ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ ΙΙ

Διδάσκουσα: Χ. Χαραλάμπους

Θέματα προηγουμένων ετών

1 Θέματα Πολλαπλής Επιλογής

Στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, εάν απαντήσετε λανθασμένα ισχύει αρνητική βαθμολογία. Αν κυλώσετε μία πρόταση, τότε σημαίνει ότι την θεωρείτε σωστή. Αν δεν κυκλώσετε μία απάντηση, τότε σημαίνει ότι την θεωρείτε λάθος. Αν δεν γνωρίζετε την απάντηση τότε πρέπει να σημειώσετε ΔΓ. Στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_m$ όταν γράφουμε n εννοούμε $\overline{n}$.

1. Έστω K, σώμα, $|K| = 16$. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

   (α΄) Υπάρχει $a \in K^*$, $a \neq 1$ έτσι ώστε $a^2 = 1$.

   (β΄) Αν $a \in K$ τότε $4a = 0$.

   (γ΄) Αν $a \in K^*$ τότε $a^{15} = 1$.

   (δ΄) Αν ένα σώμα K έχει 16 στοιχεία, και $a \in K$ τότε $a^{16} = a$.

2. Έστω $R = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 \rangle$. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

   (α΄) Ο δακτύλιος R έχει 6 στοιχεία.

   (β΄) Ο δακτύλιος R έχει 9 στοιχεία.

   (γ΄) Ο δακτύλιος R είναι ακεραία περιοχή.

   (δ΄) Το στοιχείο $1 + \langle x^2 \rangle$ ως σύνολο έχει 6 στοιχεία.

   (ε΄) Το σύνολο $1 + \langle x^2 \rangle$ έχει άπειρα στοιχεία.

   (ϛ΄) Το στοιχείο $2 + \langle x^2 \rangle$ είναι αντιστρέψιμο και το αντίστοφό του είναι το $2 + \langle x^2 \rangle$.

(ζ΄) Το στοιχείο $x + \langle x^2 \rangle$ είναι αντιστρέψιμο και το αντίστοφό του είναι το $x + (x^2)$.

(η΄) Το στοιχείο $x + 1 + \langle x^2 \rangle$ είναι αντιστρέψιμο και το αντίστοφό του είναι το $x + 1 + \langle x^2 \rangle$.

(θ΄) Το στοιχείο $x + 1 + \langle x^2 \rangle$ είναι αντιστρέψιμο και το αντίστοφό του είναι το $x + 2 + (x^2)$.

(ι΄) Το στοιχείο $x + 1 + \langle x^2 \rangle$ είναι αντιστρέψιμο και το αντίστοφό του είναι το $2x + 1 + (x^2)$.

3. Κυκλώστε όποια από τα παρακάτω ιδεώδη είναι κύρια:

(α΄) $I_1 = \langle x^2 + 2x + 4, x \rangle$ στο $R_1 = \mathbb{Z}[x]$,

(β΄) $I_2 = \langle x^2 + 2x + 4, 5 \rangle$ στον $R_2 = \mathbb{R}[x]$

(γ΄) $I_3 = \langle x^2 + 2x, x^2 + 3x \rangle$ στον $R_3 = \mathbb{C}[x]$.

4. Αποφασίστε ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι υποσώματα του $\mathbb{C}$.

(α΄) $A_1 = \{a + 2bi : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$

(β΄) $A_2 = \{a + bi : \ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Q}\}$

(γ΄) $A_3 = \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\}$

5. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

(α΄) $\mathbb{R}[i] = \mathbb{C}$.

(β΄) $\mathbb{R}[\sqrt{3}] = \mathbb{R}$.

(γ΄) Αν $\phi : R[x] \longrightarrow R$, $\phi(f(x)) = f(0)$ τότε ϕ είναι επιμορφισμός.

(δ΄) Αν $\phi : R[x] \longrightarrow R$, $\phi(f(x)) = f(3)$ τότε $x^2 - 3 \in \ker \phi$.

