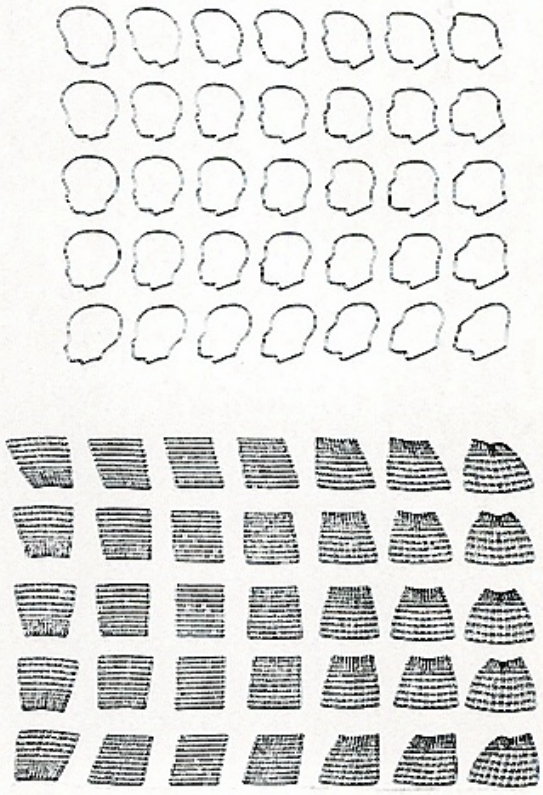
Ν. Καστάνη

Μια εισαγωγή στη ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Τεύχος Α'

Θεσσαλονίκη 1996

Ν. Καστάνη

Μια εισαγωγή στη
ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

***

Τεύχος Α΄

Θεσσαλονίκη 1996

Ν. Καστάνης
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών
Θεσσαλονίκη 54006

ΑΠΟ ΤΟΝ ΚΑΘΑΡΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΛΟΓΟ ΣΤΗΝ ΑΝΑΓΚΑΙΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ένας τελειόφοιτος φοιτητής, των Μαθηματικών, όπως κι ένας πτυχιούχος μαθηματικός, έχει συσσωρεύσει στη μνήμη του αρκετούς ορισμούς και θεωρήματα από διάφορους τομείς των Μαθηματικών. Εξασκήθηκε επίσης, σε κάποιες τεχνικές επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Αυτός κατά πάσα πιθανότητα, θα διδάξει ή διδάσκει Μαθηματικά είτε σε ιδιαίτερα μαθήματα, είτε σε φροντιστηριακά τμήματα είτε σε σχολικές τάξεις. Σ' αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιήσει τις μαθηματικές του γνώσεις και ικανότητες, για να εκπληρώσει τα καθήκοντα που ανέλαβε. Οι μαθητές του, δηλαδή, να αποκτήσουν κάποια στοιχεία της μαθηματικής σκέψης έτσι ώστε να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις του εκπαιδευτικού συστήματος και στις γενικότερες προσδοκίες των ίδιων και των γονέων τους.

Χωρίς αμφιβολία αυτή η τοποθέτηση είναι προφανής και κοινότοπη. Όταν όμως θελήσουμε να δούμε το συγκεκριμένο θέμα με μια πιο κριτική ματιά, τότε γρήγορα θα διαισθανθούμε ότι πίσω απ' αυτή την απλοϊκή περιγραφή υπάρχουν πλευρές σύνθετες και όχι τόσο αυτονόητες. Ας θίξουμε κάποιες απ' αυτές τις πλευρές, τις σημαντικότερες κατά την άποψη μας.

Αναφέρθηκε ότι ο μαθηματικός που θα αναλάβει να διδάξει Μαθηματικά έχει ως εφόδιο και θα χρησιμοποιήσει τις γνώσεις που συσσώρευσε στη διάρκεια των σπουδών του. Κι αυτό έχει μια λογική, γιατί στην αντίθετη περίπτωση, αν δηλαδή δεν προαπαιτείται μαθηματικός εξοπλισμός για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, θα μπορούσε να κάνει εξίσου καλά αυτή τη δουλειά κι ένας φιλόλογος ή ένας δικηγόρος. Το επιχείρημα όμως αυτό εκφράζει την απλοϊκή άποψη της καθημερινής εμπειρίας, από τον καταμερισμό των διδακτικών ρόλων στη σημερινή εκπαιδευτική πραγματικότητα. Είναι

