ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Ηλεκτρολογων Μηχανικων & Μηχανικων Υπολογιστων

ΑΣΚΗΣΕΙΣ [1]

1. **[Κ]** Σώμα κινείται σε επίπεδο έτσι ώστε η επιτρόχια επιτάχυνση να είναι $a_T = A$ και η κεντρομόλος $a_N = Bt^4$ όπου A, B θετικές σταθερές και t ο χρόνος. Τη στιγμή $t = 0$ το σώμα ηρεμεί. Να βρεθεί η ακτίνα καμπυλότητας R σε κάθε σημείο της τροχιάς και το μέτρο της ολικής επιτάχυνσης a ως συνάρτηση του διανυόμενου διαστήματος s.

2. **[Κ]** Ένα σώμα κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου V και η τροχιά του είναι έλλειψη με μικρό και μεγάλο ημιάξονα A και B αντίστοιχα. Σε ποια σημεία της τροχιάς είναι μέγιστη η κεντρομόλος επιτάχυνση του σώματος; Βρείτε τη μέγιστη αυτή επιτάχυνση ως συνάρτηση των V, A, B.

3. **[Κ]** Μία βάρκα κινείται με σταθερή ταχύτητα v_0 όταν σβήνει τη μηχανή και συνεχίζει να κινείται με επιβράδυνση $-kv^2$, όπου k σταθερή και v η ταχύτητα μετά από χρόνο t από τη στιγμή που έσβησε τη μηχανή. Να βρεθεί η ταχύτητα v και η απόσταση s που διανύει η βάρκα ως συναρτήσεις του t.

4. **[Δ]** Υδρατμοί συμπυκνώνονται σε μία σταγόνα βροχής με ρυθμό μ μονάδες μάζας ανά μονάδα χρόνου. Η σταγόνα ξεκινάει από την ηρεμία με αρχική μάζα M_0 και πέφτει κατακόρυφα. Βρείτε το διάστημα που διανύει ως συνάρτηση του χρόνου. (g η επιτάχυνση της βαρύτητας).

5. **[Δ]** Δορυφόρος μάζας m_0 και διατομής A κινείται σε περιοχή χωρίς βαρύτητα με ταχύτητα v_0. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ συναντά ομογενές ακίνητο νέφος σκόνης με πυκνότητα ρ. Κατά την κίνηση του δορυφόρου μέσα στο νέφος τα σωματίδια που συναντά προσκολλώνται στη διατομή του και αυξάνουν τη μάζα του χωρίς να αλλάζουν τη διατομή. Βρείτε την ταχύτητα και την απόσταση που διανύει ο δορυφόρος ως συνάρτηση του $t > 0$.

6. **[Δ]** Σώμα μάζας m κινείται σε επίπεδο κάτω από την επίδραση δύναμης με σταθερό μέτρο F. Το διάνυσμα της δύναμης περιστρέφεται στο επίπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Τη στιγμή $t = 0$ το σώμα είναι ακίνητο. Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση του κινητού ως συνάρτηση του χρόνου. Βρείτε το μήκος της διαδρομής που διανύει μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της ταχύτητας.

7. **[Δ]** Μικρή σφαίρα μάζας m κρέμεται από την οροφή από το σημείο Ο με νήμα μήκους l και κινείται διαγράφοντας οριζόντιο κύκλο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Έστω $\vec{L}$ η στροφορμή της σφαίρας ως προς το Ο. Αποδείξτε ότι η συνιστώσα της $\vec{L}$ στον κατακόρυφο άξονα διατηρείται. Βρείτε τη μεταβολή της $\vec{L}$ για δύο αντιδιαμετρικές θέσεις της σφαίρας (τα l, ω, g είναι γνωστά).

8. **[Ε]** Το ένα άτομο διατομικού μορίου βρίσκεται ακίνητο στην αρχή των αξόνων και το άλλο μπορεί να κινείται στο θετικό ημιάξονα x. Η δυναμική ενέργεια του μορίου δίνεται από τη συνάρτηση

$$E_p(x) = E_0 \left[\mathrm{e}^{-\frac{2(x-x_0)}{b}} - 2\mathrm{e}^{-\frac{x-x_0}{b}} \right]$$

   όπου E_0, x_0, b σταθερές και x η απόσταση των δύο ατόμων.