6. Έστω R ο δακτύλιος των 2×2 πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{C}$ και έστω $A = (a_{ij})$ το σύνολο των πινάκων όπου $a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

(α΄) Το σύνολο A είναι ιδεώδες του R.

(β΄) Το σύνολο A είναι υποδακτύλιος του R.

(γ΄) Το σύνολο A είναι σώμα.

7. Έστω $I = \langle 3, x^3 + 4x + 10 \rangle$ στον $\mathbb{Z}[x]$. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

   (α') $6x^5 + 3 \in I$

   (β') $15x \in I$

   (γ') $x^3 + 4x + 13 \in I$

   (δ') $x^2 + 3 \in I$

8. Κυκλώστε όποια από τα παρακάτω είναι αληθή στον δακτύλιο $\mathbb{Z}[x]$:

   (α') $\langle 2, x^2 \rangle \subset \rangle 4, x)$

   (β') $\langle x \rangle \subset \langle 4, x^2 \rangle$

   (γ') $\langle 15 \rangle \subsetneqq \langle 45 \rangle$

   (δ') $\langle 45 \rangle \subset \langle 15 \rangle$

9. Έστω $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ανά συντεταγμένη. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

   (α') Ο δακτύλιος R είναι ακεραία περιοχή.

   (β') Ο δακτύλιος R έχει ακριβώς 3 στοιχεία που είναι αντιστρέψιμα.

   (γ') Ο δακτύλιος R έχει ακριβώς 4 στοιχεία που είναι διαιρέτες του μηδενός.

10. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

   (α') Έστω $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ ομομορφισμός προσθετικών ομάδων. Τότε ϕ είναι και ομομορφισμός δακτυλίων.

   (β') Έστω $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ ομομορφισμός δακτυλίων. Τότε $\phi(1)$ μπορεί να έχει μόνο δύο τιμές.

   (γ') Υπάρχει $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ ομομορφισμός δακτυλίων έτσι ώστε $\ker \phi = \mathbb{Z}$.

   (δ') Υπάρχει ισομορφισμός $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$.

   (ε') Αν $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ δεν είναι ο μηδενικός ομομορφισμός τότε ο ϕ είναι μονομορφισμός.

11. Έστω a είναι αντιστρέψιμο στον R. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

(α') Όλες οι θετικές δυνάμεις του a είναι αντιστρέψιμες.

(β') Αν $ab = 0$ τότε $b = 0$.

(γ') Αν $\phi : R \longrightarrow S$ ομομορφισμός δακτυλίων και $a \in \ker\phi$ τότε $\phi(r) = 0, \forall r \in R$.

(δ') Αν ένας δακτύλιος έχει διαιρέτες του μηδενός τότε δεν έχει αντιστρέψιμα στοιχεία.

12. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

(α') $\mathbb{Z}_4$ είναι σώμα.

(β') Κάθε δακτύλιος με 5 στοιχεία είναι σώμα.

(γ') Κάθε σώμα με 3 στοιχεία είναι ισόμορφο με το $\mathbb{Z}_3$.

13. Έστω $R = \mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2 + 2\rangle$. Πόσα γνήσια ιδεώδη έχει ο δακτύλιος R;

(α') Κανένα

(β') 1

(γ') 5

(δ') 25

(ε') Άπειρα

14. Σε ποιους από τους παρακάτω δακτυλίους ισχύει ότι κάθε ιδεώδες είναι κύριο; Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

(α') $\mathbb{Q}$

(β') $\mathbb{Z}_4[x]$

(γ') $\mathbb{Z}_5[x]$

15. Έστω $R = \mathbb{Z}_8[x]/\langle x^2\rangle$. Για ποια ιδεώδη J του $\mathbb{Z}_8[x]$ προκύπτει ότι $J/(x^2)$ είναι μέγιστο; Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

(α') $J = \langle x, 4\rangle$

(β') $J = \langle x, 2\rangle$

(γ') $J = \langle x, x+1\rangle$

16. Έστω $I = \langle x, 4, 6 \rangle$. Αποφασίστε ποιός από τους παρακάτω δακτυλίους είναι ισόμορφος με τον δακτύλιο $\mathbb{Z}[x]/I$. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

    (α') $\mathbb{Z}_2$.

