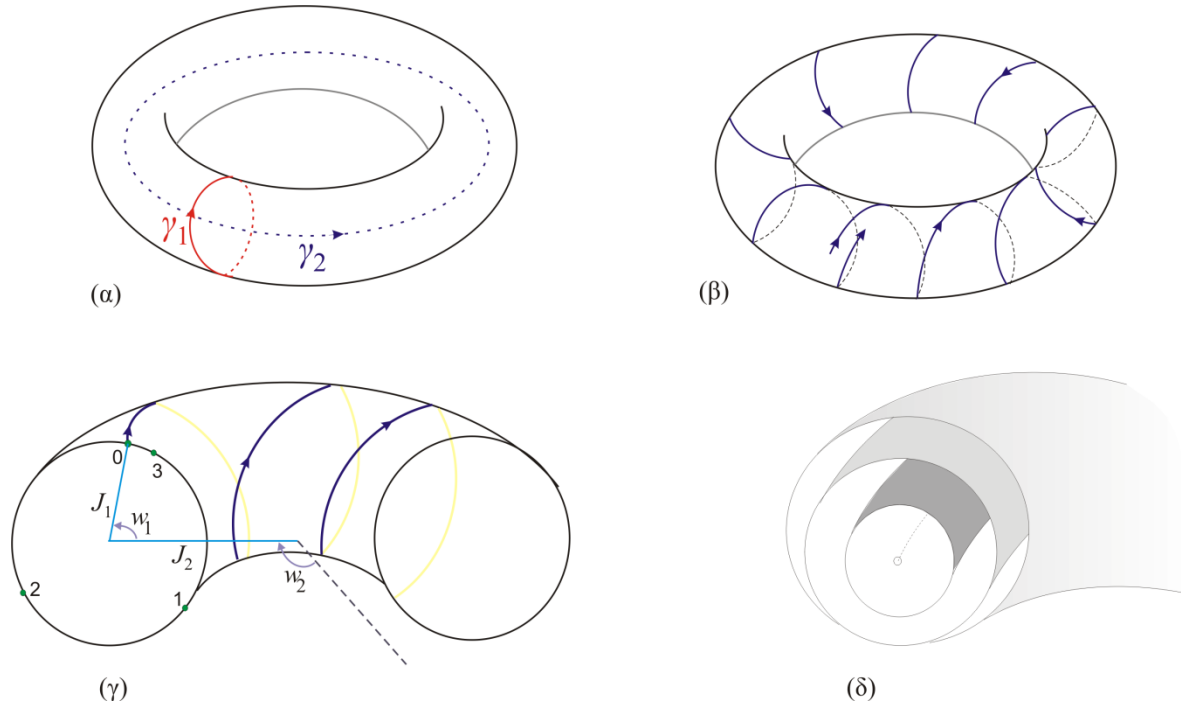
$$w_1 = \omega_1 t + c_3, \quad w_2 = \omega_2 t + c_4, \quad (8.29)$$

όπου  $c_3, c_4$  είναι, επίσης, σταθερές που εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες.

**Σχόλιο.** Από τα παραπάνω φαίνεται ότι ένα ολοκληρώσιμο σύστημα μπορεί πάντα να επιλυθεί αρκεί να προσδιοριστεί ο κατάλληλος κανονικός μετασχηματισμός που μετασχηματίζει την αρχική Χαμιλτονιανή στη μορφή (8.26). Αν και η ιδιότητα της ολοκληρωσιμότητας κατά Liouville, εγγυάται την ύπαρξη ενός τέτοιου κανονικού μετασχηματισμού, στην πράξη δεν είναι εύκολο να βρεθεί ένας τέτοιος μετασχηματισμός. Εξάλλου τα ολοκληρώσιμα συστήματα είναι πολύ σπάνια και, αν αφαιρέσουμε τις τετριμμένες περιπτώσεις, περιορίζονται κυρίως μόνο σε συστήματα με δύο βαθμούς

ελευθερίας. Βέβαια, τα αυτόνομα συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας είναι όλα ολοκληρώσιμα και τέτοια συστήματα είναι αυτά που μελετήσαμε στο κεφάλαιο 3.

Στις μεταβλητές δράσης-γωνίας, οι εξισώσεις (8.28) και (8.29) περιορίζουν την τροχιά πάνω στην συμπαγή πολλαπλότητα του δισδιάστατου τόρου (σαμπρέλα). Οι δράσεις  $J_1, J_2$  αντιστοιχούν στις δύο ακτίνες των κύκλων  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$ , οι οποίοι ορίζουν τον τόρο, ενώ οι γωνίες  $w_1$  και  $w_2$ , οι οποίες αυξάνονται γραμμικά, απεικονίζουν την θέση της τροχιάς πάνω στην επιφάνεια του τόρου. Οι τροχιές, λοιπόν, μπορούν να περιγραφούν ως περιελίξεις πάνω στο τόρο όπως δείχνει το Σχήμα 8-10β.



Σχήμα 8-10. α) ο τόρος όπως ορίζεται από τους δύο κύκλους  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$  β) Περιέλιξη των τροχιών γύρω από έναν τόρο. γ) Οι μεταβλητές δράσης αντιστοιχούν στις ακτίνες του τόρου και οι μεταβλητές γωνίας (ως προς κάποιες γραμμές αναφοράς) δείχνουν τη θέση του συστήματος πάνω στο τόρο δ) Φωλιασμένοι τόροι για  $J_2$ =σταθ.

Αν  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}$ , όπου  $p, q$  ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους, τότε η τροχιά είναι περιοδική με περίοδο

$$T = p \frac{2\pi}{\omega_1} = q \frac{2\pi}{\omega_2}$$

Πράγματι, για μια τροχιά σε ένα συγκεκριμένο τόρο, και για αρχικές γωνίες  $c_3=w_{10}, c_4=w_{20}$ , θα είναι

$$w_1(0) = w_{10}, \quad w_1(T) = \omega_1 p \frac{2\pi}{\omega_1} + w_{10} = 2p\pi + w_{10} \equiv w_{10}$$

$$w_2(0) = w_{20}, \quad w_2(T) = \omega_2 q \frac{2\pi}{\omega_2} + w_{20} = 2q\pi + w_{20} \equiv w_{20}$$

Για μια περίοδο λοιπόν θα έχουμε  $p$  στροφές γύρω από τον κύκλο  $\gamma_1$  και  $q$  στροφές γύρω από τον κύκλο  $\gamma_2$ . Αν όμως ο λόγος των συχνοτήτων δεν είναι ρητός, τότε η τροχιά θα περιελίσσεται στον τόρο χωρίς να κλείσει ποτέ και χωρίς να μπορεί να τέμνει τον εαυτό της. Θα γεμίσει, λοιπόν πυκνά, τον τόρο και θα ονομάζεται *ημιπεριοδική τροχιά*.

Ο λόγος

$$\rho(J_1, J_2) = \frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{8.30}$$

ονομάζεται **αριθμός περιστροφής** (rotation number) και χαρακτηρίζει τον εκάστοτε τόρο του ολοκληρώσιμου συστήματος. Οι τόροι με ρητό αριθμό περιστροφής ονομάζονται **συντονισμένοι τόροι**. Ξεκινώντας από ένα οποιοδήποτε σημείο ενός συντονισμένου τόρου θα έχουμε περιοδική κίνηση.

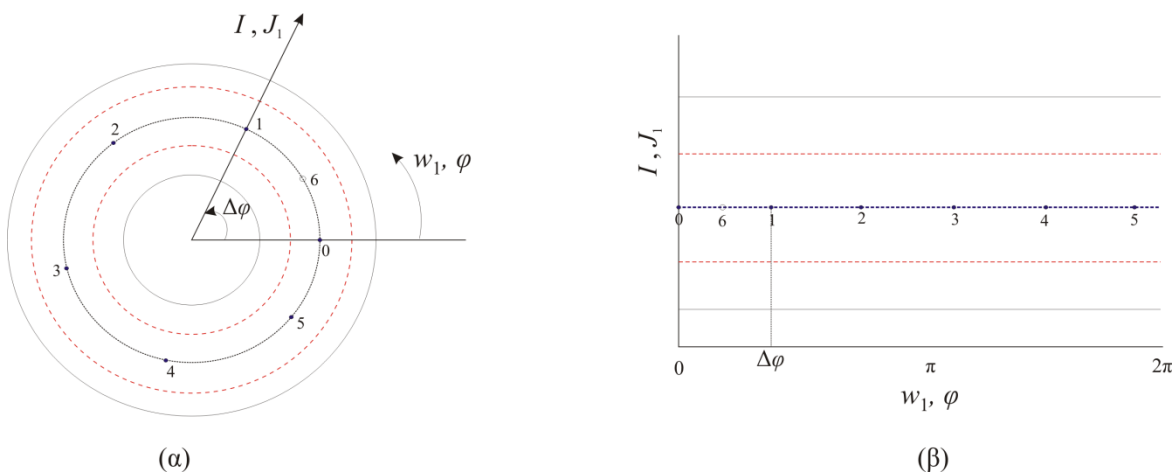
Αν θεωρήσουμε μια σταθερή τιμή για τη δράση  $J_2$  τότε, για διάφορες τιμές της δράσης  $J_1$ , έχουμε ένα σύνολο *φωλιασμένων τόρων*, όπως δείχνει το Σχήμα 8-10(δ).

iv) Η τομή Poincaré του ολοκληρώσιμου συστήματος

Θεωρούμε ένα σύνολο φωλιασμένων τόρων για δεδομένη τιμή της δράσης  $J_2$  και ένα επίπεδο (τομή) το οποίο ορίζεται σε μια σταθερή γωνία  $w_2 = \text{σταθ}$  και κόβει κάθετα τους φωλιασμένους τόρους. Καθώς περιελίσσεται η τροχιά γύρω από κάποιον τόρο, παρακολουθούμε τις τομές της τροχιάς με το παραπάνω επίπεδο και έτσι παίρνουμε μια ακολουθία σημείων,  $\Pi$ , πάνω στην τομή. Η ακολουθία αυτή αντιπροσωπεύει την τροχιά και ονομάζεται τομή Poincaré (δες Σχήμα 8-10γ),

$$\Pi = \{(I_k, \varphi_k), \quad w_2 = 2k\pi, \quad k = 1, 2, \dots, \quad J_2 = \text{σταθ.}\} \quad (8.31)$$

όπου  $I_k$  η τιμή του  $J_1$  κατά την  $k$ -ιστή τομή της τροχιάς με την τομή και  $\varphi_k$  η τιμή της γωνίας  $w_1$  κατά την ίδια τομή (δες Σχήμα 8-11). Η τομή των φωλιασμένων τόρων με το επίπεδο δίνει ένα σύνολο ομόκεντρων κύκλων. Για αρχικές συνθήκες πάνω σε έναν κύκλο τα σημεία του συνόλου  $\Pi$  θα ανήκουν στον ίδιο κύκλο (αναλλοίωτος κύκλος). Ο κάθε τόρος του συνόλου θα έχει έναν αριθμό περιστροφής ο οποίος θα είναι συνάρτηση μόνο της δράσης  $J_1$  (ή, ισοδύναμα του  $I$ ).



Σχήμα 8-11. α) Η τομή των τόρων  $J_2 = \text{σταθ.}$  με το επίπεδο  $w_2 = \text{σταθ.}$  β) το ίδιο σε οριζόντια παρουσίαση.

Ο χρόνος μεταξύ δύο τομών της τροχιάς με το επίπεδο της τομής Poincaré είναι  $t^* = 2\pi/\omega_2$ . Οπότε η γωνία  $\Delta\varphi = \varphi_{k+1} - \varphi_k$ , μεταξύ δυο διαδοχικών σημείων στην τομή θα είναι

$$\Delta\varphi = \omega_1 t^* = \omega_1 \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi\rho(I)$$

Αν ξεκινήσουμε από ένα σημείο  $\Sigma_0$ , πάνω σε έναν συντονισμένο τόρο, όπου  $\rho = p/q$ ,  $p, q$  πρώτοι ακέραιοι μεταξύ τους, μετά από  $q$  τομές της τροχιάς με το επίπεδο, το σημείο  $\Sigma_q$  θα συμπίπτει με το σημείο  $\Sigma_0$ . Έτσι, η ακολουθία Poincaré θα αποτελείται από  $q$  σημεία, γεγονός που υποδηλώνει την περιοδικότητα της τροχιάς με περίοδο  $T = 2q\pi/\omega_2$ . Αν ο αριθμός περιστροφής είναι άρρητος τότε τα σημεία της ακολουθίας Poincaré γεμίζουν πυκνά τον αναλλοίωτο κύκλο και αυτό υποδηλώνει ημιπεριοδική τροχιά. Η κατανομή των συντονισμένων τόρων στο σύνολο των φωλιασμένων τόρων είναι ισοδύναμη με την κατανομή των ρητών αριθμών μέσα στους πραγματικούς.

Η ακολουθία (8.31) των σημείων της τομής Poincaré δίνεται από την διακριτή απεικόνιση

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= I_k, \\ \varphi_{k+1} &= \varphi_k + 2\pi\rho(I_k). \end{aligned} \quad (8.32)$$

Η (8.32) ονομάζεται στροφική απεικόνιση και ουσιαστικά περιγράφει ποιοτικά την δυναμική όλων των ολοκληρώσιμων Χαμιλτονιανών συστημάτων δύο βαθμών ελευθερίας.

**Σημείωση 1.** Όλες οι παραπάνω έννοιες γενικεύονται και σε συστήματα με περισσότερους βαθμούς ελευθερίας ( $n > 2$ ). Οι τόροι αποτελούν πολλαπλότητες διάστασης ίσης με  $n$  και βρίσκονται στον  $2n$ -διάστασης χώρο φάσεων. Δεν μπορούμε, βέβαια, να έχουμε την γεωμετρική εποπτεία, όπως αυτήν που παρουσιάσαμε παραπάνω για  $n=2$ .

**Σημείωση 2.** Μια Χαμιλτονιανή  $H=H(x,y,p_x,p_y)$  ονομάζεται διαχωρίσιμη (separable) εάν μπορεί να γραφεί στη μορφή  $H=H_1(x,p_x)+H_2(y,p_y)$ . Τότε οι  $H_1$  και η  $H_2$  αποτελούν ολοκληρώματα της Χαμιλτονιανής και, συνεπώς, κάθε διαχωρίσιμη Χαμιλτονιανή είναι ολοκληρώσιμη.

## 8.4.2 Διαταραγμένα Χαμιλτονιανά Συστήματα

Έστω ένα ολοκληρώσιμο σύστημα  $H=H_0(x,y,p_x,p_y)$  με ένα ολοκλήρωμα  $F=F(x,y,p_x,p_y)$ , δηλαδή  $[F,H_0]=0$ . Ο χώρος των φάσεων αποτελείται από αναλλοίωτους δισδιάστατους τόρους πάνω στους οποίους περιελίσσονται οι τροχιές. Θεωρούμε τώρα έναν όρο  $H_1(x,y,p_x,p_y)$  που προστίθεται στην Χαμιλτονιανή, πολλαπλασιασμένη με μια μικρή παράμετρο  $\varepsilon$ ,

$$H = H_0(x, y, p_x, p_y) + \varepsilon H_1(x, y, p_x, p_y) \quad (8.33)$$

Το σύστημα (8.33) ονομάζεται *διαταραγμένο σύστημα* ή *σύστημα κοντά στην ολοκληρωσιμότητα* (near integrable system). Η παράμετρος  $\varepsilon$  μετράει το μέγεθος της διαταραχής. Τα κύρια σημεία της δυναμικής του διαταραγμένου συστήματος δίνονται από τρία σημαντικά θεωρήματα, τα οποία περιγράφουμε χωρίς αποδείξεις παρακάτω

i) Το θεώρημα Kolmogorov-Arnold-Moser ([KAM theorem](#))

Έστω ένα σύνολο φωλιασμένων τόρων, που ο καθένας αντιστοιχεί σε ένα αριθμό περιστροφής  $\rho=\omega_1/\omega_2$ . Θεωρούμε όλους τους τόρους για τους οποίους ισχύει η συνθήκη

$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{p}{q} \right| > \frac{K(\varepsilon)}{q^{5/2}} \quad (8.34)$$

για οποιουσδήποτε ακέραιους  $p, q$ . Η ποσότητα  $K=K(\varepsilon)$  εξαρτάται από το μέγεθος της διαταραχής και τείνει στο μηδέν καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ουσιαστικά η συνθήκη (8.34) εξαιρεί τους συντονισμένους τόρους, όπου το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης μηδενίζεται, καθώς και μικρές γειτονιές τους με πλάτος  $K(\varepsilon)q^{-5/2}$ , το οποίο μειώνεται καθώς αυξάνει ο παρανομαστής του λόγου συχνοτήτων.

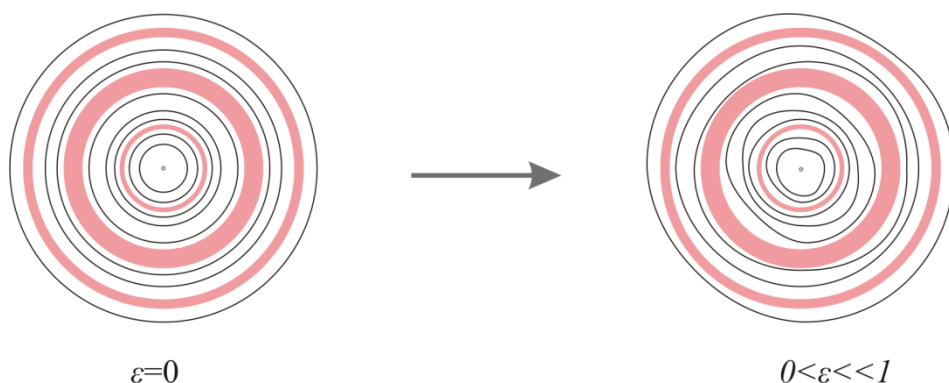
Αντιστοιχούμε όλους τους λόγους  $p/q$  στο διάστημα  $[0,1)$  αφαιρώντας το ακέραιο μέρος του λόγου (ο παρανομαστής δεν αλλάζει). Στο διάστημα αυτό για κάθε λόγο  $p/q$  η συνθήκη (8.34) αφαιρεί και ένα διάστημα. Θα περίμενε κανείς ότι, αφού έχουμε άπειρους λόγους, να εξαιρεθεί όλο το διάστημα  $[0,1)$ . Όμως καθώς αυξάνει ο παρανομαστής  $q$  τα διαστήματα που εξαιρούνται γίνονται όλο και μικρότερα. Αν πάρουμε την ένωση όλων των εξαιρεθέντων διαστημάτων προκύπτει ότι

$$\sum_{p < q} \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{p}{q} \right| \leq 5.224K(\varepsilon).$$

Το αριστερό μέλος της παραπάνω ανισότητας είναι  $O(\varepsilon)$  και τείνει στο μηδέν καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Άρα οι περιοχές οι οποίες ικανοποιούν την συνθήκη (8.34) είναι μεγέθους  $1-O(\varepsilon)$ , δηλαδή, για πολύ μικρή διαταραχή περιλαμβάνει σχεδόν όλο το σύνολο των τόρων. Πάντα θα εξαιρούνται οι συντονισμένοι τόροι και οι γειτονιές τους.

Το θεώρημα KAM μπορεί να περιγραφεί συνοπτικά ως εξής :

- Οι τόροι του ολοκληρώσιμου συστήματος, οι οποίοι βρίσκονται μακριά από συντονισμούς, έτσι ώστε να ικανοποιούν τη συνθήκη (8.34), διατηρούνται στο διαταραγμένο σύστημα και απλώς παραμορφώνονται ελαφρά. Όσο πιο μικρή είναι η διαταραχή τόσο περισσότεροι τόροι διατηρούνται.



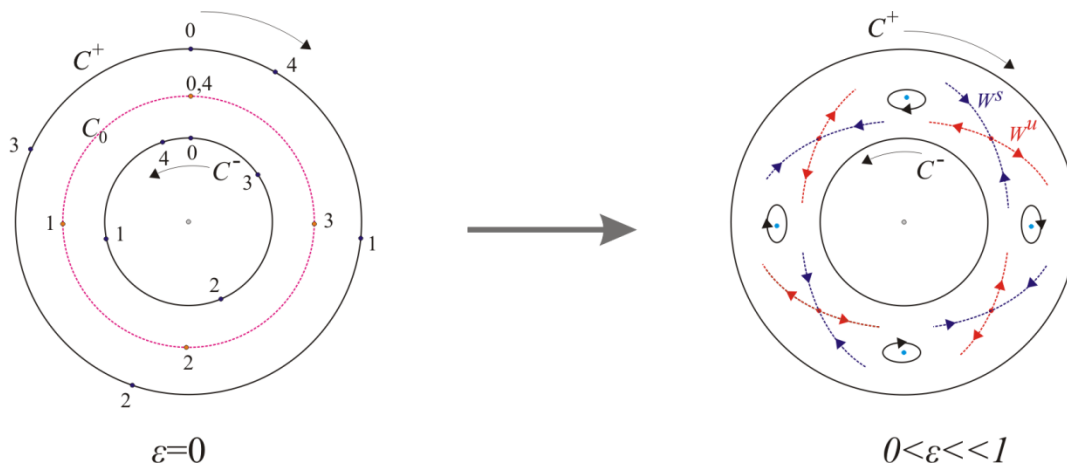
Σχήμα 8-12. Σχηματική παράσταση του θεωρήματος KAM. Οι αναλλοίωτοι κύκλοι (μαύρες γραμμές) που βρίσκονται έξω από τις γειτονικές συντονισμών (έγχρωμες περιοχές) παραμορφώνονται κάτω από τη διαταραχή αλλά διατηρούνται ως κλειστές αναλλοίωτες καμπύλες.

## ii) Το θεώρημα Poincaré-Birkhoff

Έστω ένας συντονισμένος τόρος της ολοκληρώσιμης Χαμιλτονιανής  $H_0$  με αριθμό περιστροφής  $\rho=p/q$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$  και πρώτοι μεταξύ τους. Αυτός απεικονίζεται στην τομή Poincaré  $w_2$ -σταθ. σε έναν αναλλοίωτο κύκλο  $C_0$ . Όπως αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, ξεκινώντας από ένα οποιοδήποτε σημείο πάνω στο  $C_0$  θα έχουμε μια περιοδική τροχιά, η οποία θα αντιπροσωπεύεται με  $q$  σημεία πάνω στο  $C_0$ . Συνεπώς ένας συντονισμένος τόρος του ολοκληρώσιμου συστήματος φέρει άπειρες περιοδικές τροχιές. Σημειώνουμε ότι η ροή των σημείων της απεικόνισης Poincaré μέσα ( $C^-$ ) και έξω ( $C^+$ ) από την περιοχή του συντονισμού έχει αντίθετη ροή (δες Σχήμα 8-13, αριστερά).

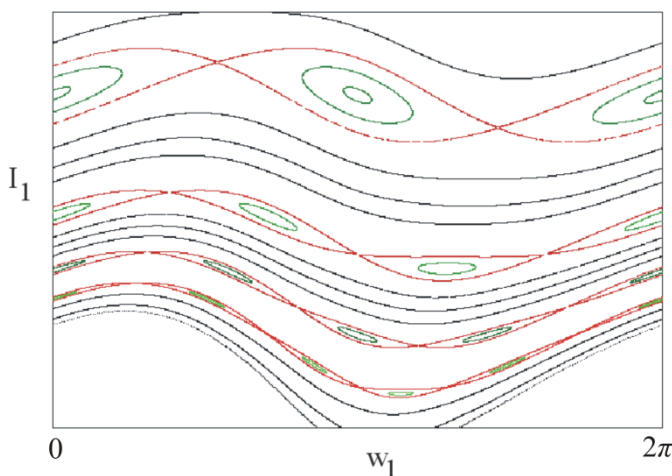
- Σύμφωνα με το [θεώρημα Poincaré-Birkhoff](#), υπό την επίδραση της διαταραχής  $\varepsilon H_1$ , από το άπειρο σύνολο των περιοδικών τροχιών που φέρει ένας συντονισμένος τόρος μόνο ένας πεπερασμένος ζυγός αριθμός αυτών συνεχίζονται ως περιοδικές. Συνήθως επιβιώνουν μόνο δύο περιοδικές τροχιές, η μια είναι ευσταθής και η άλλη ασταθής. Περισσότερες περιοδικές τροχιές συνεχίζονται μόνο υπό προϋποθέσεις ύπαρξης συμμετριών στο σύστημα.

Η έννοια της ευστάθειας έχει να κάνει με την ροή των σημείων της τομής σε σχέση με τα περιοδικά σημεία. Στην περίπτωση της ευστάθειας, έχουμε σημεία που σχηματίζουν αναλλοίωτες καμπύλες, οι οποίες περικλείουν τα σημεία της ευσταθούς περιοδικής τροχιάς (νησίδες). Στην περίπτωση της αστάθειας, κοντά στα σημεία της περιοδικής τροχιάς, οι αναλλοίωτες καμπύλες της τομής έχουν την μορφή σάγματος. Διακρίνουμε δύο πολλαπλότητες, μια ευσταθή, την  $W^s$  και μια ασταθή, την  $W^u$ . Πάνω στην  $W^s$  τα σημεία της τομής πλησιάζουν ασυμπτωτικά προς τα σημεία τα οποία αντιπροσωπεύουν την περιοδική τροχιά, ενώ πάνω στην  $W^u$  απομακρύνονται από αυτά (Σχήμα 8-13, δεξιά).



Σχήμα 8-13. Σχηματικά, η αλλαγή της μορφής της περιοχής ενός συντονισμένου αναλλοίωτου κύκλου (για  $q=4$ ) υπό την επίδραση της διαταραχής. Στο δεξιό πάνελ τα μπλε σημεία αντιπροσωπεύουν την ευσταθή περιοδική τροχιά που επιβιώνει, και τα κόκκινα σημεία την ασταθή τροχιά. Οι αναλλοίωτοι κύκλοι  $C^-$  και  $C^+$  διατηρούνται σύμφωνα με το θεώρημα KAM.

Η παραπάνω δυναμική στις ζώνες συντονισμού είναι η ίδια με αυτήν που περιγράψαμε για τον διαταραγμένο ταλαντωτή στην §7.4.2. Για πολύ μικρές διαταραχές, οι πολλαπλότητες  $W^s$  και  $W^u$  μαζί με τις νησίδες γύρω από τα ευσταθή περιοδικά σημεία σχηματίζουν τις λεγόμενες αλυσίδες *Poincaré-Birkhoff*. Το πλάτος αυτών των αλυσίδων εξαρτάται από τον αριθμό των περιοδικών σημείων πάνω στην τομή, δηλαδή τον ακέραιο  $q$ . Ένα παράδειγμα, που προκύπτει από την [τυπική απεικόνιση](#) (δες §10.3.2), φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Διακρίνουμε διάφορες αλυσίδες Poincaré-Birkhoff (για διάφορους συντονισμούς) καθώς και τις περιοχές KAM ανάμεσά τους.



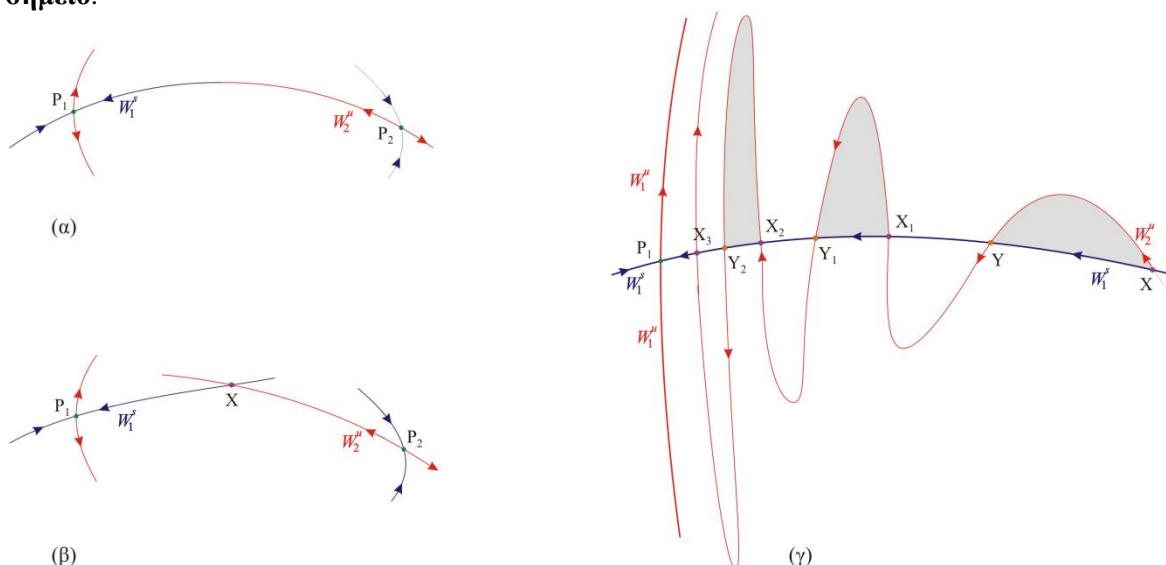
Σχήμα 8-14. Αλυσίδες Poincaré-Birkhoff στο διαταραγμένο εκκρεμές- τυπική απεικόνιση (σε οριζόντια παρουσίαση).

### iii) Ομοκλινικό Χάος (η θεωρία Poincaré-Smale)

Παραπάνω είδαμε ότι οι ασταθείς περιοδικές τροχιές που επιβιώνουν με την διαταραχή πάνω σε ένα συντονισμένο τόρο συνοδεύονται από ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες  $W^s$  και  $W^u$ , αντίστοιχα. Στο Σχήμα 8-15(α) η ευσταθής και η ασταθής πολλαπλότητα, δύο γειτονικών σημείων της τομής Poincaré, τα οποία αντιστοιχούν σε μια ασταθή περιοδική τροχιά, ενώνονται ομαλά. Αυτό όμως ισχύει μόνο στην περίπτωση που το διαταραγμένο σύστημα διαθέτει κάποιο ολοκλήρωμα της κίνησης. Εν γένει, ένα διαταραγμένο σύστημα δεν διαθέτει κάποιο άλλο ολοκλήρωμα πλην της Χαμιλτονιανής και η ευσταθής και η ασταθής πολλαπλότητα δεν υποχρεούνται να ενώνονται ομαλά. Αντίθετα η γενική περίπτωση είναι η εγκάρσια τομή τους όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 8-15(β). Εδώ να σημειώσουμε ότι τέμνονται οι πολλαπλότητες  $W^s$  και  $W^u$  και όχι οι τροχιές που ανήκουν πάνω σε αυτές. Επίσης αποδεικνύεται ότι, η  $W^s$  δεν



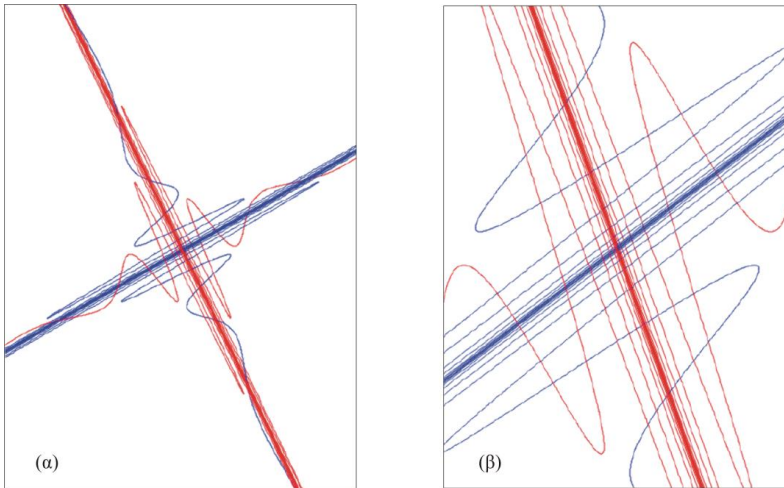
μπορεί να τέμνει τον εαυτό της και το ίδιο ισχύει για την  $W^u$ . Το σημείο τομής  $X$  ονομάζεται **ομοκλινικό σημείο**.



Σχήμα 8-15. Οι ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες στη ζώνη συντονισμού α) σε μια ολοκληρώσιμη περίπτωση β) στην μη-ολοκληρώσιμη περίπτωση (γενική) όπου οι πολλαπλότητες τέμνονται γ) η συνέχεια της πολλαπλότητας  $W^u$  μετά την τομή της με την  $W^s$  και ο σχηματισμός των ομοκλινικών λοβών.

