Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Αλγεβρικές Δομές ΙΙ

Τελικη εξεταση, 15 Ιουνιου 2015, Θεματα

1. (2) Έστω $R = \mathbb{Z}_5[x]$, $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^3$. Τότε:

   (α΄) $R \subset \mathbb{Z}_{10}[x]$.

   (β΄) $R/\langle f(x)\rangle$ είναι ακεραία περιοχή.

   (γ΄) $R/\langle f(x), g(x)\rangle$ είναι ακεραία περιοχή.

   (δ΄) $R/\langle f(x)\rangle$ έχει 10 στοιχεία.

   Απαντήσεις:

   (α΄) Λάθος: $\mathbb{Z}_5$ δεν είναι υποσύνολο του $\mathbb{Z}_{10}$, (μήλα, τούβλα).

   (β΄) Λάθος: $f(x) = x(x+1)$ δεν είναι ανάγωγο.

   (γ΄) Σωστό: $\langle x^2 + x, x^3\rangle = \langle x\rangle$ (μ.κ.δ.) και επομένως $R/\langle f(x), g(x)\rangle = R/\langle x\rangle \cong \mathbb{Z}_5$.

   (δ΄) Λάθος: $R/\langle f(x)\rangle$ έχει 5^2 στοιχεία.

2. (4) Έστω D ακεραία περιοχή και K το σώμα κλασμάτων της D. Τότε

   (α΄) Αν D έχει άπειρα στοιχεία τότε η χαρακτηριστική του D είναι μηδέν.

   (β΄) Αν D έχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων τότε η χαρακτηριστική του D είναι πρώτος ακέραιος.

   (γ΄) Αν D έχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων τότε $D = K$.

   (δ΄) Η χαρακτηριστική του D ισούται τη χαρακτηριστική του K.

   (ε΄) Αν I πρώτο ιδεώδες του D τότε η χαρακτηριστική του D/I είναι ίση με τη χαρακτηριστική του D.

   (ϛ΄) Αν r ανάγωγο στο D τότε r ανάγωγο στο K.

   (ζ΄) Αν και το D δεν είναι αναγκαία Π.Μ.Α., ο δακτύλιος $K[x]$ είναι πάντα Π.Μ.Α.

   (η΄) Αν $D \subset D' \subset K$ τότε K είναι το σώμα κλασμάτων του D'.

   Απαντήσεις:

   (α΄) Λάθος: $\mathbb{Z}_5[x]$ έχει χαρακτηριστική 5.

   (β΄) Σωστό: αφού D έχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων, έπεται ότι D είναι σώμα και η χαρακτηριστική του είναι πρώτος ακέραιος.

   (γ΄) Σωστό: K είναι το μικρότερο σώμα που περιέχει το D και D είναι ήδη σώμα.

(δ΄) Σωστό: η χαρακτηριστική του D είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος n (αν υπάρχει) έτσι ώστε $n1_D = 0_D$. Η μονάδα του K ταυτίζεται με τη μονάδα του D.

(ε΄) Λάθος. Η χαρακτηριστική του $\mathbb{Z}$ είναι μηδέν, ενώ $\mathbb{Z}/\langle 5\rangle$ έχει χαρακτηριστική 5.

(ϛ΄) Λάθος: το σώμα δεν έχει ανάγωγα στοιχεία.

(ζ΄) Σωστό: Ο δακτύλιος $K[x]$ είναι Π.Μ.Α. αφού K σώμα.

(η΄) Σωστό: το σώμα κλασμάτων του D και του D' είναι το μικρότερο σώμα που τις περιέχει.

3. (4) Έστω $R = \mathbb{Q}[x]$, $f(x) = x^2(x+1)^3$ και $S = R/\langle f(x)\rangle$.

   (α΄) Να βρείτε όλους τους διαιρέτες του μηδενός του S.

   (β΄) Να βρείτε όλα τα αντιστρέψιμα στοιχεία του S.

   (γ΄) Να βρείτε όλα τα μέγιστα ιδεώδη του S.

   Απάντηση: $S = \{g(x) + I : \ g(x) \in R\}$, όπου $I = \langle f(x)\rangle$. Παρατηρούμε ότι $g(x) + I$ είναι διαιρέτης του μηδενός αν και μόνο αν υπάρχει μη μηδενικό $g'(x) + I$ έτσι ώστε $(g(x) + I)(g'(x) + I) = I$, δηλ. $g(x)g'(x) \in I$, δηλ. $g(x)g'(x) = f(x)h(x)$ για κάποιο $h(x) \in R$. Όμως R είναι Π.Μ.Α., επομένως οι ανάγωγοι παράγοντες του $f(x)$ διαιρούν το $g(x)$ ή το $g'(x)$. Αν όλοι οι παράγοντες διαιρούσαν το $g'(x)$, τότε $g'(x)+I = I$, άτοπο. Αντίστοιχα για το $g(x)$. Επομένως οι διαιρέτες του μηδενός στο S είναι $g(x) + I$ όπου $g(x)$ είναι πολλαπλάσιο του x ή του $x + 1$ ή και των δύο, αρκεί να μη διαιρείται από το $f(x)$.

