Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Αλγεβρικες Δομες II

Διδάσκουσα: Χ. Χαραλάμπους

Δέκατο σετ Ασκήσεων

1 Βασικά προβλήματα

1. Έστω $f(x,y) = x^4 + 5$. Να γράψετε το $f(x)$ ως γινόμενο αναγώγων παραγόντων στο $\mathbb{Z}[x,y]$, $\mathbb{Q}[x,y]$, $\mathbb{R}[x,y]$, $\mathbb{C}[x,y]$. Είναι το ιδεώδες $\langle f(x,y)\rangle$ μέγιστο στους αντίστοιχους δακτυλίους;

2. Να γράψετε το $x^4 - y^4$ ως γινόμενο αναγώγων στο $\mathbb{Q}[x,y]$, $\mathbb{C}[x,y]$.

3. Να αποφασίσετε αν $k[x,y]/\langle x^2+6x+5\rangle$ είναι σώμα ή ακεραία περιοχή όταν $k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Ομοίως για τον δακτύλιο $k[x,y]/\langle x^2, x+y, y-x\rangle$.

4. Έστω $R = \mathbb{C}[x,y]$ και έστω $I = \langle x-1, y-5\rangle$. Να αποδείξετε ότι I είναι μέγιστο.

5. Να αποδείξετε ότι αν $I \subset J$ ιδεώδη του R και J είναι μέγιστο στο R, τότε το σύνολο $\{r + I : \ r \in J\}$ είναι μέγιστο ιδεώδες του R/I.

6. Να βρείτε όλα τα μέγιστα ιδεώδη του $\mathbb{Z}[x]/\langle 6, x^2 - 36\rangle$.

7. Να βρείτε δύο πρώτα ιδεώδη του $\mathbb{Z}[x]/\langle 6x^3\rangle$ που να μην είναι μέγιστα. Στη συνέχεια να βρείτε τρία διαφορετικά μέγιστα ιδεώδη του $\mathbb{Z}[x]/\langle 6x^3\rangle$.

8. Έστω ότι D είναι Π.Μ.Α. και p είναι ανάγωγο. Να αποδείξετε ότι αν p διαιρεί το ab τότε p διαιρεί το a ή p διαιρεί το b.

9. Να αποδείξετε ότι $1 + i$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}[i]$.

10. Έστω $D = \mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$. Έστω η συνάρτηση $N: D \to \mathbb{Z}$, $N(a + ib\sqrt{5}) = a^2 + 5b^2$. Να αποδείξετε ότι $N(rs) = N(r)N(s)$ για κάθε $r, s \in D$. Στη συνέχεια να βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία του D. Τέλος να ελέγξετε αν 2 είναι ανάγωγο στο D.