δηλαδή μια επιφανειακή παρατήρηση και τίποτε περισσότερο, εφ' όσον δεν θίγει την ουσία του θέματος, που έχει να κάνει με το βαθμό συνάφειας ή με τη γνωστική συμβατότητα των πανεπιστημιακών και σχολικών Μαθηματικών. Ένα ζήτημα, που, όπως φαίνεται, δεν είναι πρόδηλο, αλλά μάλλον αδιευκρίνιστο και παραγνωρισμένο. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε αν σταθούμε σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα στα κλάσματα. Ας δούμε συνοπτικά την περίπτωση αυτή.

Τα κλάσματα διδάσκονται στη Μέση Εκπαίδευση στην Α΄ Γυμνασίου. Συγκεκριμένα εισάγονται στο 3ο κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου "Μαθηματικά Α! Γυμνασίου" [1] Τα βήματα που γίνονται για τη διαμόρφωση της έννοιας του κλάσματος σχηματικά είναι τα εξής:

- Θεωρείται ένα μέγεθος (κύκλος ή ευθύγραμμό τμήμα) ως ένα πράγμα, ως μια μονάδα.
- Γίνεται μια ισοδιαμέριση του σ' ένα αριθμό μερών (π.χ. 8).
- Δίνεται η ονομασία και ο συμβολισμός ενός τέτοιου μέρους (π.χ. "ένα όγδοο κύκλου", με σύμβολο $\frac{1}{8}$) και των πολλαπλασίων του (π.χ. "τρία όγδοα κύκλου", με σύμβολο $\frac{3}{8}$)
- Γίνεται η γενίκευση με μια νοητή ισοδιαμέριση ενός μεγέθους σε ν μέρη και αναφέρεται η αντίστοιχη ονομασία κι ο αντίστοιχος συμβολισμός των πολλαπλάσιων ενός τέτοιου μέρους (π.χ. "λάμδα νιοστά ενός μεγέθους", με σύμβολο $\frac{\lambda}{\nu}$).
- Ορίζεται το κλάσμα ως ένα από τα σύμβολα που χρησιμοποιήθηκαν για να συμβολίσουν τα διάφορα πολλαπλάσια ενός μέρους μιας ισοδιαμέρισης ενός μεγέθους.

Στην ουσία πρόκειται για μια διαδικασία μέτρησης μερών ενός μεγέθους, που θεωρείται ως μια μονάδα, με ισοδιαμέριση, δηλαδή με προσδιορισμό υπομονάδας, όπου το κλάσμα προκύπτει ως αποτέλεσμα αυτής της μέτρησης, για να αυτονομηθεί το αποτέλεσμα αυτό στη συνέχεια ως μια συμβολική αριθμητική παράσταση. Η αυτονόμηση αυτή είναι αναγκαία, όπως φαίνεται για τους συγγραφείς του βιβλίου, αν και "δύσπεπτη" για τους μαθητές και για αυτούς που διδάσκουν αυτό το θέμα. Και είναι αναγκαία για να γίνει δυνατή η μετάβαση στα αρνητικά κλάσματα, που παρουσιάζονται στο 8ο κεφάλαιο του ίδιου βιβλίου. Είναι αλήθεια ότι η μετρησιμότητα των μερών ενός μεγέθους ως προϋπόθεση για τον ορισμό του κλάσματος, δεν αναφέρεται ρητά, αλλά υπονοείται. Γίνεται όμως φανερή αν σκεφτούμε ότι ως κλάσμα δεν λαμβάνεται ένα τυχαίο κομμάτι του μεγέθους (π.χ. ένα κυκλικό τμήμα, ούτε ένας οποιοσδήποτε κυκλικός τομέας, στην περίπτωση που το μέγεθος είναι ένας κύκλος), αλλά μόνο ένα πολλαπλάσιο μιας υπομονάδας. Όπως σε κάθε μέτρηση έτσι και εδώ είναι αναγκαία η προ-ύπαρξη μιας κλίμακας μέτρησης, δηλαδή η εκ των προτέρων αποδοχή μιας ιεραρχημένης ακολουθίας τιμών. Στην περίπτωση μας χρησιμοποιείται άρρητα η διατεταγμένη ακολουθία των φυσικών αριθμών. Αυτό σημαίνει ότι το κλάσμα, όπως παρουσιάζεται εδώ, έχει ως υπόβαθρο τη διάταξη των φυσικών αριθμών, γι' αυτό μπορούμε να πούμε ότι οι έτσι ορισμένοι κλασματικοί αριθμοί έχουν τον χαρακτήρα των διατακτικών αριθμών, δηλαδή αριθμών που διαμορφώνονται με βάση τη διαδοχικότητα μιας διατεταγμένης ακολουθίας. Επίσης θα παρατηρήσουμε ότι ο όρος "μέγεθος" υποδηλώνει συνεχή ποσότητα που στα μαθηματικά αντιπροσωπεύει γεωμετρική οντότητα, τότε το κλάσμα, που εμφανίζεται εδώ ως μέρος ενός μεγέθους, προβάλλει ως μια οντότητα, ως κάτι που έχει δική του υπόσταση. Κι αυτός ο οντολογικός προσδιορισμός του ενυπάρχει στη σημασία του κλάσματος κι