   (α′) Αποδείξτε ότι υπάρχει θέση ευσταθούς ισορροπίας.

   (β′) Πόση ενέργεια χρειάζεται για να διασπαστεί ο μόριο;

   (γ′) Εάν το ένα άτομο μετατοπιστεί κατά μία ελάχιστη απόσταση από τη θέση ισορροπίας και αφεθεί, να περιγράψετε την κίνηση που προκύπτει.

9. **[Ε]** Σε ένα αντικείμενο ασκείται η δύναμη $\vec{F} = -Axy^2\hat{y}$, $(A = 3N/m^3)$. Θεωρήστε την μετατόπιση του αντικειμένου από την αρχή των αξόνων ως το σημείο $(x = 2m, y = 2m)$.

   (α′) Υπολογίστε το έργο που παράγεται από τη δύναμη $\vec{F}$ επί του αντικειμένου αν η μετατόπιση αυτή γίνεται κατά μήκος της ευθείας $y = x$ που συνδέει τα δύο αυτά σημεία.

   (β′) Υπολογίστε το έργο που παράγεται από τη δύναμη $\vec{F}$ επί του αντικειμένου αν η μετατόπιση αυτή πραγματοποιείται πάνω στην παραβολή $2y = x^2$.

   (γ′) Συγκρίνετε το έργο κατά μήκος των δύο αυτών δρόμων. Μπορείτε αν αποφανθείτε αν η δύναμη $\vec{F}$ είναι διατηρητική;

[1] **[Κ]** Κινητική **[Δ]** Δυναμική **[Ε]** Έργο-Ενέργεια **[Σ]** Σύστημα Σωμάτων

10. **[Δ]** Βάρκα μάζας m κινείται με ταχύτητα v_0 όταν σβήνει η μηχανή της. Η τριβή T του νερού στη βάρκα δίνεται από τη σχέση $T = Bv^{1/3}$ όπου B θετική σταθερά και v το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας της βάρκας. Να βρεθεί η απόσταση που διανύει η βάρκα μέχρι να σταματήσει.

11. **[Ε]** Μικρό σώμα μάζας m κάνει επιβραδυνόμενη κυκλική κίνηση ακτίνας R, έτσι ώστε η κεντρομόλος και η επιτρόχια συνιστώσα της επιτάχυνσής του να έχουν το ίδιο μέτρο κάθε χρονική στιγμή. Αρχικά για $t = 0$ το μέτρο της ταχύτητας είναι v_0. Βρείτε το μέτρο της ταχύτητας v ως συνάρτηση του μήκους τόξου s που διανύει το σώμα. Βρείτε το έργο της δύναμης που ασκείται στο σώμα όταν έχει διανύσει έναν πλήρη κύκλο.

12. **[Ε]** Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στο θετικό ημιάξονα και η δυναμική ενέργεια δίνεται ως συνάρτηση της θέσης του

$$E_p(x) = E_0 \left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{12} - 2\left(\frac{x_0}{x}\right)^{6} \right]$$

όπου E_0, x_0 θετικές σταθερές. Αποδείξτε ότι υπάρχει θέση ευσταθούς ισορροπίας. Το σωματίδιο αφήνεται ελεύθερο με μηδενική ταχύτητα στη θέση $x = \sqrt[6]{2}x_0$. Βρείτε την ταχύτητα του σωματιδίου όταν περνάει από τη θέση $x = x_0$.

13. **[Κ]** Ένα αερόστατο αρχίζει να υψώνεται από την επιφάνεια της γης, με κατακόρυφη ταχύτητα που είναι σταθερή και ίση με v_0. Εξαιτίας του ανέμου το αερόστατο αποκτά και οριζόντια ταχύτητα $v_x = cy$, η οποία είναι ανάλογη του ύψους y του αερόστατου και c μία θετική σταθερά.

    (α′) Βρείτε την εξίσωση της τροχιάς $y(x)$ που διαγράφει το αερόστατο.