Λόγω της συνεχούς ροής, ένα ομοκλινικό σημείο  $X$  απεικονίζεται σε ένα άλλο ομοκλινικό σημείο και έτσι έχουμε μια ακολουθία ομοκλινικών σημείων,  $X, X_1, X_2$  κλπ., (βλ Σχήμα 8-15(γ)), τα οποία τείνουν ασυμπτωτικά προς το σημείο της περιοδικής τροχιάς, το σημείο  $P_1$  στο πάνελ (γ). Ανάμεσα στα παραπάνω ομοκλινικά σημεία (όπου η ροή είναι από κάτω προς τα πάνω) έχουμε και τα ομοκλινικά σημεία  $Y, Y_1, Y_2$  κλπ., όπου η ροή είναι από πάνω προς τα κάτω. Επειδή τα σημεία των παραπάνω ακολουθιών τείνουν ασυμπτωτικά στο  $P_1$ , οι αποστάσεις  $X_k Y_k$  μειώνονται εκθετικά καθώς το  $k$  αυξάνεται. Όμως τα εμβαδά που περικλείονται μεταξύ των πολλαπλοτήτων και ανάμεσα σε δύο ομοκλινικά σημεία (οι γκρι περιοχές του σχήματος) οφείλουν να έχουν το ίδιο εμβαδόν αφού η ροή είναι διατηρητική. Έτσι, αφού τα σημεία  $X_k$  και  $Y_k$  πλησιάζουν μεταξύ τους, καθώς το  $k$  αυξάνει, οι περιοχές επιμηκώνονται κατά την διεύθυνση της  $W^u$  του  $P_1$  και συρρικνώνονται κατά την διεύθυνση του  $W^s$  σχηματίζοντας τους **ομοκλινικούς λοβούς**.

Ομοκλινικοί λοβοί σχηματίζονται και από την ευσταθή πολλαπλότητα καθώς πλησιάζει ασυμπτωτικά στην περιοδική τροχιά για  $t \rightarrow -\infty$ . Οι λοβοί της ασταθούς πολλαπλότητας τέμνουν τους λοβούς της ευσταθούς πολλαπλότητας σχηματίζοντας το λεγόμενο **ομοκλινικό πλέγμα**, το οποίο περιορίζεται στη ζώνη του συντονισμού, μεταξύ των αναλλοίωτων κύκλων  $C^+$  και  $C^-$  (δες Σχήμα 8-13). Η πολύπλοκη δομή που σχηματίζεται (Σχήμα 8-16) οδηγεί στην ευαίσθητη εξάρτηση των τροχιών από τις αρχικές συνθήκες και την **χαοτική εξέλιξη**. Η δομή αυτή μπορεί να μελετηθεί αναλυτικά με το **πέταλο του Smale**, όπως ονομάζεται η διακριτή απεικόνιση που την περιγράφει, την οποία παρουσιάζουμε στο κεφάλαιο 10.



Σχήμα 8-16. α) Το ομοκλινικό πλέγμα όπως υπολογίζεται για την απεικόνιση Suris ( $\delta=1/3$ ,  $\varepsilon=0.001$ ) β) Μεγέθυνση του πλέγματος.

**Σχόλιο.** Η διακριτή εξέλιξη των τροχιών ενός Χαμιλτονιανού συστήματος πάνω στην τομή Poincaré μπορεί να προσομοιωθεί με την χρήση διακριτών διατηρητικών απεικονίσεων (δες κεφ. 10). Π.χ. η διαταραγμένη απεικόνιση Suris δίνεται από τις εξισώσεις

$$x_{k+1} = x_k + 4\pi^2 y_{k+1} \pmod{2\pi}, \quad y_{k+1} = y_k + \phi(x_k) + \varepsilon \sin x_k \quad \text{με} \quad \phi(x) = \frac{1}{\pi^2} \arctan\left(\frac{\delta \sin x}{1 + \delta \cos x}\right), \quad -1 < \delta < 1$$

και είναι ολοκληρώσιμη για  $\varepsilon=0$ . Διαθέτει τα σημεία  $(\pm\pi, 0)$  είναι ασταθή σταθερά σημεία των οποίων οι ασύμπτωτες πολλαπλότητες ενώνονται ομαλά. Για  $\varepsilon \neq 0$ , οι πολλαπλότητες τέμνονται εγκάρσια και σχηματίζουν το ομοκλινικό πλέγμα που δίνεται στο Σχήμα 8-16 (δες Κουκουλογιάννης, 2004).



Σχήμα 8-17. Σχηματική παράσταση της τομής Poincaré για ένα διαταραγμένο Χαμιλτονιανό σύστημα όπως σχεδιάστηκε από τον V. Arnold στο άρθρο του “Small Denominators and Problems of stability of motion in classical and celestial mechanics” (Russian Mathematical Surveys, vol. 18:6, pp 85-191, 1963). Η σχεδίαση στηρίζεται σε στοιχεία της θεωρίας του Poincaré, χωρίς υπολογιστικές ενδείξεις. Στο βιβλίο των Diacu & Holmes (1996) στη σελίδα 96 αναφέρεται το εξής «Ο Poincaré δεν είχε σχεδιάσει το ομοκλινικό πλέγμα που περιγράψαμε πρωτότερα. Απλά σημείωσε στο τέλος του βιβλίου του (Le méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 1899) ότι, μια τέτοια εικόνα ήταν πολύ περίπλοκη ώστε να σχεδιαστεί και πρόσθεσε ότι, τα στοιχεία αυτά μπορούν να μας δώσουν μια καλή ιδέα σχετικά με το πόσο δύσκολα είναι τα περισσότερα προβλήματα στη Δυναμική».

### 8.4.3 Τροχιές και τομές Poincaré

Ας θεωρήσουμε ένα μηχανικό Χαμιλτονιανό σύστημα

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y). \quad (8.35)$$

Ας υποθέσουμε (για μια πιο κατανοητή περιγραφή) ότι η (8.35) περιγράφει την κίνηση υλικού σημείου μάζας  $m=1$  υπό την επίδραση του δυναμικού  $V$ . Έτσι η Χαμιλτονιανή  $H$  συμπίπτει με την μηχανική ενέργεια  $E$  της τροχιάς. Οι εξισώσεις της κίνησης εν γένει λύνονται αριθμητικά. Μια τροχιά ενέργειας  $E$  θα πρέπει να ικανοποιεί την ανίσωση

$$E - V(x, y) \geq 0. \quad (8.36)$$

Η (8.36) ορίζει τον τόπο στο επίπεδο  $xy$  στον οποίο μπορεί να εξελιχθεί η τροχιά. Η καμπύλη  $E - V(x, y) = 0$  είναι το όριο αυτού του τόπου και ονομάζεται *καμπύλη μηδενικής ταχύτητας*.

**Παράδειγμα.** Θα αναφερθούμε στη συνέχεια στο σύστημα που περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{4}(x + y)^2 + \frac{1}{4}(x - ay)^4, \quad (8.37)$$

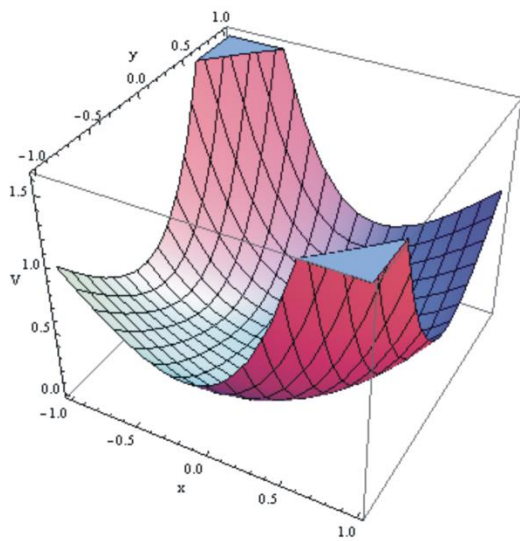
όπου  $a$  σταθερή παράμετρος. Εφαρμόζοντας τις (8.20) έχουμε τις εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x, & \dot{p}_x &= -\frac{1}{2}(x + y) - (x - ay)^3 \\ \dot{y} &= p_y, & \dot{p}_y &= -\frac{1}{2}(x + y) + a(x - ay)^3 \end{aligned} \quad (8.38)$$

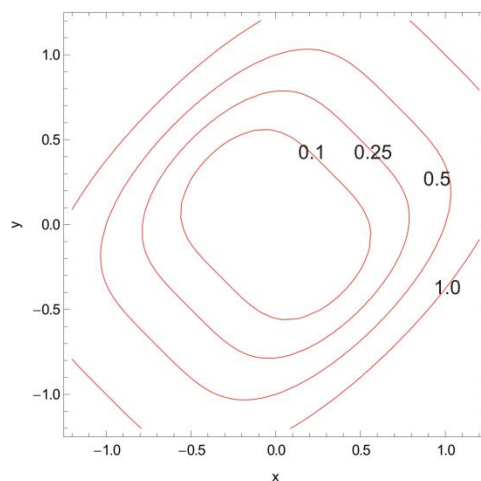
Το σύστημα διαθέτει ένα σημείο ισορροπίας στο  $(x, y, p_x, p_y) = (0, 0, 0, 0)$  και ο πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος (8.22) μας δίνει τις ιδιοτιμές

$$\lambda_{1,2} = \pm i, \quad \lambda_{3,4} = 0$$

Η ύπαρξη μηδενικών ιδιοτιμών δηλώνει *κρίσιμη γραμμική ευστάθεια*. Όμως το δυναμικό παρουσιάζει στο  $(0, 0)$  ολικό ελάχιστο για  $a > -1$ . Έτσι, για  $a > -1$ , η (8.36) δίνει για  $E > 0$  έναν κλειστό τόπο γύρω από το  $(0, 0)$  μέσα στον οποίο θα πρέπει να εξελίσσονται οι τροχιές (Σχήμα 8-18). Με αυτήν την έννοια το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές και μια τροχιά γύρω από αυτό παρουσιάζεται στο Σχήμα 8-19(α).

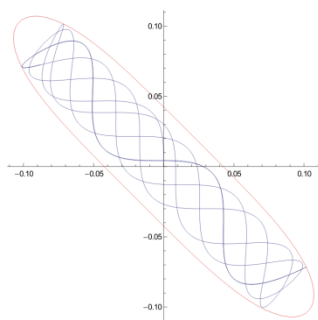


(α)

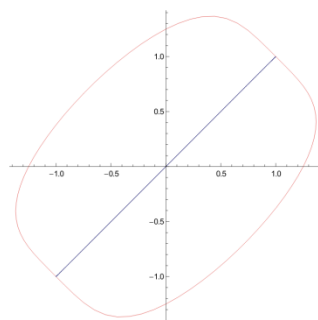


(β)

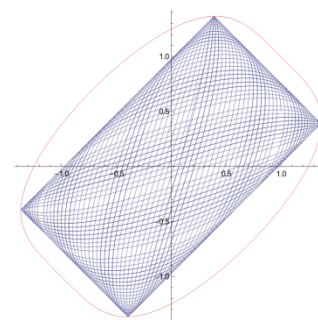
Σχήμα 8-18. α) Το δυναμικό του συστήματος (8.37) β) Καμπύλες μηδενικής ταχύτητας για διάφορες τιμές ενέργειας. Σε κάθε περίπτωση η επιτρεπτή περιοχή κίνησης ορίζεται από την κλειστή περιοχή που ορίζουν οι καμπύλες μηδενικής ταχύτητας.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 8-19. Τροχιές (μπλε καμπύλες) του συστήματος (8.37) για  $a=1$  α) γύρω από το σημείο ισορροπίας  $(0,0)$  β) μια περιοδική τροχιά γ) ημιπεριοδική τροχιά. Η καμπύλη μηδενικής ταχύτητας παρουσιάζεται με το κόκκινο χρώμα.

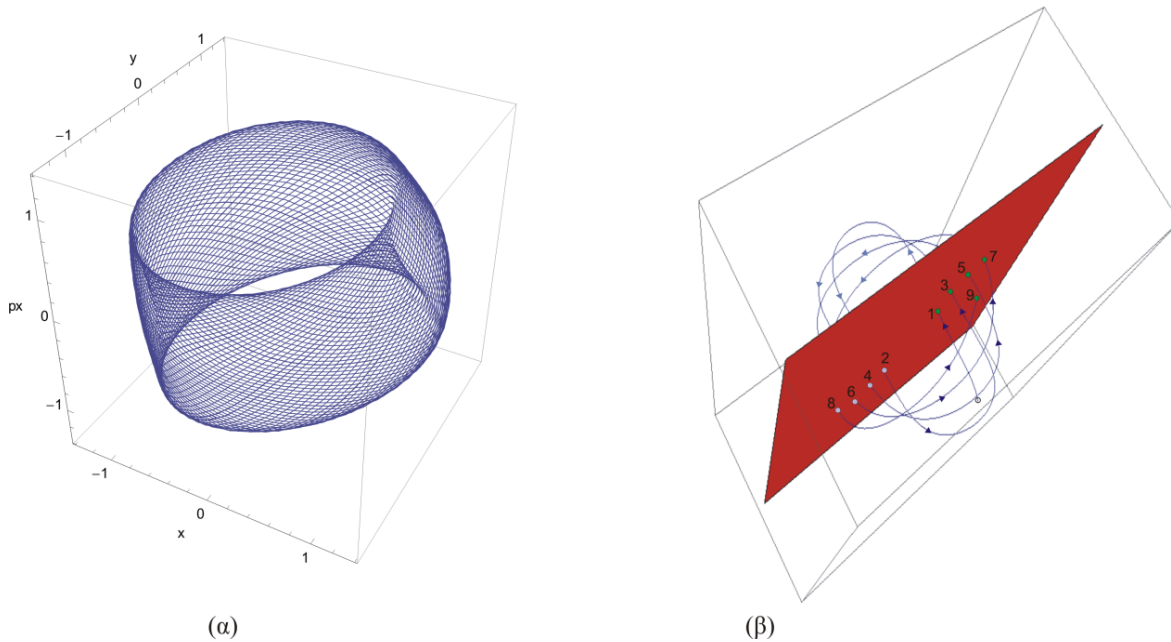
Στο Σχήμα 8-19(β) παρουσιάζεται μια περιοδική τροχιά, η οποία δίνεται αναλυτικά από το ευθύγραμμο τμήμα  $x=y$  το οποίο περιορίζεται στον τόπο που επιβάλλει η συνθήκη (8.36). Γενικότερα οι τροχιές είναι ημιπεριοδικές, δεν κλείνουν στον χώρο φάσεων και στο επίπεδο  $xy$  γεμίζουν πυκνά έναν χώρο που αποτελεί υποσύνολο του τόπου που ορίζεται από την καμπύλη μηδενικής ταχύτητας (Σχήμα 8-19(γ)). Στο χώρο των φάσεων οι τροχιές αυτές περιελίσσονται σε επιφάνειες οι οποίες είναι τοπολογικά ισοδύναμες με τόρους.

Μέσα στον τετραδιάστατο χώρο φάσεων μπορούμε να ορίσουμε τρισδιάστατα υποσύνολα τα οποία αντιστοιχούν σε μια δεδομένη τιμή ενέργειας. Σε ένα τέτοιο υποσύνολο με ενέργεια  $E_0$  μια τροχιά μπορεί να σχεδιαστεί στον τρισδιάστατο χώρο, π.χ. τον  $x-y-p_x$ . Στο Σχήμα 8-20(α) δίνουμε ένα παράδειγμα μια ημιπεριοδικής τροχιάς στον παραπάνω χώρο. Κάθε σημείο αυτού του χώρου ορίζει πλήρως μια αρχική συνθήκη αφού, δεδομένης της τιμής της ενέργειας, η γενικευμένη ορμή  $p_y$  καθορίζεται από την σχέση

$$p_y = \pm \sqrt{2(E_0 - V(x, y)) - p_x^2} \quad (8.39)$$

Βέβαια υπάρχει μια αβεβαιότητα ως προς το πρόσημο. Αν κόψουμε τον παραπάνω τρισδιάστατο χώρο με ένα επίπεδο τότε η τροχιά τέμνει αυτό το επίπεδο σε διάφορα σημεία όπως φαίνεται στο Σχήμα 8-20(β). Τα σημεία αυτά μπορούν να διαχωριστούν σε δύο ακολουθίες ανάλογα με την διεύθυνση με την οποία η τροχιά

τέμνει το επίπεδο (πράσινα και γκρι σημεία). Η πρώτη ή η δεύτερη ακολουθία σημείων αποτελεί μια ακολουθία σημείων Poincaré ή, απλά, μια **τομή Poincaré** της τροχιάς με ιδιότητες αντίστοιχες με αυτές που είδαμε στο κεφάλαιο 7 για τους διατηρητικούς εξαναγκασμένους ταλαντωτές.



Σχήμα 8-20 α) Παρουσίαση μιας ημιπεριοδικής τροχιάς (δες Σχήμα 8-19(γ)) στον τρισδιάστατο χώρο β) Τομές της τροχιάς με ένα επιλεγμένο επίπεδο (τομή Poincaré).

Από υπολογιστική άποψη μια τομή Poincaré για τα συστήματα της μορφής (8.35) μπορεί να οριστεί για ένα δεδομένο επίπεδο ενέργειας  $E_0$  με το επίπεδο  $y=0$  και με φορά που ορίζεται από το πρόσημο της ορμής  $p_y$ , π.χ.  $p_y > 0$ . Άρα η ακολουθία Poincaré θα ορίζεται από τα σημεία  $(x, p_x)$  στα οποία η τροχιά ενέργειας  $E_0$  τέμνει το επίπεδο  $y=0$  με τη φορά που καθορίζει η ορμή  $p_y$ ,

$$\Pi(x_0, p_{x0}, E_0) = \{ (x(t_k), p_x(t_k)) \mid x(0) = x_0, p_{x0} = p_x(0), y(t_k) = 0, p_y(t_k) > 0, E = E_0 \}. \quad (8.40)$$

Φυσικά κάθε σημείο του επιπέδου της τομής αντιπροσωπεύει συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες. Το  $(x, p_x)$  είναι δεδομένο από το σημείο της τομής. Επίσης είναι πάντα  $y=0$  και το  $p_y$  δίνεται με τη σχέση (8.39) με το πρόσημο με το οποίο ορίζουμε την τομή. Συνεπώς κάθε σημείο της τομής (8.40) ανήκει σε μια μοναδική τροχιά.

**Σημείωση.** Το επίπεδο της τομής Poincaré πρέπει να οριστεί κατάλληλα ώστε να τέμνει εγκάρσια την τροχιά. Διαφορετικά η τροχιά δεν θα δώσει μια ακολουθία σημείων Poincaré. Βέβαια η τομή μπορεί να οριστεί για την αντίθετη φορά και επίσης με ένα άλλο επίπεδο, π.χ. το επίπεδο  $x=0$ .

Μελετώντας τροχιές με την ίδια τιμή ενέργειας  $E=E_0$ , μπορούμε να παριστάνουμε όλες αυτές τις τροχιές πάνω σε μία τομή Poincaré. Είναι εύχρηστο να επιλέγουμε ως αρχικές συνθήκες την  $y(0)=0$  (δηλαδή πάνω στην τομή), ενώ το σημείο  $(x_0, p_{x0})$ , καθώς και όλη η ακολουθία σημείων (8.40), θα πρέπει να βρίσκονται στον τόπο (επιτρεπτή περιοχή) που ορίζεται από τη σχέση

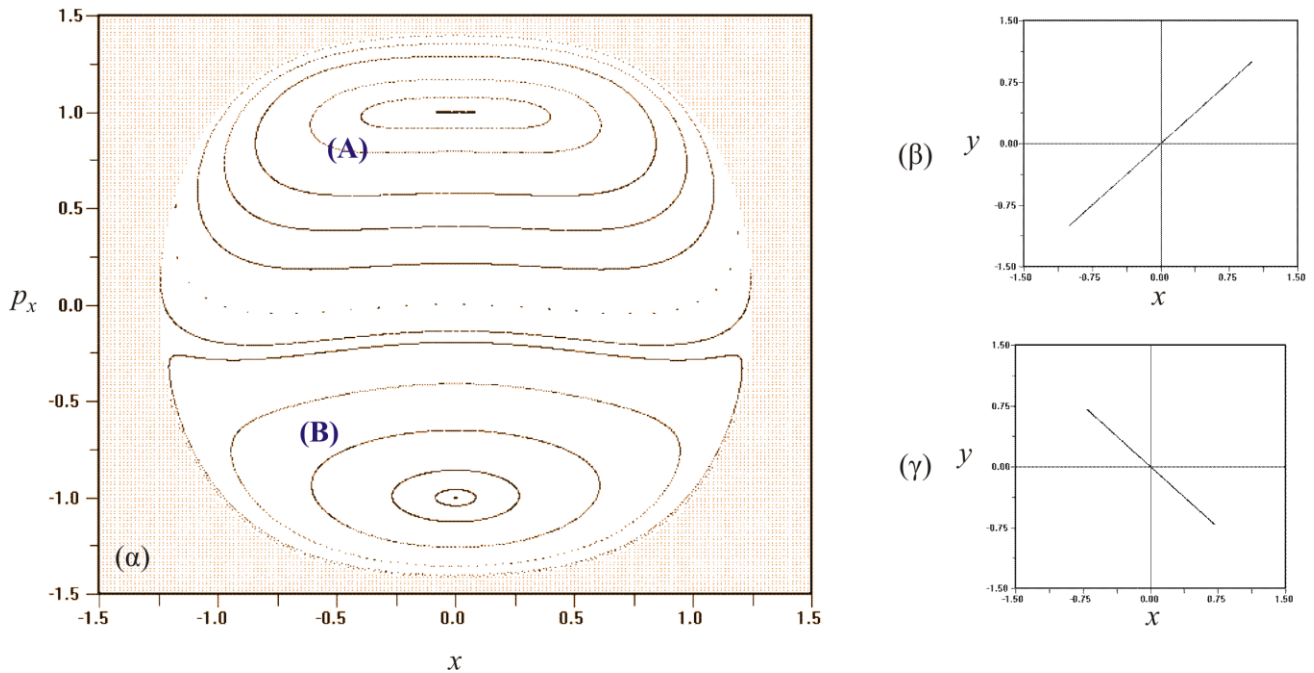
$$p_x^2 \leq 2(E_0 - V(x, 0)). \quad (8.41)$$

Το  $p_y(0)$  υπολογίζεται από τη σχέση (8.39). Οι περιοδικές τροχιές θα δίνουν μια πεπερασμένη ακολουθία σημείων ενώ οι ημιπεριοδικές τροχιές θα καλύπτουν πυκνά μια αναλλοίωτη καμπύλη που αντιπροσωπεύει τον αντίστοιχο τόρο στο χώρο φάσεων. Οι χαοτικές τροχιές θα δώσουν μια διάσπαρτη κατανομή σημείων μέσα στη ζώνη του συντονισμού και κυρίως κοντά στις ασταθείς περιοδικές τροχιές.

Για  $a=1$ , το σύστημα (8.37) είναι ολοκληρώσιμο με δεύτερο ολοκλήρωμα το

$$I = (\dot{x} + \dot{y})^2 + (x + y)^2. \quad (8.42)$$

Η τομή Poincaré του συστήματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 8-21. Παρατηρούμε ότι έχουμε δύο σύνολα φωλιασμένων τόρων (A και B) και, θεωρητικά, στο καθένα από αυτά θα μπορούσαμε να ορίσουμε μεταβλητές δράσης-γωνίας. Στο κέντρο αυτών των περιοχών έχουμε τις δύο θεμελιώδεις περιοδικές τροχιές (κύκλοι  $\gamma_2$ , δεξ Σχήμα 8-10), οι οποίες στο επίπεδο  $xy$  παρουσιάζονται στα πάνελ (β) και (γ). Αυτές περιστοιχίζονται από αναλλοίωτες καμπύλες που γενικά αντιστοιχούν σε τόρους με ημιπεριοδικές τροχιές. Φυσικά, πάντα κοντά σε αυτές θα έχουμε και συντονισμένους τόρους που φέρουν περιοδικές τροχιές. Η ολοκληρωσιμότητα δεν επιτρέπει την ύπαρξη αλυσίδων Poincaré-Birkhoff και φυσικά χαοτικών τροχιών.



Σχήμα 8-21. α) Τομή Poincaré  $y=0, p_y > 0$  για το σύστημα (8.37) με  $a=1$  (ολοκληρώσιμη περίπτωση) β) Η περιοδική τροχιά του κέντρου της περιοχής A στο επίπεδο  $xy$  γ) το ίδιο για την περιοδική τροχιά στην περιοχή B. Η σκιασμένη περιοχή αποτελεί την μη επιτρεπτή περιοχή κίνησης.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ως παράμετρο διαταραχής για το σύστημα (8.37) την παράμετρο  $\varepsilon = 1 - a$

Έτσι για  $\varepsilon=0.98$  παρουσιάζουμε την τομή Poincaré του συστήματος στο Σχήμα 8-22. Σε σχέση με την τομή του ολοκληρώσιμου συστήματος ( $\varepsilon=0$ ) παρατηρούνται εύκολα δύο σημαντικές μεταβολές

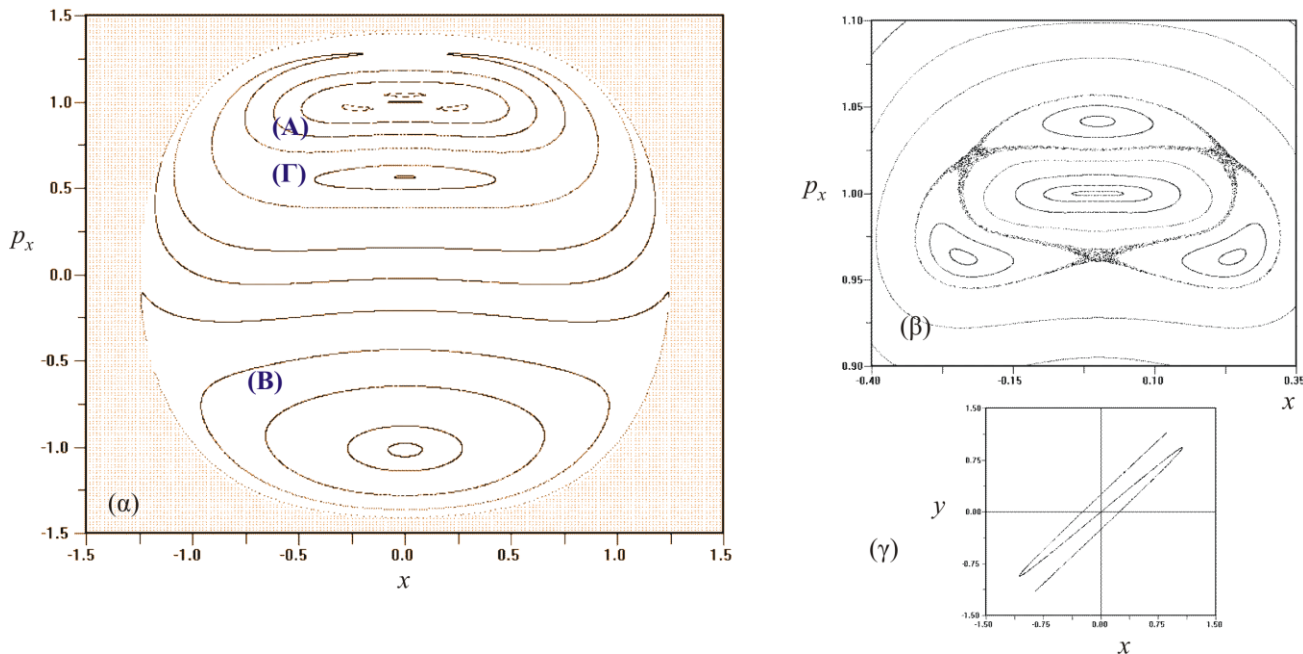
i) Έχουμε την ευδιάκριτη παρουσία μιας αλυσίδας Poincaré-Birkhoff που δημιουργήθηκε από το συντονισμένο τόρο  $p/q=1/3$  στην περιοχή A. Το πάνελ (β) του σχήματος αποτελεί μια μεγέθυνση της περιοχής. Παρατηρούμε την παρουσία χαοτικών τροχιών γύρω από τα τρία ασταθή περιοδικά σημεία της τομής, γεγονός που αποδεικνύει την μη ολοκληρωσιμότητα του συστήματος για τη συγκεκριμένη τιμή της διαταραχής.

ii) Η δημιουργία μιας νέας περιοχής (Γ) γύρω από μια νέα περιοδική τροχιά. Η περιοχή αυτή αποτελεί μια αλυσίδα Poincaré-Birkhoff στο συντονισμό  $1/1$  (μπορείτε να εντοπίσετε τη θέση της ασταθούς περιοδικής τροχιάς;)

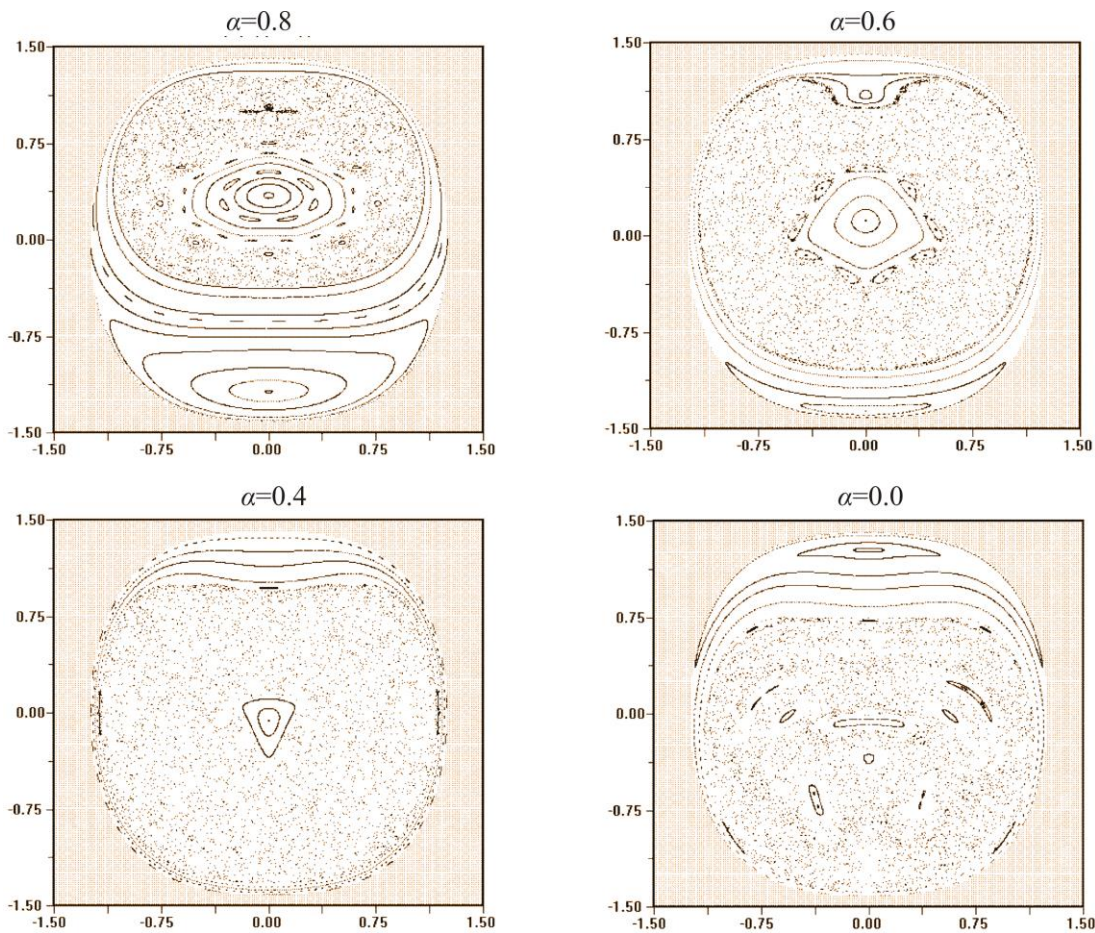
Κάτι το οποίο δεν φαίνεται στο σχήμα είναι η παρουσία στην περιοχή (A), εκτός των συντονισμών  $1/1$  και  $1/3$  και πολλών άλλων συντονισμών  $1/n$  και ο καθένας από αυτούς έχει μια αντίστοιχη αλυσίδα Poincaré-Birkhoff. Καθώς αυξάνει η διαταραχή, των πλάτος των αλυσίδων αυξάνει και οι αλυσίδες «συγκρούονται» μεταξύ τους. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **αλληλοεπικάλυψη συντονισμών** ([resonance overlap of Chirikov](#)) και το οποίο έχει ως συνέπεια την σημαντική διεύρυνση της χαοτικής περιοχής. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 8-23(α) όπου αυξήθηκε η παράμετρος διαταραχής στην τιμή  $\varepsilon=0.2$ . Βέβαια παρατηρούμε ότι το χάος υπάρχει μόνο στην πάνω περιοχή (περιοχή A του ολοκληρώσιμου συστήματος) και περιορίζεται η περιοχή

του από κάποιον τόρο (η τελευταία αναλλοίωτη καμπύλη). Στην περιοχή B οι χαοτικές τροχιές πρέπει να περιορίζονται μόνο σε πολύ στενές αλυσίδες που δεν εντοπίζονται εύκολα υπολογιστικά.

