Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Αλγεβρικες Δομες II

Έβδομο σετ Ασκήσεων

1 Βασικά προβλήματα

1. Να βρείτε ένα πολυώνυμο $f(x)$ έτσι ώστε $\langle x^5 - 1, x^{15} - 1\rangle = \langle f(x)\rangle$ στον δακτύλιο $\mathbb{C}[x]$ και στη συνέχεια στον δακτύλιο $\mathbb{Q}[x]$.

2. Έστω $\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_{11}[x]$, $\phi(a_n x^n + \cdots + a_0) = \overline{a_n} x^n + \cdots \overline{a_0}$ και $\psi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_{11}[x]$, $\phi(a_n x^n + \cdots + a_0) = \overline{a_0}$.

   (α΄) Έστω ότι $f(x) = x^n + \cdots + a_0$, (τα πολυώνυμα αυτά λέγονται κανονικά). Να αποδείξετε ότι αν $\phi(f(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}_{11}[x]$ τότε είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}[x]$ και στο $\mathbb{Q}[x]$. Να βρείτε κάποιο πολυώνυμο που να είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}[x]$ αλλά όχι στο $\mathbb{Z}_{11}[x]$.

   (β΄) Να υπολογίσετε τους πυρήνες $\ker\phi$, $\ker\psi$.

3. Να δείξετε ότι αν ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ανήκει σε ιδεώδες $\mathcal{I}$ του $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ τότε $I_3 \in \mathcal{I}$ και άρα $\mathcal{I} = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

4. Έστω $I = (36)$ ιδεώδες του $\mathbb{Z}$. Να βρεθούν όλα τα ιδεώδη J του $\mathbb{Z}$ έτσι ώστε $I \subset J$. Να βρεθούν όλα τα ιδεώδη K του $\mathbb{Z}$ έτσι ώστε $K \subset I$.

5. Στο δακτύλιο $R = \mathbb{Z}[x]$ να δείξετε ότι $(x^5 + 3x + 1, x)$ είναι μη γνήσιο.

6. Έστω $I = \langle x^2 + x\rangle$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_3[x]$. Να αποδείξετε ότι $\mathbb{Z}_3[x]/I$ έχει 9 στιποιχεία. Για κάθε ένα από αυτά, να δώσετε έναν αντιπρόσωπο. (Υπόδειξη: αν $f(x) + I \in \mathbb{Z}_3[x]/I$, να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο διαίρεσης του $f(x)$ με το $x^2 + x$.)

7. Έστω $\phi_a :\ R[x] \longrightarrow R[a]$ ο ομομορφισμός εκτίμησης δακτυλίων, όπου $f(x) \mapsto f(a)$. Να βρείτε το πυρήνα του ϕ σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις: α) $\phi_{2i} :\ \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[2i]$, β) $\phi_{2i} :\ \mathbb{C}[x] \longrightarrow \mathbb{C}[2i]$, γ) $\phi_0 :\ \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}[0]$.

3. Να βρεθούν όλα τα ιδεώδη του $\mathbb{Z}_{35}$.

2 Προβλήματα Θεωρίας

1. Έστω F σώμα. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των κανονικών αναγώγων πολυωνύμων στο $F[x]$ είναι άπειρος.

2. Έστω ότι F είναι άπειρο σώμα και ότι $f(x_1, x_2) \in F[x_1, x_2]$. Αν $f(a_1, a_2) = 0$ για κάθε $a_1, a_2 \in F$ να δείξετε ότι $f(x_1, x_2)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

3. Έστω ότι $f(x, y) \in F[x, y]$ και έστω ότι $f(a, b) = 0$ όπου $a, b \in F$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $g_1(x, y)$ και $g_2(x, y)$ έτσι ώστε $f(x, y) = g_1(x, y)(x-a) + g_2(x, y)(y-b)$. (Υπόδειξη: Σκεφτείτε το $f(x, y)$ ως πολυώνυμο στο με συντελεστές από το $F[y]$ και εφαρμόσετε τον αλγόριθμο διαίρεσης του $f(x, y)$ με το $x-a$).