Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Αλγεβρικες Δομες ΙΙ

Διδάσκουσα: Χ. Χαραλάμπους

Ένατο σετ Ασκήσεων

1 Βασικά προβλήματα

1. Να βρείτε όλα τα πρώτα και μέγιστα ιδεώδη του δακτυλίου $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}$.

2. Το πρόβλημα αυτό αφορά τον δακτύλιο $\mathbb{Q}[x]$ και το πολυ'νυμο $f(x) = x^5 + 8x + 2$.

   (α΄) Να αποδείξετε ότι $f(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$ και κατά συνέπεια $I = \langle f(x) \rangle$ είναι πρώτο ιδεώδες.

   (β΄) Να δείξετε ότι $1 \in I + \langle x^3 \rangle = \langle x^5 + 8x + 2, x^3 \rangle$.

   (γ΄) Να γενικεύσετε τα παραπάνω για να αποδείξετε ότι αν $f(x) \notin I$ τότε $1 \in I + \langle f(x) \rangle$ και κατά συνέπεια I είναι μέγιστο.

   (δ΄) Να βρείτε τα αντίστροφα των παρακάτω στοιχείων του $\mathbb{Q}[x]/I$:
   $2 + I$, $x + I$, $x^3 + I$, $x^5 + 8x + I$, $x^2 + 1 + I$.

3. Να αποδείξετε ότι $x^2 + x + 2$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}_3[x]$ και κατά συνέπεια $I = \langle x^2 + x + 2 \rangle$ είναι πρώτο ιδεώδες στο $\mathbb{Z}_3[x]$. Να γράψετε τα εννέα στοιχεία του $\mathbb{Z}_3[x]/I$ και στη συνέχεια να συμπληρώσετε τους πίνακες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού με βάση τους αντιπροσώπους που επιλέξατε. Με τρεις διαφορετικούς τρόπους να δικαιολογήσετε ότι $\mathbb{Z}_3[x]/I$ είναι σώμα. Να αποδείξετε ότι το στοιχείο $x + I$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $y^2 + y + 2$ στο $\mathbb{Z}_3[x]/I$ όπου με τη σταθερά 2 εννοούμε το στοιχείο $2(1 + I)$, δηλ. δύο φορές τη μονάδα του $\mathbb{Z}_3[x]/I$. Να βρείτε έναν υποδακτύλιο του $\mathbb{Z}_3[x]/I$ ισόμορφο με τον $\mathbb{Z}_3$.

4. Να εξετάσετε αν τα ιδεώδη $I = \langle x^2 + 1, 5 \rangle$, $J = \langle x^2 + 1, 3 \rangle$ του $\mathbb{Z}[x]$ είναι γνήσια, πρώτα, κύρια, μέγιστα.

5. Έστω $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\langle 2 \rangle \times \mathbb{Z}/\langle 3 \rangle \times \mathbb{Z}/\langle 5 \rangle$, $a \mapsto ([a]_2, [a]_3, [a]_5)$. Να αποδείξετε ότι $\ker \phi = \langle 30 \rangle$. Να βρείτε $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ έτσι ωστε $a_1 \mapsto (0, 2, 3)$ και

$a_2 \mapsto (1,2,3)$. Να αποδείξετε ότι ϕ είναι επιμορφισμός. Να συμπεράνετε ότι

$$\mathbb{Z}/\langle 30 \rangle \;\cong\; \mathbb{Z}/\langle 2 \rangle \times \mathbb{Z}/\langle 3 \rangle \times \mathbb{Z}/\langle 5 \rangle \ .$$

6. Έστω $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x^3$ και έστω $I = \langle f(x) \rangle$, $J = \langle g(x) \rangle$, τα αντίστοιχα ιδεώδη στο $\mathbb{Q}[x]$. Έστω

$$\phi : \ \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]/I \times \mathbb{Q}[x]/J, \ \ h(x) \mapsto (h(x) + I, h(x) + J) \ .$$

Να αποδείξετε ότι $\ker \phi = \langle x^5 + 2x^3 \rangle$. Να βρείτε $h(x)$ έτσι ωστε $h(x) \mapsto (x+I, 2x+J)$. Να αποδείξετε ότι ϕ είναι επιμορφισμός. Να συμπεράνετε ότι

$$\mathbb{Q}[x]/\langle x^5 + 2x^3 \rangle \;\cong\; \mathbb{Q}[x]/I \times \mathbb{Q}[x]/J \ .$$