Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

# Αλγεβρικες Δομες II

Λυμένα προβλήματα, Σύνολο 1

**1.** Έστω $S$ μη κενό σύνολο και ορίζουμε στο δυναμοσύνολο $R = P(S)$ του $S$ τις πράξεις $+$ και $\cdot$ ως εξής:

$$A + B = \{x : \ x \in A \text{ ή } x \in B \text{ αλλά } x \notin (A \cap B)\} = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$A \cdot B = A \cap B$$

για κάθε $A, B \in R$.

(1) Να γράψετε τα 4 στοιχεία του $R$ όταν $S = \{a, b\}$ και να δώσετε τους πίνακες για τις πράξεις $+$ και $\cdot$ του $R$.

(2) Να αποδείξετε ότι $R$ είναι δακτύλιος. Έχει μοναδιαίο στοιχείο; Είναι αντιμεταθετικός;

(3) Να αποδείξετε ότι για κάθε στοιχεία $A \in R$ ισχύει ότι $A^2 = A$.

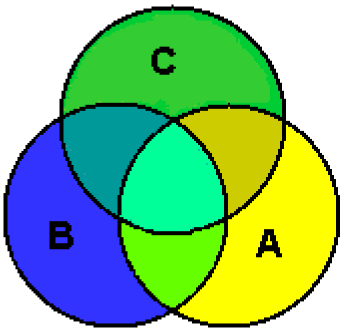
**Απάντηση:**

(1)

| $+$ | $S$ | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\emptyset$ |
|---|---|---|---|---|
| $S$ | $\emptyset$ | $\{b\}$ | $\{a\}$ | $S$ |
| $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\emptyset$ | $S$ | $\{a\}$, |
| $\{b\}$ | $\{a\}$ | $S$ | $\emptyset$ | $\{b\}$ |
| $\emptyset$ | $S$ | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\emptyset$ |

| $\cdot$ | $S$ | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\emptyset$ |
|---|---|---|---|---|
| $S$ | $S$ | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\emptyset$ |
| $\{a\}$ | $\{a\}$ | $\{a\}$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| | | | | $\emptyset$ |
| | | | | $\emptyset$ |

(2) Η πράξη της πρόσθεσης είναι χθετική), να το δείξετε με ένα διάγραμμα του




Το μηδενικό στοιχείο της πρόσθεσης είναι το σύνολο $\emptyset$, ενώ το αντίθετο του $A \subset S$ είναι το $A$.
Ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, αντιμεταθετικός: $A \cap B = B \cap A$. Τέλος ισχύει ότι $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, (χρησιμοποιήστε και πάλι το διάγραμμα Venn) Το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού είναι το $S$.

**2.** Να δείξετε ότι το σύνολο

$$F = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού πινάκων είναι σώμα. Στη συνέχεια να δείξετε ότι $F$ είναι ισόμορφο με το σώμα $\mathbb{C}$.

**Απάντηση:** Το $F$ είναι υποσύνολο του δακτυλίου των $2 \times 2$ πινάκων με συντελεστές από το $\mathbb{R}$. Άρα για να είναι $F$ δακτύλιος, αρκεί να δείξουμε όταν $M_1, M_2 \in F$ τότε 1) $M_1 - M_2 \in F$ και 2) $M_1 \cdot M_2 \in F$, (ρουτίνα—να γίνουν οι πράξεις). Παρατηρούμε επίσης ότι ο πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετικός. Έστω τώρα ότι $M = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \neq 0$. Έπεται ότι $a \neq 0$ ή $b \neq 0$. Επομένως $\det M \neq 0$ και ο $M$ είναι αντιστρέψιμος ως $2 \times 2$ πίνακας. Για να συμπεράνουμε όμως ότι ο $F$ είναι σώμα πρέπει να δείξουμε ότι ο αντίστροφος είναι στοιχείο του $F$(!), (ρουτίνα, να το δείξετε).

Έστω

$$\phi : F \longrightarrow \mathbb{C}, \ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mapsto a + ib \ .$$

Να ελεγθεί ότι $\phi$ ως συνάρτηση είναι αμφιμονότιμη και επί, και ότι είναι ομομορφισμός δακτυλίων.

**3.**

(1) Να δείξετε ότι $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ είναι υπόσωμα του $\mathbb{R}$.
(2) Έστω $\mathbb{Q}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n} : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ . Να δείξετε γενικότερα ότι αν $n$ είναι πρώτος, τότε είναι υπόσωμα του $\mathbb{R}$.
(3) Είναι το σύνολο $\mathbb{Q}[\sqrt{27}]$ υπόσωμα του $\mathbb{R}$;
(4) Είναι τα σώματα $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ και $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ ισόμορφα;

**Απάντηση:**

(1)

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) - (a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}],$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1a_2 + 3ab_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$$

Επίσης έστω $a + b\sqrt{3} \neq 0$. Τότε $a^2 - b^2 3 \neq 0$ (αφού $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$) και

$$(a + b\sqrt{3})^{-1} = \frac{a - b\sqrt{3}}{a^2 - 3b^2} \in \ \mathbb{Q}[\sqrt{3}].$$

Έπεται ότι $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ είναι υπόσωμα του $\mathbb{R}$.

