Στατιστική για Ηλεκτρολόγους Μηχανικούς
ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ - 2

Δημήτρης Κουγιουμτζής

6 Μαΐου 2010

Εκτίμηση Διαστήματος εμπιστοσύνης

Μελετήσαμε την εκτιμήτρια $\hat{\theta}$ παραμέτρου θ:
Αν γνωρίζουμε την κατανομή της X και είναι $F_X(x;\theta)$, τότε βρίσκουμε τη $\hat{\theta}$ με

1. Μέθοδο ροπών
2. Μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας

Ανεξάρτητα από την κατανομή της X έχουμε τους εκτιμητές:

$$\begin{aligned} \theta := \mu \quad &\rightarrow \quad \hat{\theta} = \bar{x} \\ \theta := \sigma^2 \quad &\rightarrow \quad \hat{\theta} = s^2 \quad \text{ή} \quad \hat{\theta} = \tilde{s}^2 \end{aligned}$$

Η τιμή της εκτιμήτριας $\hat{\theta}$ εξαρτάται από το δείγμα $\{x_1, \ldots, x_n\}$.
$\hat{\theta}$ **είναι τ.μ.** με $\mathrm{E}(\hat{\theta}) \equiv \mu_{\hat{\theta}}$, $\mathrm{Var}(\hat{\theta}) \equiv \sigma^2_{\hat{\theta}}$

Κατανομή της $\hat{\theta}$? $\mathrm{E}(\hat{\theta})$? $\mathrm{Var}(\hat{\theta})$?

Με βάση την κατανομή της $\hat{\theta}$ θέλουμε να ορίσουμε ένα διάστημα $[\theta_1, \theta_2]$ που θα περιέχει με κάποια πιθανότητα την πραγματική τιμή της θ.

Διάστημα εμπιστοσύνης της μ

Εκτιμήτρια (σημειακή εκτίμηση) της μ: $\bar{x}$

$$
\begin{aligned}
\mu_{\bar{x}} &= \mathrm{E}(\hat{\mu}) = \mu \\
\sigma^2_{\bar{x}} &= \mathrm{Var}(\bar{x}) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(x_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 \\
&= \frac{1}{n^2}(n\cdot\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n} \\
\sigma_{\bar{x}} &= \sigma/\sqrt{n} \quad \text{σταθερό σφάλμα}
\end{aligned}
$$

Η κατανομή της $\bar{x}$ εξαρτάται από

1. τη διασπορά της X, σ^2 (γνωστή / άγνωστη)
2. την κατανομή της X (κανονική ή όχι)
3. μέγεθος του δείγματος n (μεγάλο / μικρό)

Διάστημα εμπιστοσύνης της μ - γνωστή διασπορά σ^2

Για την κατανομή της $\bar{x}$ έχουμε δύο περιπτώσεις

$$\boxed{1} X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \;\vee\; \boxed{2} n > 30 \;\Rightarrow\; \bar{x} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$$
$$X \nsim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \;\wedge\; n < 30 \;\Rightarrow\; \bar{x} \sim \;?$$

$\boxed{1}$ Αν η κατανομή της X είναι κανονική

$$\Downarrow$$
κατανομή της $X_1 + \ldots + X_n$ είναι κανονική
$$\Downarrow$$
η κατανομή της $\bar{x}$ είναι κανονική

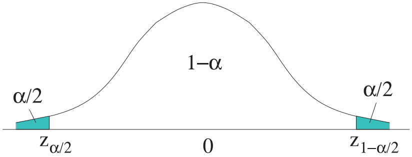
$\boxed{2}$ Αν το δείγμα είναι μεγάλο $n > 30$

$\Downarrow$ Κεντρικό Οριακό Θεώρημα
η κατανομή της $\bar{x}$ είναι κανονική

γνωστό σ^2 και $\bar{x}$ ακολουθεί κανονική κατανομή

$$\bar{x} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n) \quad \Rightarrow \quad z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

Για κάθε πιθανότητα α (και $1-\alpha$) υπάρχουν οι αντίστοιχες τιμές της z, $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$:



$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{P}(z < z_{\alpha/2}) = \Phi(z_{\alpha/2}) = \alpha/2 \\ \mathrm{P}(z > z_{1-\alpha/2}) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha/2}) = 1 - (1-\alpha/2) = \alpha/2 \end{array}\right\}$$

$$\mathrm{P}(z < z_{\alpha/2} \ \vee \ z > z_{1-\alpha/2}) = \alpha \quad \Rightarrow$$
$$\mathrm{P}(z_{\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2}) = \Phi(z_{1-\alpha/2}) - \Phi(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Από τον στατιστικό πίνακα τυπικής κανονικής κατανομής

Δίνεται πιθανότητα $1-\alpha \Rightarrow$ κρίσιμη τιμή $z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$

γνωστό σ^2, $\bar{x}$ ακολουθεί κανονική κατανομή (συνέχεια)

η z ανήκει στο διάστημα $[z_{\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}] = [-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}]$ με πιθανότητα $1-\alpha$.

Από το μετασχηματισμό $z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ έχουμε για τα άκρα του διαστήματος $[-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}]$

$$-z_{1-\alpha/2} = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad z_{1-\alpha/2} = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Λύνουμε ως προς μ

$$\mu = \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \mu = \bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Διάστημα εμπιστοσύνης της μ σε επίπεδο εμπιστοσύνης $1-\alpha$

$$\left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

γνωστό σ^2, $\bar{x}$ ακολουθεί κανονική κατανομή (συνέχεια)

Ερμηνεία διαστήματος εμπιστοσύνης

- 'με πιθανότητα (εμπιστοσύνη) $1-\alpha$ η μέση τιμή μ βρίσκεται μέσα σ' αυτό το διάστημα'
  ΟΧΙ
- 'αν χρησιμοποιούσαμε πολλά τέτοια διαστήματα από διαφορετικά δείγματα, ποσοστό $(1-\alpha)$% από αυτά θα περιείχαν τη μ'
  ΝΑΙ

  ή

  'με $1-\alpha$ πιθανότητα (εμπιστοσύνη) το διάστημα αυτό θα περιέχει την πραγματική μ'
  ΝΑΙ

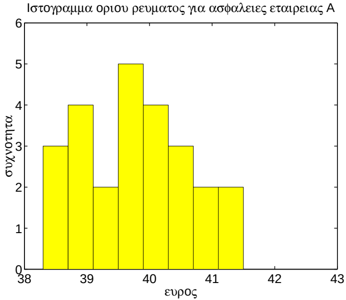
γνωστό σ^2, $\bar{x}$ ακολουθεί κανονική κατανομή (συνέχεια)

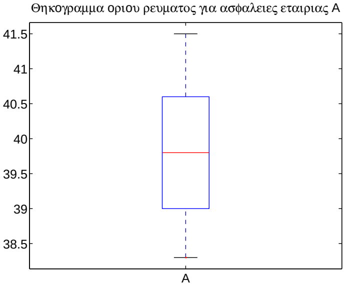
Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του μ

1. Επιλογή του $1-\alpha$, σ γνωστό, $\bar{x}$ από το δείγμα.
2. Εύρεση κρίσιμης τιμής $z_{1-\alpha/2}$ από τον πίνακα για τυπική κανονική κατανομή.
3. Αντικατάσταση στον τύπο $\left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

Παράδειγμα

Διάστημα εμπιστοσύνης σε επίπεδο 95% για για το μέσο όριο έντασης ηλεκτρικού ρεύματος για ασφάλειες των 40 αμπέρ που παράγει μια εταιρεία; Δίνεται $\sigma^2 = 1\,(\text{αμπέρ})^2$





συμμετρία, όχι μακριές ουρές, όχι ακραία σημεία

$$\Downarrow$$

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, 1) \qquad \mu = ?$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$X \sim \mathrm{N}(\mu, 1) \Rightarrow \bar{x} \sim \mathrm{N}(\mu, 1/25)$

$$\bar{x} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} x_i = \frac{995.1}{25} = 39.8$$

Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του μ

1. $1-\alpha = 0.95, \quad \sigma = 1, \quad \bar{x} = 39.8.$
2. Κρίσιμη τιμή: $z_{0.975} = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96.$
3. $\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad 39.8 \pm 1.96\frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad [39.41, \ 40.20]$

Συμπέρασμα:
Σε 95% επίπεδο εμπιστοσύνης περιμένουμε το μέσο όριο έντασης ηλεκτρικού ρεύματος για ασφάλειες των 40 αμπέρ με βάση το δείγμα από την εταιρία Α να κυμαίνεται μεταξύ 39.41 και 40.20.