    (β') $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$.

    (γ') $\mathbb{Z}$.

    (δ') $\mathbb{R}$.

17. Έστω $R = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, $I = \langle 3\sqrt{5} \rangle$, $J = \langle 2\sqrt{5} \rangle$. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

    (α') $I + J = \langle \sqrt{5} \rangle$

    (β') $I + J = \langle 5\sqrt{5} \rangle$

    (γ') $IJ = I \cap J$.

18. Αποφασίστε αν $\langle x - 3, y + 4 \rangle$ είναι μέγιστο ιδεώδες στους δακτυλίους στους αντίστοιχους δακτυλίους. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

    (α') $\mathbb{Z}[x, y]$

    (β') $\mathbb{Z}_{11}[x, y]$

    (γ') $\mathbb{Q}[x, y, z]\}$

19. Έστω $R = \mathbb{Z}_5[x]$. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

    (α') $\langle x^3, 2x^2 \rangle = (x^2\rangle$.

    (β') $\langle x^3, 2x^2 + 3x \rangle = (x\rangle$

    (γ') $\langle x^3, 2x^2 + 1 \rangle = \mathbb{Z}_5[x]$

20. Έστω $f(x) = x^{11} - 1$. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

    (α') Το πολυώνυμο $f(x)$ έχει ακριβώς 10 ρίζες στο $\mathbb{Z}_{11}$.

    (β') Το πολυώνυμο $f(x)$ έχει ακριβώς 3 ρίζες στο $\mathbb{R}$.

    (γ') Το πολυώνυμο $f(x)$ έχει ακριβώς 11 ρίζες στο $\mathbb{C}$.

21. Έστω $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

(α΄) Το ιδεώδες $\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z}$ είναι μέγιστο.

(β΄) Το ιδεώδες $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \langle 0 \rangle$ είναι μέγιστο.

(γ΄) Το ιδεώδες $\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ είναι μέγιστο.

22. Ποιοι από τους παρακάτω δακτυλίους είναι ισόμορφοι με τον $\mathbb{C}$; Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

(α΄) $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+8 \rangle$

(β΄) $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2+2 \rangle$

(γ΄) $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+x+2 \rangle$

23. Έστω $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς στον R:

(α΄) 2 είναι πρώτο στοιχείο του R.

(β΄) $\sqrt{2}$ είναι ανάγωγο στοιχείο του R.

(γ΄) $\langle \sqrt{2} \rangle$ είναι μέγιστο ιδεώδες του R.

24. Έστω $f(x) = 3x^6+27x^2+9$. Σε ποιους από τους παρακάτω δακτυλίους, το αντίστοιχο κύριο ιδεώδες με γεννήτορα το $f(x)$ είναι μέγιστο;

(α΄) $\mathbb{Q}[x]$

(β΄) $\mathbb{Z}[x]$

(γ΄) $\mathbb{C}[x]$

25. Έστω $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς στον R; Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

(α΄) Το στοιχείο $2+\sqrt{6}$ είναι πρώτο αφού $10 = (2+\sqrt{-6})(2-\sqrt{-6})$.

(β΄) Ο δακτύλιος R είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών.

(γ΄) $\mathbb{Z} \subset R$ και επομένως R περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης.

26. Έστω $R = \mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς; Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

(α΄) Το σώμα κλασμάτων του R είναι ισόμορφο με το ίδιο το R.

(β΄) Το σώμα κλασμάτων του R είναι ισόμορφο με το $\mathbb{C}$.

(γʹ) Το σώμα κλασμάτων του R είναι ισόμορφο με το $\mathbb{Q}[i]$.

(δʹ) Το σώμα κλασμάτων του R είναι ισόμορφο με το $\mathbb{Q}[1/x]/[x^{-2}+1]$.