    (β′) Βρείτε την ολική επιτάχυνση και προσδιορίστε την κεντρομόλο επιτάχυνση σε κάθε σημείο της τροχιάς ως συνάρτηση του ύψους y.

14. **[Ε]** Σωματίδιο μάζας m κάνει ευθύγραμμη κίνηση κάτω από την επίδραση δύναμης που δίνεται από τη σχέση $F(x) = -14x + 7x^2$ όπου x η θέση του.

    (α′) Αποδείξτε ότι υπάρχει θέση ευσταθούς ισορροπίας.

    (β′) Αν το σωματίδιο περνάει από τη θέση $x = -1$ με ταχύτητα v_0 βρείτε την ταχύτητα του ως συνάρτηση του x.

15. **[Δ]** Σώμα μάζας m βάλλεται κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Η αρχική ταχύτητα του σώματος είναι v_0 και το σώμα ανεβαίνει το κεκλιμένο επίπεδο μέχρι να σταματήσει. Το σώμα ολισθαίνει χωρίς τριβή στο επίπεδο αλλά με αντίσταση από τον αέρα, αντίθετη στην ταχύτητα και με μέτρο Bv, όπου v το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας και B σταθερός συντελεστής. Να υπολογιστεί το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το σώμα. (g η επιτάχυνση της βαρύτητας).

16. **[Ε]** Κινητό μάζας m κινείται στο επίπεδο $x - y$ σε κύκλο ακτίνας R με κέντρο την αρχή των αξόνων. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κινητό βρίσκεται πάνω στον άξονα OX και καθώς κινείται διαγράφει γωνία θ που ικανοποιεί τη σχέση $\theta + \theta^2 = Bt$, όπου B είναι μία θετική σταθερά. Βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα και την επιτρόχια επιτάχυνση ως συνάρτηση της θ. Υπολογίστε το έργο της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα μεταξύ των θέσεων $\theta = 0$ και $\theta = \pi/2$.

17. **[Ε]** Σωματίδιο μάζας m κάνει ευθύγραμμη κίνηση και η δυναμική του ενέργεια δίνεται από τη συνάρτηση

$$E_p(x) = 3x^2 - x^3$$

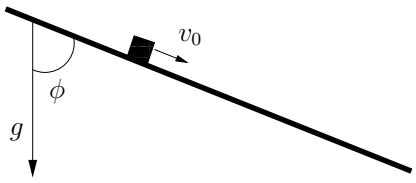
όπου x η θέση του σωματιδίου.

    (α′) Σχεδιάστε πρόχειρα τη γραφική παράσταση της $E_p(x)$ και εντοπίστε τις θέσεις ισορροπίας. Υπάρχει θέση ευσταθούς ισορροπίας;

    (β′) Το σωματίδιο αφήνεται με μηδενική αρχική ταχύτητα από τη θέση $x = -1$. Βρείτε την ταχύτητά του ως συνάρτηση του x.

18. **[Σ]** Σφαίρα μάζας m και ταχύτητας v περνάει μέσα από βαρίδι εκκρεμούς μάζας M και βγαίνει με ταχύτητα $v/3$. Το βαρίδι του εκκρεμούς βρίσκεται στην άκρη νήματος μήκους L. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της v έτσι ώστε το βαρίδι του εκκρεμούς να διαγράψει ένα ολόκληρο κατακόρυφο κύκλο;

19. [**Δ**] Σώμα μάζας m ολισθαίνει πάνω σε επίπεδο, το οποίο σχηματίζει γωνία $\phi \in [0, \pi/2]$ με το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας (βλέπε σχήμα). Κατά την κίνηση του σώματος εμφανίζεται τριβή μεταξύ του σώματος και του επιπέδου με συντελεστή τριβής f. Ακόμη, εμφανίζεται αντίσταση από τον αέρα, η οποία έχει μέτρο kv όπου v το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας του σώματος. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα έχει αρχική ταχύτητα v_0 με φορά που φαίνεται στο σχήμα. Να βρεθούν η ταχύτητα $v(t)$ του σώματος και η απόσταση $s(t)$ του διανύει το σώμα πάνω στο επίπεδο συναρτήσει του χρόνου $t \geq 0$. Για ποιες τιμές της γωνίας ϕ είναι δυνατόν το σώμα να αποκτήσει οριακή ταχύτητα και ποια είναι αυτή;



20. [**Κ**] Σώμα εκτελεί πλάγια βολή σε οριζόντιο επίπεδο με συνιστώσες αρχικής ταχύτητας v_{0x} και v_{0y}. Η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη του μέτρου της στιγμιαίας ταχύτητας v. Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος συναρτήσει του χρόνου καθώς και η κεντρομόλος δύναμη που ασκείται πάνω του.