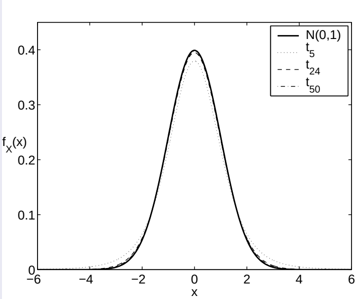
Διάστημα εμπιστοσύνης της μ, άγνωστη διασπορά σ^2

Περίπτωση 1: μεγάλο δείγμα ($n > 30$)

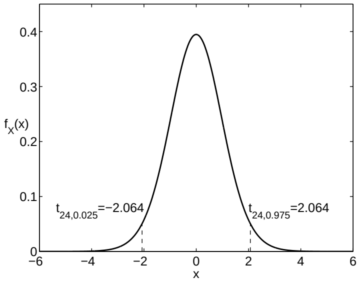
$s^2 \quad \rightarrow \quad \sigma^2$: $\quad \left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \;\; \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

Περίπτωση 2: μικρό δείγμα ($n < 30$) και $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Τότε ισχύει $t \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \mathrm{t}_{n-1}$
κατανομή student με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας



Άγνωστη διασπορά σ^2



Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του μ

1. Επιλογή του $1-\alpha$, σ άγνωστο, $\bar{x}$ και s από το δείγμα.
2. Εύρεση κρίσιμης τιμής $t_{n-1,1-\alpha/2}$ από τον πίνακα για κατανομή student.
3. Αντικατάσταση στον τύπο
$$\left[\bar{x} - t_{n-1,1-\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}},\ \ \bar{x} + t_{n-1,1-\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

Άγνωστη διασπορά σ^2

Περίπτωση 3: μικρό δείγμα ($n < 30$) και $X \not\sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Μη-παραμετρική μέθοδος

Παράδειγμα

Διάστημα εμπιστοσύνης σε επίπεδο 95% για το μέσο όριο έντασης ηλεκτρικού ρεύματος της ασφάλειας; [σ^2 άγνωστο]

Μικρό δείγμα ($n < 30$) και $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

$t \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \mathrm{t}_{n-1}$, βαθμοί ελευθερίας: $n-1 = 24$

$$s^2 = \frac{1}{24}\left(\sum_{i=1}^{25} x_i^2 - 25 \cdot (39.8)^2\right) = 0.854\,(\text{αμπέρ})^2$$

Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του μ

1. $1-\alpha = 0.95$, $\bar{x} = 39.8$, $s^2 = 0.854$.
2. Κρίσιμη τιμή: $t_{24,0.975} = 2.064$.
3. $\bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}} \;\rightarrow\; 39.80 \pm 2.064\frac{\sqrt{0.854}}{5} \;\rightarrow$ $[39.42,\ 40.18]$

Αν $z_{0.975} = 1.96$ αντί $t_{24,\,0.975} = 2.064$

$39.8 \pm 1.96\frac{\sqrt{0.854}}{5} \;\rightarrow\; [39.44, 40.16]$

Εκτίμηση διαστήματος εμπιστοσύνης της μ

διασπορά	*X-κατανομή*	n	$\bar{x}$-*κατανομή*	$\delta.\varepsilon.$
γνωστή	κανονική		$z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$	$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
γνωστή	μη κανονική	μεγάλο	$z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$	$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
γνωστή	μη κανονική	μικρό	—	—
άγνωστη		μεγάλο	$z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$	$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$
άγνωστη	κανονική	μικρό	$t \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \mathrm{t}_{n-1}$	$\bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$
άγνωστη	μη κανονική	μικρό	—	—

Γενικά για το δ.ε. της μ βρίσκεται από

$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ή $\bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$

Εύρος διαστήματος εμπιστοσύνης)

Το διάστημα εμπιστοσύνης εξαρτάται από:

- την κατανομή και τη σ^2 της τ.μ. X
- το μέγεθος n του δείγματος
- το επίπεδο εμπιστοσύνης $1-\alpha$

Για δεδομένο εύρος διαστήματος εμπιστοσύνης μπορούμε να βρούμε το μέγεθος n που αντιστοιχεί από τον αντίστοιχο τύπο.

Ενδεικτική περίπτωση: $n < 30$, $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ και σ^2 άγνωστο

εύρος του δ.ε. $w = 2t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$
Για εύρος w πρέπει το δείγμα να έχει μέγεθος

$$n = \left(2t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{w}\right)^2 \quad \text{ή} \quad n = \left(2z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{w}\right)^2$$

ανάλογα με το n που βρίσκουμε.