27. Έστω $\omega = e^{2\pi i/7}$ και $\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[\omega]$, $f(x) \mapsto f(\omega)$. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς; Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

(αʹ) $\mathbb{Z}[\omega] \cong \mathbb{Z}[x]$,

(βʹ) $\ker\phi = \langle x^7 - 1\rangle$

(γʹ) $\ker\phi = \langle x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\rangle$

(δʹ) $\ker\phi$ είναι πρώτο ιδεώδες του $\mathbb{Z}[x]$.

28. Έστω $f(x) = 4x^{10000} + 6$. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθεις; Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

(αʹ) $f(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}[x]$

(βʹ) $f(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$

(γʹ) $f(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$

29. Έστω $R = \Bbbk[x, y]$, $I = \langle x + y\rangle$. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις; Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

(αʹ) I είναι πρώτο ιδεώδες.

(βʹ) $R/I \cong \Bbbk[x]$

(γʹ) I είναι μέγιστο ιδεώδες

30. Έστω $R = \mathbb{Z}_2[x]$, $I = \langle x^3+x^2+1\rangle$. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

(αʹ) R/I είναι σώμα.

(βʹ) R/I είναι ακεραία περιοχή αλλά όχι σώμα.

(γʹ) R/I έχει ακριβώς 6 στοιχεία.

31. Έστω $R = \mathbb{Z}_5[x]$, $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

(αʹ) $f(x)$ είναι ανάγωγο στον R.

(βʹ) Οι ανάγωγοι παράγοντες του $f(x)$ είναι $2x + 2$ και $3x + 3$.

(γ΄) Οι ανάγωγοι παράγοντες του $f(x)$ είναι $6(x+1)$ και $x+1$.

32. Έστω S ένας δακτύλιος που περιέχει τον $\mathbb{Z}$. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

    (α΄) S είναι ακεραία περιοχή.

    (β΄) Αν $p \in \mathbb{Z}$ είναι πρώτος στον $\mathbb{Z}$ τότε p πρώτος στον S.

    (γ΄) Αν p ανάγωγο στον $\mathbb{Z}$ και δεν είναι αντιστρέψιμος στον S τότε p ανάγωγο στον S.

33. Έστω $R = \mathbb{Z}_3[x]$, $I = \langle x^3 + 1 \rangle$. Αποφασίστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

    (α΄) Ο δακτύλιος R/I έχει 9 στοιχεία.

    (β΄) Ο δακτύλιος R/I είναι ακεραία περιοχή.

    (γ΄) $x + 1 + I$ είναι διαιρέτης του μηδενός στον R.

    (δ΄) Αν $a \in R/I$, $a \neq 0$ τότε $12a = 0$.

    (ε΄) $(2x + I)(x^2 + I) = 2 + I$.

34. Αποφασίστε ποιες από από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

    (α΄) $\mathbb{Z}[2i] = \mathbb{Z}[1 + 2i]$

    (β΄) 5 είναι πρώτο στο $\mathbb{Z}[2i]$

    (γ΄) 5 είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}[2i]$

    (δ΄) 5 είναι αντιστρέψιμο στο $\mathbb{Z}[2i]$

    (ε΄) Το σώμα κλασμάτων του $\mathbb{Z}[2i]$ είναι το $\mathbb{Q}[i]$.

35. Έστω R ο δακτύλιος των 2×2 πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{Z}_3$ και έστω I το σύνολο των πινάκων (a_{ij}) όπου $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$. Αποφασίστε ποιες από από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

    (α΄) Το σύνολο I είναι ιδεώδες του R.

    (β΄) Η πράξη $(A + I) + (B + I) = (A + B) + I$ είναι καλά ορισμένη.

(γ΄) Η πράξη $(A+I)\cdot(B+I)=(A\cdot B)+I$ είναι καλά ορισμένη.

(δ΄) $I \cong \mathbb{Z}_3$ ως δακτύλιοι.

(ε΄) ο R είναι ακεραία περιοχή.