(2) Ομοίως για το σύνολο $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ όταν $n$ είναι πρώτος.

(3) Παρατηρούμε ότι $\mathbb{Q}[\sqrt{27}] = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$. Πράγματι αν $r \in \mathbb{Q}[\sqrt{27}] \Rightarrow r = a + b\sqrt{27} \Rightarrow r = a + 3b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$. Αντίστροφα $s = c + d\sqrt{3} = c + \frac{d}{3}\sqrt{27} \Rightarrow s \in \mathbb{Q}[\sqrt{27}]$.

(4) Έστω $\phi : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ ισομορφισμός. Τότε $\phi(1) = 1$. Πράγματι, $\phi(a) = \phi(a \cdot 1) = \phi(a)\phi(1)$ και επομένως $\phi(1) = 1$. Έπεται έτσι ότι $\phi(a) = \phi(1 + \cdots 1) = 1 + \cdots + 1 = a$ για κάθε $a \in \mathbb{N}$ και επομένως $\phi(a) = a$ για κάθε $a \in \mathbb{Z}$. Επίσης $\phi(a^{-1}) = (\phi(a))^{-1}$. Άρα $\phi(a) = a$ για κάθε $a \in \mathbb{Q}$. Αφού $\phi$ είναι αμφιμονότιμη και επί, έπεται ότι $\phi(\sqrt{3}) =$

$a+b\sqrt{2}$ όπου $b \neq 0$. Επομένως $3=\sqrt{3}\sqrt{3} \mapsto a^2+b^2 2+ab\sqrt{2}$ και άρα $a^2+2b^2+ab\sqrt{2}=3$, δηλ. $ab\sqrt{2}=3-a^2-2b^2$. Αν $ab \neq 0$ τότε

$$\sqrt{2}=\frac{3-a^2-2b^2}{ab} \in \mathbb{Q} .$$

Όμως $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Έτσι αναγκαστικά $ab=0$ και αφού $b \neq 0$ καταλήγουμε ότι $a=0$. Τότε όμως $3=2b^2$, άτοπο.

**4.** Να βρείτε πίνακες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού για ένα σώμα με 8 στοιχεία (αν υπάρχουν).

**Απάντηση:**

Έστω $K$ το σώμα με 8 στοιχεία. Η χαρακτηριστική του θα είναι 2. Επίσης έστω ότι $a_1$ τυχαίο στοιχείο του σώματος $\neq 0,1$. Γράφουμε $a_2=1+a_1$. Προκύπτει ότι $1+a_2=1+(1+a_1)=a_1$, ενώ $a_1+a_2=a_1+(1+a_1)=1$. Έστω $a_3 \in K \setminus \{0,1,a_1,a_2\}$ και $a_4=1+a_3$. Τέλος θέτουμε $a_5$ να είναι το αποτέλεσμα του αθροίσματος $a_1+a_3$. Με βάση αυτά τα δεδομένα μπορούμε να συμπληρώσουμε τον πίνακα της πρόσθεσης.

| $+$ | $0$ | $1$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ |
| $1$ | $1$ | $0$ | | | | | | |
| $a_1$ | | | $0$ | | | | | |
| $a_2$ | | | | $0$ | | | | |
| $a_3$ | | | | | $0$ | | | |
| $a_4$ | | | | | | $0$ | | |
| $a_5$ | | | | | | | $0$ | |
| $a_6$ | | | | | | | | $0$ |

Για τον πίνακα του πολλαπλασιασμού γνωρίζουμε ότι τα στοιχεία τοϑ $K^*$ είναι ισόμορφα με τη $\mathbb{Z}_7$ και έχουν τάξη όλα 7. Έτσι για να εξετάσουμε τι θα μπορούσε να είναι το $a_1^2$. Αν $a_1^2=a_2 \Rightarrow a_1^2=1+a_1 \Rightarrow a_1^3=a_1+(a+a_1)=1$, άτοπο. Εξετάζουμε αν $a_1^2=a_3$ και με αυτόν το τρόπο συμπληρώνουμε και τον πίνακα πολλαπλασιασμού.

| $\cdot$ | $0$ | $1$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | | | | | | | | |
| $1$ | | | | | | | | |
| $a_1$ | | | | | | | | |
| $a_2$ | | | | | | | | |
| $a_3$ | | | | | | | | |
| $a_4$ | | | | | | | | |
| $a_5$ | | | | | | | | |
| $a_6$ | | | | | | | | |