Παράδειγμα

Στο προηγούμενο αριθμητικό παράδειγμα (ασφάλειες», χρησιμοποιώντας t-κατανομή βρήκαμε 95% δ.ε.

$$39.8 \pm 2.064\frac{\sqrt{0.854}}{5} \quad \longrightarrow \quad [39.42, 40.18]$$

Εύρος δ.ε.: $\quad w = 2 \cdot 2.064\frac{\sqrt{0.854}}{5} = 0.76$ ή ισοδύναμα

ακρίβεια γύρω από τη $\bar{x}$: $\quad 2.064\frac{\sqrt{0.854}}{5} = 0.38$

Αν θέλουμε εύρος 0.5 (ή ακρίβεια 0.25), πόσο πρέπει να μεγαλώσει το δείγμα;

(κανονική κατανομή) $n = \left(2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sqrt{0.854}}{0.5}\right)^2 = 52.5 \simeq 53$

(κατανομή student)

$$t_{24,0.975} = 2.064 \quad \rightarrow \quad n = \left(2 \cdot 2.064 \cdot \frac{\sqrt{0.854}}{0.5}\right)^2 = 58.2 \simeq 59$$

$$t_{58,0.975} = 2.002 \quad \rightarrow \quad n = \left(2 \cdot 2.002 \cdot \frac{\sqrt{0.854}}{0.5}\right)^2 = 54.7 \simeq 55$$

$$t_{54,0.975} = 2.005 \quad \rightarrow \quad n = \left(2 \cdot 2.005 \cdot \frac{\sqrt{0.854}}{0.5}\right)^2 = 54.9 \simeq 55$$

Άσκηση

Έγιναν 15 μετρήσεις της συγκέντρωσης διαλυμένου οξυγόνου (Δ.Ο.) σε ένα ποτάμι (σε mg/l)

1.8	2.0	2.1	1.7	1.2	2.3	2.5	2.9	1.6	2.2	2.3	1.8	2.4	1.6	1.9

Από παλιότερες μετρήσεις γνωρίζουμε ότι η διασπορά του Δ.Ο. είναι $0.1\,(mg/l)^2$.

1. Εκτιμείστε τη διασπορά της συγκέντρωσης Δ.Ο. από το δείγμα καθώς και τα διαστήματα εμπιστοσύνης σε επίπεδο 99% και 90%. Εξετάστε και για τα δύο επίπεδα εμπιστοσύνης αν μπορούμε να δεχτούμε την εμπειρική τιμή της διασποράς γι αυτό το δείγμα.
2. Εκτιμείστε τη μέση συγκέντρωση Δ.Ο. από το δείγμα και δώστε γι αυτήν 95% διάστημα εμπιστοσύνης
υποθέτοντας πρώτα ότι η διασπορά είναι γνωστή και μετά χρησιμοποιώντας αυτήν του δείγματος.
3. Αν υποθέσουμε ότι για ένα εργοστάσιο δίπλα στο ποτάμι είναι σημαντικό η μέση συγκέντρωση Δ.Ο. να μην πέφτει κάτω από $1.8\,mg/l$, θα προκαλούσαν ανησυχία αυτές οι παρατηρήσεις (διασπορά από το δείγμα);

Άσκηση (συνέχεια)

4. Αν δε μας ικανοποιεί το εύρος του τελευταίου παραπάνω διαστήματος και θέλουμε να το μειώσουμε σε $0.2\, mg/l$ πόσες επιπρόσθετες ημερήσιες μετρήσεις πρέπει να γίνουν;

5. Ένας άλλος τρόπος να ελέγξουμε αν η συγκέντρωση του Δ.Ο. πέφτει σε μη επιθυμητά επίπεδα είναι να δούμε αν το ποσοστό των ημερών που η τιμή της συγκέντρωσης Δ.Ο. πέφτει στο επίπεδο $1.6\, mg/l$ και κάτω ξεπερνάει το 15%. Εκτιμείστε αυτό το ποσοστό από το δείγμα. Μπορείτε να δώσετε 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό; Πόσο πρέπει να είναι το μέγεθος του δείγματος για να μπορεί να εκτιμηθεί 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό με πλάτος το πολύ 10%;