36. Έστω $I=\langle x^2+x+2\rangle$, $J=\langle x+1\rangle$ στον $\mathbb{Z}_5[x]$. Αποφασίστε ποιες από από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

(α΄) Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_5[x]$ είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών.

(β΄) Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_5[x]$ είναι περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης.

(γ΄) $I+J=J$

(δ΄) $I\cap J=\langle 0\rangle$.

(ε΄) J είναι μέγιστο ιδεώδες.

37. Έστω K, σώμα, $|K|=32$. Αποφασίστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

(α΄) Η εξίσωση $x^{31}-1$ έχει ακριβώς 31 λύσεις στο K.

(β΄) Η χαρακτηριστική του K είναι 32.

(γ΄) Αν $\phi: K\to\mathbb{C}$ ομομορφισμός δακτυλίων, τότε $\phi(a)=1\ \forall a\neq 0$.

(δ΄) $\mathbb{Z}_2\subset K$

(ε΄) $\mathbb{Z}_{32}\cong K$.

38. Έστω $R=\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_3$ με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ανά συντεταγμένη. Αποφασίστε ποιες από από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

(α΄) Το μηδενικό ιδεώδες είναι πρώτο.

(β΄) Το μηδενικό ιδεώδες είναι μέγιστο.

(γ΄) Ο ομομορφισμός $\phi:\ \mathbb{Z}\to R$, $a\mapsto(\overline{a},\overline{a})$ είναι μονομορφισμός.

(δ΄) Ο ομομορφισμός $\phi:\ \mathbb{Z}\to R$, $a\mapsto(\overline{a},\overline{a})$ είναι επιμορφισμός.

(ε΄) Το στοιχείο $(\overline{2},\overline{2})$ είναι αντιστρέψιμο.

39. Έστω $R=\mathbb{Z}_8[x]$. Αποφασίστε ποιες από από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

(α') Το σύνολο όλων των πολυωνύμων με σταθερό όρο 0 είναι ιδεώδες του R.

(β') Το σύνολο όλων των πολυωνύμων με βαθμό 2 είναι ιδεώδες του R.

(γ') Το ιδεώδες $\langle 4 \rangle$ είναι πρώτο ιδεώδες του R.

(δ') Το ιδεώδες $\langle x+5, x+6 \rangle$ είναι μέγιστο ιδεώδες του R.

(ε') Το πολυώνυμο $3x^3+3$ είναι ανάγωγο στο R.

40. Έστω $\omega = e^{2\pi i/8}$ και $\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[\omega]$, $f(x) \mapsto f(\omega)$. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

(α') $\mathbb{Z}[\omega] \cong \mathbb{Z}[i]$,

(β') $\ker \phi = \langle x^4+1 \rangle$

(γ') $\ker \phi$ είναι μέγιστο ιδεώδες του $\mathbb{Z}[x]$.

(δ') $\langle \omega \rangle$ γνήσιο ιδεώδες του $\mathbb{Z}[\omega]$

(ε') $\mathbb{Z}[i]/\langle i \rangle \cong \mathbb{Z}$.

41. Έστω $R = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ανά συντεταγμένη. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

(α') Ο δακτύλιος R είναι ακεραία περιοχή.

(β') $\{(2k, 3t) : \ k, t \in \mathbb{N}\}$ είναι ιδεώδες του R.

42. Έστω $R = \Bbbk[x, y]$, $I = \langle x^2 + xy, y \rangle$, $J = I + \langle x \rangle$. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

(α') R είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών.

(β') R είναι περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης.

(γ') Το ιδεώδες I είναι πρώτο.

(δ') Το ιδεώδες J είναι μέγιστο.

43. Έστω $\omega = e^{2\pi i/11}$, $R_1 = \mathbb{Q}[\omega]$. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

- (1) Το πολυώνυμο $f(x) = x^{11} - 1$ έχει ακριβώς 11 ανάγωγους παράγοντες στο $\mathbb{C}[x]$.