Συνεχίζοντας την αύξηση της διαταραχής παίρνουμε τις υπόλοιπες τομές του σχήματος (Σχήμα 8-23). Τελικά για  $a=0$  ή ( $\varepsilon=1$ ) έχουμε μια χαοτική θάλασσα, στην οποία υπάρχουν πολλές μικρές νησίδες. Τώρα το χάος εξαπλώνεται στην κάτω περιοχή της τομής ενώ η πάνω περιοχή έχουμε την ύπαρξη ενός συνόλου φωλιασμένων τόρων με μια νέα περιοδική τροχιά στο κέντρο τους. Γενικά, στο χώρο φάσεων ενός μη ολοκληρώσιμου Χαμιλτονιανού συστήματος οι κανονικές και οι χαοτικές τροχιές συνυπάρχουν σε αντίθεση με τα απωλεστικά συστήματα, όπου οι τροχιές καταλήγουν είτε σε ένα κανονικό ή σε ένα χαοτικό ελκυστή.



Σχήμα 8-22. α) τομή Poincaré ( $y=0, p_y>0$ ) για  $\varepsilon=0.02$  ( $a=0.98$ ). β) Μια μεγέθυνση της περιοχής (A) της τομής γ) η περιοδική ευσταθής περιοδική τροχιά στο κέντρο των νησίδων (συντονισμός 1/3).



Σχήμα 8-23 Τομές Poincaré ( $y=0, p_y>0$ ) για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\alpha$  του συστήματος (8.37).

#### 8.4.4 Υπολογισμός της τομής Poincaré

Όταν εκτελούμε αριθμητική ολοκλήρωση των κανονικών εξισώσεων του Hamilton, έχουμε το πλεονέκτημα να ελέγχουμε την ακρίβεια της ολοκλήρωσης υπολογίζοντας την τιμή της Χαμιλτονιανής, η οποία θα πρέπει να διατηρείται σταθερή. Στην πράξη μια καλή ολοκλήρωση διατηρεί την Χαμιλτονιανή τουλάχιστον στο  $10^{\circ}$  σημαντικό ψηφίο.

Στηριζόμενοι στην αριθμητική ολοκλήρωση, τα σημεία μιας ακολουθίας Poincaré υπολογίζονται όπως παρουσιάζουμε παρακάτω.

**[M]** Στο Mathematica μια ακολουθία σημείων Poincaré μπορούμε να την πάρουμε κατά τη διαδικασία της αριθμητικής ολοκλήρωσης με την `NDSolve` ως εξής

```
NDSolve[InitialValueProblem, {x, y, px, py}, {t, 0, tmax},
  Method->{EventLocator, "Event"->y[t],
  "Direction"->1, "EventAction":>AppendTo[pdata, {x[t], px[t]}]}
```

όπου

`InitialValueProblem` : οι διαφορικές εξισώσεις και οι αρχικές συνθήκες

`Method` : επιλογή αλγορίθμων της Mathematica για διάφορες ενέργειες ελέγχου όπως η `EventLocator`, η οποία εντοπίζει ένα γεγονός και εκτελεί μια εντολή.

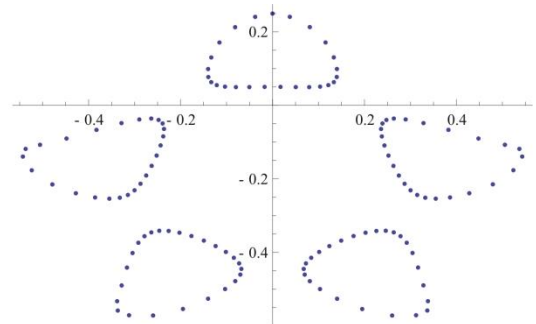
`"Event"->y[t]` : εντοπίζει το γεγονός  $y=0$

`"Direction"->1` : Η φορά (1 ή -1) με την οποία προκύπτει το  $y=0$  κατά την αριθμητική ολοκλήρωση (δηλαδή  $p_y>0$  ή  $p_y<0$ , αντίστοιχα).



"EventAction" :>AppendTo[pdata, {x[t], px[t]}]: Κατά το γεγονός εκτελείται η εντολή AppendTo, δηλαδή εγγραφή του σημείου  $(x(t), p_x(t))$  στη λίστα pdata κατά τη χρονική στιγμή που εντοπίζεται το γεγονός με την δηλωμένη φορά.

```
in[1]= V[x_, y_] := (x + y)^2/4 + (x - a y)^4/4
E0 = 1/4; a = 0.6; tmax = 3000;
x0 = 0; px0 = 0.25;
py0 = Sqrt[2 * (E0 - V[x0, 0]) - px0^2];
pdata = {{x0, px0}};
InitValueProblem = {x'[t] == px[t], y'[t] == py[t],
  px'[t] == -(x[t] + y[t])/2 - (x[t] - a y[t])^3,
  py'[t] == -(x[t] + y[t])/2 + a (x[t] - a y[t])^3, x[0] == x0, y[0] == 0,
  px[0] == px0, py[0] == py0}
NDSolve[InitValueProblem, {x, y, px, py}, {t, 0, tmax},
  Method -> {EventLocator, "Event" -> y[t], "Direction" -> 1,
  "EventAction" -> AppendTo[pdata, {x[t], px[t]}]}, MaxSteps -> Infinity]
poincare = ListPlot[pdata, PlotStyle -> PointSize[0.008]]
```



Σχήμα 8-24. Τομή Poincaré μιας τροχιάς του συστήματος (8.37) με το Mathematica (κώδικας και αποτέλεσμα).

[C] Αν ολοκληρώσουμε αριθμητικά με έναν αλγόριθμο σε C, ο έλεγχος για την τομή  $y=0$  γίνεται με τον έλεγχο της αλλαγής του πρόσημου της  $y$  και του πρόσημου της  $p_y$ , π.χ.

```
SECTION_APPROXIMATION=y(t)*y(t+dt)<0 and py*Direction>0,
```

όπου η μεταβλητή Direction δηλώνει τη φορά της τομής (+1 ή -1). Αν η παραπάνω συνθήκη είναι αληθής θα πρέπει να ελεγχτεί αν η μεταβλητή  $y$  είναι κοντά στο 0 με μια επιθυμητή ακρίβεια:

```
SECTIONFOUND = |y|<Accuracy.
```

Αν δεν πληρείται η παραπάνω συνθήκη, πρέπει να ξαναεκτελεστεί το τελευταίο βήμα με χρόνο  $dt$  έτσι ώστε να προσεγγιστεί με καλύτερη ακρίβεια το  $y=0$ . Με διαφορική προσέγγιση πρώτης τάξης αλλάζουμε το βήμα σε

```
νέο dt = dt*|y(t) / (y(t+dt)-y(t))
```

και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία έως ότου ικανοποιηθεί η συνθήκη SECTIONFOUND.

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να υλοποιηθεί απλά (αλλά όχι με το βέλτιστο τρόπο) με την συνάρτηση

```
void Poincaré(double xin[], double dt0, double xout[]),
```

που παρουσιάζεται παρακάτω. xin[] είναι ο πίνακας με τις αρχικές συνθήκες, dt0 το βασικό βήμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης και xout[] ο πίνακας των τελικών τιμών των μεταβλητών. Η αντιστοίχιση μεταβλητών και στοιχείων των πινάκων (διάσταση  $N+1=5$ ) έχει ως εξής

```
[0]→t, [1]→x, [2]→y, [3]→p_x, [4]→p_y
```

Η συνάρτηση Poincaré χρησιμοποιεί την RK4 για την αριθμητική ολοκλήρωση, η οποία χρησιμοποιεί την odevectorfield για τη δήλωση των διαφορικών εξισώσεων (δες §2.2.2).

```
void Poincaré(double xin[], double dt0, double xout[])
{
  double x0[N+1];
  for (int i = 0; i <= N; i++) x0[i] = xin[i];
  double dt = dt0;
  int SECTIONFOUND = 0, SECTIONAPPROX = 0; /* flags*/
  RK4(x0, dt, xout);
  for (int i = 0; i <= N; i++) x0[i] = xout[i];
  while (!SECTIONFOUND) {
    RK4(x0, dt, xout);
```

```

SECTIONAPPROX = (x0[2] * xout[2] <= 0 && x0[4] * Direction>0);
if (SECTIONAPPROX) {
    SECTIONFOUND = (fabs(xout[2])<Accuracy);
    dt *= fabs(x0[2] / (xout[2]-x0[2]));
}
else for (int i = 0; i <= N; i++) x0[i] = xout[i];
}
}

```

Ένας πλήρης κώδικας δίνεται στο αρχείο `codePoincareSection.c`<sup>13</sup>

## Ασκήσεις

**Άσκηση 8.4.1.** Για το σύστημα (8.37) με  $a=1$  εφαρμόστε τον μετασχηματισμό μεταβλητών

$$w = x + y, \quad u = x - y, \quad (p_w = \dot{w}, \quad p_u = \dot{u})$$

και δείξτε ότι το σύστημα διαχωρίζεται. Συγκεκριμένα οι εξισώσεις γράφονται  $\dot{w} = -w, \quad \ddot{u} = -2u^3$ .

**Άσκηση 8.4.2.** Λύστε αναλυτικά τις εξισώσεις της άσκησης 8.4.1 (έστω και με τη βοήθεια του Mathematica) και βρείτε αναλυτικά τις αρχικές συνθήκες για τις βασικές περιοδικές τροχιές στα κέντρα των περιοχών A και B που δίνονται στο Σχήμα 8-21.

**Άσκηση 8.4.3.** Δείξτε ότι το σύστημα (8.37) με  $a=-1$  έχει ως ολοκλήρωμα της κίνησης το

$$I_1 = p_x p_y + (x + y)^2 / 4 + (x + y)^4 / 4$$

καθώς και το ολοκλήρωμα  $I_2 = p_x - p_y$ . Αν τα  $I_1, I_2$  και  $H$  είναι συναρτησιακά ανεξάρτητες ποσότητες τότε το σύστημα θα ήταν *υπερ-ολοκληρωσιμο*. Ισχύει κάτι τέτοιο;

**Άσκηση 8.4.4.** Υπολογίστε την τομή Poincaré του συστήματος (8.37) για  $a=0$  και  $E=1/4$ . Υπάρχει περιοχή με χαοτικές κινήσεις; Είναι το σύστημα για  $a=0$  ολοκληρώσιμο;

**Άσκηση 8.4.5.** Για το Γαλαξιακό δυναμικό Henon-Heiles

$$V = \frac{a}{2}(x^2 + y^2) - x^2 y + \frac{\varepsilon}{3} y^3,$$

και για τις τιμές των παραμέτρων  $a=1/2, \varepsilon=1$

α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας

β) Υπολογίστε για ποιες τιμές ενέργειας έχουμε περατωμένες κινήσεις γύρω από το (0,0).

γ) Θεωρήστε την τομή Poincaré  $y=0, p_y>0$  για ενέργεια  $E=0.015$  και τα σημεία  $(x, p_x)=(0.03,0), (0.05,0), (0.1,0)$ . Υπολογίστε την τιμή της μεταβλητής  $p_y$  για αυτά τα σημεία. Ολοκληρώστε και σχεδιάστε τις αντίστοιχες τροχιές στο επίπεδο  $(x,y)$  και στον χώρο  $(x,y,p_x)$

δ) Για ενέργεια  $E=0.015$  σχεδιάστε την τομή Poincaré του συστήματος. Να συμπεριληφθεί και η καμπύλη μηδενικής ταχύτητας.

**Άσκηση 8.4.6.** Το δισδιάστατο δυναμικό Yang-Mills περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + x^2 y^2.$$

α) Σχεδιάστε τις καμπύλες μηδενικής ταχύτητας στο επίπεδο  $xy$ .

<sup>13</sup> Ο κώδικας `codePoincareSection.c` είναι διαθέσιμος στην ιστοσελίδα του παρόντος συγγράμματος/κεφαλαίου στον Ελληνικό Συσσωρευτή Ακαδημαϊκών Ηλεκτρονικών Βιβλίων (<http://repfiles.kallipos.gr/file/14150>)

β) Σχεδιάστε μια τροχιά στο επίπεδο  $xy$  με αρχικές συνθήκες  $x_0=0.5$ ,  $y_0=0.2$ ,  $p_{x0}=p_{y0}=0$ . Είναι αυτή τακτική ή χαοτική;

γ) Για την ενέργεια που αντιστοιχεί στην παραπάνω τροχιά υπολογίστε την τομή Poincaré  $y=0$ ,  $p_y>0$ . Υπάρχουν αναλλοίωτες καμπύλες;

## 8.5 Βιβλιογραφία

- Arrowsmith, D.K. & Place, C.M., 1990. *An Introduction to Dynamical Systems*. New York: Cambridge University Press.
- Baker, G.L. & Gollub, J.P., 1990. *Chaotic Dynamics: an introduction*. New York: Cambridge University Press.
- Bauman, G., 2005. *Mathematica for Theoretical Physics: Classical Mechanics and nonlinear dynamics*. New York: Springer.
- Berry, M.V., 1978. *Regular and irregular motion*. AIP conference Proceedings, 46, pp. 16-120.
- Bountis, T. & Skokos, H., 2012. *Complex Hamiltonian Dynamics*. Berlin: Springer-Verlag.
- Contopoulos, G., 2002. *Order and Chaos in Dynamical Astronomy*. Berlin: Springer-Verlag.
- Diacu, F. & Holmes P., 1996. *Celestial encounters: The origin of chaos and stability*. Princeton University Press. (ελληνική μετάφραση: *Απροσδόκητες Ουράνιες Συναντήσεις*. Αθήνα: εκδόσεις Τραυλός).
- Enns, R.H. & McGuire, G.C., 2001. *Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers*. Boston: Birkhauser.
- Hilborn, R.C., 1994. *Chaos and Nonlinear Dynamics*. New York, Oxford: Oxford University Press.
- Iro, H., 2002. *A modern approach to Classical Mechanics*. World Scientific.
- Jose, J.V. & Saletan, E.J., 1998. *Classical Dynamics: a contemporary approach*. Cambridge UK: Cambridge University Press.
- Korsch, H.J. & Jodl, H.J., 1998. *Chaos: A program Collection*. 2<sup>nd</sup> ed. Berlin: Springer-Verlag.
- Lichtenberg, A. and Leiberman, M., 1994. *Regular and Stochastic Motion*. 2<sup>nd</sup> ed. New York: Springer-Verlag.
- Lynch, S., 2007. *Dynamical systems with applications using Mathematica*. Boston: Birkhauser.
- Ott, E., 2002. *Chaos in Dynamical Systems*. 2<sup>nd</sup> ed. New York: Cambridge University Press.
- Rasband, S. N., 1990. *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*. New York: Wiley.
- Sagdeev, R.Z. & Usikov, D.A. & Zaslavsky, G.M., 1988. *Nonlinear Physics: from pendulum to turbulence and chaos*. Chur-Switzerland: Harwood Academic publ.
- Schuster, H.G., 1984. *Deterministic Chaos: an introduction*. Weinheim-Germany: Physik-Verlag.
- Strogatz, S.H., 1994. *Nonlinear Dynamics and Chaos, with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- Tabor M., 1989. *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: An Introduction*. New York: Wiley.
- Wiggins, S., 1990. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. New York: Dover.
- Ιχτιάρογλου, Σ.Ι., 2004. *Εισαγωγή στη Μηχανική Hamilton*. 2η εκδ. Θεσσαλονίκη: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Α.Π.Θ.
- Κουκουλογιάννης, Β., 2004. *Μελέτη εντοπισμένων ταλαντώσεων σε συστήματα πολλών βαθμών ελευθερίας*. Διδακτορική διατριβή. Θεσσαλονίκη: Α.Π.Θ.
- Σούρλας, Δ., 2012. *Δυναμικά συστήματα και εφαρμογές με τη χρήση του Maple*. Σημειώσεις. Διαθέσιμο στη: [http://www.physics.upatras.gr/UploadedFiles/course\\_182\\_1516.pdf](http://www.physics.upatras.gr/UploadedFiles/course_182_1516.pdf). Πανεπιστήμιο Πάτρας.

## 9 Μονοδιάστατες Απεικονίσεις<sup>14</sup>

### 9.1 Γενικές έννοιες και ορισμοί

#### 9.1.1 Απεικονίσεις

Τα διακριτά δυναμικά συστήματα περιγράφονται κυρίως από απεικονίσεις. Οι απεικονίσεις γενικά παίρνουν ένα σημείο  $x_n$  του χώρου στον οποίον ορίζονται και με μια συνάρτηση το απεικονίζουν σε ένα άλλο σημείο, το  $x_{n+1}$ . Στην γενική περίπτωση ενός  $k$ -διάστατου χώρου μια απεικόνιση (διάστασης  $k$ ) είναι της μορφής

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (9.1)$$

όπου  $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$  μια διανυσματική συνάρτηση και  $n$  ένας φυσικός (ή γενικότερα ακέραιος) αριθμός, ο οποίος παίζει τον ρόλο του «χρόνου». Στο παρόν βιβλίο θα ασχοληθούμε με απεικονίσεις στον Ευκλείδειο χώρο, θεωρούμε δηλαδή  $f: A \rightarrow A$ , όπου  $A$  κάποιο υποσύνολο του  $R^k$ . Αν πάρω ως **αρχική συνθήκη** το σημείο  $x_0$  του χώρου, τότε η **τροχιά** του κάτω από την απεικόνιση είναι το σύνολο

$$\{x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f^2(x_0), \dots, x_n = f^n(x_0), \dots\}, \quad (9.2)$$

όπου  $f^n(x_0)$  συμβολίζει τη δράση της συνάρτησης στο  $x_0$  έπειτα από  $n$  φορές, είναι δηλαδή η σύνθεση της συνάρτησης  $f$  με τον εαυτό της  $n$  φορές,  $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ . **Σταθερό σημείο** (fixed point) μιας απεικόνισης ονομάζεται ένα σημείο, το οποίο απεικονίζεται στον εαυτό του,

$$f(x_0) = x_0, \quad (9.3)$$

ενώ **περιοδικό σημείο** περιόδου  $m$  ορίζουμε το σημείο για το οποίο ισχύει

$$f^m(p) = p, \quad (9.4)$$

όπου  $m$  είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση. Αξίζει εδώ να σημειώσουμε ότι ένα σταθερό σημείο ικανοποιεί αυτόματα και την συνθήκη (9.4) για κάθε  $m \geq 1$ . Επίσης, ένα περιοδικό σημείο περιόδου  $m$  αποτελεί ένα σταθερό σημείο της  $f^m$ . Τέλος, μια τροχιά που ξεκινάει από ένα σταθερό σημείο θα αποτελείται μόνο από αυτό, ενώ μια τροχιά που ξεκινάει από ένα περιοδικό σημείο περιόδου  $m$  θα αποτελείται από  $m$  σημεία. Ένα σταθερό σημείο  $x_0$  λέγεται **ευσταθές**, αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$ , έτσι ώστε αν  $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$ , τότε  $|\tilde{x}_n - x_0| < \varepsilon$  για κάθε  $n \geq 0$ . Ισχύει δηλαδή ότι για κάθε ανοιχτή περιοχή  $U$  του  $x_0$  υπάρχει γύρω του ανοιχτή περιοχή  $V$  αρχικών συνθηκών, τα σημεία της οποίας έχουν τροχιές που παραμένουν για πάντα στην περιοχή  $U$ . Αν για όλα τα σημεία της  $V$  ισχύει  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = x_0$  τότε το  $x_0$  ονομάζεται ασυμπτωτικά ευσταθές και η περιοχή  $V$  λεκάνη έλξης. Ένα σημείο το οποίο δεν είναι ευσταθές είναι **ασταθές** και οι τροχιές δεν διατηρούνται γύρω του, αλλά είναι δυνατόν να πηγαίνουν σε ένα άλλο σταθερό σημείο, το οποίο είναι ευσταθές, ή σε ένα άλλο ελκτικό σύνολο ή στο άπειρο.

#### 9.1.2 Μονοδιάστατες απεικονίσεις

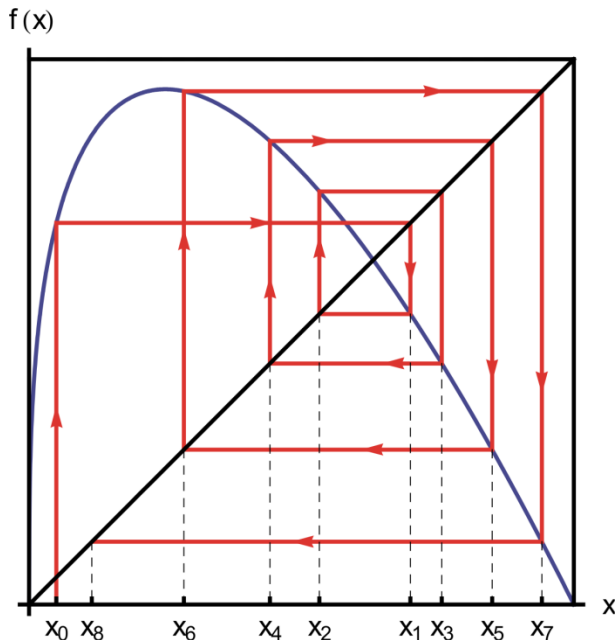
Στο κεφάλαιο αυτό θα επικεντρωθούμε σε μονοδιάστατες απεικονίσεις, όπου η  $f$  είναι μια βαθμωτή συνάρτηση μιας μεταβλητής  $x$ ,

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (9.5)$$

Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση της  $f$ , μπορούμε να περιγράψουμε την τροχιά ενός σημείου, η οποία θα αποτελείται από ένα σύνολο σημείων του άξονα  $x$ . Έστω  $x_0$  το αρχικό

<sup>14</sup> Τα σχήματα αυτού του κεφαλαίου δημιουργούνται με πρόγραμμα του Mathematica το οποίο είναι είναι διαθέσιμο στην ιστοσελίδα του παρόντος συγγράμματος/κεφαλαίου στον Ελληνικό Συσσωρευτή Ακαδημαϊκών Ηλεκτρονικών Βιβλίων (<http://repfiles.kallipos.gr/file/14151>)

σημείο. Για να βρούμε το επόμενο σημείο  $x_1$ , φέρνουμε ένα κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα από το  $(x_0, 0)$  στο  $(x_0, f(x_0))$ , και έπειτα ένα οριζόντιο από το σημείο αυτό στο  $(f(x_0), f(x_0))$ . Έτσι, έχουμε απεικονίσει το  $x_0$  στο σημείο  $x_1 = f(x_0)$ . Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο από το  $(x_1, x_1)$  στο  $(x_1, f(x_1))$  και μετά στο  $(f(x_1), f(x_1))$ , προσδιορίζουμε το  $x_2 = f(x_1)$ , κ.ο.κ. Γραφικά η όλη διαδικασία περιγράφεται στο Σχήμα 9-1, όπου, εκτός από την γραφική παράσταση της απεικόνισης  $f(x)$ , χρησιμοποιούμε και την διαγώνιο, που είναι η ταυτοτική απεικόνιση  $I(x) = x$ .



Σχήμα 9-1. Παράδειγμα μονοδιάστατης απεικόνισης  $f$  (μπλε) και προσδιορισμός της τροχιάς ενός σημείου  $x_0$  κάτω από την  $f$  (κόκκινο).

### 9.1.3 Ευστάθεια σταθερών και περιοδικών σημείων

Για τις μονοδιάστατες απεικονίσεις, ο προηγούμενος ορισμός της ευστάθειας οδηγεί, όπως θα δούμε, σε μια απλή συνθήκη. Έστω  $x_0$  ένα σταθερό σημείο, ισχύει δηλαδή  $f(x_0) = x_0$ . Θέτουμε  $x_n = x_0 + \delta x_n$  στην (9.5), όπου  $|\delta x_n| \ll 1$  μια πολύ μικρή μεταβολή γύρω από το σταθερό σημείο. Αν αναπτύξουμε την συνάρτηση  $f$  κατά Taylor γύρω από το  $x_0$ , η μεταβολή αυτή στο επόμενο βήμα θα είναι ίση με

$$\delta x_{n+1} = f'(x_0)\delta x_n + \frac{1}{2}f''(x_0)(\delta x_n)^2 + \dots \quad (9.6)$$

Έτσι, συμπεραίνουμε καταρχάς ότι στην απλή περίπτωση των γραμμικών απεικονίσεων, όπου  $\delta x_{n+1} = f'(x_0)\delta x_n$ , η απόσταση κάθε γειτονικού σημείου  $x_n$  από το σταθερό σημείο  $x_0$  μεγαλώνει ή μικραίνει κάτω από την απεικόνιση, ανάλογα με την συμπεριφορά της παραγώγου της  $f$  στο  $x_0$ , και συγκεκριμένα ανάλογα με το αν η τιμή της  $|f'|$  στο σημείο  $x_0$  είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη της μονάδας, ενώ αν  $|f'(x_0)| = 1$ , τότε παραμένει σταθερή. Για τις μη γραμμικές απεικονίσεις, αν γραμμικοποιήσουμε την σχέση (9.6), δηλαδή παραλείψουμε όρους δεύτερης τάξης και άνω, πέφτουμε πάλι στην περίπτωση των γραμμικών. Όπως αποδεικνύεται, μια μη γραμμική απεικόνιση  $f$  στην περιοχή ενός σταθερού σημείου  $x_0$  είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την αντίστοιχη γραμμικοποιημένη, εφόσον  $|f'(x_0)| \neq 1$ . Πιο συγκεκριμένα, η ευστάθεια του σταθερού σημείου εξασφαλίζεται με τη συνθήκη

$$|f'(x_0)| < 1, \quad (9.7)$$

όπου η μεταβολή  $|\delta x_n|$  μειώνεται εκθετικά. Έτσι, αν ισχύει η σχέση (9.7), τότε το σταθερό σημείο είναι ευσταθές, ενώ, αντίθετα, αν  $|f'(x_0)| > 1$ , τότε το σταθερό σημείο είναι ασταθές. Τέλος, αν  $|f'(x_0)| = 1$ , τότε, για τις μη γραμμικές απεικονίσεις, η πρώτη παράγωγος δεν μπορεί να αποφανθεί, αν το σημείο είναι ευσταθές ή ασταθές, και χρειάζεται μελέτη παραγώγων ανωτέρας τάξεως.

Η περίπτωση ενός περιοδικού σημείου  $p$  περιόδου  $m$ , για το οποίο ισχύει τώρα  $f^m(p) = p$ , μπορεί να μελετηθεί με παρόμοιο τρόπο. Αρκεί να θεωρήσουμε την συνάρτηση  $g(x) = f^m(x)$ , για την οποία το  $p$  αποτελεί σταθερό σημείο. Εφαρμόζοντας τα παραπάνω συμπεράσματα για την απεικόνιση  $g$ , καταλήγουμε ότι αν

$$|(f^m)'(p)| < 1, \quad (9.8)$$

τότε το περιοδικό σημείο  $p$  είναι ευσταθές ενώ αν  $|(f^m)'(p)| > 1$ , τότε είναι ασταθές.

## Ασκήσεις

**Άσκηση 9.1.1.** Βρείτε τη γενική λύση των παρακάτω απεικονίσεων

α)  $x_{n+1} = 2x_n$

β)  $x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n$

γ)  $x_{n+1} + x_n = n$

**Άσκηση 9.1.2** Για τις απεικονίσεις

1.  $x_{n+1} = rx_n - x_n^3$

2.  $x_{n+1} = r - x_n^4$

3.  $x_{n+1} = r + x_n - x_n^3$

α) Βρείτε αναλυτικά τα σταθερά σημεία  $x^*$  της απεικόνισης και την ευστάθειά τους.

β) Βρείτε αναλυτικά τα περιοδικά σημεία περιόδου 2 της απεικόνισης και την ευστάθειά τους.

**Άσκηση 9.1.3.** Για την απεικόνιση

$$x_{n+1} = r \cos(\pi x_n) \quad 0 < r \leq 1$$

α) Βρείτε τα σταθερά σημεία και την ευστάθειά τους για  $r=0.35$ ,  $r=0.5$ ,  $r=1.0$ .

β) Βρείτε την περιοδική τροχιά περιόδου 2 για  $r=0.55$  και για  $r=0.6$ .

(**Σημείωση:** χρησιμοποιήστε αριθμητικούς υπολογισμούς)

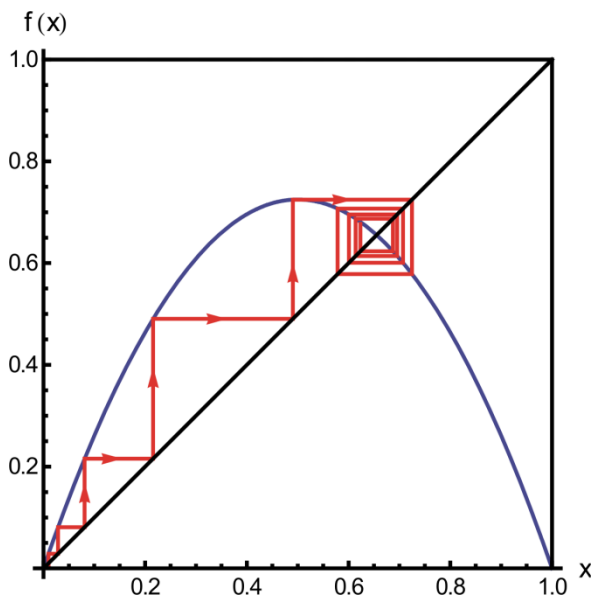
## 9.2 Η λογιστική απεικόνιση

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μονοδιάστατης απεικόνισης είναι η [λογιστική απεικόνιση](#) που δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n), \quad (9.9)$$

και η οποία έγινε ευρέως γνωστή το 1976, όταν χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τον βιολόγο Robert May ως δημογραφικό μοντέλο. Η γραφική παράσταση της  $f(x) = Rx(1-x)$  φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Όπως βλέπουμε, η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή  $f_{\max} = R/4$  στο  $x = 1/2$ . Επομένως, για  $0 < R \leq 4$  κάθε  $x_n \in [0,1]$  απεικονίζεται σε ένα  $x_{n+1} \in [0,1]$ , δηλαδή το διάστημα  $[0,1]$  απεικονίζεται στον εαυτό του, και συγκεκριμένα για  $R = 4$  απεικονίζεται ακριβώς στον εαυτό του, παραμένει όπως λέμε αναλλοίωτο. Ενώ, για  $R > 4$  το

διάστημα  $[0,1]$  απεικονίζεται και έξω από το  $[0,1]$ . Η σπουδαιότητα της παραπάνω παρατήρησης θα φανεί στη συνέχεια.



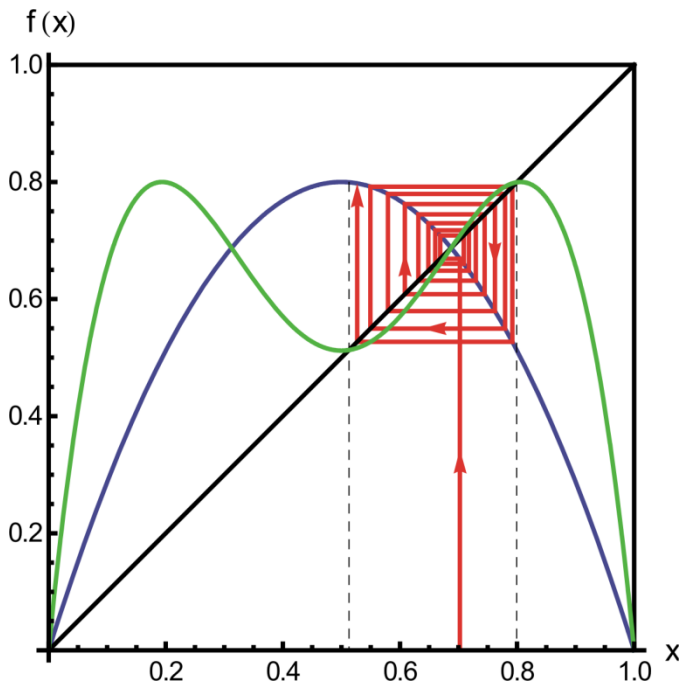
Σχήμα 9-2. Η λογιστική απεικόνιση για  $R=2.9$  (μπλε). Ένα σημείο που ξεκινάει κοντά στο ασταθές σημείο ισορροπίας  $x_{0,1}$  καταλήγει στο ευσταθές  $x_{0,2}$ .

