Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Αλγεβρικες Δομες II

Διδάσκουσα: Χ. Χαραλάμπους

Όγδοο σετ Ασκήσεων

1 Βασικά προβλήματα

1. Να αποδείξετε ότι αν I είναι προσθετική υποομάδα του δακτυλίου R και η πράξη $(a+I)(b+I) = ab+I$ είναι καλά ορισμένη για κάθε $a, b \in R$ τότε I είναι ιδεώδες του R.

2. Να αποδείξετε ότι $\langle x^{10}+x^9+4x^8, x^9+x^8, x^5+4x^3\rangle$ είναι κύριο στον $\mathbb{Q}[x]$.

3. Να εξετάσετε αν τα ιδεώδη $I = \langle 2, \sqrt{2}\rangle$, $J = \langle 3, \sqrt{2}\rangle$ του $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ είναι γνήσια, πρώτα, κύρια, μέγιστα.

4. Έστω $R = \mathbb{Z}[x]$ και $I = \langle x, 53\rangle$. Να δείξετε ότι $R/I \cong \mathbb{Z}_{53}$ και επομένως I είναι μέγιστο και πρώτο ιδεώδες του R.

5. Αν I ιδεώδες του R να δείξετε ότι $\sqrt{I} = \{a : \ a^n \in I, n \in \mathbb{N}\}$ είναι ιδεώδες του R και περιέχει το I. Να αποδείξετε ότι αν I είναι πρώτο ιδεώδες τότε $\sqrt{I} = I$. Να βρείτε $\sqrt{I_i}$, $i = 1, \ldots, 3$, για τα παρακάτω ιδεώδη του $\mathbb{Z}[x]$: $I_1 = \langle 8\rangle$, $I_2 = \langle 6\rangle$, $I_3 = \langle 4x^3, 9\rangle$.