Στατιστική για Ηλεκτρολόγους Μηχανικούς
ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ - 1

Δημήτρης Κουγιουμτζής

29 Απριλίου 2010

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ - 1

τ.μ. X με κατανομή $F_X(x;\theta)$
Παράμετρος θ: άγνωστη
$\theta \quad \longrightarrow \quad \mu, \sigma^2, p$
Δείγμα $\{x_1, \ldots, x_n\}$: γνωστό

Εκτίμηση παραμέτρου

1. Σημειακή εκτίμηση: $\hat{\theta}$
2. Εκτίμηση διαστήματος: $[\theta_1, \theta_2]$

Άλλο δείγμα $\longrightarrow$ άλλα δεδομένα $\{x_1, \ldots, x_n\}$
$\Downarrow$
$\{x_1, \ldots, x_n\}$ συμβολίζουν:
1. Παρατηρήσεις
2. τ.μ. $\{X_1, \ldots, X_n\}$ με κατανομή $F_X(x;\theta)$

Σημειακή Εκτίμηση

$\hat{\theta}$: εκτιμήτρια της θ

$\hat{\theta}$ είναι συνάρτηση των τ.μ. $\{x_1, \ldots, x_n\}$

$$\Downarrow$$

$\hat{\theta}$ είναι τ.μ., $\quad \mathrm{E}(\hat{\theta}) \equiv \mu_{\hat{\theta}}, \; \mathrm{Var}(\hat{\theta}) \equiv \sigma^2_{\hat{\theta}}$

Εκτίμηση μέσης τιμής (δειγματική μέση τιμή)

$$\theta \;\to\; \mu \qquad\qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Εκτίμηση διασποράς (δειγματική διασπορά)

$$\theta \;\to\; \sigma^2 \qquad\qquad \tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$$

Κριτήρια καλών εκτιμητριών

1. Αμεροληψία

$\hat{\theta}$ αμερόληπτη: $\mathrm{E}(\hat{\theta}) = \theta$
αλλιώς η μεροληψία είναι $b(\hat{\theta}) = \mathrm{E}(\hat{\theta}) - \theta$

Παραδείγματα

- Η δειγματική μέση τιμή $\bar{x}$ είναι αμερόληπτη: $\mathrm{E}(\bar{x}) = \mu$

$$\mathrm{E}(\bar{x}) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu$$

- Η δειγματική διασπορά s^2 είναι αμερόληπτη: $\mathrm{E}(s^2) = \sigma^2$?
- Η δειγματική διασπορά $\tilde{s}^2$ είναι μεροληπτική:

$$b(\tilde{s}^2) = \mathrm{E}(\tilde{s}^2) - \sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}$$

Ασυμπτωτικά ($n \to \infty$) η $\tilde{s}^2$ είναι αμερόληπτη

Κριτήρια καλών εκτιμητριών (συνέχεια)

2. Συνέπεια

$\hat{\theta}$ συνεπής: $\mathrm{P}(|\theta - \hat{\theta}| \leq \epsilon) \to 1$ όταν $n \to \infty$

Παραδείγματα

- $\bar{x}$, s^2, $\tilde{s}^2$ είναι συνεπείς
- Η εκτιμήτρια της μ: $x_d = (x_{\min} + x_{\max})/2$ δεν είναι συνεπής

3. Αποτελεσματικότητα

Δύο εκτιμήτριες $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ της θ:
$\hat{\theta}_1$ είναι πιο αποτελεσματική από $\hat{\theta}_2$ όταν $\sigma^2_{\hat{\theta}_1} < \sigma^2_{\hat{\theta}_2}$

Παράδειγμα

- $\bar{x}$ είναι πιό αποτελεσματική από τη x_d γιατί $\sigma^2_{\bar{x}} < \sigma^2_{x_d}$.

Κριτήρια καλών εκτιμητριών (συνέχεια)

4. Επάρκεια

$\hat{\theta}$ είναι επαρκής όταν χρησιμοποιεί όλη την πληροφορία από το δείγμα που σχετίζεται με τη θ.

Παραδείγματα

• $\bar{x}$, s^2, $\tilde{s}^2$ είναι επαρκείς γιατί χρησιμοποιούν όλες τις παρατηρήσεις $\{x_1, \ldots, x_n\}$

• x_d δεν είναι επαρκής γιατί χρησιμοποιεί μόνο $x_{\min}$ και $x_{\max}$.

Παρατηρήσεις

- Μια καλή εκτιμήτρια πρέπει να πληρεί αυτές τις ιδιότητες.
- Βέλτιστη εκτιμήτρια: αμερόληπτη και με την ελάχιστη διασπορά

Υπολογισμός σημειακής εκτίμησης

Θέλουμε να εκτιμήσουμε τη θ παράμετρο κατανομής $F(x;\theta)$ μιας τ.μ. X από τα ανεξάρτητα δεδομένα $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Μέθοδος των Ροπών

1. Εκτιμούμε πρώτα τις ροπές της κατανομής:
   - ροπή πρώτου βαθμού: $\mu \quad \leftarrow \bar{x}$
   - ροπή δευτέρου βαθμού: $\sigma^2 \quad \leftarrow s^2$
2. Από τη σχέση της θ με τις ροπές υπολογίζουμε την εκτίμηση $\hat{\theta}$.

Παραδείγματα

• Κανονική κατανομή: παράμετροι μ και σ^2 είναι οι ίδιες ροπές (άμεση εκτίμηση).

