Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Αλγεβρικες Δομες II

Πρωτο σετ Ασκήσεων

1 Θεματα Πολλαπλης Επιλογης

1. Έστω K σωμα, $|K| = 16$. Κυκλώστε ότι ισχύει.

   (α′) Υπάρχει $a \in K^*$, $a \neq 1$ έτσι ώστε $a^2 = 1$.

   (β′) Αν $a \in K$ τότε $4a = 0$.

   (γ′) Αν $a \in K^*$ τότε $a^{15} = 1$.

   A) Μόνο 2, 3 **B)** 1 , 3 **C)** Μόνο 1 2 **D)** Μόνο 2 **E)** Μόνο 3

2. Ποιο από τα παρακατω είναι υπόσωμα του $\mathbb{C}$.

   (α′) $A_2 = \{a + bi : \ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Q}\}$

   (β′) $A_3 = \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\}$

   (γ′) $A_1 = \{a + 2bi : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$

   A) Μόνο 2, 3 **B)** Μόνο 1 , 3 **C)** Μόνο 1 , 2 **D)** Μόνο 2 **E)** Μόνο 3

3. Κυκλώστε ότι ισχύει:

   (α′) $\mathbb{R}[i] = \mathbb{C}$.

   (β′) $\mathbb{R}[\sqrt{3}] = \mathbb{R}$.

4. Έστω R δακτυλιος 2×2 πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{C}$ και έστω $A = (a_{ij})$ το σύνολο των πινάκων όπου $a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$. Κυκλώστε ότι ισχύει:

   (α′) A είναι υποδακτύλιος του; R.

   (β′) A είναι σώμα.

   A) Μόνο 2, 3 **B)** Μόνο 1 , 3 **C)** Μόνο 1 , 2 **D)** Μόνο 2 **E)** Μόνο 3

5. Έστω $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ συνήθη προσθεση, πολλαπλασιασμό. Κυκλώστε ότι ισχύει:

   (α′) R δεν είναι ακεραία περιοχή.

   (β′) R έχει ακριβώς 3 αντιστρέψιμα στοιχεία.

   (γ′) R έχει ακριβώς 4 διαιρέτες του μηδενός.

A) Μόνο 2, 3 **B)** Μόνο 1, 3 **C)** Μόνο 1, 2 **D)** Μόνο 2 **E)** τίποτα από τα παραπάνω

6. Έστ a αντιστρέψιμο στον R. Κυκλώστε ότι ισχύει:
   (α′) a^n αντιστρέψιμο για καθε $n \in \mathbb{N}$.
   (β′) Αν $ab = 0$ τότε $b = 0$.

7. Κυκλώστε ότι ισχύει:
   (α′) $\mathbb{Z}_4$ είναι σώμα.
   (β′) Αν δακτύλιος R έχει 3 στοιχεία τότε $R \cong \mathbb{Z}_3$.

2 Βασικα προβληματα

(α′) Να αποδείξετε ότι $2\mathbb{Z}$ και $3\mathbb{Z}$ δεν είναι ισομορφοι.

(β′) Έστω $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$. Να βρείτε τα αντιστρέψιμα και τους διαιρετες του μηδενός.

(γ′) Να αποδείξετε ότι $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ δεν είναι ισομορφοι.

(δ′) Να αποδείξετε ότι αν R αντιμεταθετικος και a, b τέτοια ώστε $a^n = 0$ και $b^m = 0$ για $n, m \in \mathbb{N}$ τότε υπάρχει k έτσι ώστε $(a + b)^? = 0$, (τα στοιχεία αυτά λέγονται μηδενοδύναμα).

(ε′) Έστ R δακτύλιος με στοιξεία τους ακεραίους του $\mathbb{Z}$ και συνήθη πρόσθεση. Να βρείτε όλοψς τους δυνατούς πολλαπλασιασμούς.

(ϛ′) Αν R δακτύλιος και $a^2 = a$ για κάθε $a \in R$, να δείξετε ότι R αντιμεταθετικός.

(ζ′) Έστω $R = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}$ με συνήθη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό

$$(\bar{a_1}, n_1), (\bar{a_2}, n_2) = (n_2\bar{a_1} + n_1\bar{a_2} + \bar{a_1}\bar{a_2}, n_1 n_2)\ .$$

Να βρείτε τα αντιστρέψιμα και τους διαιρετες του μηδενός.

3 Προβλήματα με μεγάλο βαθμό δυσκολίας

(α′) R ονομάζεται p-δακτύλιος αν p πρώτος και για κάθε $x \in R$ ισχύει ότι $x^p = x$ και $px = 0$. (Παρατηρήστε ότι η πρώτη συνθήκη δεν συνεπεπάγεται τη δεύτερη, για παράδειγμα $p = 3$ και $\mathbb{Z}_2$). Να δείξετε ότι ένας τέτοιος δακτύλιος είναι αντιμεταθετικός.

(β′) Έστω R δακτύλιος με στοιχεία τους ακεραίους του $\mathbb{Z}$ και συνήθη πολλαπλασιασμό. Να βρείτε μία διαφορετική πρόσθεση.