- (1) Το πολυώνυμο $f(x) = x^{11} - 1$ έχει ακριβώς 5 ανάγωγους παράγοντες στον $\mathbb{R}[x]$.
- (1) Το πολυώνυμο $f(x) = x^{11} - 1$ έχει τουλάχιστον 8 ανάγωγους παράγοντες στον $R_1[x]$.

44. Έστω $\phi_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $\phi_1(m) = m/5$, ενώ $\phi_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $\phi_2(m/n) = 0$. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

   (α') Η συνάρτηση ϕ_1 είναι ομομορφισμός δακτυλιων.

   (β') Η συνάρτηση ϕ_2 είναι ομομορφισμός δακτυλιων.

   (γ') Υπάρχει ισομορφισμός ανάμεσα στους δακτυλίους $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$.

45. Έστω R ο δακτύλιος των 2×2 πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{Z}_2$. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

   (α') Ο δακτύλιος R είναι αντιμεταθετικός.

   (β') Το μοναδικό γνήσιο ιδεώδες του R είναι το μηδενικό.

2 Προβλήματα Θεωρίας

1.

   (α') Έστω F σώμα και I ένα μη μηδενικό ιδεώδες του $F[x]$. Έστω ότι $0 \neq f(x) \in I$ είναι ελαχίστου βαθμού ανάμεσα σε όλα τα μη μηδενικά στοιχεία του I. Να αποδείξετε ότι $I = \langle f(x) \rangle$.

   (β') Έστω $J = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] : f(3) = 0\}$. Να αποδείξετε ότι $J = \langle x-3 \rangle$ και ότι J είναι μέγιστο ιδεώδες του S.

   (γ') Να βρείτε ένα πρώτο ιδεώδες του $\mathbb{Q}[x]$ που να περιέχει το $x^4 - 81$.

2. Έστω $R = \mathbb{Q}[x] \times \mathbb{Q}$ με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ανά συντεταγμένη.

   (α') Να αποδείξετε ότι ο δακτύλιος R δεν είναι ακεραία περιοχή.

   (β') Έστω $J' = \langle x - 3 \rangle \times \{0\}$. Να αποδείξετε ότι J' είναι ιδεώδες του R.

   (γ') Να αποδείξετε ότι $\phi : R \to \mathbb{Q}$, $(g(x), c) \mapsto c$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων και να βρείτε $\ker \phi$.

(δ') Να βρείτε $\psi : R \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ έτσι ώστε $\ker \psi = J'$.

(ε') Να βρείτε ένα μέγιστο ιδεώδες του R που να περιέχει το J'.

(ϛ') Να εξετάσετε αν J' είναι πρώτο ιδεώδες του R.

3. Έστω $\omega = e^{2\pi i/8}$. Να τοποθετήσετε το στοιχείο ω στο μιγαδικό επίπεδο. Στη συνέχεια να δείξετε ότι ω είναι ρίζα του $g(x) = x^8 - 1 \in \mathbb{C}$. Τέλος να βρείτε τους ανάγωγους παράγοντες του $g(x)$ στους α) $\mathbb{C}[x]$, β) $\mathbb{R}[x]$ γ) $\mathbb{Q}[x]$.

4. Έστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος και J ιδεώδες του R. Να αποδείξετε ότι αν R/J είναι σώμα τότε J είναι μέγιστο.

5. Να αποδείξετε ότι οι δακτύλιοι $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 5\rangle$ και $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ είναι ισόμορφοι.

6. Να αποδείξετε ότι $\langle x + 5, y\rangle$ είναι μέγιστο ιδεώδες στο $\mathbb{C}[x, y]$.

7. Έστω το ιδεώδες $I = \langle x^2 + x + 1\rangle$ του $\mathbb{Z}_2[x]$. Να δείξετε ότι $R = \mathbb{Z}_2[x]/I$ έχει ακριβώς 4 στοιχεία. Να δείξετε ότι R είναι σώμα και έχει χαρακτηριστική 2. Να βρείτε το αντίστροφο του $x + 1 + I$ στον R. Να βρείτε το σώμα κλασμάτων του R.