Τα σταθερά σημεία της απεικόνισης προκύπτουν, όπως είπαμε, από την εξίσωση  $f(x_0) = x_0$  και είναι το  $x_{0,1} = 0$  και το  $x_{0,2} = (R-1)/R$  για κάθε τιμή του  $R$ . Τα σημεία αυτά δεν είναι άλλα από τα σημεία τομής της  $f$  με την διαγώνιο, που βλέπουμε στο Σχήμα 9-2. Αντικαθιστώντας το  $x_{0,1}$  στην συνθήκη (9.7), βρίσκουμε  $|R| < 1$ , δηλαδή το  $x_{0,1}$  είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας για  $-1 < R < 1$ . Όμοια για το άλλο σταθερό σημείο προκύπτει ότι το  $x_{0,2}$  είναι ευσταθές όταν  $|2-R| < 1$ , δηλαδή για  $R_0 < R < R_1$ , όπου  $R_0 = 1$  και  $R_1 = 3$ . Στο Σχήμα 9-2 βλέπουμε για  $R = 2.9$  ένα σημείο που ξεκινάει πολύ κοντά στο ασταθές  $x_{0,1}$  να απομακρύνεται σταδιακά και να τείνει ασυμπτωτικά στο ευσταθές  $x_{0,2}$ .

Τι συμβαίνει όμως για μεγαλύτερες τιμές του  $R$ ; Το  $x_{0,2}$  χάνει την ευστάθεια του και εμφανίζεται μια περιοδική τροχιά περιόδου 2. Πράγματι, αν αναζητήσουμε περιοδικά σημεία περιόδου 2 χρησιμοποιώντας την συνθήκη  $f^2(p) = p$ , καταλήγουμε σε μια πολυωνυμική εξίσωση 4<sup>ου</sup> βαθμού, την οποία όμως ικανοποιούν και τα σταθερά σημεία που βρήκαμε. Έτσι, αν εξαιρέσουμε τις ρίζες αυτές, η πολυωνυμική εξίσωση ανάγεται τελικά σε μια δευτεροβάθμια, της οποίας οι λύσεις είναι

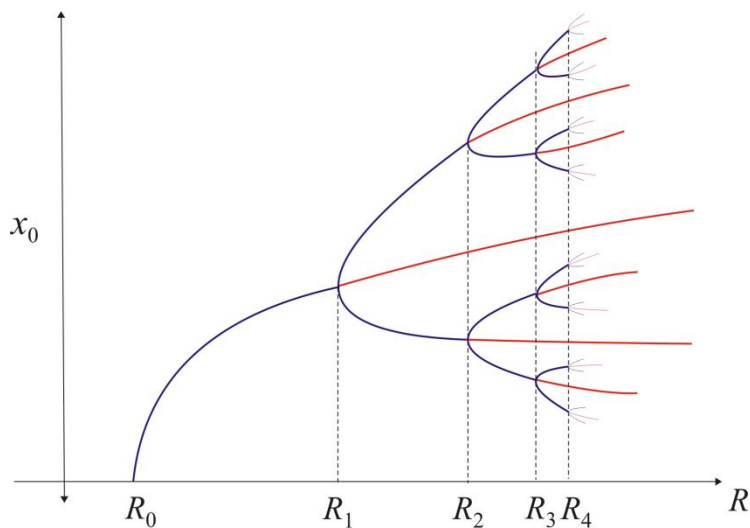
$$p = \frac{1}{2R} \left( R+1 \pm \sqrt{(R+1)(R-3)} \right) \quad (9.10)$$

Από δω συμπεραίνουμε ότι για  $R > R_1$  υπάρχουν ακριβώς δύο περιοδικά σημεία περιόδου 2, τα οποία συνεπώς ανήκουν στην ίδια περιοδική τροχιά. Η τροχιά αυτή, που δεν υπήρχε πριν, αποδεικνύεται με τη σχέση (9.8) ότι για  $R_1 < R < R_2$  είναι ευσταθής, όπου  $R_2 = 1 + \sqrt{6} = 3.44949\dots$ . Στο Σχήμα 9-3, μπορούμε να δούμε για  $R = 3.2$  πως ένα σημείο που ξεκινάει πολύ κοντά στο ασταθές  $x_{0,2}$  σιγά-σιγά απομακρύνεται και πέφτει τελικά στην παραπάνω ευσταθή περιοδική τροχιά. Εκτός από την γραφική παράσταση της  $f$ , τώρα βλέπουμε και της  $f^2$ , καθώς τα σημεία τομής της με την διαγώνιο μας δίνουν τις ρίζες (9.10).



Σχήμα 9-3. Η λογιστική απεικόνιση  $f$  (μπλε) και η  $f^2$  (πράσινο) για  $R=3.2$ . Ένα σημείο που ξεκινάει κοντά στο ασταθές σταθερό σημείο  $x_{0,2}$  καταλήγει στην ευσταθή περιοδική τροχιά περιόδου 2.

Το φαινόμενο αυτό συνεχίζεται. Δηλαδή, για  $R > R_2$  η περιοδική τροχιά περιόδου 2 γίνεται ασταθής, αλλά εμφανίζεται μία ευσταθής περιοδική τροχιά περιόδου 4, κ.ο.κ. Η ιδιότητα, κατά την οποία για  $R = R_n$  εμφανίζεται μία ευσταθής περιοδική τροχιά περιόδου  $2^n$ , που για  $R = R_{n+1}$  γίνεται ασταθής, για κάθε  $n$ , ονομάζεται **διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου** ([period doubling bifurcation](#)) και παρουσιάζεται σχηματικά παρακάτω (Σχήμα 9-4).



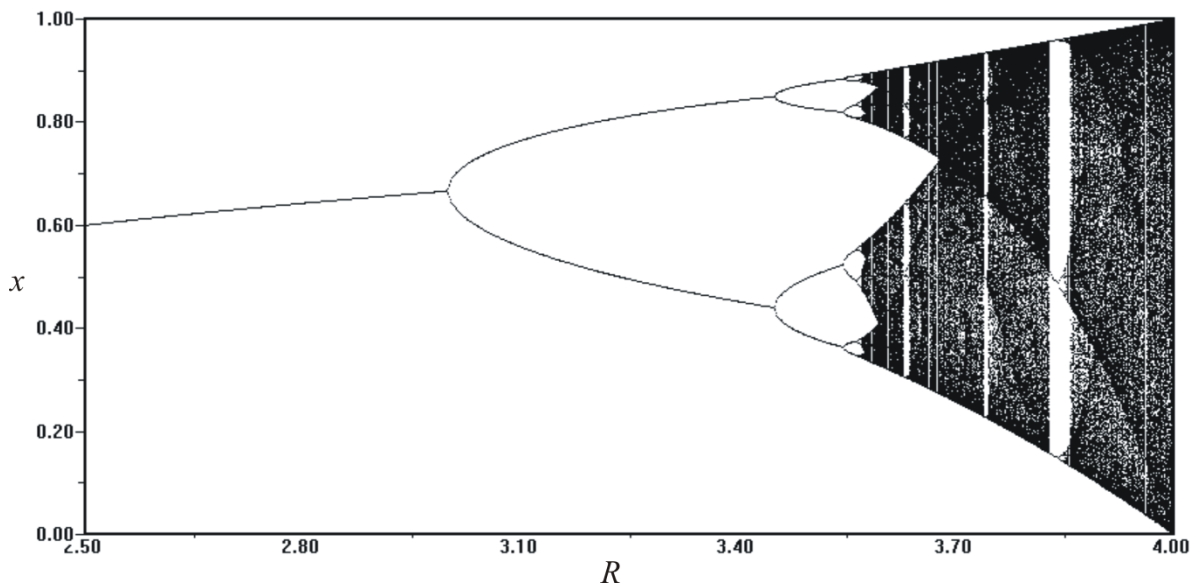
Σχήμα 9-4. Η διακλάδωση διπλασιασμού περιόδων. Οι μπλε καμπύλες αντιστοιχούν σε ευσταθή περιοδικά σημεία ενώ οι κόκκινες σε ασταθή.

Όπως βρέθηκε αριθμητικά, οι διακλαδώσεις αυτές για την λογιστική απεικόνιση συνεχίζουν μέχρι το  $R = R_\infty = 3.569945\dots$ , όπου έχουν εμφανιστεί όλες οι περιοδικές τροχιές περιόδου  $2^n$  και έχουν γίνει ασταθείς. Ο ρυθμός με τον οποίο συγκλίνουν οι τιμές  $R_n$  της παραμέτρου  $R$  στο  $R_\infty$  βρέθηκε επίσης αριθμητικά, ότι είναι ίσος με τον λόγο δύο διαδοχικών διαστημάτων τιμών ευστάθειας των περιοδικών τροχιών περιόδου  $2^n$  και  $2^{n+1}$  αντίστοιχα,



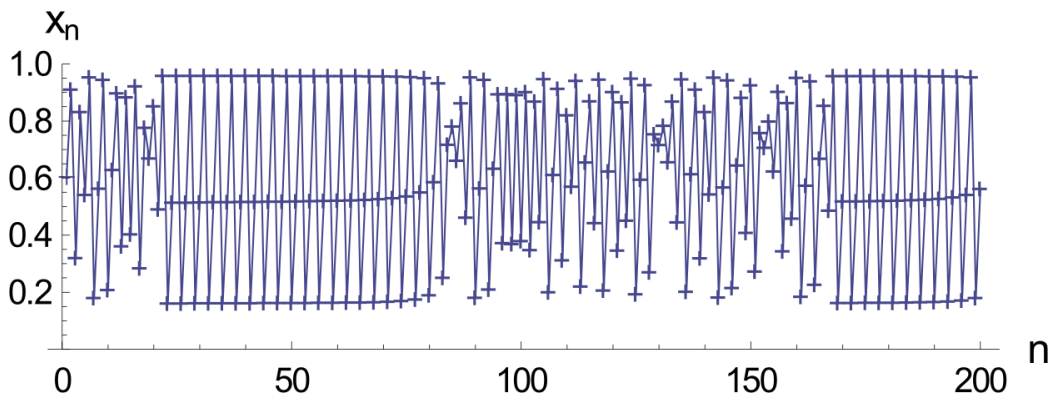
$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n} \quad (9.11)$$

Ο αριθμός αυτός είναι γνωστός ως η σταθερά του Feigenbaum, ο οποίος βρήκε ότι είναι ίση με  $\delta = 4.669202\dots$ . Ο ίδιος πρότεινε ότι είναι μια παγκόσμια σταθερά, με την έννοια ότι την συναντάμε και σε άλλες μονοδιάστατες απεικονίσεις, που εμφανίζουν ένα μέγιστο, κάτω από ήπιες προϋποθέσεις. Χρησιμοποιώντας την  $\delta$ , μπορούμε μάλιστα να εκφράσουμε τον τρόπο με τον οποίο συγκλίνει η ακολουθία των σημείων διακλάδωσης σύμφωνα με τον τύπο  $R_n = R_\infty - C\delta^{-n}$ , όπου  $C = 2.6327\dots$ . Στο Σχήμα 9-5 βλέπουμε το διάγραμμα διακλάδωσης της λογιστικής απεικόνισης, το οποίο περιγράφει τα ευσταθή περιοδικά σημεία της απεικόνισης συναρτήσεως της παραμέτρου  $R$ . Τα σημεία αυτά μπορούν να προκύψουν αν ξεκινήσουμε από ένα φάσμα αρχικών συνθηκών, έπειτα από έναν ικανοποιητικά μεγάλο αριθμό (π.χ. 2000) επαναλήψεων της απεικόνισης.



Σχήμα 9-5. Υπολογιστικό διάγραμμα διπλασιασμού περιόδου της λογιστικής απεικόνισης. Τα ευσταθή περιοδικά σημεία αποτελούν ελκτικά σύνολα με  $N$  αριθμό σημείων. Το  $N$  μεταβάλλεται διακριτά με την παράμετρο  $R$ . Για  $R > R_\infty$  το  $N$  απειρίζεται, Όμως υπάρχουν περιοχές του  $R$  (παράθυρα) όπου το  $N$  ξαναγίνεται πεπερασμένο.

Για  $R > R_\infty$  η λογιστική απεικόνιση αρχίζει να εμφανίζει χαοτική συμπεριφορά, μια έννοια που θα γίνει πιο συγκεκριμένη στην επόμενη παράγραφο. Όπως βλέπουμε όμως στο Σχήμα 9-5, στο διάστημα  $R_\infty < R < 4$  ανάμεσα στην χαοτική περιοχή υπάρχουν «παράθυρα» ευστάθειας άλλων περιοδικών τροχιών. Το μεγαλύτερο από αυτά διακρίνουμε στην περιοχή  $3.828427 < R < 3.841499$ , το οποίο αντιστοιχεί σε μια περιοδική τροχιά περιόδου 3. Κοντά σε αυτήν την περιοχή του  $R$  υπάρχουν άλλες τροχιές που παρουσιάζουν μια ενδιάμεση συμπεριφορά, τροχιές δηλαδή που άλλοτε εμφανίζουν μια περιοδικότητα και άλλοτε μια χαοτική συμπεριφορά. Την «χρονική» εξέλιξη μιας από αυτές βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 9-6. Τροχιά της λογιστικής απεικόνισης για  $R=3.8282$  και  $x_0=0.2$ .

## Ασκήσεις

**Άσκηση 9.2.1.** Βρείτε τα περιοδικά σημεία περιόδου δύο της λογιστικής απεικόνισης καθώς και την ευστάθειά τους. Με τη βοήθεια του Mathematica, βρείτε και τα περιοδικά σημεία περιόδου 4. Σχεδιάστε τις τροχιές με  $x(0)=0.1$  και για  $R$  στην περιοχές όπου έχουμε ευσταθείς περιοδικές τροχιές περιόδου 1, 2 και 4

**Άσκηση 9.2.2.** Για την απεικόνιση

$$x_{n+1} = rx_n e^{-x_n} \quad 0 < r < 20$$

χρησιμοποιώντας το Mathematica υπολογίστε τα παρακάτω:

- τα σταθερά σημεία και την ευστάθειά τους για  $r=5$ ,  $r=10$ ,  $r=20$
- την περιοδική τροχιά περιόδου 2 για  $r=10$  και για  $r=14$ .
- για ποια τιμή της παραμέτρου  $r=r_{B1}$  έχουμε την 1<sup>η</sup> διακλάδωση (από σταθερό σημείο σε περιοδική τροχιά περιόδου 2) ;
- για ποια τιμή της παραμέτρου  $r=r_{B2}$  έχουμε τη 2<sup>η</sup> διακλάδωση (από περιοδική τροχιά περιόδου 2 σε περιόδου 4);
- το διάγραμμα διακλαδώσεων

**Άσκηση 9.2.3.** Εντοπίστε μια τιμή του  $R$  για την οποία η λογιστική απεικόνιση έχει περιοδικά σημεία περιόδου τρία. Υπολογίστε τα και βρείτε την ευστάθειά τους με τη βοήθεια του Mathematica.

**Άσκηση 9.2.4.** Θεωρούμε τη διακριτή εξίσωση  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n})$  Βρείτε τα σταθερά σημεία και τη ευστάθειά τους. Βρείτε στο μιγαδικό πεδίο τη λεκάνη έλξης τους.

## 9.3 Χαοτικές απεικονίσεις

### 9.3.1 Ορισμός της χαοτικής απεικόνισης

Για να ορίσουμε με αυστηρό και συγκεκριμένο τρόπο την έννοια του χάους, είναι απαραίτητο να εισάγουμε πρώτα δύο ιδιότητες που μπορεί να εμφανίζει μια απεικόνιση, και γενικά ένα δυναμικό σύστημα. Στην περιγραφή που ακολουθεί επιστρέφουμε στην γενικότερη περίπτωση των πολυδιάστατων απεικονίσεων, που ορίζονται γενικά σε έναν μετρικό χώρο  $X$ , όπου η απόσταση δύο σημείων  $x$  και  $\tilde{x}$  δίνεται από μια συνάρτηση  $d(x, \tilde{x})$ , η οποία ονομάζεται μετρική, π.χ. στον  $R^k$  είναι η Ευκλείδεια απόσταση. Ένα σύνολο  $S \subset X$  ονομάζεται αναλλοίωτο σύνολο μιας απεικόνισης  $f$  αν  $f(S) = S$ .

(α) *Εναισθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες*

Μία απεικόνιση  $f$  γενικά σε έναν μετρικό χώρο  $X$  λέμε ότι έχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες, αν υπάρχει  $\delta > 0$  έτσι ώστε για κάθε σημείο  $x_0$  του  $X$  και  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\tilde{x}_0 \in X$  με  $d(x_0, \tilde{x}_0) < \varepsilon$  και  $n \geq 0$  τέτοιος ώστε  $d(x_n, \tilde{x}_n) > \delta$ . Αυτό σημαίνει ότι μια περιοχή οποιουδήποτε σημείου  $x_0$  περιέχει τουλάχιστον ένα άλλο σημείο  $\tilde{x}_0$ , του οποίου η τροχιά κάτω από την απεικόνιση μετά από έναν πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων θα απέχει από την τροχιά του  $x_0$  απόσταση μεγαλύτερη από έναν σταθερό αριθμό. Έτσι, όσο κοντά και αν ξεκινήσουν δύο τροχιές θα απομακρυνθούν τελικά η μια από την άλλη εκθετικά. Το γεγονός αυτό αποκτά ιδιαίτερη σημασία στην αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος. Ο αριθμητικός υπολογισμός μιας τροχιάς, όσο ακριβής και αν είναι, μπορεί να διαφέρει αρκετά από την πραγματική τροχιά, μέσα στο όριο του υπολογιστικού σφάλματος.

### (β) Τοπολογική μεταβατικότητα

Μια απεικόνιση  $f$  σε ένα αναλλοίωτο σύνολο  $S$  ονομάζεται τοπολογικά μεταβατική αν για δύο οποιαδήποτε ανοιχτά υποσύνολα  $U$  και  $V$  του  $S$  υπάρχει  $n \geq 0$ , τέτοιος ώστε  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ . Στην περίπτωση αυτή, εν γένει, από κάθε περιοχή του  $S$  ξεκινάει τουλάχιστον μία τροχιά της  $f$  που περνάει από κάθε περιοχή του συνόλου  $S$  και πλησιάζει αυθαίρετα κοντά σε κάθε σημείο του  $S$ . Μια τέτοια τροχιά ονομάζεται πυκνή στο  $S$ . Ως συνέπεια, το αναλλοίωτο σύνολο στο οποίο δρα μια τοπολογικά μεταβατική απεικόνιση δεν μπορεί να διαχωριστεί από πλευράς δυναμικής, με την έννοια ότι οι ανοιχτές περιοχές του «αναμειγνύονται» κάτω από την απεικόνιση. Αν μάλιστα ο  $n$  δεν είναι μοναδικός, αλλά η προηγούμενη ιδιότητα ισχύει για κάθε  $n \geq n_0$ , τότε ονομάζεται τοπολογική ανάμιξη (mixing).

- Μια απεικόνιση ονομάζεται χαοτική σε ένα αναλλοίωτο σύνολο, αν στο σύνολο αυτό α) έχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες, και β) είναι τοπολογικά μεταβατική.

Πολλοί συγγραφείς στον ορισμό των χαοτικών απεικονίσεων προσθέτουν και μια τρίτη ιδιότητα, τα περιοδικά σημεία της απεικόνισης να είναι πυκνά<sup>15</sup> στο  $S$ . Πρόσφατα εξάλλου αποδείχθηκε ότι κάθε συνεχής απεικόνιση σε έναν μετρικό χώρο, που είναι τοπολογικά μεταβατική και έχει ένα πυκνό σύνολο περιοδικών τροχιών, θα έχει και ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Λίγο αργότερα αποδείχθηκε ακόμα ότι οι πραγματικές συνεχείς μονοδιάστατες απεικονίσεις σε ένα κλειστό υποσύνολο του πραγματικού άξονα που είναι τοπολογικά μεταβατικές διαθέτουν ένα πυκνό σύνολο περιοδικών σημείων. Στην περίπτωση αυτή, δηλαδή, η τοπολογική μεταβατικότητα συνεπάγεται χάος. Ας εξετάσουμε ορισμένα παραδείγματα προκειμένου να αποσαφηνιστούν οι παραπάνω έννοιες.

**Παράδειγμα 1.** Η απεικόνιση διπλασιασμού,

$$x_{n+1} = 2x_n, \quad (9.12)$$

έχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Δηλαδή  $\exists \delta > 0$  τέτοιο ώστε  $\forall \varepsilon > 0$ , με  $2^{-n} < \varepsilon < 2^{-(n-1)}$  και  $|\tilde{x}_0 - x_0| = \varepsilon$  θα είναι  $|\tilde{x}_n - x_n| = 2^n |\tilde{x}_0 - x_0| > \delta$  για κάθε  $n \geq 1$ . Όμως δεν είναι τοπολογικά μεταβατική στο  $R$ : αν θεωρήσουμε για παράδειγμα τα υποσύνολα  $U = (3, 4)$  και  $V = (0, 1)$ , τότε για κάθε  $n \geq 0$  θα ισχύει  $(3 \cdot 2^n, 4 \cdot 2^n) \cap (0, 1) = \emptyset$ .

**Παράδειγμα 2.** Η απεικόνιση διπλασιασμού στον κανονικοποιημένο κύκλο  $S^1$  ή αλλιώς απεικόνιση Renyi,

$$\varphi_{n+1} = 2\varphi_n, \quad (9.13)$$

όπως ακριβώς δείξαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, έτσι και εδώ, έχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Στην περίπτωση όμως αυτή είναι και τοπολογικά μεταβατική καθώς, σύμφωνα πάλι με την σχέση  $|f^n(\tilde{\varphi}_0) - f^n(\varphi_0)| = 2^n |\tilde{\varphi}_0 - \varphi_0|$ , κάθε περιοχή  $U$ , δηλαδή κάθε τόξο, οσοδήποτε μικρό, μετά από κάποιον

<sup>15</sup> Ένα υποσύνολο  $A \subset S$  είναι πυκνό στο  $S$  αν και μόνο αν κάθε περιοχή κάθε σημείου  $x \in S$  τέμνει το  $A$ .

αριθμό επαναλήψεων  $n$ ,  $f^n(U)$ , θα καλύψει όλο τον κύκλο  $S^1$ , και άρα και κάθε άλλο τόξο, δηλαδή κάθε άλλη περιοχή  $V$ . Οπότε η απεικόνιση (9.13) είναι τελικά χαοτική.

**Παράδειγμα 3.** Η απεικόνιση μετατόπισης στον κύκλο  $S^1$ ,

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + c, \tag{9.14}$$

όπου  $c \in \mathbb{Q}$ , δεν έχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες, αφού διατηρεί τις αποστάσεις,  $|\tilde{\varphi}_n - \varphi_n| = |\tilde{\varphi}_0 - \varphi_0|$ . Δεν είναι όμως ούτε τοπολογικά μεταβατική. Αν, για παράδειγμα,  $c = m/n$ , τότε για κάθε  $\varphi$  είναι  $f^n(\varphi) = \varphi + nc = \varphi + m = \varphi$ , και επομένως  $f^n(U) = U$ . Είναι προφανές ότι η παραπάνω απεικόνιση δεν είναι τοπολογικά μεταβατική. Ακόμα συμπεραίνουμε ότι κάθε τροχιά της (9.14) είναι περιοδική.

**Παράδειγμα 4.** Αν θεωρήσουμε την προηγούμενη απεικόνιση (9.14), αλλά τώρα με  $c$  άρρητο, τότε κάθε τροχιά θα αποτελείται από άπειρα σημεία  $\varphi_n = f^n(\varphi_0)$ , διαφορετικά μεταξύ τους, αφού θα είναι μη περιοδική. Επειδή στην γειτονιά κάθε άρρητου αριθμού υπάρχει πάντα ένας ρητός, θα έχουμε  $|c - m/n| < \tilde{\varepsilon}$ , όπου  $\tilde{\varepsilon}$  οσοδήποτε μικρό. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/n$ , και άρα  $|nc - m| < \varepsilon$ , ενώ  $f^n(\varphi) = \varphi + nc = \varphi + nc - m$ . Οπότε για κάθε σημείο  $\varphi_0$  θα είναι  $|\varphi_n - \varphi_0| < \varepsilon$ . Όμως, όπως είπαμε, η απεικόνιση διατηρεί τις αποστάσεις, και άρα  $|\varphi_{(k+1)n} - \varphi_{kn}| = |\varphi_n - \varphi_0| < \varepsilon$  για κάθε  $k \geq 0$ . Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι τα σημεία  $\{\varphi_0, \varphi_n, \varphi_{2n}, \dots\}$  της τροχιάς κάθε σημείου  $\varphi_0$  ισαπέχουν και διαμερίζουν τον κύκλο σε τόξα αυθαίρετα μικρού μήκους. Επομένως, σε κάθε  $\varepsilon$ -περιοχή θα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της τροχιάς αυτής. Συνεπώς, η τροχιά οποιουδήποτε σημείου  $\varphi_0$  κάτω από την απεικόνιση είναι πυκνή στον κύκλο, και άρα η απεικόνιση είναι τοπολογικά μεταβατική.

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή εισάγοντας μια έννοια η οποία μας επιτρέπει την μελέτη απεικονίσεων, χρησιμοποιώντας άλλες απεικονίσεις που οι ιδιότητές τους είναι ήδη γνωστές.

- Δύο απεικονίσεις  $f: X \rightarrow X$  και  $g: Y \rightarrow Y$  ονομάζονται *τοπολογικά ημισυζυγείς*, αν υπάρχει απεικόνιση  $h: X \rightarrow Y$ , η οποία είναι συνεχής και επί, τέτοια ώστε  $h \circ f = g \circ h$ . Αν επιπλέον η  $h$  είναι 1-1 με αντίστροφο επίσης συνεχή (δηλαδή η  $h$  είναι ομοιομορφισμός), τότε οι απεικονίσεις ονομάζονται *τοπολογικά συζυγείς*.

Κάτω από την τοπολογική συζυγία  $h$  οι τοπολογικές ιδιότητες των τροχιών των απεικονίσεων  $f$  και  $g$  διατηρούνται. Έτσι, αν γνωρίζουμε ότι μια απεικόνιση είναι χαοτική, τότε κάθε τοπολογικά συζυγής απεικόνιση με αυτήν θα είναι επίσης χαοτική. Η τελευταία πρόταση ισχύει ακόμα και στην περίπτωση της τοπολογικής ημισυζυγίας. Σε επόμενη παράγραφο θα γνωρίσουμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα χαοτικής απεικόνισης, το οποίο συχνά χρησιμοποιείται για την απόδειξη ύπαρξης χάους άλλων απεικονίσεων βάση της τοπολογικής ημισυζυγίας.

**Παράδειγμα 5:** Θεωρούμε τη λογιστική απεικόνιση για  $R=4$ . Η συνάρτηση  $h(x) = \sin^2 x$ , η οποία απεικονίζει τον κύκλο στο διάστημα  $[0,1]$ , είναι προφανώς συνεχής και επί, και ικανοποιεί την σχέση  $f \circ h = h \circ g$ , όπου  $f(x) = 4x(1-x)$  η λογιστική απεικόνιση και  $g(x) = 2x$  η απεικόνιση διπλασιασμού στον κύκλο. Πράγματι,

$$f(h(x)) = 4\sin^2 x(1 - \sin^2 x) = (2\sin x \cos x)^2 = \sin^2 2x = h(g(x))$$

Άρα οι  $f$  και  $g$  είναι τοπολογικά ημισυζυγείς. Όπως δείξαμε όμως στο Παράδειγμα 2 η  $g$  είναι χαοτική, οπότε άμεσα συμπεραίνουμε ότι και η  $f$  είναι χαοτική.

### 9.3.2 Ο εκθέτης Lyapunov

Ένας τρόπος να εντοπίσουμε στην πράξη αν μια απεικόνιση είναι χαοτική ή όχι είναι να ελέγξουμε την μία από τις δύο απαιτούμενες ιδιότητες, την ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Για τον σκοπό αυτό ορίζεται ο εκθέτης Lyapunov, ο οποίος μας δίνει τον ρυθμό της εκθετικής απομάκρυνσης γειτονικών τροχιών.

Έστω μια απεικόνιση  $f:R \rightarrow R$  και δύο τροχιές που ξεκινάνε από τα σημεία  $x_0$  και  $x_0 + \varepsilon$  αντίστοιχα. Αν μετά από  $n$  επαναλήψεις της  $f$  η αρχική απόσταση  $\varepsilon$  αυξάνεται εκθετικά σε  $\varepsilon e^{n\lambda(x_0)}$ , τότε  $\varepsilon e^{n\lambda(x_0)} = |f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|$ . Διαιρούμε με  $\varepsilon$  και παίρνουμε το όριο  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Θεωρούμε επιπλέον ότι η τελευταία σχέση ισχύει για  $n \rightarrow \infty$ , και άρα έχουμε

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x_0)| \right)$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας είναι  $(f^n)'(x_0) = f'(x_0)f'(x_1)\dots f'(x_{n-1})$ , όπου λάβαμε υπόψη ότι  $x_i = f^i(x_0)$ . Επίσης, επειδή το όριο στην παραπάνω σχέση δεν υπάρχει πάντα, τελικά ο εκθέτης Lyapunov μιας μονοδιάστατης απεικόνισης  $f$  σε ένα σημείο  $x_0$  ορίζεται ως

$$\lambda(x_0) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right) \quad (9.15)$$

όπου  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  εκφράζει το μέγιστο σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας  $\{x_n\}$ .

Αν  $\lambda(x_0) > 0$ , τότε οι τροχιές που ξεκινάνε σε μια περιοχή του  $x_0$  απομακρύνονται εκθετικά. Αν το σύνολο των αρχικών συνθηκών  $x_0$ , για τις οποίες  $\lambda(x_0) > 0$ , είναι πυκνό, τότε η απεικόνιση έχει ευαίσθητη εξάρτηση από αυτές τις αρχικές συνθήκες και μπορεί να είναι χαοτική σε αυτό. Αντίθετα αν  $\lambda(x_0) < 0$ , τότε σίγουρα η απεικόνιση δεν είναι χαοτική. Παρατηρήστε ότι για ένα σημείο ισορροπίας ισχύει  $\lambda(x_0) = \ln |f'(x_0)|$ , από όπου βλέπουμε ότι το πρόσημο του εκθέτη Lyapunov στα σημεία αυτά καθορίζεται από την ευστάθεια τους.

**Παράδειγμα 1.** Για την απεικόνιση διπλασιασμού  $g(x) = 2x$ , που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, είναι  $g'(x) = 2$ . Άρα

$$\lambda(x_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |g'(x_i)| = \frac{1}{n} n \ln 2 = \ln 2,$$

και επομένως  $\lambda(x_0) > 0$  για κάθε σημείο  $x_0$  της απεικόνισης. Παρατηρήστε όμως ότι σύμφωνα με τα Παραδείγματα 1 και 2, μόνο στον κύκλο είναι χαοτική, ενώ στο  $R$  δεν είναι.

**Παράδειγμα 2.** Η λογιστική απεικόνιση για  $R = 4$ ,  $f(x) = 4x(1-x)$ , έχει όπως είπαμε μέγιστο στο  $x = 1/2$ . Άρα αν από ένα σημείο  $x_0$  ξεκινάει μια τροχιά η οποία περνάει από το  $x_i = 1/2$ , τότε  $f'(x_i) = 0$ , οπότε  $\ln |f'(x_i)| \rightarrow -\infty$ . Επομένως  $\lambda(x_0) = -\infty$  για όλα αυτά τα  $x_0$ . Το σημείο  $x_0 = 0$  είναι, όπως δείξαμε, ασταθές σημείο ισορροπίας, οπότε περιμένουμε εκθετική απομάκρυνση των τροχιών κοντά σε αυτό. Πράγματι, από την  $f'(x) = 4(1-2x)$  βρίσκουμε  $\lambda(0) = \ln |f'(0)| = 2 \ln 2$ . Για το σημείο  $x_0 = 1$  ισχύει  $x_i = 0$  για κάθε  $i \geq 1$  και  $|f'(x_i)| = 4$  για κάθε  $i \geq 0$ , οπότε και πάλι  $\lambda(1) = 2 \ln 2$ .