21. [**Σ**] Σύστημα σωμάτων κινείται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από το κέντρο μάζας του το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_c$. Αποδείξτε ότι η κινητική ενέργεια του συστήματος E_k ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{dE_k}{dt} = \vec{v}_c \cdot \vec{F} + \vec{\omega} \cdot \vec{\tau}_c$$

όπου $\vec{F}$ είναι το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων και $\vec{\tau}_c$ το άθροισμα των ροπών τους ως προς το κέντρο μάζας.

22. [**Δ**] Τη χρονική στιγμή $t = 0$ μια δύναμη της οποίας το μέτρο μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου ως $F = at$ (όπου a σταθερά) εφαρμόζεται σε μικρό σώμα μάζας m που είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Η δύναμη εφαρμόζεται σε σταθερή διεύθυνση υπό γωνία ϕ ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Να βρείτε

(α′) Την ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που αποχωρίζεται από το επίπεδο.

(β′) Την απόσταση που έχει διανύσει το σώμα ως αυτή τη στιγμή.

23. [**Δ**] Να βρεθεί η απόσταση που θα διανύσει ένα αυτοκίνητο με αρχική ταχύτητα v_0 από τη στιγμή που θα φρενάρει (οι τροχοί ακινητοποιούνται), εάν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης f τροχών- εδάφους είναι συνάρτηση της ταχύτητας v του αυτοκινήτου και δίνεται από τη σχέση $f = av + b$. (Σημείωση: Οι σταθεροί συντελεστές a και b έχουν τέτοιες τιμές ώστε για $v \leq v_0$ να ισχύει $f \geq 0$.)

24. [**Σ**] Έξι ίδια σώματα συνολικής μάζας M βρίσκονται τοποθετημένα σε διάταξη κανονικού εξαγώνου πλευράς R. Το εξάγωνο περιστρέφεται στο επίπεδο που το ίδιο ορίζει, γύρω από το κέντρο του με γωνιακή ταχύτητα ω. Να δείξετε ότι η στροφορμή του ως προς το κέντρο μάζας μπορεί να γραφεί ως $L = I_c\omega$ και να υπολογιστεί το I_c συναρτήσει των γνωστών παραμέτρων. Σε άλλη περίπτωση, ο άξονας περιστροφής έχει μετατοπιστεί παράλληλα προς τον εαυτό του ώστε να συμπέσει με μία από τις μάζες. Αν το σύστημα περιστέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_1 δείξτε ότι και πάλι ισχύει η μορφή $L_1 = I_1\omega_1$, και μάλιστα ότι $I_1 = I_c + MR^2$.

25. [**Δ**] Ένα βαγόνι συνολικής αρχικής μάζας M_0 κινείται προς τα δεξιά με αρχική ταχύτητα v_0 υπό την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης με μέτρο F. Ένα υλικό φορτώνεται στο βαγόνι από σταθερό σιλό με σταθερή παροχή μ(kg/s). Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου κατά τη διάρκεια της φόρτωσης. Θεωρείστε όλες τις τριβές αμελητέες.

26. [**Δ**] Σώμα μάζας m βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο και σε απόσταση l από την ακμή του. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης $k = cx$ όπου x η απόσταση που διανύει το κινητό. Πόση πρέπει να είναι η γωνία κλίσης του επιπέδου ϕ, ώστε το σώμα αφημένο μόλις να αποχωρίζεται από το κεκλιμένο επίπεδο;

27. [**Δ**] Σώμα μάζας m βάλλεται με αρχική ταχύτητα v_0 σε περιοχή που υπάρχει ρευστό. Στο σώμα ασκείται μόνο η αντίσταση του ρευστού της οποίας το μέτρο εξαρτάται από το μέτρο της ταχύτητας v του σώματος σύμφωνα με τη σχέση $F = k\sqrt{v}$ όπου k θετική σταθερά.