   Ένα στοιχείο $g(x)+I$ είναι αντιστρέψιμο αν υπάρχει $g'(x)+I$ έτσι ώστε $(g(x)+I)(g'(x)+I) = 1+I$, δηλ. $g(x)g'(x) = 1+f(x)h(x)$, δηλ. $g(x)g'(x)-f(x)h(x) = 1$. Είναι λοιπόν ακριβώς τα στοιχεία $g(x) + I$ όπου $g(x)$ έχει μέγιστο κοινό διαιρέτη με το $f(x)$ τη μονάδα.

   Τα μέγιστο ιδεώδη του S είναι της μορφής J/I όπου J μέγιστο ιδεώδες του R και περιέχει το I. Τα ιδεώδη του R είναι κύρια. Έτσι J/I είναι μέγιστο αν και μόνο αν $J = \langle g(x)\rangle$ όπου $g(x)$ ανάγωγο και $g(x)$ διαιρεί το $f(x)$. Έτσι S έχει ακριβώς δύο μέγιστα ιδεώδη: $\langle x\rangle/I$, $\langle x + 1\rangle/I$.

4. (6) Έστω R, S αντιμεταθετικοί δακτύλιοι με μοναδιαία στοιχεία 1_R και 1_S αντίστοιχα και $R \times S$ ο δακτύλιος με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ανά συντεταγμένη.

   (α΄) Έστω I ιδεώδες του R και J ιδεώδες του S. Να αποδείξετε ότι $I \times J$ είναι ιδεώδες του $R \times S$.

   (β΄) Να δείξετε ότι ο δακτύλιος πηλίκο $R \times S/\ (I \times J)$ είναι ισόμορφος με τον δακτύλιο $R/I \times S/J$. Να αποδείξετε ότι αν M είναι μέγιστο ιδεώδες του R τότε $M \times S$ είναι μέγιστο ιδεώδες του $R \times S$.

   (Το τελευταίο υποερώτημα ήταν διατυπωμένο λανθασμένα και δε μέτρησε στη βαθμολογία. Το πρώτο υποερώτημα είναι πολύ εύκολο, για το δεύτερο, μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει τον ομομορφισμό $\phi : R \times S \longrightarrow R/I \times S/J$, $(r, s) \mapsto (r + I, s + J)$. Αν επιχειρήσει κανείς να ξεκινήσει από το $R \times S/\ (I \times J)$ με κάποια συνάρτηση, τότε θα πρέπει να αποδείξει η συνάρτηση αυτή είναι και καλά ορισμένη).

5. (4) Έστω $r = \sqrt[7]{2}$ και $b = re^{\frac{2\pi i}{7}}$. Να μελετήσετε τον ομομορφισμό εκτίμησης $\phi_b : F[x] \to F[b]$, $f(x) \mapsto f(b)$, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις και να βρείτε $\ker\phi_b$. Να ελέγξετε αν $F[b]$ είναι σώμα και να το συγκρίνετε με το $\mathbb{C}$, όταν $F = \mathbb{C}$, $F = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{Q}$, $F = \mathbb{Z}$.

   Απάντηση: Παρατηρούμε ότι $b^7 = 2$ και επομένως b είναι ρίζα του $x^7 - 2$. Για τις τρεις πρώτες περιπτώσεις γνωρίζουμε ότι $\ker\phi_b$ είναι κύριο ιδεώδες και ότι $\ker\phi_b = \langle g(x)\rangle$ όπου $g(x)$ είναι το πολυώνυμο με το μικρότερο βαθμό που έχει το b ως ρίζα. Επίσης αφού $b \in \mathbb{C}$ έπεται ότι $F[b] \subset \mathbb{C}$ και άρα το πολυώνυμο που παράγει το $\ker\phi_b$ είναι ανάγωγο και $F[b]$ είναι σώμα.

   (α') $b \in \mathbb{C}$, επομένως $\ker\phi_b = \langle x - b\rangle$ και $\mathbb{C}[b] = \mathbb{C}$.

   (β') $(x - b)(x - \bar{b}) = x^2 - 2Re(b)x + b\bar{b} \in \mathbb{R}[x]$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$ και επομένως $\ker\phi_b = \langle\ x^2 - 2Re(b)x + \sqrt[7]{4}\ \rangle$. Επίσης $\mathbb{R}[b] = \mathbb{C}$.

   (γ') $x^7 - 2$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$ (κριτήριο Eisenstein) και επομένως $\ker\phi_b = \langle x^7 - 2\rangle$. Επίσης $\mathbb{Q}[b] \subsetneqq \mathbb{C}$.

   (δ') $x^7 - 2$ είναι ανάγωγο και στο $\mathbb{Z}[x]$ (κριτήριο Eisenstein. Αν $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ έχει το b ως ρίζα, τότε $f(x) = (x^7 - 2)q(x)$ όπου $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Κάνοντας κοινούς παρανομαστές, και βγάζοντας κοινούς παράγοντες αν χρειαστεί, προκύπτει ότι $f(x) = (x^7 - 2)q(x)$ όπου $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Επομένως $\ker\phi_b = \langle x^7 - 2\rangle$. Επίσης $\mathbb{Z}[b]$ δεν είναι σώμα αφού $\ker\phi_b$ δεν είναι μέγιστο ($\langle x^7 - 2\rangle \subsetneqq \langle x^7 - 2, 2\rangle$).