Για τα υπόλοιπα σημεία στο διάστημα  $[0,1]$  θα εκμεταλλευτούμε την τοπολογική ημισυζυγία  $h(x) = \sin^2 x$  της  $f(x)$  με την απεικόνιση διπλασιασμού  $g(x) = 2x$  στον κύκλο, που είδαμε στην

προηγούμενη παράγραφο. Από την σχέση  $f \circ h = h \circ g$ , χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας και την αντικατάσταση  $x_{i+1} = g(x_i)$ , για  $h'(x_i) \neq 0$  θα έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(h(x_i))| &= \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{h'(x_{i+1})g'(x_i)}{h'(x_i)} \right| = \sum_{i=0}^{n-1} \ln |g'(x_i)| + \sum_{i=0}^{n-1} \ln |h'(x_{i+1})| - \sum_{i=0}^{n-1} \ln |h'(x_i)| = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \ln |g'(x_i)| + \ln |h'(x_n)| - \ln |h'(x_0)| \end{aligned}$$

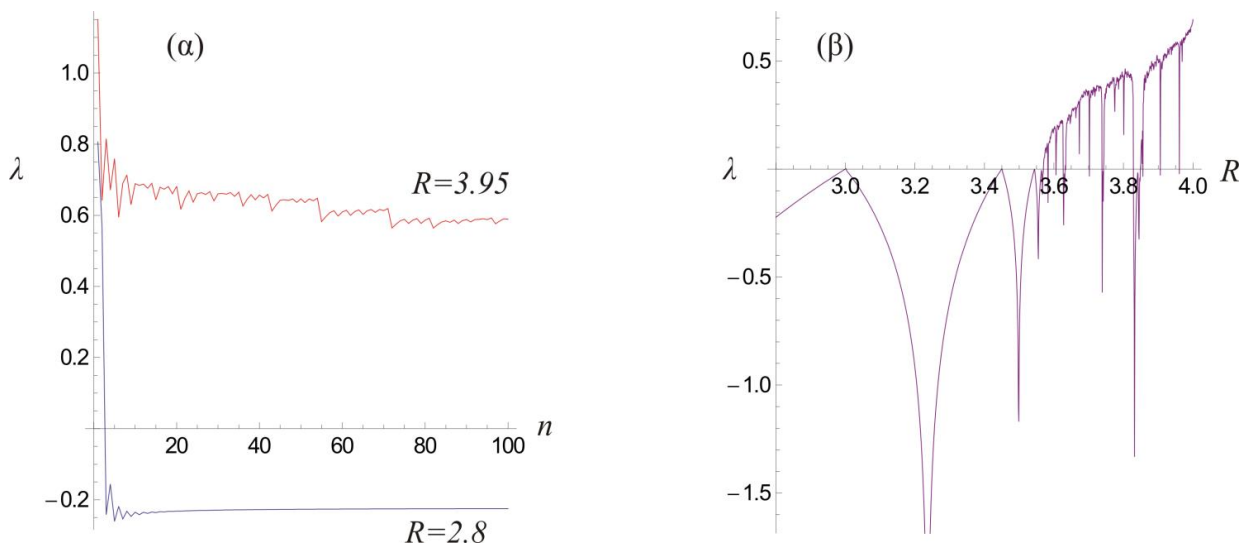
Είναι όμως  $h'(x) = \sin 2x$  και  $x_n = 2^n x_0$ , και άρα βρίσκουμε

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln |h'(x_n)| - \ln |h'(x_0)|}{n} \right) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln |\sin(2^{n+1} x_0)|}{n} \right) = 0$$

Παρατηρήστε ότι η συνθήκη  $h'(x_i) \neq 0$  ικανοποιείται για όλες εκείνες τις τροχιές που δεν περνάνε από το  $x_i = 0$ . Επομένως, για όλα τα σημεία  $\tilde{x}_0 = h(x_0)$  που ακολουθούν τέτοιες τροχιές ο εκθέτης Lyapunov της  $f$  θα είναι ίδιος με τον εκθέτη Lyapunov των τροχιών της  $g$ . Οπότε, σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα,

$$\lambda(\tilde{x}_0) = \lambda(h(x_0)) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(h(x_i))| \right) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |g'(x_i)| \right) = \ln 2$$

Στην γενικότερη περίπτωση, οι εκθέτες Lyapunov μιας απεικόνισης είναι δύσκολο ή ίσως και αδύνατο να υπολογιστούν αναλυτικά. Έτσι, συχνά καταφεύγουμε στον άμεσο, αριθμητικό υπολογισμό τους για να βγάλουμε συμπεράσματα για την εκθετική απομάκρυνση των τροχιών. Στο Σχήμα 9-7(α) παρουσιάζεται ο υπολογισμός του  $\lambda$  (μπλε καμπύλη) για μια τροχιά της απεικόνισης με αρχική συνθήκη  $x(0)=0.1$  και  $R=2.8$ . Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στα παραπάνω, η τροχιά τείνει στο ευσταθές σταθερό σημείο της απεικόνισης, οπότε το  $\lambda$  τείνει σε αρνητική τιμή. Για  $R=3.95$ , η τροχιά είναι χαοτική και το  $\lambda$  τείνει σε μια θετική τιμή. Στο Σχήμα 9-7(β) παρουσιάζεται η τιμή του  $\lambda$  (υπολογισμένη μετά από 1000 επαναλήψεις) ως συνάρτηση του  $R$ . Για  $R < R_\infty \approx 3.57$  είναι  $\lambda < 0$  εκτός στις διακλαδώσεις όπου  $\lambda = 0$ . Για  $R > R_\infty$  το  $\lambda$  παίρνει θετικές τιμές δηλώνοντας χαοτική εξέλιξη. Όμως στα παράθυρα «κανονικότητας» και πάλι πέφτει σχεδόν απότομα σε αρνητικές τιμές.



Σχήμα 9-7. Αριθμητικός υπολογισμός του εκθέτη Lyapunov *α)* Η εξέλιξη του  $\lambda$  με τον αριθμό των επαναλήψεων της απεικόνισης για δύο τροχιές με  $R=2.8$  και  $R=3.95$ . *β)* Η τιμή του  $\lambda$  μετά από 1000 επαναλήψεις για τις τροχιές της απεικόνισης με  $2.8 < R < 4$  (βήμα  $\Delta R=0.001$ ).

### 9.3.3 Συμβολική δυναμική

Στη συμβολική δυναμική ([symbolic dynamics](#)) θεωρούμε δύο σύμβολα 0 και 1 και όλες τις δυνατές απλά άπειρες ακολουθίες των δύο αυτών συμβόλων. Τον χώρο όλων αυτών των ακολουθιών ονομάζουμε  $\Sigma$  και σημεία αυτού του χώρου είναι π.χ. τα  $\{0,0,1,1,1,0,1,0,\dots\}$ ,  $\{0,1,0,0,1,1,0,0,\dots\}$ , κλπ. Ένα σημείο του  $\Sigma$  το συμβολίζουμε γενικά με  $s = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}$ , όπου  $s_i = 0$  ή  $1$ . Επιπλέον θεωρούμε την απόσταση δύο σημείων του χώρου, η οποία ορίζεται ως

$$d(s, s') = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|s_i - s'_i|}{2^i} \quad (9.16)$$

Αν έχουμε δύο σημεία  $s$  και  $s'$ , που συμφωνούν στα  $n$  πρώτα στοιχεία τους, τότε η απόστασή τους είναι μικρότερη ή ίση με  $1/2^n$ . Πράγματι,

$$d(s, s') = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - s'_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^n}.$$

Άρα σε όσα περισσότερα πρώτα στοιχεία συμφωνούν δύο τέτοιες ακολουθίες τόσο πιο κοντά βρίσκονται.

Σε αυτόν τον χώρο θεωρούμε τώρα την απεικόνιση  $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$  που ορίζεται από την σχέση

$$\sigma(s) = \{s_2, s_3, s_4, \dots\} \quad (9.17)$$

και ονομάζεται *απεικόνιση μετατόπισης* ([shift map](#)). Αν θεωρήσουμε μια ακολουθία σαν την διαδοχική ρίψη ενός νομίσματος, με το 0 να αντιστοιχεί σε «κορώνα» και το 1 σε «γράμματα», η απεικόνιση  $\sigma$  εκφράζει μία ρίψη του νομίσματος.

Ας πάρουμε ένα τυχαίο σημείο  $s$  του χώρου  $\Sigma$  και μια περιοχή γύρω από αυτό όσο μικρή θέλουμε, δηλαδή μια περιοχή που τα σημεία της απέχουν απόσταση  $\varepsilon$  από το  $s$ , όπου το  $\varepsilon$  είναι όσο μικρό θέλουμε. Τότε υπάρχει  $n$  τέτοιο ώστε  $1/2^n < \varepsilon$  και κάθε ακολουθία, που συμφωνεί στα  $n$  πρώτα στοιχεία με την  $s$ , βρίσκεται στην  $\varepsilon$ -περιοχή του  $s$ . Έστω λοιπόν το σημείο  $\tilde{s} = \{s_1, s_2, \dots, s_n, \tilde{s}_{n+1}, \tilde{s}_{n+2}, \dots\}$  με  $\tilde{s}_{n+1} \neq s_{n+1}$ , το οποίο βρίσκεται στην  $\varepsilon$ -περιοχή του  $s$ . Οι «τροχιές»  $\sigma^n(s) = \{s_{n+1}, s_{n+2}, \dots\}$  και  $\sigma^n(\tilde{s}) = \{\tilde{s}_{n+1}, \tilde{s}_{n+2}, \dots\}$  κάτω από την απεικόνιση μετατόπισης των σημείων  $s$  και  $\tilde{s}$ , αντίστοιχα, με αρχική απόσταση  $d(s, \tilde{s}) < \varepsilon$ , απέχουν έπειτα από  $n$  επαναλήψεις απόσταση

$$d(\sigma^n(s), \sigma^n(\tilde{s})) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|s_{n+i} - \tilde{s}_{n+i}|}{2^i} \geq \frac{1}{2}$$

Άρα η  $\sigma$  έχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.

Έστω τώρα δύο τυχαία σημεία  $s$  και  $s'$  του  $\Sigma$  και μία  $\varepsilon$ -περιοχή  $U$  γύρω από το  $s$  και μία  $\varepsilon'$ -περιοχή  $V$  γύρω από το  $s'$ . Υπάρχουν, όπως είπαμε,  $n$  και  $n'$ , τέτοια ώστε  $1/2^n < \varepsilon$  και  $1/2^{n'} < \varepsilon'$ . Θεωρούμε ένα σημείο  $\tilde{s}$  της περιοχής  $U$ , δηλαδή μια ακολουθία που συμφωνεί στα  $n$  πρώτα στοιχεία με την  $s$ , το οποίο είναι της μορφής  $\tilde{s} = \{s_1, s_2, \dots, s_n, s'_1, s'_2, \dots, s'_n, \dots\}$ . Τότε  $\sigma^n(\tilde{s}) = \{s'_1, s'_2, \dots, s'_n, \dots\}$ , δηλαδή η «τροχιά» του  $\tilde{s}$  κάτω από την απεικόνιση μετατόπισης έπειτα από  $n$  επαναλήψεις βρίσκεται στην περιοχή  $V$  του  $s'$ . Άρα ισχύει  $\sigma^n(U) \cap V \neq \emptyset$ , οπότε η  $\sigma$  είναι τοπολογικά μεταβατική.

Αν και οι παραπάνω δύο ιδιότητες είναι ήδη αρκετές για την ύπαρξη χάους, σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε στην παράγραφο 6.4, εύκολα όμως μπορούμε να δούμε, επίσης, ότι διαθέτει και ένα πυκνό σύνολο περιοδικών τροχιών. Ένα περιοδικό σημείο της απεικόνισης  $\sigma$  περιόδου  $n$  είναι στην περίπτωση αυτή μια ακολουθία της οποίας τα στοιχεία επαναλαμβάνονται συνεχώς ανά  $n$ , π.χ. η  $\{\overline{0,1}\} = \{0,1,0,1,0,1,0,1,\dots\}$  είναι μια τροχιά περιόδου 2, η  $\{\overline{0,0,1,1}\} = \{0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,\dots\}$  είναι περιόδου 4, κλπ. Για να δείξουμε ότι τέτοια σημεία είναι πυκνά στον  $\Sigma$ , αρκεί να δείξουμε ότι σε κάθε γειτονιά ενός τυχαίου σημείου  $s$  υπάρχει τουλάχιστον ένα. Έστω λοιπόν  $s$  και μια  $\varepsilon$ -περιοχή  $U$  γύρω από αυτό, τέτοια ώστε  $1/2^n < \varepsilon$ . Τότε η  $\tilde{s} = \{\overline{s_1, s_2, \dots, s_n}\}$  ανήκει στην  $U$  και είναι περιοδική τροχιά περιόδου  $n$ .

Σε κάθε περίπτωση, επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω η απεικόνιση μετατόπισης είναι χαοτική. Έτσι, μπορούμε να αποδείξουμε ότι απεικονίσεις ή διαφορικές εξισώσεις, που είναι τοπολογικά συζυγείς με αυτήν, είναι επίσης χαοτικές. Στις περιπτώσεις αυτές ανήκουν η λογιστική απεικόνιση, το πέταλο του Smale, ο χαοτικός ελκυστής της εξίσωσης Duffing, κ.ά.

**Σημείωση.** Η απεικόνιση μετατόπισης σχετίζεται με την διαδικασία [Bernoulli shift](#).

## Ασκήσεις

**Άσκηση 9.3.1.** Δείξτε ότι το σύνολο  $\Sigma$  με βάση τη μετρική  $d(s, s') = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|s_i - s'_i|}{2^i}$  είναι φραγμένο.

**Άσκηση 9.3.2.** Θεωρούμε την απεικόνιση  $S(x) = 10x \pmod{1}$  όπου το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών είναι το  $[0,1)$ . Αποδείξτε ότι αυτή η απεικόνιση είναι χαοτική.

**Άσκηση 9.3.3.** Θεωρούμε την απεικόνιση  $S(x) = px \pmod{1}$  όπου το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών είναι το  $[0,1)$ . Αποδείξτε ότι αυτή η απεικόνιση είναι χαοτική.

## 9.4 Σύνολα Cantor και δυναμική

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε ένα σύνολο, το σύνολο Cantor, που έχει εφαρμογές και στην λογιστική απεικόνιση, που συναντήσαμε νωρίτερα, αλλά και στα μορφοκλασματικά σύνολα (fractals), καθώς επίσης και στους περισσότερους χαοτικούς ελκυστές.

### 9.4.1 Το σύνολο Cantor

Ο ορισμός ενός συνόλου Cantor είναι ο εξής :

- Ένα σύνολο ονομάζεται [σύνολο Cantor](#) αν είναι: α) συμπαγές, β) τέλειο, και γ) πουθενά πυκνό.

Ένα σύνολο στο  $R$  είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο. Ένα σύνολο ονομάζεται τέλειο αν είναι κλειστό και δεν έχει μεμονωμένα σημεία, δηλαδή αποτελείται μόνο από τα σημεία συσσώρευσης του. Τέλος, ένα σύνολο ονομάζεται πουθενά πυκνό αν δεν έχει εσωτερικά σημεία. Όπως αποδεικνύεται, στο  $R$  ένα πουθενά πυκνό σύνολο είναι ολικά μη συνεκτικό και αντίστροφα. Ένα σύνολο στον  $R$  (και γενικά στον  $R^m$ ) είναι ολικά μη συνεκτικό αν κάθε ζεύγος σημείων του δεν μπορεί να ενωθεί με μια καμπύλη η οποία να βρίσκεται μέσα στο σύνολο.

**Σημείωση.** Ένα σημείο ενός συνόλου ονομάζεται μεμονωμένο αν διαθέτει περιοχή, η οποία τέμνει το σύνολο μόνο σε αυτό το σημείο. Ένα σημείο ονομάζεται σημείο συσσώρευσης ενός συνόλου (στο οποίο μπορεί και να μην ανήκει), αν σε κάθε περιοχή του υπάρχει άλλο σημείο που ανήκει στο σύνολο. Ένα σημείο ενός συνόλου ονομάζεται εσωτερικό, αν διαθέτει περιοχή που ανήκει μέσα στο σύνολο.

Το σύνολο Cantor θα γνωρίσουμε μέσα από το *παράδειγμα του μεσαίου τρίτου*, του οποίου την κατασκευή θα περιγράψουμε βήμα-βήμα και θα πούμε τι συμβαίνει όταν αυτή η διαδικασία πάει στο άπειρο. Παίρνουμε το κλειστό διάστημα  $I = S_0 = [0,1]$  και αφαιρούμε το μεσαίο τρίτο, δηλαδή το ανοιχτό διάστημα  $(1/3, 2/3)$ , κρατώντας τα κλειστά διαστήματα

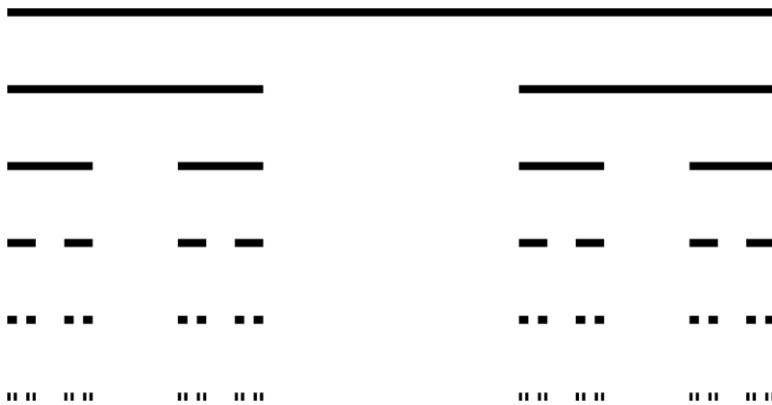
$$I_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \text{ και } I_1 = \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$



Έτσι έχει απομείνει το σύνολο  $S_1 = I_0 \cup I_1$ . Από το καθένα από τα διαστήματα  $I_0$  και  $I_1$  αφαιρούμε έπειτα το μεσαίο τρίτο, δηλαδή το ανοιχτό διάστημα  $(1/9, 2/9)$  από το  $I_0$  και το  $(7/9, 8/9)$  από το  $I_1$ . Άρα έχουν παραμείνει τα κλειστά διαστήματα

$$I_{00} = \left[0, \frac{1}{9}\right], I_{01} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \text{ και } I_{10} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], I_{11} = \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

από το  $I_0$  και από το  $I_1$ , αντίστοιχα, δηλαδή συνολικά το σύνολο  $S_2 = I_{00} \cup I_{01} \cup I_{10} \cup I_{11}$ . Παρατηρήστε ότι τα αριθμούμε έτσι ώστε ο πρώτος δείκτης να δείχνει από ποιο κλειστό διάστημα του προηγούμενου βήματος έχουν προέρθει, και ο δεύτερος αν είναι αριστερά ή δεξιά του μεσαίου τρίτου που αφαιρείται από αυτό το διάστημα. Έτσι στο τρίτο βήμα θα έχουμε τα κλειστά διαστήματα  $I_{000}, I_{001}, I_{010}, I_{011}, I_{100}, I_{101}, I_{110}, I_{111}$  με δείκτες όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των 0 και 1 ανά 3.



Σχήμα 9-8. Η κατασκευή του συνόλου Cantor του μεσαίου τρίτου.

Γενικά στο  $n$ -οστό βήμα το υποσύνολο του  $I$  που έχει απομείνει είναι το

$$S_n = \bigcup_{s_1 s_2 \dots s_n} I_{s_1 s_2 \dots s_n}, \quad (9.18)$$

όπου τα κλειστά διαστήματα  $I_{s_1 s_2 \dots s_n}$ ,  $s_i \in \{0, 1\}$  που προκύπτουν, παίρνοντας ως δείκτες όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των δύο συμβόλων 0 και 1 ανά  $n$ , είναι συνολικά  $2^n$ . Επίσης, το καθένα από αυτά έχει μήκος  $1/3^n$ , και προφανώς όλα τα διαστήματα βρίσκονται μέσα στα διαστήματα του προηγούμενου βήματος,

$$I_{s_1} \supset I_{s_1 s_2} \supset \dots \supset I_{s_1 s_2 \dots s_n} \supset \dots, \quad (9.19)$$

Από την σχέση (9.19) βλέπουμε ακόμα ότι  $I_{s_1 s_2 \dots s_{n-1}} \cap I_{s_1 s_2 \dots s_n} = I_{s_1 s_2 \dots s_n}$ , οπότε και  $S_{n-1} \cap S_n = S_n$ . Σύμφωνα με [την αρχή του κιβωτισμού](#), αν έχουμε άπειρα κλειστά διαστήματα το ένα μέσα στο άλλο, των οποίων το μήκος μειώνεται, τότε στο τέλος της αλυσίδας (9.19) παίρνουμε ένα σημείο. Επομένως κάθε ακολουθία κλειστών διαστημάτων  $\{I_{s_1}, I_{s_1 s_2}, \dots, I_{s_1 s_2 \dots s_n}, \dots\}$  συγκλίνει για  $n \rightarrow \infty$  σε ένα σημείο. Καθώς τα σύνολα  $\{I_{s_1}, I_{s_1 s_2}, \dots, I_{s_1 s_2 \dots s_n}\}$  είναι όσα και τα διαστήματα  $I_{s_1 s_2 \dots s_n}$ , δηλαδή  $2^n$ , όπου  $n \rightarrow \infty$ , βλέπουμε ότι οι ακολουθίες αυτές είναι άπειρες. Άρα τελικά η παραπάνω διαδικασία μετά από άπειρα βήματα θα μας δώσει άπειρα σημεία  $I_{s_1 s_2 \dots}$ , το καθένα από τα οποία θα αντιστοιχεί σε μια άπειρη ακολουθία  $\{s_1, s_2, \dots\}$  των δύο συμβόλων 0 και 1.

Το σύνολο των παραπάνω σημείων,

$$\Lambda = \bigcup_{s_1 s_2 \dots} I_{s_1 s_2 \dots} = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n \quad (9.20)$$

είναι ένα σύνολο Cantor. Πράγματι

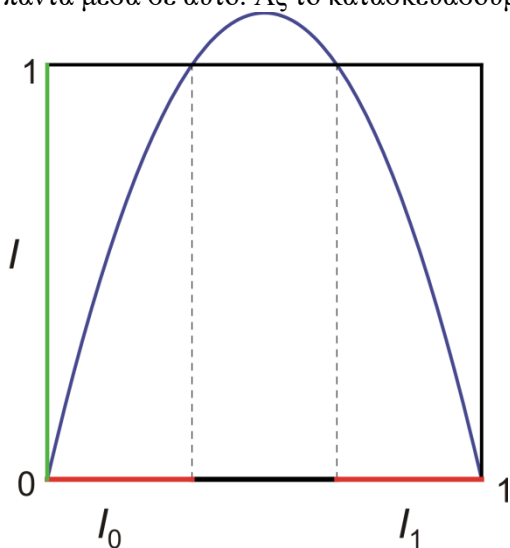
α) Το  $\Lambda$  είναι υποσύνολο του  $[0,1]$ , άρα είναι φραγμένο, και το συμπλήρωμα του είναι ένωση άπειρων ανοιχτών διαστημάτων, δηλαδή ένα ανοιχτό σύνολο, επομένως το  $\Lambda$  θα είναι κλειστό.

β) Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο σημείο  $x$  του συνόλου  $\Lambda$ , το οποίο ανήκει στο σύνολο  $I_{s_1 s_2 \dots s_n}$  του  $n$ -οστου βήματος. Στο επόμενο βήμα έχουν απομείνει δύο διαστήματα από το  $I_{s_1 s_2 \dots s_n}$ , το ένα από τα οποία δεν περιέχει το  $x$ . Το ένα από τα δύο άκρα αυτού του διαστήματος, έστω  $x_n$ , απέχει από το  $x$  απόσταση μικρότερη ή ίση από το μήκος  $1/3^n$ . Άρα υπάρχει ακολουθία σημείων  $x_n \neq x$ , καθένα από τα οποία ανήκει στο  $\Lambda$ , αφού για κάθε  $n$  κάθε άκρο των διαστημάτων  $I_{s_1 s_2 \dots s_n}$  είναι σημείο του  $\Lambda$ , και η οποία συγκλίνει στο  $x$ . Οπότε το  $x$  είναι σημείο συσσώρευσης

γ) Έστω δύο τυχαία σημεία  $x$  και  $\tilde{x}$  του συνόλου  $\Lambda$ , τα οποία απέχουν απόσταση  $\varepsilon > 1/3^n$ , δηλαδή  $|x - \tilde{x}| = \varepsilon$ . Τότε στο  $n$ -οστο βήμα τα σημεία  $x$  και  $\tilde{x}$  ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα  $I_{s_1 s_2 \dots s_n}$ , μιας και τα σημεία που ανήκουν στο ίδιο διάστημα απέχουν απόσταση μικρότερη ή ίση του  $1/3^n$ . Επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα ανοιχτό διάστημα ανάμεσα στα διαφορετικά διαστήματα  $I_{s_1 s_2 \dots s_n}$  που έχει αφαιρεθεί από το σύνολο Cantor. Επομένως η ευθεία που ενώνει τα σημεία  $x$  και  $\tilde{x}$  έχει σημεία έξω από το σύνολο Cantor και έτσι αυτό είναι ολικά μη συνεκτικό.

#### 9.4.2 Η λογιστική απεικόνιση για $R > 4$ .

Όπως είπαμε στην §9.2, όταν το  $R$  γίνει μεγαλύτερο του 4 η λογιστική απεικόνιση απεικονίζει το διάστημα  $[0,1]$  έξω από αυτό. Στην περίπτωση αυτή οι τροχιές ορισμένων σημείων της τείνουν στο  $-\infty$ . Όμως υπάρχει ένα σύνολο Cantor σημείων του  $[0,1]$ , τα οποία κάτω από την απεικόνιση παραμένουν για πάντα μέσα σε αυτό. Ας το κατασκευάσουμε.



Σχήμα 9-9. Η λογιστική απεικόνιση  $x_{n+1} = f(x_n)$  για  $R > 4$  (μπλε). Η προ-εικόνα του διαστήματος  $I = [0,1]$  (πράσινο) είναι το σύνολο  $I_0 \cup I_1$  (κόκκινο).

Θεωρούμε αρχικά το σύνολο  $I = [0,1]$ . Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 9-9, τα διαστήματα  $I_0$  και  $I_1$  κάτω από την  $f$  απεικονίζονται στο διάστημα  $I$ , δηλαδή  $f(I_0) = f(I_1) = I$ . Αντίστροφα μπορούμε να πούμε ότι η προ-εικόνα του  $I$  είναι τα διαστήματα  $I_0$  και  $I_1$ , δηλαδή

$$f^{-1}(I) = I_0 \cup I_1. \quad (9.21)$$

Παράλληλα διαπιστώνουμε ότι για κάθε σημείο  $x$  που δεν ανήκει στο  $I_0 \cup I_1$  είναι  $f(x) > 1$  και επομένως  $f^2(x) = Rf(x)(1 - f(x)) < 0$ , όπως βλέπουμε και στο Σχήμα 9-9,. Από κει και πέρα, αν συνεχίσουμε την τροχιά αυτών των σημείων κάτω από την λογιστική απεικόνιση, επειδή η  $f$  είναι φθίνουσα για κάθε  $x < 0$ , συμπεραίνουμε ότι αυτή πηγαίνει στο  $-\infty$ .

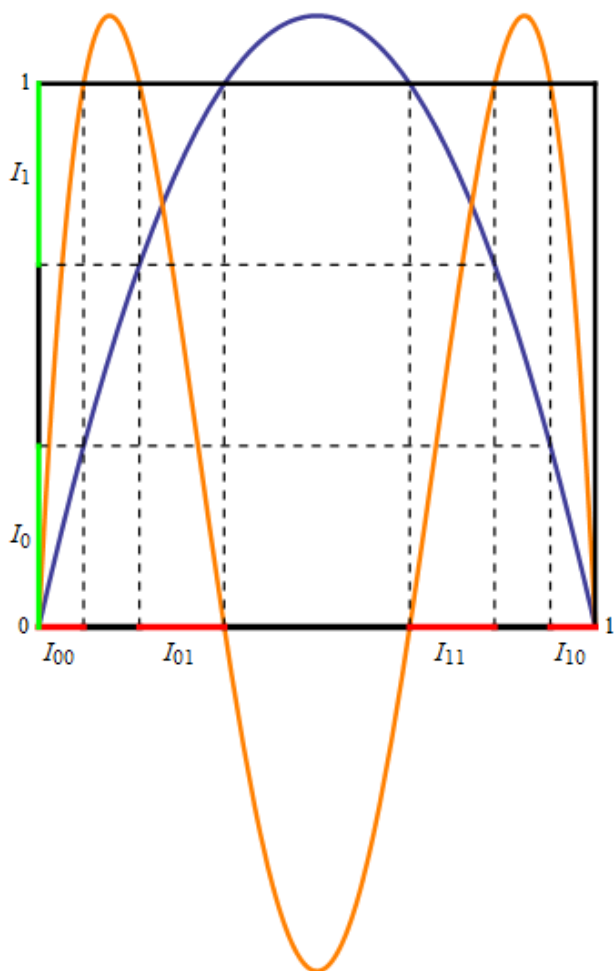
Στη συνέχεια παίρνουμε τα διαστήματα  $I_0$  και  $I_1$ , τα οποία τώρα θεωρούμε στον άξονα των  $y$ . Οι προ-εικόνες τους, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 9-10, είναι για το  $I_0$  τα διαστήματα  $I_{00}$  και  $I_{10}$ , και για το  $I_1$  τα διαστήματα  $I_{01}$  και  $I_{11}$ . Δηλαδή προκύπτουν τέσσερα διαστήματα, που είναι στο πλήθος όσοι και οι δυνατοί συνδυασμοί δύο συμβόλων, 0 και 1, και τα οποία τα συμβολίζουμε με  $I_{s_1 s_2}$ , έτσι ώστε το  $s_1$  να δηλώνει το προηγούμενο διάστημα  $I_{s_1}$ , μέσα στο οποίο βρίσκονται,  $I_{s_1 s_2} \subset I_{s_1}$ , και το  $s_2$  από ποιο διάστημα  $I_{s_2}$  προήλθαν,  $f(I_{s_1 s_2}) = I_{s_2}$ ,

$$I_{s_1 s_2} = \{x \in I_{s_1} : f(x) \in I_{s_2}\} \quad (9.22)$$

Έτσι τελικά παίρνουμε ότι η προ-εικόνα του  $I_0 \cup I_1$ , που είναι προ-εικόνα του  $I$ , είναι ίση με

$$f^{-1}(f^{-1}(I)) = f^{-1}(I_0 \cup I_1) = I_{00} \cup I_{10} \cup I_{01} \cup I_{11} \quad (9.23)$$

Όπως βλέπουμε και στο Σχήμα 9-10, το σύνολο αυτό είναι ουσιαστικά η προ-εικόνα του  $I$  κάτω από την  $f^2$ , δηλαδή το  $f^{-2}(I)$ .



Σχήμα 9-10. Η λογιστική απεικόνιση  $f$  για  $R > 4$  (μπλε) και η  $f^2$  (πορτοκαλί). Η προ-εικόνα του  $I_0 \cup I_1$  (πράσινο) είναι το σύνολο  $I_{00} \cup I_{10} \cup I_{01} \cup I_{11}$  (κόκκινο).

Όπως και στην περίπτωση του συνόλου Cantor του μεσαίου τρίτου, έτσι και εδώ μετά από άπειρα βήματα παίρνουμε τελικά το σύνολο

$$\Lambda = \bigcup_{s_1, s_2, \dots} I_{s_1, s_2, \dots} = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(I) \quad (9.24)$$

όπου με  $f^0$  συμβολίζουμε την ταυτοτική απεικόνιση, δηλαδή  $f^0(I) = I$ . Το  $\Lambda$ , όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, αντιστοιχεί στο σύνολο όλων των ακολουθιών δύο συμβόλων και είναι και αυτό ένα σύνολο Cantor. Ισχύει ακόμα,

$$f(\Lambda) = f\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(I)\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-n}(I) = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n+1}(I) = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(I) = \Lambda \quad (9.25)$$

αφού  $f^{n-1}(I) \cap f^n(I) = f^n(I)$  οπότε και  $f(f^{n-1}(I) \cap f^n(I)) = f^n(I)$ , δηλαδή το  $\Lambda$  είναι αναλλοίωτο σύνολο της λογιστικής απεικόνισης για  $R > 4$ .