(α′) Πόσο χρόνο θα διαρκέσει η κίνηση του σώματος;

(β′) Πόση είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει το σώμα έως ότου ακινητοποιηθεί;

28. **[Δ]** Ομογενής αλυσίδα μεγάλου μήκους και με γραμμική πυκνότητα μάζας μ κρατιέται ακίνητη πάνω σε οριζόντιο τραπέζι κουλουριασμένη γύρω από μία οπή του. Σε κάποια στιγμή το ένα της άκρο αφήνεται ελεύθερο να γλιστρήσει μέσα από την οπή κατακόρυφα προς τα κάτω. Η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη του τετραγώνου του μήκους x του κατακόρυφου κομματιού της αλυσίδας και της ταχύτητας του v. Να βρεθεί η σχέση που συνδέει το v και το x.

29. **[Σ]** Δύο μάζες m_1 και m_2 συνδέονται με νήμα αμελητέας μάζας μήκους d. Ανάμεσα στις μάζες παρεμβάλλεται συμπιεσμένο ελατήριο αμελητέας μάζας με σταθερά ελατηρίου k και φυσικό μήκος L, όπου $L > d$. Το σύστημα των σωμάτων τοποθετείται σε λεία επίπεδη οριζόντια επιφάνεια, έτσι ώστε η μάζα m_1 να βρίσκεται στη θέση $x = 0$ και η μάζα m_2 στη θέση $x = d$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, σπάει το νήμα και μετά από χρόνο T το ελατήριο αποσυμπιέζεται και επανέρχεται στο φυσικό του μήκος. Να βρεθεί η θέση $x_2(t)$ της μάζας m_2, για $t \geq T$.

30. **[Ε]** Ομογενής αλυσίδα πολύ μεγάλου μήκους και μάζας μ ανά μονάδα μήκους βρίσκεται κουλουριασμένη πάνω σε λείο τραπέζι. Στο ένα άκρο της αλυσίδας ασκούμε σταθερή δύναμη μέτρου F. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του άκρου της αλυσίδας ως συνάρτηση του μήκους x του κινούμενου τμήματος της αλυσίδας. Να βρεθούν η κινητική ενέργεια της αλυσίδας και το έργο της δύναμης $\vec{F}$ και να συγκριθούν μεταξύ τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ: http://users.auth.gr/∼rekanos/exercises.pdf

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. • $R = \dfrac{A^3}{2Bs}$ • $|a| = \sqrt{A^2 + 16\dfrac{B^2 s^4}{A^4}}$

2. • $(x, y) = (\pm B, 0)$ • $a_{N\,\max} = \dfrac{V^2 B}{A^2}$

3. • $v = \dfrac{1}{\dfrac{1}{v_0} + kt}$ • $s = \dfrac{1}{k}\ln(1 + v_0 kt)$

4. • $s = \dfrac{1}{2}g\left[\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{M_0}{\mu}t - \left(\dfrac{M_0}{\mu}\right)^2 \ln\left(1 + \dfrac{\mu}{M_0}t\right)\right]$

5. • $v = \dfrac{v_0}{\sqrt{1 + \dfrac{2A\rho v_0}{m_0}t}}$ • $s = \dfrac{m_0}{A\rho}\left(\sqrt{1 + \dfrac{2A\rho v_0}{m_0}t} - 1\right)$

6. • $\vec{v} = \dfrac{F}{m\omega}[\sin\omega t\,\hat{x} + (1 - \cos\omega t)\,\hat{y}]$ • $\vec{r} = \dfrac{F}{m\omega^2}[(1 - \cos\omega t)\,\hat{x} + (\omega t - \sin\omega t)\,\hat{y}]$ • $s = \dfrac{8F}{m\omega^2}$