• Ομοιόμορφη κατανομή στο $[a, b]$: παράμετροι a και b υπολογίζονται από $\mu = \frac{a+b}{2}$ και $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$ (έμμεση εκτίμηση).

Παράδειγμα: Όριο έντασης ηλεκτρικού ρεύματος ασφαλειών των 40 αμπέρ

Α/Α	x_i (αμπέρ)	x_i^2
1	40.9	1672.8
2	40.3	1624.1
3	39.8	1584.0
4	40.1	1608.0
5	39.0	1521.0
6	41.4	1714.0
7	39.8	1584.0
8	41.5	1722.2
9	40.0	1600.0
10	40.6	1648.4
11	38.3	1466.9
12	39.0	1521.0
13	40.9	1672.8
14	39.1	1528.8
15	40.3	1624.1
16	39.3	1544.5
17	39.6	1568.2
18	38.4	1474.6
19	38.4	1474.6
20	40.7	1656.5
21	39.7	1576.1
22	38.9	1513.2
23	38.9	1513.2
24	40.6	1648.4
25	39.6	1568.2
Σύνολο	995.1	39629

Υποθέτουμε κανονική κατανομή:
παράμετροι μ και σ^2
Εκτίμηση μέσης τιμής:

$$\bar{x} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} x_i = \frac{1}{25} 995.1 = 39.80$$

Για s^2, υπολογίζουμε πρώτα το άθροισμα τετραγώνων

$$\sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 39629$$

Εκτίμηση διασποράς:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{25-1}\left(\sum_{i=1}^{25} x_i^2 - 25\cdot\bar{x}^2\right) \\ &= \frac{1}{24}(39629 - 25\cdot 39.80^2) = 0.854 \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ομοιόμορφη κατανομή στο $[a, b]$:
παράμετροι a και b
Εκτίμηση των a και b:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{a+b}{2} \\ s^2 &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \bar{x} - \sqrt{3}s \\ \hat{b} &= \bar{x} + \sqrt{3}s \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\hat{a} = 38.20$$
$$\hat{b} = 41.40$$

Μέθοδος Μεγίστης Πιθανοφάνειας

Δίνονται ανεξάρτητα $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $x_i \sim F(x;\theta)$
$\rightarrow$ ποια είναι η πιο πιθανή τιμή για τη θ;
$f(x_i;\theta)$ ή $\mathrm{P}(X = x_i;\theta)$ για κάποια τιμή $X = x_i$
Συνάρτηση πιθανοφάνειας (πιθανότητα να παρατηρήσουμε $\{x_1, \ldots, x_n\}$ σ' ένα τυχαίο δείγμα)

$$L(x_1, \ldots, x_n;\theta) = f(x_1;\theta) \cdots f(x_n;\theta)$$

Άν $L(x_1, \ldots, x_n;\theta_1) > L(x_1, \ldots, x_n;\theta_2)$ τότε θ_1 πιο αληθοφανής από θ_2
Η 'πιό αληθοφανήσ' τιμή της θ: αυτή που μεγιστοποιεί τη $L(x_1, \ldots, x_n;\theta)$ ή $\log L(x_1, \ldots, x_n;\theta)$.
Εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας $\hat{\theta}$ δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{\partial \log L(x_1, \ldots, x_n;\theta)}{\partial \theta} = 0.$$

Μέθοδος Μεγίστης Πιθανοφάνειας (συνέχεια)

Θέλουμε να εκτιμήσουμε $\theta_1, \ldots, \theta_m$
Συνάρτηση πιθανόφανειας: $L(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_m)$
Εκτιμήτριες μεγίστης πιθανοφάνειας $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_m$ δίνονται από

$$\frac{\partial \log L(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_m)}{\partial \theta_j} = 0 \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Παρατηρήσεις

- Η μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας μπορεί να εφαρμοσθεί για οποιοδήποτε θ αν ξέρουμε την κατανομή $F_X(x;\theta)$.
- Η μέθοδος των ροπών δεν εφαρμόζεται αν η θ δε μπορεί να υπολογισθεί από τις ροπές.
- Η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας είναι αμερόληπτη (ασυμπτωτικά), συνεπής, αποτελεσματική κι επαρκής.

Εκτίμηση παραμέτρων κανονικής κατανομής

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ από κανονική κατανομή $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ και σ^2 γνωστή

$$f_X(x; \mu) \equiv f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$ εκτίμηση του μ;

συνάρτηση πιθανόφανειας

$$L(x_1, \ldots, x_n; \mu) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right]$$

$$\log L(x_1, \ldots, x_n; \mu) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας $\hat{\mu}$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

Εκτίμηση παραμέτρων κανονικής κατανομής (συνέχεια)

Και η διασπορά σ^2 άγνωστη

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$$

Η επίλυση δίνει για μ, $\hat{\mu} = \bar{x}$, και για σ^2

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \tilde{s}^2$$

Άσκηση

Μετρήθηκαν οι χρόνοι (σε έτη και δεκαδικό του έτους) διάρκειας μπαταριών αυτοκινήτου μιας εταιρείας.

1.2	3.0	6.3	10.1	5.2	2.4	7.1

Υποθέτουμε ότι η διάρκεια της μπαταρίας T ακολουθεί εκθετική κατανομή

$$f_T(t) = \frac{1}{\lambda} \exp^{-t/\lambda}$$

Να υπολογισθεί η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας της μέσης διάρκειας λ της μπαταρίας.