Η αντιστοίχιση κάθε σημείου  $I_{s_1, s_2, \dots}$  του  $\Lambda$  σε ένα σημείο  $\{s_1, s_2, \dots\}$  του  $\Sigma$  περιγράφεται από την απεικόνιση (itinerary map)  $h: \Lambda \rightarrow \Sigma$ , η οποία ορίζεται από την σχέση  $h(x) = \{s_1, s_2, \dots\}$  όπου  $f^n(x) \in I_{s_n}$ . Η  $h$  στην περίπτωση αυτή είναι ομοιομορφισμός και επομένως ορίζει μια τοπολογική συζυγία μεταξύ της λογιστικής απεικόνισης  $f$  και της απεικόνισης μετατόπισης  $\sigma$ . Και επειδή, όπως αποδείξαμε, η  $\sigma$  είναι χαοτική στο  $\Sigma$ , οπότε και η  $f$  είναι επίσης χαοτική στο  $\Lambda$  για  $R > 4$ .

## Ασκήσεις

**Άσκηση 9.4.1.** Έχει το σύνολο Cantor που σχηματίζεται από τα διαστήματα  $[0, 1/n] \cup [1/(n+1), 1]$  τις ίδιες ιδιότητες με το σύνολο Cantor του μεσαίου τρίτου; Ποιές είναι οι ομοιότητες και ποιές οι διαφορές.

**Άσκηση 9.4.2.** Είναι το πλήθος των σημείων του συνόλου Cantor ίσο με το πλήθος των πραγματικών αριθμών; Δείξτε το.

## 9.5 Βιβλιογραφία

Arrowsmith, D.K. & Place, C.M., 1990. *An Introduction to Dynamical Systems*. New York: Cambridge University Press.

Baker, G.L. & Gollub, J.P., 1990. *Chaotic Dynamics: an introduction*. New York: Cambridge University Press.

Devany, R.L., 1989. *An introduction to chaotic dynamical systems*. 2nd ed. Redwood: Addison-Wesley.

Diacu, F. & Holmes P., 1996. *Celestial encounters: The origin of chaos and stability*. Princeton University Press. (ελληνική μετάφραση: *Απροσδόκητες Ουράνιες Συναντήσεις*. Αθήνα: εκδόσεις Τραυλός).

Enns, R.H. & McGuire, G.C., 2001. *Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers*. Boston: Birkhauser.

Guckenheimer, J. & Holmes, P., 1997. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. 3rd ed. New York: Springer-Verlag.

Jose, J.V. & Saletan, E.J., 1998. *Classical Dynamics: a contemporary approach*. Cambridge UK: Cambridge University Press.

Kulenovic, M.R.S. & Merino, O., 2002. *Discrete Dynamical systems and Difference Equations with Mathematica*. Chapman and Halls/CRC.

Lynch, S., 2007. *Dynamical systems with applications using Mathematica*. Boston: Birkhauser.

Ott, E., 2002. *Chaos in Dynamical Systems*. 2nd ed. New York: Cambridge University Press.

Rasband, S. N., 1990. *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*. New York: Wiley.

Robinson, R.C., 2012. *An introduction to Dynamical Systems. Continuous and Discrete*, Pure and Applied Undergraduate texts. American Mathematical Society.

Schuster, H.G., 1984. *Deterministic Chaos: an introduction*. Weinheim-Germany: Physik-Verlag.

Strogatz, S.H., 1994. *Nonlinear Dynamics and Chaos, with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Tel, T. & Gruiz, M., 2006. *Chaotic Dynamics: an introduction based on Classical Mechanics*. New York: Cambridge University Press.

Wiggins, S., 1990. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. New York: Dover.

Μπούντης, Α., 2004. *Ο θαυμαστός κόσμος των Fractals*. Αθήνα: LeaderBooks.

Σούρλας, Δ., 2012. *Δυναμικά συστήματα και εφαρμογές με τη χρήση του Maple*. Σημειώσεις. Διαθέσιμο στη: [http://www.physics.upatras.gr/UploadedFiles/course\\_182\\_1516.pdf](http://www.physics.upatras.gr/UploadedFiles/course_182_1516.pdf). Πανεπιστήμιο Πάτρας.

## 10 Δισδιάστατες Απεικονίσεις<sup>16</sup>

### 10.1 Εισαγωγικές έννοιες

#### 10.1.1 Ορισμοί

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε σε δισδιάστατες απεικονίσεις που ορίζονται σε ένα υποσύνολο του  $R^2$ , είναι δηλαδή της μορφής,

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n)\end{aligned}\quad (10.1)$$

ή συμβολικά

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{G}(\mathbf{x}_n), \quad \mathbf{x}_n = (x_n, y_n).$$

Το σύνολο των σημείων  $\mathbf{P}_n(x_n, y_n)$ ,  $n \geq 0$  είναι η τροχιά  $T$  του συστήματος που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη  $\mathbf{P}_0(x_0, y_0)$  :

$$T = \{P_0, P_1, P_2, \dots\}$$

Αν ορίζεται μονότιμα η αντίστροφη της  $\mathbf{G}$ , η  $\mathbf{G}^{-1}$ , η απεικόνιση ονομάζεται αντιστρέψιμη (invertible) και μπορούμε από την αρχική συνθήκη  $\mathbf{P}_0(x_0, y_0)$  να ορίσουμε και το παρελθόν της τροχιάς για  $n < 0$ . Γενικά μια τροχιά αποτελεί ένα αναλλοίωτο σύνολο κάτω από τη ροή της απεικόνισης δηλαδή αν  $P_k \in T$  τότε  $\mathbf{G}^m(P_k) \in T$  για κάθε  $m \in \mathbb{N}$  (η  $m \in \mathbb{Z}$ , για μια αντιστρέψιμη απεικόνιση).

Ο Ιακωβιανός πίνακας της απεικόνισης είναι ο

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial f}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial g}{\partial y_n} \end{pmatrix}\quad (10.2)$$

Αν  $|\det(\mathbf{A})| = 1$  τότε η απεικόνιση είναι διατηρητική (area-preserving), δηλαδή διατηρεί τα εμβαδά στο επίπεδο  $xy$  κατά αντιστοιχία με τα συνεχή συστήματα. Αν  $|\det(\mathbf{A})| < 1$  η απεικόνιση είναι απωλεστική (dissipative) και μια συνεχής περιοχή αρχικών συνθηκών στο επίπεδο απεικονίζεται σε περιοχές με όλο και μικρότερο εμβαδόν.

#### 10.1.2 Γραμμικές απεικονίσεις στο επίπεδο

Θεωρούμε αρχικά δισδιάστατες απεικονίσεις (10.1) στις οποίες οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι γραμμικές. Μια τέτοια απεικόνιση μπορεί πάντα να γραφεί στην μορφή

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a_{11}x_n + a_{12}y_n \\ y_{n+1} &= a_{21}x_n + a_{22}y_n\end{aligned},\quad (10.3)$$

όπου  $a_{ij}$  σταθερές. Αν θεωρήσουμε τον πίνακα  $A = (a_{ij})$ , το παραπάνω σύστημα εξισώσεων γράφεται και στην μορφή

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n,\quad (10.4)$$

<sup>16</sup> Τα σχήματα αυτού του κεφαλαίου δημιουργούνται με πρόγραμμα του Mathematica το οποίο είναι είναι διαθέσιμο στην ιστοσελίδα του παρόντος συγγραμματος/κεφαλαίου στον Ελληνικό Συσσωρευτή Ακαδημαϊκών Ηλεκτρονικών Βιβλίων (<http://repfiles.kallipos.gr/file/14152>)

όπου  $\mathbf{x}_n = (x_n, y_n)$ .

Μια λύση του συστήματος (10.3) είναι μια έκφραση η οποία ικανοποιεί το σύστημα για όλες τις τιμές  $n$ , ενώ **γενική λύση** του συστήματος είναι μια λύση που περιέχει όλες τις λύσεις του. Τέλος μια ειδική λύση του (10.3) είναι μια λύση η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες  $(x_0, y_0) = (b_1, b_2)$ . Εύκολα διαπιστώνουμε από την (10.4) ότι η γενική λύση του συστήματος είναι

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0. \quad (10.5)$$

Άρα ο υπολογισμός του πίνακα  $\mathbf{A}^n$  είναι απαραίτητος για την λύση των γραμμικών απεικονίσεων. Για τον υπολογισμό αυτό καταφεύγουμε στην Γραμμική Άλγεβρα και συγκεκριμένα στις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του  $\mathbf{A}$ , βάση των οποίων μπορούμε να ταξινομήσουμε τις λύσεις του συστήματος. Σε κάθε περίπτωση πραγματοποιούμε έναν **μετασχηματισμό ομοιότητας**, δηλαδή κατασκευάζουμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα  $\mathbf{P}$ , τέτοιον ώστε ο  $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$  να έχει μια πιο απλή μορφή από τον  $\mathbf{A}$ , την λεγόμενη **κανονική μορφή**. Τότε, αντιστρέφοντας την τελευταία σχέση, βρίσκουμε  $\mathbf{A}^n = \mathbf{P} \mathbf{B}^n \mathbf{P}^{-1}$ . Για λόγους που θα γίνουν φανεροί στις επόμενες παραγράφους, όπου θα μελετήσουμε τα σταθερά σημεία και την ευστάθεια τους, χρήσιμο είναι ακόμα να θεωρήσουμε τις νέες μεταβλητές  $\tilde{\mathbf{x}}_n = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_n$ . Σε αυτές το σύστημα (10.4), αν πολλαπλασιάσουμε από αριστερά με  $\mathbf{P}^{-1}$ , παίρνει την μορφή

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{B} \tilde{\mathbf{x}}_n, \quad (10.6)$$

του οποίου η λύση είναι  $\tilde{\mathbf{x}}_n = \mathbf{B}^n \tilde{\mathbf{x}}_0$ . Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις, στις οποίες δίνουμε την λύση του συστήματος (10.6) στις μεταβλητές  $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$ , από όπου έπειτα, αν επιστρέψουμε στις αρχικές  $(x_n, y_n)$ , προκύπτει και η λύση του συστήματος (10.5).

i) Ο  $\mathbf{A}$  έχει πραγματικές διακριτές ιδιοτιμές

Αν ο πίνακας  $\mathbf{A}$  έχει δύο πραγματικές ιδιοτιμές  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , τότε διαλέγουμε  $\mathbf{P} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  όπου  $\mathbf{v}_1$  και  $\mathbf{v}_2$  τα ιδιοδιανύσματα τα οποία αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$ , αντίστοιχα. Καθώς τα  $\mathbf{v}_1$  και  $\mathbf{v}_2$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους, η ορίζουσα του πίνακα  $\mathbf{P}$  είναι διάφορη του μηδενός και άρα υπάρχει ο αντίστροφος  $\mathbf{P}^{-1}$ . Στην περίπτωση αυτή ο  $\mathbf{B}$  έρχεται στην διαγώνια μορφή

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (10.7)$$

και εύκολα προκύπτει ότι  $\mathbf{B}^n = \text{diag}[\lambda_1^n, \lambda_2^n]$ . Άρα η λύση του συστήματος (10.6) είναι

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix}. \quad (10.8)$$

ii) Ο  $\mathbf{A}$  έχει πραγματικές ίσες ιδιοτιμές

Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας  $\mathbf{A}$  έχει δηλαδή δύο πραγματικές ιδιοτιμές  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Τώρα στην διπλή ιδιοτιμή μπορεί να αντιστοιχεί ένα μόνο ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{v}$ . Αν από την σχέση  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0$  δεν μπορούμε να βρούμε ένα δεύτερο γραμμικά ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{w}$ , τότε το  $\mathbf{w}$  μπορεί να βρεθεί από την σχέση  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{w} = 0$ . Αν επιλέξουμε  $\mathbf{P} = (\mathbf{v}, \mathbf{w})$ , ο  $\mathbf{B}$  έρχεται τώρα στην μορφή

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (10.9)$$

Όπως παρατηρούμε, ο παραπάνω πίνακας γράφεται  $\mathbf{B} = \mathbf{S} + \mathbf{N}$ , δηλαδή ως το άθροισμα ενός διαγώνιου πίνακα  $\mathbf{S} = \lambda \mathbf{I}$  και ενός πίνακα  $\mathbf{N} = \{n_{ij}\}$  με μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο  $n_{12} = 1$ . Για τον  $\mathbf{N}$  ισχύει  $\mathbf{N}^2 = 0$  (για αυτό και ονομάζεται **μηδενοδύναμος**  $2^{\text{ης}}$  τάξης), και  $\mathbf{N}\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{N}$ , δηλαδή αντιμετατίθεται με τον  $\mathbf{S}$ . Με βάση τις δύο αυτές ιδιότητες, παίρνοντας τον τύπο του διωνύμου, καταλήγουμε ότι

$$\mathbf{B}^n = \mathbf{S}^n + n\mathbf{S}^{n-1}\mathbf{N} = \lambda^n \mathbf{I} + n\lambda^{n-1}\mathbf{N}.$$

Επομένως τελικά η λύση του συστήματος (10.6) είναι τώρα

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix}. \quad (10.10)$$

iii) Ο  $\mathbf{A}$  έχει μιγαδικές συζυγείς ιδιοτιμές

Αν ο  $\mathbf{A}$  έχει μία μιγαδική ιδιοτιμή, τότε επειδή είναι πραγματικός, θα έχει και την συζυγή της. Άρα δηλαδή  $\lambda_{1,2} = a \pm ib$  με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{v} \pm i\mathbf{u}$ . Τώρα, αν σχηματίσουμε τον πίνακα  $\mathbf{P} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , τότε

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (10.11)$$

και αν υψώσουμε τώρα τον  $\mathbf{B}$  στην  $n$ -οστη δύναμη, θα πάρουμε

$$\mathbf{B}^n = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}^n) & -\operatorname{Im}(\lambda_{1,2}^n) \\ \operatorname{Im}(\lambda_{1,2}^n) & \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}^n) \end{pmatrix} = |\lambda_{1,2}|^n \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix},$$

όπου  $|\lambda_{1,2}| = \sqrt{a^2 + b^2}$  και  $\varphi = \arctan(b/a)$ . Επομένως η λύση του συστήματος (10.6) είναι στην περίπτωση αυτή

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} = |\lambda_{1,2}|^n \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix}. \quad (10.12)$$

Σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις, έχοντας υπολογίσει τους πίνακες  $\mathbf{P}$  και  $\mathbf{B}^n$ , μπορούμε να βρούμε την λύση (10.5) του αρχικού συστήματος (10.4) σύμφωνα με την σχέση

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{B}^n\mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{B}^n \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad (10.13)$$

όπου  $c_1$  και  $c_2$  σταθερές, οι οποίες είναι ίσες με τις αρχικές συνθήκες  $\tilde{x}_0$  και  $\tilde{y}_0$ , αντίστοιχα, του συστήματος (10.6).

**[M]** Με τη Mathematica μπορούμε να βρούμε την αναλυτική λύση μιας γραμμικής διακριτής απεικόνισης με την εντολή [RSolve](#).

## 10.2 Σταθερά και περιοδικά σημεία

### 10.2.1 Ευστάθεια σταθερών και περιοδικών σημείων

Τα σταθερά και περιοδικά σημεία σε οποιαδήποτε απεικόνιση τα ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, όπως ορίσαμε επίσης την ευστάθεια τους. Εδώ θα μελετήσουμε το γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από ένα σταθερό σημείο μιας απεικόνισης. Θα δούμε πώς από το γραμμικοποιημένο σύστημα μπορούμε να πάμε στην απεικόνιση (η οποία, εν γένει, είναι μη γραμμική) για μια περιοχή γύρω από το σταθερό σημείο, και για τι είδους σταθερά σημεία μπορεί να γίνει αυτό.

**Σημείωση.** Η μελέτη ενός περιοδικού σημείου περιόδου  $m$  γίνεται με αντίστοιχο τρόπο, αν το θεωρήσουμε ως το σταθερό σημείο της σύνθεσης της απεικόνισης με τον εαυτό της  $m$  φορές.



Ας πάρουμε την δισδιάστατη απεικόνιση (10.1) και ας θεωρήσουμε ένα σταθερό σημείο της, έστω  $(x_0, y_0)$ , για το οποίο επομένως ισχύουν  $f(x_0, y_0) = x_0$  και  $g(x_0, y_0) = y_0$ . Θεωρώντας τις μεταβολές  $x_n = x_0 + \delta x_n$  και  $y_n = y_0 + \delta y_n$ , όπου  $|\delta x_n|, |\delta y_n| \ll 1$ , αναπτύσσουμε τις συναρτήσεις  $f$  και  $g$  κατά Taylor γύρω από το  $(x_0, y_0)$ , οπότε παίρνουμε

$$\begin{aligned} \delta x_{n+1} = x_{n+1} - x_0 &= f(x_0 + \delta x_n, y_0 + \delta y_n) - f(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \delta x_n + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \delta y_n + \dots \\ \delta y_{n+1} = y_{n+1} - y_0 &= g(x_0 + \delta x_n, y_0 + \delta y_n) - g(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \delta x_n + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \delta y_n + \dots \end{aligned} \quad (10.14)$$

Αν κρατήσουμε μόνο όρους πρώτης τάξης, δηλαδή γραμμικοποιήσουμε την απεικόνιση, τότε παίρνουμε

$$\delta \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x}_n, \quad (10.15)$$

όπου  $\delta \mathbf{x}_n = (\delta x_n, \delta y_n)$  και  $\mathbf{A}$  είναι ο Ιακωβιανός πίνακας των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ , υπολογισμένος στο σταθερό σημείο  $(x_0, y_0)$  της απεικόνισης,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} & \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \\ \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} & \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \end{pmatrix}.$$

Αν η απεικόνιση είναι γραμμική, οι σχέσεις (10.14) και (10.15) συμπίπτουν, και συγκεκριμένα για το (10.3) ο Ιακωβιανός πίνακας δεν είναι άλλος από τον πίνακα του συστήματος, ενώ το σταθερό σημείο είναι το  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

Για να μελετήσουμε την ευστάθεια του στην περίπτωση αυτή, θα βασιστούμε στην θεωρία την οποία αναπτύξαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Θα χρησιμοποιήσουμε δηλαδή και πάλι τον μετασχηματισμό ομοιότητας  $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$ , καθώς και τις μεταβλητές  $\tilde{\mathbf{x}}_n = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_n$ , στις οποίες η σχέση (10.15), αν πολλαπλασιάσουμε από αριστερά με  $\mathbf{P}^{-1}$ , παίρνει την μορφή

$$\delta \tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{B} \delta \tilde{\mathbf{x}}_n. \quad (10.16)$$

Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση που είναι  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , οι σχέσεις (10.15) και (10.16) είναι ακριβώς ίδιες με τις (10.4) και (10.6), αντίστοιχα.

*i) Ο  $\mathbf{A}$  έχει πραγματικές διακριτές ιδιοτιμές*

Αν ο πίνακας  $\mathbf{A}$  έχει δύο πραγματικές ιδιοτιμές  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  διαφορετικές μεταξύ τους, τότε, όπως είδαμε στην αντίστοιχη περίπτωση της προηγούμενης παραγράφου, ο  $\mathbf{B}$  γίνεται διαγώνιος και το σύστημα (10.16) παίρνει την μορφή

$$\begin{pmatrix} \delta \tilde{x}_{n+1} \\ \delta \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \tilde{x}_n \\ \delta \tilde{y}_n \end{pmatrix}. \quad (10.17)$$

Η λύση αυτού του συστήματος δίνεται αντίστοιχα με βάση την σχέση (10.8). Από εκεί συμπεραίνουμε ότι αν  $|\lambda_1| < 1$  και  $|\lambda_2| < 1$ , τότε για  $n \rightarrow \infty$  τα  $\delta x_n$  και  $\delta y_n$  τείνουν στο μηδέν, δηλαδή η απεικόνιση τείνει ασυμπτωτικά στο σταθερό σημείο. Ισοδύναμα, από την σχέση (10.17) βλέπουμε ότι η δισδιάστατη απεικόνιση ανάγεται ουσιαστικά σε δύο μονοδιάστατες στις κατευθύνσεις  $\tilde{x}$  και  $\tilde{y}$ , για τις οποίες  $|\delta \tilde{x}_{n+1}| = |\lambda_1| |\delta \tilde{x}_n|$  και  $|\delta \tilde{y}_{n+1}| = |\lambda_2| |\delta \tilde{y}_n|$ , αντίστοιχα. Άρα συμπεραίνουμε ότι αν  $|\lambda_1| < 1$  και  $|\lambda_2| < 1$ , δηλαδή αν σε κάθε ιδιο-διεύθυνση έχουμε ευστάθεια, τότε το σταθερό σημείο είναι συνολικά ευσταθές στο επίπεδο  $\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{y}}$ .

ii) Ο  $\mathbf{A}$  έχει πραγματικές ίσες ιδιοτιμές

Τώρα ο πίνακας  $\mathbf{A}$  έχει δύο πραγματικές ιδιοτιμές  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  και σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο το σύστημα (10.16) γίνεται

$$\begin{pmatrix} \delta \tilde{x}_{n+1} \\ \delta \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \tilde{x}_n \\ \delta \tilde{y}_n \end{pmatrix}. \quad (10.18)$$

Από την αντίστοιχη λύση (10.10) βλέπουμε και πάλι ότι αν  $|\lambda| < 1$ , τότε τα  $\delta x_n$  και  $\delta y_n$  τείνουν στο μηδέν για  $n \rightarrow \infty$ , δηλαδή  $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ , και άρα το σταθερό σημείο είναι ευσταθές.

iii) Ο  $\mathbf{A}$  έχει μιγαδικές συζυγείς ιδιοτιμές

Στην περίπτωση αυτή εμφανίζονται, όπως αναφέραμε παραπάνω, δύο συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές  $\lambda_{1,2} = a \pm ib$  και το σύστημα (10.16) γράφεται

$$\begin{pmatrix} \delta \tilde{x}_{n+1} \\ \delta \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \tilde{x}_n \\ \delta \tilde{y}_n \end{pmatrix}. \quad (10.19)$$

Η λύση αυτού του συστήματος είναι της μορφής (10.12), από όπου φαίνεται ότι αν  $|\lambda_{1,2}| < 1$ , τότε η απεικόνιση τείνει ασυμπτωτικά στο σταθερό σημείο. Αυτό φαίνεται και από την σχέση (10.19), σύμφωνα με την οποία είναι  $|\delta \tilde{r}_{n+1}| = |\lambda_{1,2}| |\delta \tilde{r}_n|$ , όπου  $|\delta \tilde{r}_n| = \sqrt{\delta \tilde{x}_n^2 + \delta \tilde{y}_n^2}$ . Έτσι, στην ακτινική κατεύθυνση του  $\tilde{r}$ , η οποία εκφράζει την απόσταση από το  $(x_0, y_0)$  στο επίπεδο  $\tilde{x}\tilde{y}$ , η ευστάθεια εξασφαλίζεται αν  $|\lambda_{1,2}| < 1$ . Συνοψίζοντας, είτε οι ιδιοτιμές  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  είναι πραγματικές, είτε μιγαδικές, αν  $|\lambda_1| < 1$  και  $|\lambda_2| < 1$ , τότε το σταθερό σημείο είναι ευσταθές.

Στην γενικότερη περίπτωση των μη γραμμικών απεικονίσεων, ισχύουν όμως οι σχέσεις (10.14), ενώ το σύστημα (10.15) αποτελεί μια πρώτη γραμμική προσέγγιση. Σύμφωνα όμως με το **θεώρημα Hartman-Grobman** για απεικονίσεις,

- η απεικόνιση στην περιοχή ενός σταθερού σημείου είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την αντίστοιχη γραμμικοποιημένη, εφόσον  $|\lambda_{1,2}| \neq 1$ . Τα σταθερά σημεία για τα οποία ισχύει αυτή η συνθήκη ονομάζονται **υπερβολικά**.

Άρα τελικά και στις μη γραμμικές απεικονίσεις ισχύει ότι το σταθερό σημείο  $(x_0, y_0)$  είναι ευσταθές, αν και οι δύο ιδιοτιμές του Ιακωβιανού πίνακα  $\mathbf{A}$  έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδας,  $|\lambda_1| < 1$  και  $|\lambda_2| < 1$ , ενώ αν έστω και μία από τις δύο έχει μέτρο μεγαλύτερο της μονάδας,  $|\lambda_1| > 1$  ή  $|\lambda_2| > 1$ , τότε το σημείο είναι ασταθές. Στην περίπτωση που είναι  $|\lambda_1| = 1$  ή  $|\lambda_2| = 1$ , τότε δεν μπορούμε από το γραμμικοποιημένο σύστημα να αποφανθούμε για την ευστάθεια του σταθερού σημείου.

Η ευστάθεια ενός περιοδικού σημείου περιόδου  $m$ , ενός σημείου δηλαδή  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ , τέτοιο ώστε  $\mathbf{f}^m(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ , όπου  $\mathbf{f} = (f, g)$ , μπορεί να μελετηθεί με παρόμοιο τρόπο. Αρκεί να θεωρήσουμε την απεικόνιση  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^m(\mathbf{x})$ , για την οποία το  $\mathbf{p}$  αποτελεί σταθερό σημείο, και να εφαρμόσουμε τα προηγούμενα συμπεράσματα χρησιμοποιώντας τον Ιακωβιανό πίνακα της  $\mathbf{g}$ .

## 10.2.2 Τοπολογία-ταξινόμηση σταθερών σημείων

Σε αντιστοιχία με τα διδιάστατα συστήματα διαφορικών εξισώσεων, τα σταθερά σημεία των διδιάστατων απεικονίσεων χαρακτηρίζονται και αυτά με βάση τις ιδιοτιμές του Ιακωβιανού τους πίνακα. Θεωρούμε και πάλι αρχικά το γραμμικό σύστημα (10.3), για το οποίο το σταθερό σημείο είναι το  $(0,0)$ . Με

βάση την γενική λύση, την οποία βρήκαμε στην §10.1.2, και το κριτήριο ευστάθειας που δώσαμε στην §9.1.1, μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα ως προς την τοπολογία γύρω από τα σταθερά σημεία.

Όπως είπαμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, ένα σύνολο  $E$  ονομάζεται αναλλοίωτο κάτω από μια απεικόνιση  $f$  αν  $f(E) = E$ . Η συνθήκη αυτή σημαίνει ότι οι τροχιές της απεικόνισης οι οποίες ξεκινάνε από το  $E$  παραμένουν συνέχεια μέσα σε αυτό.

i)  $OA$  έχει πραγματικές διακριτές ιδιοτιμές

Σύμφωνα με την σχέση (10.13), η γενική λύση του συστήματος (10.3) για την περίπτωση αυτή είναι

$$\mathbf{x}_n = c_1 \mathbf{v}_1 \lambda_1^n + c_2 \mathbf{v}_2 \lambda_2^n. \quad (10.20)$$

Αν λοιπόν ξεκινήσουμε με αρχικές συνθήκες  $\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{v}_1$ , δηλαδή τέτοιες ώστε  $c_2 = 0$ , τότε η τροχιά ή, με άλλα λόγια, η ειδική λύση για αυτές τις αρχικές συνθήκες θα είναι  $\mathbf{x}_n = c_1 \mathbf{v}_1 \lambda_1^n$ , δηλαδή παραμένει διαρκώς πάνω σε μια ευθεία παράλληλη στο ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{v}_1$ . Όμοια αν οι αρχικές συνθήκες είναι τέτοιες ώστε  $c_1 = 0$ , δηλαδή της μορφής  $\mathbf{x}_0 = c_2 \mathbf{v}_2$ , τότε η τροχιά είναι  $\mathbf{x}_n = c_2 \mathbf{v}_2 \lambda_2^n$  και επομένως βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία παράλληλη τώρα στο ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{v}_2$ . Οι δύο αυτές ευθείες ονομάζονται αναλλοίωτοι γραμμικοί υπόχωροι και συμβολίζονται με  $E$ . Αν  $|\lambda_i| < 1$ , τότε η ευθεία στην διεύθυνση του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος  $\mathbf{v}_i$  ονομάζεται **ευσταθής αναλλοίωτος υπόχωρος** και συμβολίζεται με  $E^s$ , ενώ αν  $|\lambda_i| > 1$  τότε η ευθεία στην διεύθυνση του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος  $\mathbf{v}_i$  ονομάζεται **ασταθής αναλλοίωτος υπόχωρος** και συμβολίζεται με  $E^u$ .

ii)  $OA$  έχει πραγματικές ίσες ιδιοτιμές

Η γενική λύση του συστήματος (10.3) τώρα με βάση την σχέση (10.13) είναι

$$\mathbf{x}_n = c_1 \mathbf{v} \lambda^n + c_2 (\mathbf{v} n \lambda^{n-1} + \mathbf{w} \lambda^n). \quad (10.21)$$

Για αρχικές συνθήκες  $\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{v}$ , δηλαδή τέτοιες ώστε  $c_2 = 0$ , η τροχιά της απεικόνισης είναι  $\mathbf{x}_n = c_1 \mathbf{v} \lambda^n$ . Όπως και πριν, αυτό σημαίνει ότι η τροχιά παραμένει διαρκώς πάνω σε μια ευθεία παράλληλη στο ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{v}$ , η οποία και αποτελεί τον μοναδικό αναλλοίωτο υπόχωρο. Και αντίστοιχα, αν  $|\lambda| < 1$ , τότε η ευθεία αυτή ονομάζεται **ευσταθής αναλλοίωτος υπόχωρος**  $E^s$ , ενώ αν  $|\lambda| > 1$  τότε ονομάζεται **ασταθής αναλλοίωτος υπόχωρος**  $E^u$ .

iii)  $OA$  έχει μιγαδικές συζυγείς ιδιοτιμές

Στην περίπτωση αυτή η γενική λύση είναι

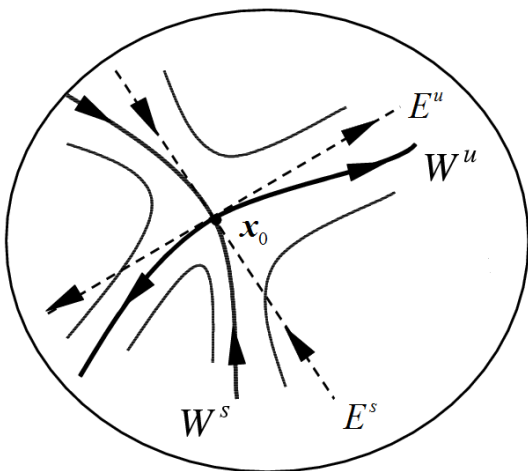
$$\mathbf{x}_n = |\lambda_{1,2}|^n \left[ c_1 (\cos(n\varphi) \mathbf{u} + \sin(n\varphi) \mathbf{v}) + c_2 (-\sin(n\varphi) \mathbf{u} + \cos(n\varphi) \mathbf{v}) \right] \quad (10.22)$$

και όπως μπορούμε να συμπεράνουμε δεν υπάρχουν μονοδιάστατοι αναλλοίωτοι υπόχωροι, αλλά το σύνολο όλων των σημείων των τροχιών βρίσκονται στο επίπεδο που ορίζουν τα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{u}$ . Δηλαδή ολόκληρος αυτός ο δισδιάστατος χώρος απεικονίζεται στον εαυτό του και παραμένει αναλλοίωτος. Αν  $|\lambda_{1,2}| < 1$  τότε ονομάζεται **ευσταθής**  $E^s$ , και αν  $|\lambda_{1,2}| > 1$  ονομάζεται **ασταθής**  $E^u$ .

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται τα είδη των σταθερών σημείων των γραμμικών απεικονίσεων για όλες τις δυνατές περιπτώσεις ανάλογα με τις τιμές των ιδιοτιμών ως προς την ευστάθεια τόσο των ίδιων των σημείων όσο και των αναλλοίωτων υπόχωρων. Όπως φαίνεται και από την ονομασία τους, οι περιπτώσεις αυτές είναι ίδιες με τις αντίστοιχες που είδαμε στα δισδιάστατα συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Η τοπολογία τους φαίνεται στα αντίστοιχα σχήματα του 4<sup>ου</sup> κεφαλαίου, με την μόνη διαφορά ότι τώρα οι τροχιές δεν σχηματίζουν τις συνεχείς καμπύλες που βλέπουμε στα σχήματα αυτά, αλλά αποτελούν σημεία πάνω σε αυτές.