7. • $L_y = ml^2\omega\left[1 - \dfrac{g^2}{\omega^4 l^2}\right]$ • $\Delta L = \dfrac{2mlg}{\omega}\sqrt{1 - \dfrac{g^2}{\omega^4 l^2}}$

8. • $x = x_0$ • $E = E_0$

9. • $W_1 = -12$ • $W_2 = -96/7$ • $W_1 \neq W_2$

10. • $s = \dfrac{3m}{5B}v_0^{5/3}$

11. • $|v| = v_0 \mathrm{e}^{-\frac{s}{R}}$ • $W = \frac{1}{2}mv_0^2(\mathrm{e}^{-4\pi} - 1)$

12. • $x = x_0$ • $v = \sqrt{\dfrac{E_0}{2m}}$

13. • $y = \sqrt{\dfrac{2v_0}{c}x}$ • $\vec{a} = cv_0\hat{x}$ • $\vec{a}_N = \dfrac{cv_0^3}{v_0^2 + c^2y^2}\left(\hat{x} - \dfrac{cy}{v_0}\hat{y}\right)$

14. • $x = 0$ • $v = \sqrt{v_0^2 + \frac{14}{3m}(x^3 - 3x^2 + 4)}$

15. • $s_{\max} = \dfrac{mv_0}{B} - \dfrac{m^2 g\sin\theta}{B^2}\ln\left(1 + \dfrac{Bv_0}{mg\sin\theta}\right)$

16. • $\omega = \dfrac{B}{1 + 2\theta}$ • $a_T = -\dfrac{2B^2R}{(1 + 2\theta)^3}$ • $W = \dfrac{1}{2}mR^2B^2\left(\dfrac{1}{(1 + \pi)^2} - 1\right)$

17. • $x = 0$ • $v = \sqrt{\dfrac{2}{m}(x^3 - 3x^2 + 4)}$

18. • $v_{\min} = \dfrac{3M}{2m}\sqrt{5gL}$

19. • $v = \dfrac{m}{k}A - \dfrac{m}{k}\left(A - \dfrac{k}{m}v_0\right)\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$ • $s = \dfrac{m}{k}At + \dfrac{m^2}{k^2}\left(A - \dfrac{k}{m}v_0\right)\left(\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} - 1\right)$

• $\phi \leq \arctan(1/f)$ • $v_{\lim} = \dfrac{mA}{k}$ $[A = g(\cos\phi - f\sin\phi)]$

20. • $v_x = v_{0x}\mathrm{e}^{-kt}$ • $v_y = \dfrac{g + kv_{0y}}{k}\mathrm{e}^{-kt} - \dfrac{g}{k}$ • $\vec{F}_N = \dfrac{mg}{v^2}(v_x v_y \hat{x} - v_x^2 \hat{y})$

21. ο.ε.δ.

22. • $v = \dfrac{mg^2 \cos\phi}{2a \sin^2\phi}$ • $s = \dfrac{m^2 g^3 \cos\phi}{6a^2 \sin^3\phi}$

23. • $s = \dfrac{v_0}{ag} + \dfrac{b}{a^2 g}\ln\left(\dfrac{b}{av_0 + b}\right)$

24. ο.ε.δ.

25. • $v = \dfrac{Ft + M_0 v_0}{M_0 + \mu t}$ • $a = \dfrac{F}{M_0 + \mu t} - \dfrac{\mu(Ft + M_0 v_0)}{(M_0 + \mu t)^2}$

26. • $\phi = \arctan(cl/2)$

27. • $t = \dfrac{2m\sqrt{v_0}}{k}$ • $s = \dfrac{2m}{3k} v_0^{3/2}$

28. • $-3\mu x v - 3\dfrac{g\mu^2}{a}\ln\left(\dfrac{-a\mu x v + g\mu^2}{g\mu^2}\right) = ax^3$

29. • $x_2(t) = \dfrac{m_2 d + m_1 L}{m_1 + m_2} + \dfrac{L - d}{m_2}\sqrt{k\dfrac{m_1 m_2}{m_1 m_2}}(t - T), \qquad t \geq T$

30. • $v = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$ • $E_k = \dfrac{1}{2}Fx$ • $W = 2E_k$