	Ιδιοτιμές
Σάγμα	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},  \lambda_1  < 1 <  \lambda_2 $
Ευσταθής κόμβος	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},  \lambda_1  < 1,  \lambda_2  < 1$
Ασταθής κόμβος	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},  \lambda_1  > 1,  \lambda_2  > 1$
Ευσταθής εστία	$\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_1^* \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},  \lambda_1  =  \lambda_2  < 1$
Ασταθής εστία	$\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_1^* \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},  \lambda_1  =  \lambda_2  > 1$
Κέντρο	$\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_1^* \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},  \lambda_1  =  \lambda_2  = 1$

Για τις μη γραμμικές απεικονίσεις, εφόσον το σταθερό σημείο είναι υπερβολικό, δηλαδή δεν έχει ιδιοτιμές μέτρου ένα, ισχύει το **θεώρημα ευσταθούς πολλαπλότητας**, σύμφωνα με το οποίο διατηρούνται οι ευσταθείς και ασταθείς αναλλοίωτοι υπόχωροι του γραμμικοποιημένου συστήματος και στο μη γραμμικό σύστημα. Πιο συγκεκριμένα για κάθε ευσταθή αναλλοίωτο υπόχωρο  $E^s$  του γραμμικοποιημένου συστήματος υπάρχει για το μη γραμμικό σύστημα αναλλοίωτη πολλαπλότητα ίδιας διάστασης με τον  $E^s$ , η οποία εφάπτεται σε αυτόν στο σταθερό σημείο  $x_0$ . Αυτή ονομάζεται ευσταθής πολλαπλότητα και συμβολίζεται με  $W^s$ . Όμοια, σε κάθε ασταθή αναλλοίωτο υπόχωρο  $E^u$  του γραμμικοποιημένου συστήματος αντιστοιχεί αναλλοίωτη πολλαπλότητα ίδιας διάστασης με τον  $E^u$ , που εφάπτεται σε αυτόν στο σταθερό σημείο  $x_0$ , η οποία ονομάζεται ασταθής πολλαπλότητα  $W^u$ .



Σχήμα 10-1. Οι ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες εφάπτονται στους ευσταθείς και ασταθείς γραμμικούς υπόχωρους, αντίστοιχα, σε ένα υπερβολικό σταθερό σημείο.

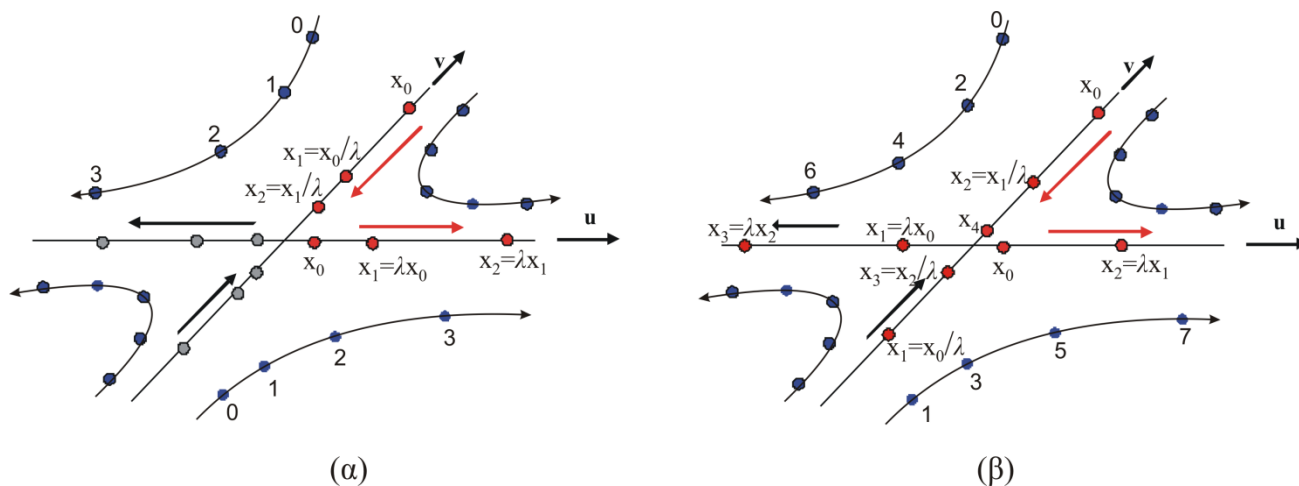
Το παραπάνω θεώρημα σε συνδυασμό με το θεώρημα Hartman-Grobman, στο οποίο αναφερθήκαμε νωρίτερα, μας εξασφαλίζουν ότι για τα υπερβολικά σταθερά σημεία μιας απεικόνισης η τοπολογία τους παραμένει σταθερή από το γραμμικοποιημένο σύστημα στο μη γραμμικό. Για τον λόγο αυτό η ταξινόμηση του παραπάνω πίνακα, πλην του κέντρου, χρησιμοποιείται για τον χαρακτηρισμό των σταθερών σημείων και στις μη γραμμικές απεικονίσεις.

Για τα *διατηρητικά συστήματα*, ( $|\det(\mathbf{A})|=1$ ) οι ιδιοτιμές οφείλουν να είναι αντίστροφες μεταξύ τους, δηλαδή αν  $\lambda_1=\lambda$  τότε  $\lambda_2=1/\lambda$  ή καθαρά φανταστικές συζυγείς,  $\lambda_{1,2}=e^{\pm i\varphi}$ . Συνεπώς υπάρχουν δύο περιπτώσεις: ή

έχουμε πραγματικές ιδιοτιμές και το σταθερό σημείο (ή η περιοδική τροχιά) είναι σάγμα ή μιγαδικές με  $|\lambda|=1$ . οπότε έχουμε κέντρο. Στην περίπτωση πραγματικής ιδιοτιμής με  $\lambda < 0$  τότε λέμε ότι έχουμε *σάγμα με ανάκλαση* (Σχήμα 10-2). Για ένα διατηρητικό σύστημα το κέντρο χαρακτηρίζεται ευσταθές ενώ το σάγμα είναι ασταθές. Εύκολα αποδεικνύεται ότι έχουμε ευστάθεια αν ισχύει

$$|\text{trace}A| = |a_{11} + a_{22}| < 2, \quad (10.23)$$

διαφορετικά έχουμε πραγματικές ιδιοτιμές και, συνεπώς αστάθεια.



Σχήμα 10-2. Σάγματα α)  $\lambda > 1$  β)  $\lambda < -1$  (σάγμα με ανάκλαση).

## Ασκήσεις

**Άσκηση 10.2.1.** Δείξτε ότι το σημείο ισοροπίας του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} &= \frac{1}{2}x_n + y_n \end{aligned}$$

είναι σάγμα. Υπολογίστε τον ευσταθή και ασταθή υπόχωρο και γράψτε τη γενική λύση του συστήματος.

**Άσκηση 10.2.2.** Δείξτε ότι το σημείο ισοροπίας του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - y_n \\ y_{n+1} &= x_n + y_n \end{aligned}$$

είναι εστία. Γράψτε τη γενική λύση του συστήματος.

**Άσκηση 10.2.3.** Αποδείξτε ότι για τα διατηρητικά συστήματα η σχέση (10.23) οδηγεί σε ιδιοτιμές  $\lambda_i = e^{\pm i\varphi}$  και άρα το σταθερό σημείο είναι ευσταθές.

## 10.3 Παραδείγματα Απεικονίσεων

### 10.3.1 Η απεικόνιση του Hénon

Μια γνωστή μη γραμμική δισδιάστατη απεικόνιση είναι η [απεικόνιση του Hénon](#), η οποία δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + 1 - ax_n^2, \\ y_{n+1} &= bx_n, \end{aligned} \quad (10.24)$$

όπου  $a, b \in \mathbb{R}$ . Τα σταθερά σημεία της απεικόνισης αποτελούν λύσεις του συστήματος  $y_0 + 1 - ax_0^2 = x_0$ ,  $bx_0 = y_0$ , δηλαδή της εξίσωσης  $ax_0^2 + (1-b)x_0 - 1 = 0$ , οι οποίες υπάρχουν για  $a \geq a_0 = -(b-1)^2/4$  και είναι ίσες με

$$x_0 = \frac{b-1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a}, \quad y_0 = bx_0.$$

Για να μελετήσουμε την ευστάθεια των σταθερών αυτών σημείων, βρίσκουμε τον Ιακωβιανό πίνακα στα σημεία  $(x_0, y_0)$ ,

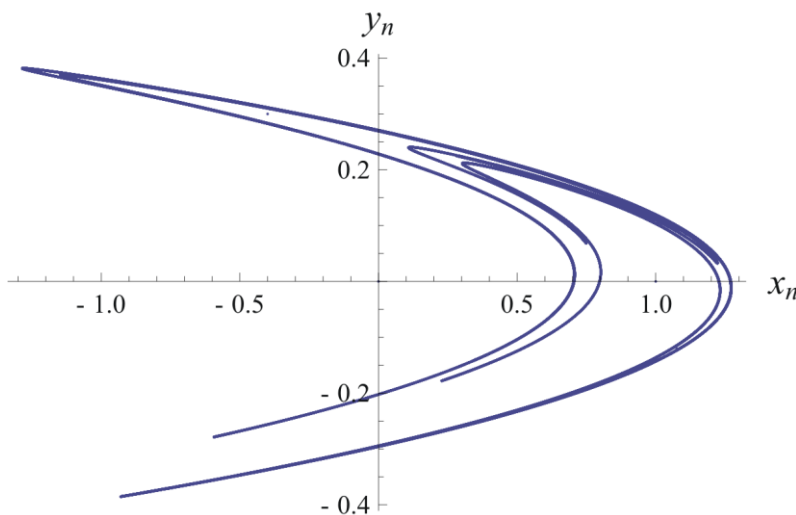
$$A = \begin{pmatrix} -2ax_0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

και έπειτα τις ιδιοτιμές του. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι  $\lambda^2 + 2ax_0\lambda - b = 0$  με λύσεις

$$\lambda_{1,2} = -ax_0 \pm \sqrt{(ax_0)^2 + b}.$$

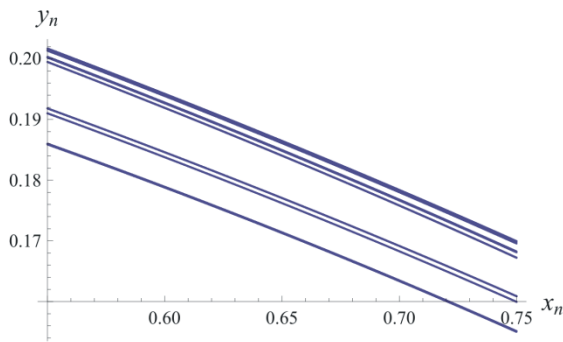
Από δω βρίσκουμε ότι το ένα σταθερό σημείο είναι πάντα ασταθές, ενώ το άλλο είναι ευσταθές για  $a < a_1 = 3(b-1)^2/4$ . Για μεγαλύτερες τιμές του  $a$  εμφανίζονται ευσταθή σημεία περιόδου  $2^n$ , και συναντάμε το φαινόμενο της διακλάδωσης διπλασιασμού περιόδου, το οποίο ολοκληρώνεται για  $a = a_\infty$ .

Ένα άλλο όμως αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό της απεικόνισης αυτής, είναι ότι για ορισμένες τιμές των  $a$  και  $b$  εμφανίζεται και ένα άλλο ελκτικό σύνολο, το οποίο εκτός από χαοτικό έχει επιπλέον και μια αρκετά πολύπλοκη δομή. Συγκεκριμένα για  $b=0.3$ , η απεικόνιση για  $a > a_{sa} > a_\infty$  εμφανίζει τροχιές οι οποίες φεύγουν στο άπειρο. Στο διάστημα όμως  $a_\infty < a < a_{sa}$ , για παράδειγμα για  $a=1.4$ , παρατηρούμε, μετά από αριθμητική εξέλιξη της τροχιάς με βάση την αριθμητική μελέτη, την εμφάνιση του ελκυστή που βλέπουμε στο Σχήμα 10-3.

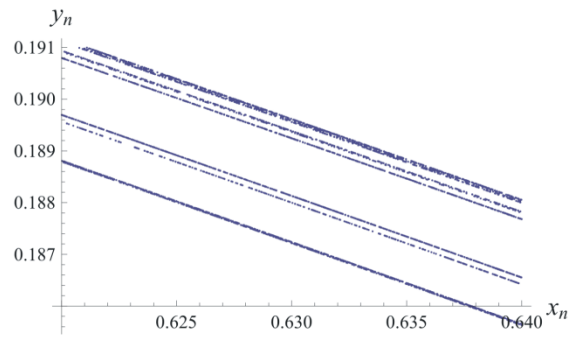


Σχήμα 10-3. Ο παράξενος ελκυστής της απεικόνισης του Hénon για  $a=1.4$ ,  $b=0.3$ .

Η ιδιαιτερότητα του συνόλου αυτού φαίνεται αν μεγεθύνουμε σε μια περιοχή του μία από τις «καμπύλες», από τις οποίες αποτελείται. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 10-4(α), κάθε μια από αυτές τις «καμπύλες» δεν είναι μία απλή μονοδιάστατη καμπύλη, αλλά αποτελείται από άλλες, νέες «καμπύλες».



(α)



(β)

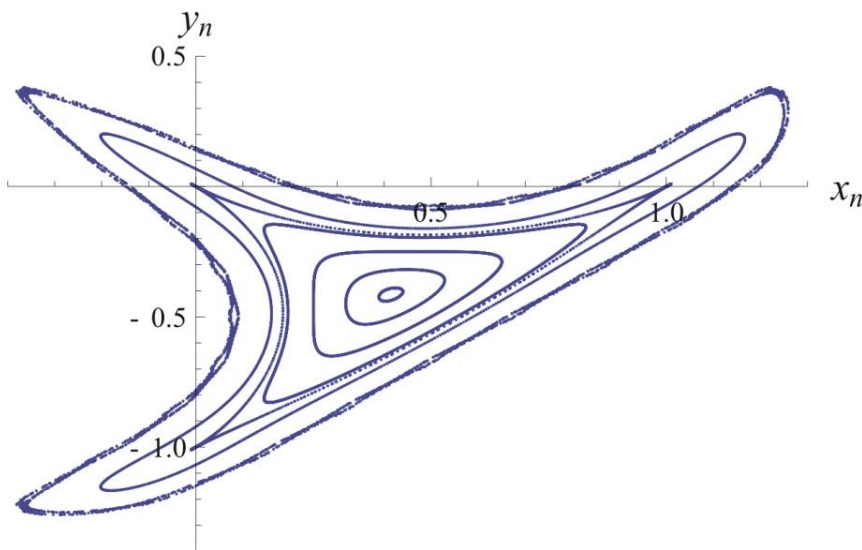
Σχήμα 10-4. Μεγεθύνσεις του παράξενου ελκυστή του Hénon.

Αν μεγεθύνουμε και άλλο το σχήμα του ελκυστή, για παράδειγμα μία από τις νέες αυτές «καμπύλες», τότε, όπως βλέπουμε και στο Σχήμα 10-4(β), θα πάρουμε την ίδια εικόνα, δηλαδή κάθε μια από τις «καμπύλες» αναλύεται σε καινούριες «καμπύλες», κοκ. Το φαινόμενο αυτό, η μεγεθυμένη δηλαδή εικόνα να είναι ποιοτικά ίδια με την αρχική, ονομάζεται **αυτο-ομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας** ([self-similarity](#)), και είναι χαρακτηριστική ιδιότητα των λεγόμενων **μορφοκλασματικών συνόλων** ([fractals](#)).

Για  $|b|=1$  η απεικόνιση του Hénon είναι διατηρητική και δεν μπορεί να παρουσιάσει παράξενο ελκυστή. Έστω  $b=-1$  και  $a>-1$ . Η απεικόνιση έχει δύο σημεία ισορροπίας τα

$$\Sigma_1(x_0, y_0) = \left( -\frac{1}{a}(1 + \sqrt{1+a}), \frac{1}{a}(1 + \sqrt{1+a}) \right), \quad \Sigma_2(x_0, y_0) = \left( \frac{1}{a}(-1 + \sqrt{1+a}), \frac{1}{a}(1 - \sqrt{1+a}) \right)$$

ενώ το ίχνος του Ιακωβιανού πίνακα είναι  $\text{trace} \mathbf{A} = -2ax_0$ . Για το  $\Sigma_1$ , το ίχνος του  $\mathbf{A}$  είναι πάντα μεγαλύτερο του 2 και συνεπώς το σημείο είναι ασταθές (σάγμα). Για το  $\Sigma_2$ , επίσης, το ίχνος του  $\mathbf{A}$  είναι μεγαλύτερο του 2 για  $a < 3$ . Άρα το  $\Sigma_2$  είναι ευσταθές (κέντρο) για  $-1 < a < 3$ . Γύρω από τα ασταθή οι τροχιές φεύγουν γρήγορα προς το άπειρο. Γύρω από το ευσταθές  $\Sigma_2$  μπορούμε να βρούμε μια περιοχή με αναλλοίωτες καμπύλες (ημπεριοδικές τροχιές), οι οποίες περικλείουν το  $\Sigma_2$ . Ένα παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 10-5.



Σχήμα 10-5. Το επίπεδο της διατηρητικής απεικόνισης του Hénon ( $b=-1$ ,  $a=1$ ) γύρω από το ευσταθές σταθερό σημείο.

### 10.3.2 Η τυπική Απεικόνιση

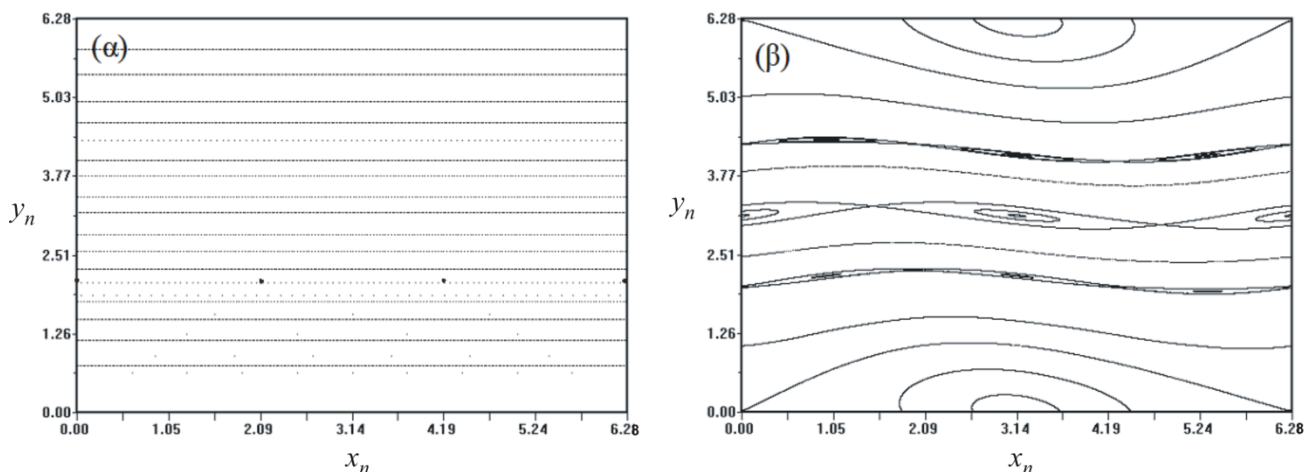
Η τυπική απεικόνιση ([standard map](#)) μπορεί να περιγράψει την τομή Poincaré ενός διαταραγμένου ταλαντωτή (μη αυτόνομο σύστημα 1BE) ή γενικότερα τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της εξέλιξης ενός Χαμιλτονιανού συστήματος 2BE όπως αυτά εμφανίζονται σε μια τομή Poincaré (βλ. §8.4). Στη βιβλιογραφία παρουσιάζεται με διάφορους ορισμούς, εδώ την ορίζουμε ως εξής

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n \pmod{2\pi} \\ y_{n+1} &= y_n + k \sin(x_n + y_n) \pmod{2\pi} \end{aligned} \quad (10.25)$$

Η πράξη modulo περιορίζει πάντα τις τιμές των μεταβλητών και ο χώρος των τροχιών της απεικόνισης είναι το τετράγωνο με αρχή το 0 και με πλευρά  $2\pi$ .

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα  $\mathbf{A}$  της (10.25) είναι μονάδα για κάθε τιμή της παραμέτρου  $k$  και, συνεπώς, η απεικόνιση είναι διατηρητική. Τα σταθερά σημεία της απεικόνισης είναι το  $(0,0)$ , το οποίο είναι ασταθές και το  $(0,\pi)$ , το οποίο είναι ευσταθές για  $k < 4$ .

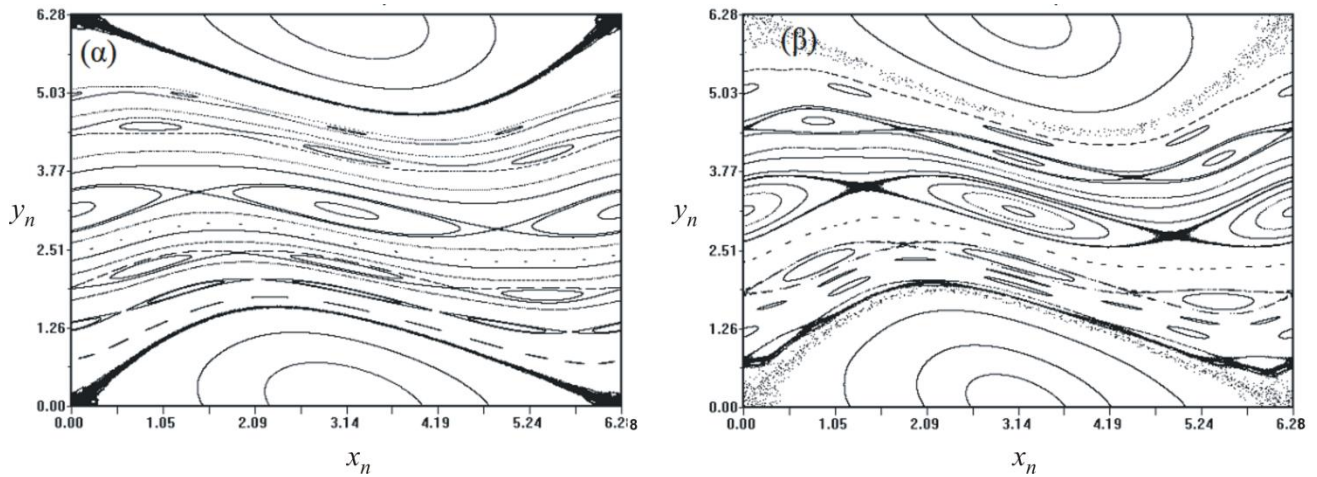
Παρατηρούμε ότι για  $k=0$  και  $y_0 \neq 0$  έχουμε  $y_n = y_0$  για κάθε  $n$ , ενώ το  $x$  μεταβάλλεται κατά την σταθερή ποσότητα  $y_0$ . Άρα, στην περίπτωση αυτή, οι τροχιές της απεικόνισης σχηματίζουν αναλλοίωτες καμπύλες, οι οποίες είναι ευθείες παράλληλες του άξονα  $x$ . Αν όμως ξεκινήσουμε με αρχική συνθήκη  $y_0 = 2p\pi/q$ , όπου  $p, q$  πρώτοι ακέραιοι, τότε το  $x$  επιστρέφει στην αρχική του τιμή μετά από  $q$  επαναλήψεις και έχουμε μια περιοδική τροχιά περιόδου  $q$  ή αλλιώς έναν συντονισμό  $p/q$ . Κάποιες τροχιές δίνονται στο Σχήμα 10-6(α), όπου σημειώνουμε με έντονα σημεία τον συντονισμό  $1/3$  (προσοχή το σημείο στη θέση  $x=2\pi$  είναι το ίδιο με αυτό στη θέση  $x=0$ ). Η κατάσταση αυτή ( $k=0$ ) ονομάζεται *αδιατάρακτη* και η απεικόνιση είναι *ολοκληρώσιμη*.



Σχήμα 10-6. Τροχιές της τυπικής απεικόνισης για α)  $k=0$  και β)  $k=0.3$ .

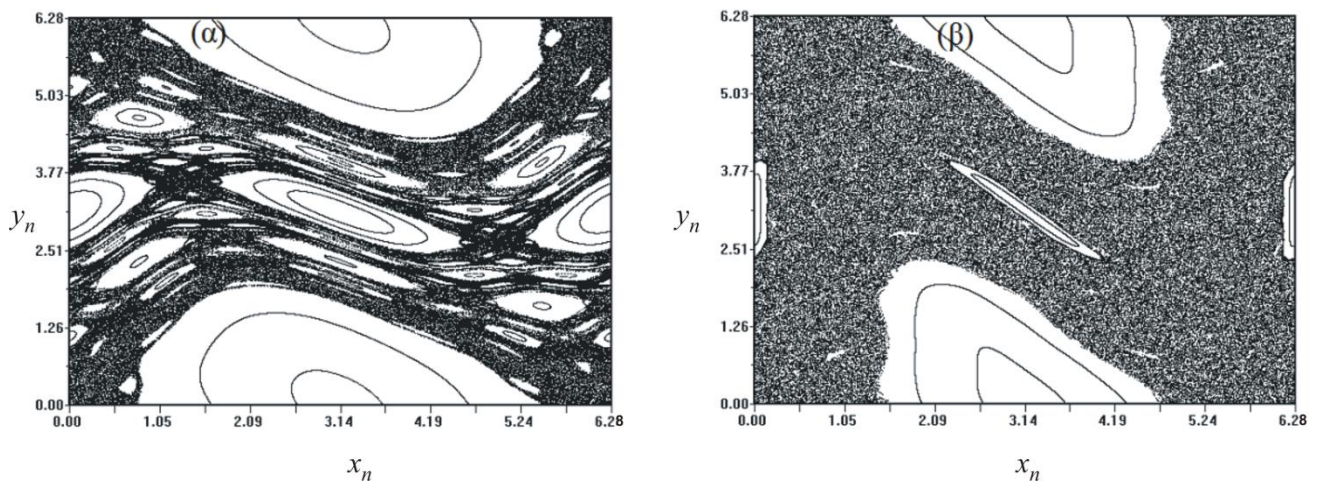
Αν το  $k$  πάρει μικρές αλλά μη μηδενικές τιμές έχουμε τις τροχιές στο πάνελ (β), Σχήμα 10-6, όπου εμφανίζονται αλυσίδες Poincaré-Birkhoff (δες §8.4.2). Στους συντονισμούς  $p/q$  συνεχίζουν να υφίστανται  $2q$  σημεία (2 τροχιές περιόδου  $q$ ) μισά εκ' των οποίων είναι ελλειπτικά (ευσταθή), τα οποία περικλείονται από νησίδες και μισά υπερβολικά (ασταθή), τα οποία συνοδεύονται από ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες. Αυτό συμβαίνει σε κάθε συντονισμό αλλά το μέγεθος των νησίδων είναι στην πλειονότητα των περιπτώσεων πολύ μικρό και μικραίνει όσο αυξάνει η τάξη του συντονισμού. Πρέπει να προσέξουμε επίσης το ένα ευσταθές σταθερό σημείο στο  $(\pi,0)$  (ή ισοδύναμα στο  $(\pi,2\pi)$ ) και το ένα ασταθές σταθερό σημείο στο  $(0,0)$  (ή, ισοδύναμα, στο  $(0,2\pi)$  ή στο  $(2\pi,0)$  ή στο  $(2\pi,2\pi)$ ). Αυξάνοντας την τιμή της παραμέτρου  $k$  παρατηρούμε πλέον τις νησίδες και σε άλλους συντονισμούς μεγαλύτερης τάξης (βλ. Σχήμα 10-7).





Σχήμα 10-7. Τροχιές της τυπικής απεικόνισης για α)  $k=0.6$  και β)  $k=0.8$ .

Επίσης στο Σχήμα 10-7(α), παρατηρούμε ότι στο ασταθές σταθερό σημείο τα σημεία της τροχιάς δεν ανήκουν πάνω σε κάποια καμπύλη αλλά παρουσιάζουν έναν μικρό άτακτο διασκορπισμό. Οι τροχιές αυτές είναι **χαοτικές τροχιές** και εμφανίζονται στην περιοχή κάθε ασταθούς σημείου περιόδου  $q$ . Ουσιαστικά έχουμε μια ισοδύναμη εικόνα της δυναμικής με αυτή που περιγράψαμε στην §8.4 για τα διαταραγμένα Χαμιλτονιανά συστήματα. Οι χαοτικές περιοχές φαίνεται να γίνονται πιο εμφανείς όσο μεγαλώνει η τιμή της παραμέτρου  $k$  (η διαταραχή). Στις παραπάνω περιπτώσεις παρατηρούμε, επίσης, ότι πολλές αναλλοίωτες καμπύλες δεν έχουν σπάσει σε νησίδες. Καθώς όμως αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου  $k$  οι νησίδες μεγαλώνουν και συγκρούονται μεταξύ τους και οι αναλλοίωτες καμπύλες που τις διαχώριζαν δεν υπάρχουν πλέον. Έχουμε δηλαδή *αλληλοεπικάλυψη συντονισμών* και δημιουργούνται ευρείες χαοτικές περιοχές. Στο Σχήμα 10-8(α) όλες οι αναλλοίωτες καμπύλες έχουν «σπάσει» και οι χαοτικές τροχιές μπορούν να διαχέονται από τα «κενά» τα οποία αφήνουν οι νησίδες. Για ακόμα μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου  $k$  το χάος κυριαρχεί (Σχήμα 10-8(β)).



Σχήμα 10-8. Τροχιές της τυπικής απεικόνισης για α)  $k=1.0$  και β)  $k=2.0$ .

## Ασκήσεις

**Άσκηση 10.3.1.** Δίνεται η απεικόνιση

$$x_{n+1} = 2x_n y_n, \quad y_{n+1} = x_n^2 + y_n^2$$

Δείξτε ότι η καμπύλη  $y^2 - x^2 = 1$  είναι αναλλοίωτο σύνολο της απεικόνισης και προσδιορίστε τα σταθερά σημεία.

**Άσκηση 10.3.2.** Δίνεται η απεικόνιση

$$x_{n+1} = x_n^2 + y_n, \quad y_{n+1} = -y_n^2 + x_n$$

Δείξτε ότι η ευθεία  $x + y = 0$  είναι αναλλοίωτο σύνολο της απεικόνισης και προσδιορίστε τα σταθερά σημεία.

**Άσκηση 10.3.3.** Δίνεται η απεικόνιση

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{y_n}, \quad y_{n+1} = x_n y_n.$$

Βρείτε τα σταθερά σημεία της απεικόνισης και τα περιοδικά σημεία περιόδου δύο.

**Άσκηση 10.3.4.** Βρείτε τα σημεία ισοροπίας και μελετήστε την ευστάθειά τους για την διατηρητική απεικόνιση του Hénon με  $b=1$ .

**Άσκηση 10.3.5.** Δίνεται η απεικόνιση

$$x_{n+1} = x_n y_n^2 + y_n, \quad y_{n+1} = y_n x_n^2 + x_n$$

Δείξτε ότι η παραβολή  $xy = -2$  είναι αναλλοίωτο σύνολο της απεικόνισης και προσδιορίστε τα σταθερά σημεία.

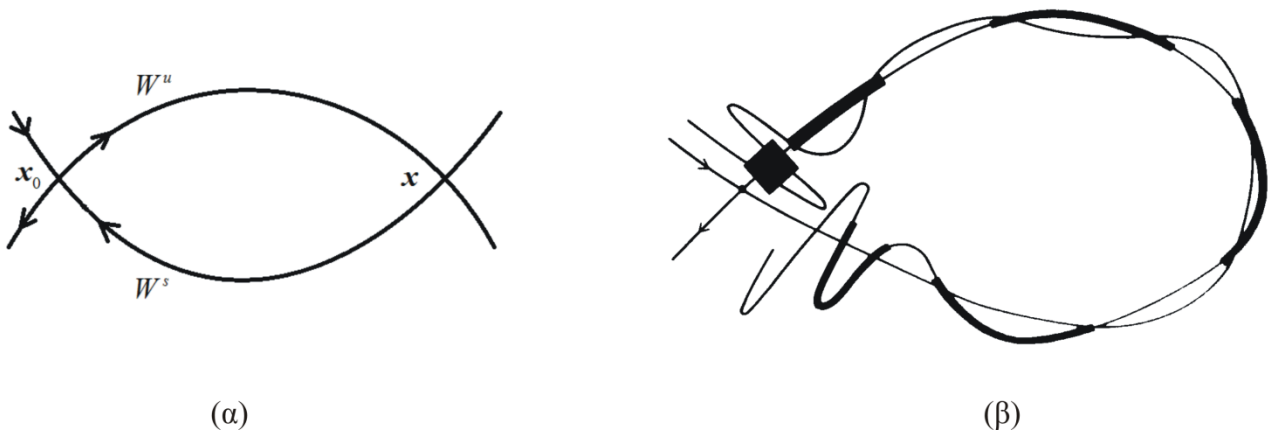
**Άσκηση 10.3.6.** Μελετήστε την ευστάθεια των σταθερών σημείων της τυπικής απεικόνισης και δείξτε ότι για  $k=4$  έχουμε διακλάδωση. Σχεδιάστε το φασικό διάγραμμα για  $k=5$ .

**Άσκηση 10.3.7.** Ακολουθώντας την διαδικασία η οποία περιγράφεται στην §7.6.2, ορίστε τον εκθέτη Lyapunov για ένα διακριτό σύστημα. Χρησιμοποιήστε τον Ιακωβιανό πίνακα της απεικόνισης. Εφαρμόστε τον υπολογισμό για κάποιες τροχιές (ημιπεριοδικές και χαοτικές) της τυπικής απεικόνισης.

## 10.4 Ομοκλινικό χάος και η απεικόνιση πετάλου του Smale.

### 10.4.1 Το ομοκλινικό πλέγμα

Στην §10.2.2 γνωρίσαμε τις πολλαπλότητες  $W^s$  και  $W^u$ , μέσα από το θεώρημα της ευσταθούς πολλαπλότητας. Υπάρχει περίπτωση η ευσταθής  $W^s$  και η ασταθής  $W^u$  πολλαπλότητα να τέμνονται εγκάρσια (η τομή δύο καμπυλών είναι εγκάρσια, ουσιαστικά όταν δεν είναι εφαπτομενική), όπως δηλαδή στο σημείο  $x$  του παρακάτω σχήματος, πάνελ (α), όπου  $x_0$  είναι ένα σάγμα. Το σημείο  $x$  σε αυτήν την περίπτωση ονομάζεται εγκάρσιο **ομοκλινικό σημείο** μια και ανήκει και στις δύο πολλαπλότητες και καθώς  $n \rightarrow \pm\infty$  τείνει στο σαγματικό σημείο  $x_0$ .



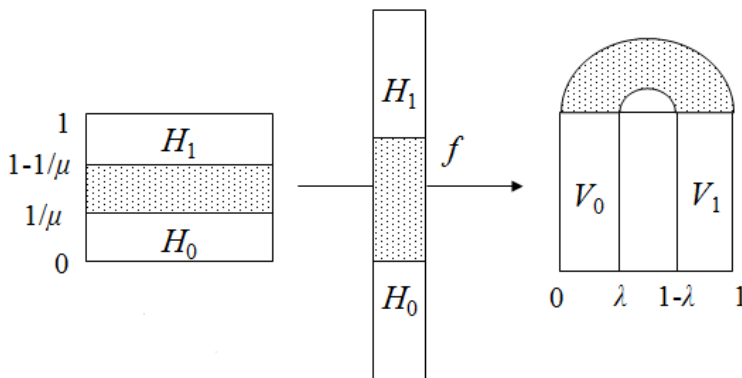
Σχήμα 10-9. α) Εγκάρσια τομή των πολλαπλοτήτων  $W^s$  και  $W^u$  β) η δημιουργία ομοκλινικού πλέγματος.

Οι πολλαπλότητες  $W^s$  και  $W^u$  είναι, όπως είπαμε σε προηγούμενη παράγραφο, αναλλοίωτες κάτω από την απεικόνιση. Έτσι, αν ένα σημείο ανήκει σε μία από τις πολλαπλότητες ή και στις δύο, τότε θα συνεχίσει να ανήκει σε μία από αυτές ή και στις δύο. Άρα η εικόνα, όπως και η προ-εικόνα ενός ομοκλινικού σημείου κάτω από την απεικόνιση θα συνεχίσουν να αποτελούν ομοκλινικά σημεία. Επομένως η ύπαρξη ενός εγκάρσιου ομοκλινικού σημείου συνεπάγεται μια απειρία τέτοιων σημείων. Για  $n \rightarrow \pm\infty$  το υποσύνολο των πολλαπλοτήτων μεταξύ δύο εγκάρσιων ομοκλινικών σημείων ονομάζεται **λοβός**.

Αν τώρα ξεκινήσουμε από το σημείο τομής  $x$ , όσο μεγαλώνει το  $n$ , τόσο ο λοβός διαστέλλεται κατά την μια διεύθυνση και συρρικνώνεται κατά την άλλη, τείνοντας να έρθει παράλληλα προς το αρχικό κομμάτι της ασταθούς πολλαπλότητας. Αντίθετα όσο μικρότερο γίνεται το  $n$ , τόσο ο λοβός συρρικνώνεται κατά την πρώτη διεύθυνση και διαστέλλεται κατά την δεύτερη, τείνοντας να γίνει παράλληλος προς το αρχικό κομμάτι της ευσταθούς πολλαπλότητας. Όπως παρατηρούμε στο Σχήμα 10-9(β), ένα τετράγωνο το οποίο διαφεύγει από την περιοχή του σημείου  $x_0$  κατά μήκος της ασταθούς πολλαπλότητας, έπειτα από πολλές επαναλήψεις της απεικόνισης, δηλαδή καθώς το  $n$  μεγαλώνει, θα τείνει να γίνει ένα πέταλο γύρω από έναν λοβό της  $W^u$ . Αντίθετα, όταν το  $n$  μικραίνει θα τείνει να γίνει ένα πέταλο γύρω από έναν λοβό της  $W^s$ . Τα δύο πέταλα θα τέμνονται εγκάρσια και σε κείνη την περιοχή θα έχουμε την λεγόμενη **απεικόνιση του πετάλου του Smale** και ένα χαοτικό αναλλοίωτο σύνολο, το οποίο θα μελετήσουμε στην επόμενη παράγραφο.

#### 10.4.2 Το πέταλο του Smale

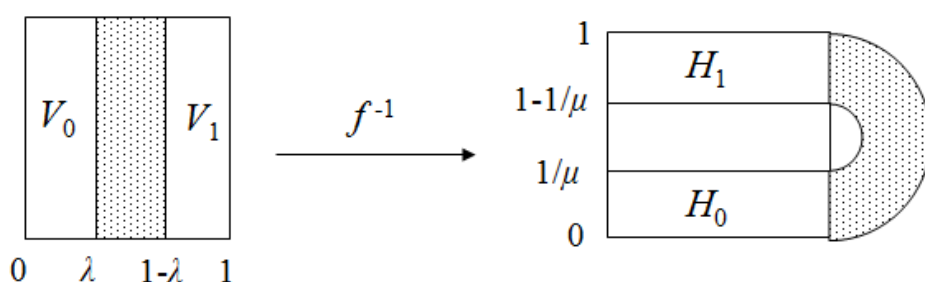
Όπως είπαμε σε ένα ομοκλινικό πλέγμα γύρω από ένα σάγμα μιας απεικόνισης δημιουργείται η λεγόμενη απεικόνιση του πετάλου του Smale, την οποία θα μελετήσουμε παρακάτω. Θεωρούμε το τετράγωνο  $D$  πλευράς 1 στον  $\mathbb{R}^2$ . Τότε η απεικόνιση αυτή,  $f$ , λειτουργεί, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 10-10. Η απεικόνιση του πετάλου του Smale.

Η απεικόνιση παίρνει, δηλαδή, τα οριζόντια ορθογώνια  $H_0$  και  $H_1$ , που έχουν αρχικά πλάτος  $1/\mu < 1$  και μήκος 1, και στο πρώτο βήμα επεκτείνει το πλάτος τους σε 1, ενώ συρρικνώνει το μήκος τους σε  $\lambda < 1$ . Έπειτα, στο δεύτερο βήμα, απεικονίζει το  $H_0$  στο κατακόρυφο ορθογώνιο  $V_0$  και το  $H_1$  στο κατακόρυφο ορθογώνιο  $V_1$ . Όπως φαίνεται και στο σχήμα, το ενδιάμεσο κομμάτι ανάμεσα στο  $H_0$  και στο  $H_1$  βγαίνει τελικά έξω από το  $D$ . Η απεικόνιση αυτή μέσα στο τετράγωνο  $D$  είναι κατά τμήματα γραμμική, μιας και αν ήταν γραμμική θα ήταν ολοκληρώσιμη.

Για να ορίζει η  $f$  συνάρτηση θα πρέπει  $\mu > 2$ , γιατί διαφορετικά τα  $H_0$  και  $H_1$  θα τέμονταν και τα σημεία αυτής της τομής θα είχαν δύο εικόνες, η μία μέσα στο  $V_0$  και η άλλη στο  $V_1$ . Επιπλέον θεωρούμε ότι η  $f$  είναι αντιστρέψιμη, και άρα θα πρέπει  $\lambda < 1/2$ , γιατί διαφορετικά τα  $V_0$  και  $V_1$  θα τέμονταν και τα σημεία αυτής της τομής θα είχαν δύο προ-εικόνες. Άρα η απεικόνιση του πετάλου του Smale κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις είναι συνεχής (το τετράγωνο παραμορφώνεται με συνεχή τρόπο) και αντιστρέψιμη. Η αντίστροφη απεικόνιση  $f^{-1}$  φαίνεται στο Σχήμα 10-11.



Σχήμα 10-11. Η αντίστροφη απεικόνιση του πετάλου του Smale.

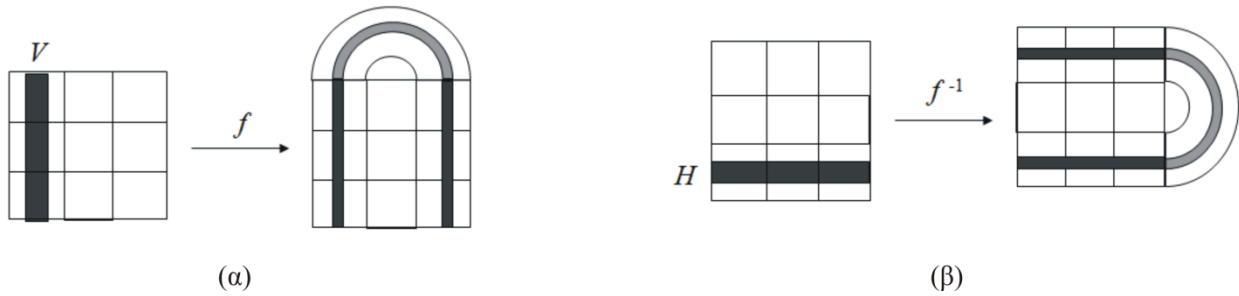
Αν πάρουμε το  $H_0$ , τότε η απεικόνιση  $f$  που το πηγαίνει στο  $V_0$ , δίνεται από τον τύπο

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (10.26)$$

Αν πάρουμε το  $H_1$ , τότε ο τύπος της  $f$  είναι

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}. \quad (10.27)$$

Τώρα θα κάνουμε μια παρατήρηση η οποία θα μας επιτρέψει να εφαρμόσουμε ξανά και ξανά την απεικόνιση και την αντίστροφη της. Έστω ένα κατακόρυφο ορθογώνιο  $V$  μέσα στο  $V_0$  (βλέπε Σχήμα 10-12(α)). Τότε η εικόνα του κάτω από την  $f$  στο τετράγωνο  $D$  αποτελείται από δύο κατακόρυφα ορθογώνια, το ένα μέσα στο  $V_0$  και το άλλο μέσα στο  $V_1$ . Το ίδιο συμβαίνει και για ένα κατακόρυφο ορθογώνιο μέσα στο  $V_1$ . Η εικόνα του κάτω από την  $f$  στο  $D$  θα είναι δύο κατακόρυφα ορθογώνια το ένα μέσα στο  $V_0$  και το άλλο μέσα στο  $V_1$ .



Σχήμα 10-12. α) Ένα κατακόρυφο ορθογώνιο στο  $V_0$  απεικονίζεται μέσω της  $f$  στο  $V_0$  και στο  $V_1$ . β) Ένα οριζόντιο ορθογώνιο στο  $H_0$  απεικονίζεται μέσω της  $f^{-1}$  στα  $H_0$  και  $H_1$ .

Αντίθετα, έστω ότι έχουμε ένα οριζόντιο ορθογώνιο  $H$  μέσα στο  $H_0$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 10-12(β). Τότε η προ-εικόνα του, δηλαδή η εικόνα του κάτω από την  $f^{-1}$  στο  $D$  είναι δύο οριζόντια ορθογώνια, το ένα μέσα στο  $H_0$  και το άλλο μέσα στο  $H_1$ . Το ίδιο θα ισχύει και για ένα οριζόντιο ορθογώνιο μέσα στο  $H_1$ . Η εικόνα του κάτω από την  $f^{-1}$  στο  $D$  θα βρίσκεται η μία μέσα στο  $H_0$  και η άλλη μέσα στο  $H_1$ .

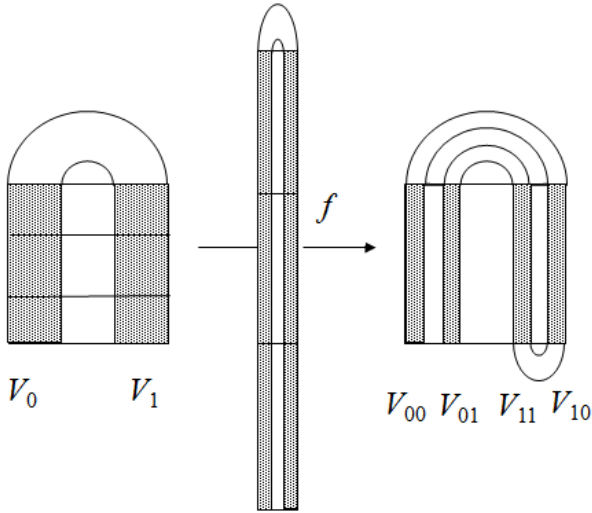
Ας αρχίσουμε λοιπόν να κατασκευάζουμε το χαοτικό αναλλοίωτο σύνολο της απεικόνισης  $f$  του πετάλου του Smale. Στο πρώτο βήμα παίρνουμε  $f(D) \cap D$ , το οποίο, όπως φαίνεται από την ανάλυση που κάναμε, είναι

$$f(D) \cap D = V_0 \cup V_1. \quad (10.28)$$

Αν πάρουμε το επόμενο βήμα, δηλαδή  $f^2(D) \cap f(D) \cap D$ , τότε λόγω αντιστρεψιμότητας της  $f$  αυτό είναι ίσο με

$$f(f(D) \cap D) \cap D = f(V_0 \cup V_1) \cap D = (f(V_0) \cup f(V_1)) \cap D. \quad (10.29)$$

Όμως σύμφωνα με την παρατήρηση που κάναμε, η εικόνα ενός κατακόρυφου ορθογωνίου, όπως είναι το  $V_0$ , είναι ένα ορθογώνιο μέσα στο  $V_0$  και ένα ορθογώνιο μέσα στο  $V_1$ . Άρα μέσα στο  $D$  το  $f(V_0)$  έχει δύο εικόνες  $V_{00}$  και  $V_{10}$ . Το  $f(V_1)$  έχει, επίσης, δύο εικόνες  $V_{01}$  και  $V_{11}$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 10-13. Λόγω της απεικόνισης θα έχουν οριζόντιο πλάτος  $\lambda^2$  και θα βρίσκονται μέσα στα  $V_0$  και  $V_1$ . Θα έχουμε λοιπόν τέσσερις κατακόρυφες λωρίδες με δύο δείκτες, οι οποίοι παίρνουν τιμές 0 και 1. Οι λωρίδες αυτές, επομένως, είναι στο πλήθος όσοι και οι δυνατοί συνδυασμοί των δύο συμβόλων 0 και 1. Ο πρώτος δείκτης δηλώνει που βρίσκεται το κατακόρυφο ορθογώνιο στο νέο βήμα (είτε στο  $V_0$  είτε στο  $V_1$ ), ενώ ο δεύτερος δείχνει από που προήλθε, δηλαδή που βρισκόταν στο προηγούμενο βήμα (είτε στο  $V_0$  είτε στο  $V_1$ ).



Σχήμα 10-13. Στο δεύτερο βήμα της απεικόνισης  $f$  προκύπτουν τέσσερις κατακόρυφες λωρίδες στο τετράγωνο  $D$ .

Συνεχίζοντας αυτή την κατασκευή του χαοτικού αναλλοίωτου συνόλου  $\Lambda$ , παίρνουμε το σύνολο

$$\Lambda_+ = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(D), \quad (10.30)$$

το οποίο στο τέλος θα αποτελείται από άπειρες κατακόρυφες ευθείες  $V_{s_{-1}s_{-2}\dots s_{-n}\dots}$ , όπου  $s_{-i} = 0$  ή  $1$ . Επομένως, κάθε μια από αυτές χαρακτηρίζεται από μια άπειρη ακολουθία  $\{s_{-1}, s_{-2}, \dots, s_{-n}, \dots\}$ , και υπάρχουν τόσες όσοι είναι και οι δυνατοί συνδυασμοί δύο συμβόλων. Στο  $n$ -οστο βήμα όλα τα κατακόρυφα ορθογώνια βρίσκονται μέσα στα ορθογώνια του  $(n-1)$ -οστου βήματος και έχουν πλάτος  $\lambda^n$ .

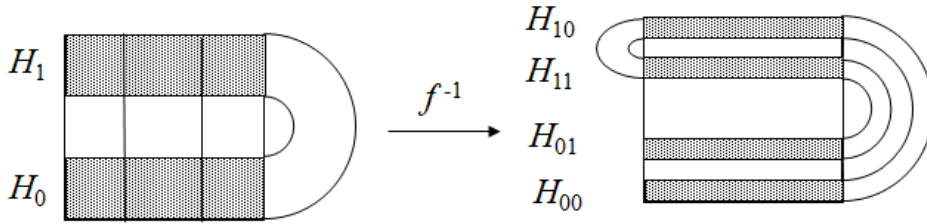
Τώρα παίρνουμε το  $\Lambda_-$  και θα κατασκευάσουμε το σύνολο που αποτελείται από τις τομές των προ-εικόνων του  $D$ . Έχουμε στο πρώτο βήμα  $f^{-1}(D) \cap D$ , που σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι

$$f^{-1}(D) \cap D = H_0 \cup H_1. \quad (10.31)$$

Αν πάμε στο επόμενο βήμα, δηλαδή πάρουμε το  $f^{-2}(D) \cap f^{-1}(D) \cap D$ , τότε, και πάλι λόγω αντιστρεψιμότητας της συνάρτησης  $f$  και άρα και της  $f^{-1}$ , αυτό ισούται με

$$f^{-1}(f^{-1}(D) \cap D) \cap D = f^{-1}(H_0 \cup H_1) \cap D = (f^{-1}(H_0) \cup f^{-1}(H_1)) \cap D. \quad (10.32)$$

Η προ-εικόνα του  $H_0$ , σύμφωνα με την παρατήρηση που κάναμε νωρίτερα, θα είναι ένα ορθογώνιο μέσα στο  $H_0$  και ένα ορθογώνιο μέσα στο  $H_1$ . Το πλάτος του καθενός είναι  $1/\mu^2$  και θα τα συμβολίζουμε με  $H_{00}$  και  $H_{10}$  αντίστοιχα, όπου ο πρώτος δείκτης εκφράζει σε ποιο ορθογώνιο βρίσκεται (δηλαδή το  $H_0$  ή το  $H_1$ ), ενώ ο δεύτερος από ποιο προήλθε (δηλαδή εδώ το  $H_0$ ). Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο χαρακτηρίζονται και οι προ-εικόνες  $H_{01}$  και  $H_{11}$  του  $H_1$ . Άρα έχουμε συνολικά  $2^2$  ορθογώνια, όπως παρατηρούμε στο Σχήμα 12, όσα δηλαδή και οι δυνατοί συνδυασμοί των δύο συμβόλων 0 και 1, με πλάτος  $1/\mu^2$ .



Σχήμα 10-14. Στο δεύτερο βήμα της απεικόνισης  $f$  προκύπτουν τέσσερις οριζόντιες λωρίδες στο τετράγωνο  $D$ .

Στο  $n$ -οστό βήμα θα έχουμε  $2^n$  οριζόντια ορθογώνια, δηλαδή όσα και οι δυνατοί συνδυασμοί των δύο συμβόλων 0 και 1 ανά  $n$ , τα οποία θα βρίσκονται μέσα στα ορθογώνια του  $(n-1)$ -οστού βήματος, και θα έχουν πλάτος  $1/\mu^n$ . Καθώς το  $n \rightarrow \infty$  το σύνολο

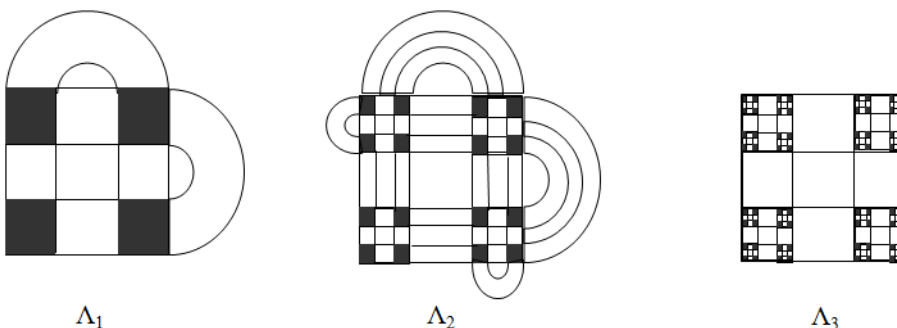
$$\Lambda_- = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(D) \quad (10.33)$$

θα αποτελείται από άπειρες οριζόντιες γραμμές, που θα τις συμβολίζουμε με  $H_{s_0 s_1 \dots s_n \dots}$ , όπου  $s_i = 0$  ή  $1$ , και οι οποίες επομένως χαρακτηρίζονται από τις άπειρες ακολουθίες δύο συμβόλων  $\{s_0, s_1, \dots, s_n, \dots\}$ .

Το αναλλοίωτο σύνολο, το οποίο έχουμε κατασκευάσει, είναι τελικά το  $\Lambda = \Lambda_+ \cap \Lambda_-$ , δηλαδή το

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(D), \quad (10.34)$$

το οποίο αποτελείται από σημεία τα οποία είναι τομές των κατακόρυφων γραμμών  $V_{s_{-1} s_{-2} \dots s_n \dots}$  και των οριζόντιων  $H_{s_0 s_1 \dots s_n \dots}$ . Στο Σχήμα 10-15 βλέπουμε τα πρώτα βήματα της κατασκευής του παραπάνω συνόλου, όπου  $\Lambda_n = f^{-n}(D) \cap f^{-n+1}(D) \cap \dots \cap f^{-1}(D) \cap f^n(D)$ . Για κάθε ζευγάρι ορθογώνιας και κατακόρυφης γραμμής αυτό το σημείο είναι μοναδικό, και μπορούμε να το χαρακτηρίσουμε με μια διπλά άπειρη ακολουθία  $\{\dots, s_{-n}, \dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, \dots, s_n, \dots\}$ . Έχουμε λοιπόν όλους τους δυνατούς συνδυασμούς διπλά άπειρων ακολουθιών, η κάθε μία από τις οποίες ανήκει στο σύνολο  $\Lambda$ . Το σημείο αυτό βρίσκεται μέσα στο  $H_{s_0}$  και η πρώτη εικόνα του μέσα στο  $H_{s_1}$  και ούτω καθεξής, αλλά και μέσα στο  $V_{s_{-1}}$  και η προεικόνα του μέσα στο  $V_{s_{-2}}$  και ούτω καθεξής. Αλλά  $V_{s_i} = f(H_{s_i})$ , οπότε η προ-εικόνα βρίσκεται μέσα στο  $H_{s_{-1}}$  και η δεύτερη προ-εικόνα μέσα στο  $H_{s_{-2}}$  κοκ.



Σχήμα 10-15. Τα πρώτα τρία βήματα της κατασκευής του αναλλοίωτου χαοτικού συνόλου  $\Lambda$ .

Το σύνολο  $\Lambda$  είναι αναλλοίωτο γιατί όλες οι εικόνες και οι προ-εικόνες ενός σημείου βρίσκονται μέσα σε αυτό,

$$f(\Lambda) = f\left(\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(D)\right) = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^{n+1}(D) = \bigcap_{n'=-\infty}^{\infty} f^{n'}(D) = \Lambda. \quad (10.35)$$

Παρόμοια αποδεικνύεται  $f^{-1}(\Lambda) = \Lambda$ .

Έστω τώρα ένα σημείο  $q \in \Lambda$ , το οποίο αντιστοιχεί στην διπλά άπειρη ακολουθία

$$s = \{\dots, s_{-n}, \dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, \dots, s_n, \dots\} = \{s_n\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Θεωρούμε την απεικόνιση μετατόπισης  $\sigma$ , που ορίζεται ως εξής,

$$s' = \sigma(s) \text{ με } s'_i = s_{i+1} \quad (10.36)$$

Το σημείο  $\sigma(s)$  αντιστοιχεί τότε στην εικόνα  $f(q) \in \Lambda$ . Πράγματι μια και η εικόνα του  $q$  ανήκει στο  $H_{s_1}$  (όντας στο δεύτερο βήμα, όπου έχουμε τα ορθογώνια  $H_{s_0, s_1}$ ), αν το απεικονίσουμε μια φορά τότε το  $f(q)$  θα βρίσκεται μέσα στο  $H_{s_2}$ . Επομένως, έχουμε μια απεικόνιση  $\varphi$  από το σύνολο  $\Lambda$  στο σύνολο των διπλά άπειρων ακολουθιών, η οποία είναι αντιστρέψιμη γιατί είναι 1-1, δηλαδή κάθε στοιχείο του  $\Lambda$  έχει ένα μοναδικό αντιπρόσωπο στις διπλά άπειρες ακολουθίες και κάθε διπλά άπειρη ακολουθία αντιπροσωπεύει ένα μοναδικό σημείο του  $\Lambda$ . Επιπλέον μέσω της απεικόνισης  $\sigma$  ισχύει ότι  $\varphi \circ \sigma = f \circ \varphi$ , δηλαδή η  $f$  και η  $\sigma$  είναι τοπολογικά συζυγείς. Έτσι, και η  $\sigma$  είναι χαοτική όπως και το σύνολο των (απλά) άπειρων ακολουθιών, που δείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Επομένως, και η  $f$  είναι χαοτική στο σύνολο  $\Lambda$ .

## 10.5 Βιβλιογραφία

- Arrowsmith, D.K. & Place, C.M., 1990. *An Introduction to Dynamical Systems*. New York: Cambridge University Press.
- Baker, G.L. & Gollub, J.P., 1990. *Chaotic Dynamics: an introduction*. New York: Cambridge University Press.
- Devany, R.L., 1989. *An introduction to chaotic dynamical systems*. 2nd ed. Redwood: Addison-Wesley.
- Diacu, F. & Holmes P., 1996. *Celestial encounters: The origin of chaos and stability*. Princeton University Press. (ελληνική μετάφραση: *Απροσδόκητες Ουράνιες Συναντήσεις*. Αθήνα: εκδόσεις Τραυλός).
- Enns, R.H. & McGuire, G.C., 2001. *Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers*. Boston: Birkhauser.
- Guckenheimer, J. & Holmes, P., 1997. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. 3rd ed. New York: Springer-Verlag.
- Jose, J.V. & Saletan, E.J., 1998. *Classical Dynamics: a contemporary approach*. Cambridge UK: Cambridge University Press.
- Kulenovic, M.R.S. & Merino, O., 2002. *Discrete Dynamical systems and Difference Equations with Mathematica*. Chapman and Halls/CRC.
- Lynch, S., 2007. *Dynamical systems with applications using Mathematica*. Boston: Birkhauser.
- Ott, E., 2002. *Chaos in Dynamical Systems*. 2nd ed. New York: Cambridge University Press.
- Rasband, S. N., 1990. *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*. New York: Wiley.
- Robinson, R.C., 2012. *An introduction to Dynamical Systems. Continuous and Discrete*, Pure and Applied Undergraduate texts. American Mathematical Society.
- Schuster, H.G., 1984. *Deterministic Chaos: an introduction*. Weinheim-Germany: Physik-Verlag.
- Strogatz, S.H., 1994. *Nonlinear Dynamics and Chaos, with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Reading, MA: Addison-Wesley.



Tel, T. & Gruiz, M., 2006. *Chaotic Dynamics: an introduction based on Classical Mechanics*. New York: Cambridge University Press.

Wiggins, S., 1990. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. New York: Dover.

Μπούντης, Α., 2004. *Ο θαυμαστός κόσμος των Fractals*. Αθήνα: LeaderBooks.

Σούρλας, Δ., 2012. *Δυναμικά συστήματα και εφαρμογές με τη χρήση του Maple*. Σημειώσεις. Διαθέσιμο στη: [http://www.physics.upatras.gr/UploadedFiles/course\\_182\\_1516.pdf](http://www.physics.upatras.gr/UploadedFiles/course_182_1516.pdf). Πανεπιστήμιο Πάτρας.

## 11 Αγγλοελληνικό Γλωσσάρι - Ευρετήριο

αλληλοεπικάλυψη συντονισμών	resonance overlap	221
αναλλοίωτες πολλαπλότητες	invariant manifolds	104, 251
αναστρέψιμο σύστημα	reversible system	106
απωλεστικό σύστημα	dissipative system	23, 82,
αριθμητική λύση	numerical solution	36
αριθμητική ολοκλήρωση	numerical integration	36
αυτόνομο σύστημα	autonomous system	9,58,88,196
αυτό-ομοιότητα	self-similarity	254
γραμμική ευστάθεια	linear stability	100
γραμμικό σύστημα	linear system	88
διακλάδωση	bifurcation	139
διακλάδωση αναδίπλωσης	fold bifurcation	141
διακλάδωση διχάλας	pitchfork bifurcation	144, 149
διακλάδωση μετακρίσιμη	transcritical bifurcation	147
διακλάδωση σάγματος-κόμβου	saddle-node bifurcation	146
διακριτός μετασχηματισμός Fourier	discrete Fourier transform	43, 129
διαταραγμένο σύστημα	perturbed system	213
διατηρητικό σύστημα	preservative system	23,49,182
διαχωριστική καμπύλη	separatrix	68
διπλασιασμός περιόδων	period doubling	231
δομική ευστάθεια	structural stability	139
δυναμικό Σύστημα	dynamical systems	9
εκθέτης Lyapunov	Lyapunov exponent	191, 236
ελκυστής	attractor	101, 201
εστία	focus	95
ευστάθεια	stability	18, 100
ημιπεριοδική τροχιά	quasi-periodic trajectory	166, 175, 211
κανονική μορφή	normal form	92, 95, 140, 246
κεντρική πολλαπλότητα	central manifold	200
κέντρο	center	95
κόμβος	node	92, 93
λεκάνη έλξης	basin of attraction	86, 201
λογιστική απεικόνιση	logistic map	229
μεταβλητές δράσης-γωνίας	action-angle variables	210
μορφοκλασματικό σύνολο	fractal	254
ολοκλήρωμα	integral	17, 51, 97, 210
ομοκλινική διακλάδωση	homoclinic bifurcation	155
ομοκλινική πολλαπλότητα	homoclinic manifold	104
ομοκλινικό πλέγμα	homoclinic tangle	216, 257
οριακός κύκλος	limit cycle	28, 121
παράξενος ελκυστής	strange attractor	188, 207
περιοδική τροχιά	periodic trajectory	25
σάγμα	saddle	93
σημείο ισορροπίας	equilibrium point	17,51,99,197,209
σταθερό σημείο	fixed point	227
στροβοσκοπική απεικόνιση	stroboscopic map	169
συμβολική δυναμική	symbolic dynamics	238
συνάρτηση παρεμβολής	interpolating function	40
συνήθεις διαφορικές εξισώσεις	ordinary differential equations	10
τοπολογική ισοδυναμία	topological conjucancy	103
τροχιά	trajectory	25

τυπική απεικόνιση	standard mapping	255
υπέρ-αρμονική ταλάντωση	ultra-harmonic oscillation	172
υπερβολικό σημείο	hyperbolic point	100, 249
υπο-αρμονική ταλάντωση	sub-harmonic oscillation	173
χαοτική τροχιά	chaotic trajectory	183, 188, 256
χώρος φάσεων	phase space	9, 51, 105, 209