όταν περνάει στη συμβολική του μορφή, ως στοιχείο του "γενετικού του κώδικα".

Στο Πανεπιστήμιο τώρα και συγκεκριμένα στο Τμήμα Μαθηματικών του Α.Π.Θ. [2] τα κλάσματα παρουσιάζονται ως εξής:

- Θεωρείται η ακέραια περιοχή (δηλαδή ο δακτύλιος που δεν έχει στοιχεία διάφορα του μηδενός με γινόμενο μηδέν) $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών.
- Σχηματίζεται το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{Z}'$ των συνόλων $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Z}-\{0\}$, $\mathbb{Z}'=\{(\alpha_1,\alpha_2):\alpha_1\in\mathbb{Z},\ \alpha_2\in\mathbb{Z},\alpha_2\neq 0\}$
- Ορίζεται στο $\mathbb{Z}'$ η σχέση ισοδυναμίας: $(\alpha_1,\alpha_2)\sim(\beta_1,\beta_2) \Leftrightarrow \alpha_1\beta_2=\alpha_2\beta_1$, η οποία χωρίζει το $\mathbb{Z}'$ σε κλάσεις ισοδυναμίας, που ονομάζονται κλάσματα και συμβολίζονται ως εξής: $[(\alpha_1,\alpha_2)]=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$
- Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας, δηλαδή των κλασμάτων

  $Q=\{[(\alpha_1,\alpha_2)]:=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}:\alpha_1\in\mathbb{Z},\alpha_2\in\mathbb{Z},\alpha_2\neq 0\}$

  εφοδιάζεται με τις πράξεις

  $$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{\beta_1}{\beta_2}:=\frac{\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1}{\alpha_2\beta_2}$$

  (δηλαδή $[(\alpha_1,\alpha_2)]+[(\beta_1,\beta_2)]=[(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1,\alpha_2\beta_2)]$),

  $$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\frac{\beta_1}{\beta_2}:=\frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_2\beta_2}$$

  (δηλαδή $[(\alpha_1,\alpha_2)]\cdot[(\beta_1,\beta_2)]:=\{(\alpha_1\beta_1,\alpha_2\beta_2)]$)
- Αποδεικνύεται ότι το $\mathbb{Q}$ έχει τη δομή σώματος, στο οποίο μάλιστα ορίζεται μια σχέση διάταξης. Επίσης αποδεικνύεται ότι περιέχει ισόμορφα το $\mathbb{Z}$.
- Κατασκευάστηκε μ' αυτό τον τρόπο το σώμα των ρητών αριθμών.

Το πρώτο που θα παρατηρήσουμε είναι ότι τα κλάσματα εδώ δεν εισάγονται από μεμονωμένες καταστάσεις, και ως εξατομικευμένες περιπτώσεις όπως στα σχολικά Μαθηματικά, αλλά προέρχονται από μια ολότητα, το καρτεσιανό γινόμενο των ακεραίων, και προκύπτουν όλα μαζί ως ολότητα. Δηλαδή το κλάσμα εδώ το βλέπουμε μέσω μιας ολότητας και είναι στοιχείο ολότητας. Αυτός ο τρόπος θεώρησης λέγεται ολιστικός (holistic). Ένα δεύτερο γνώρισμα αυτού του τρόπου διαμόρφωσης της έννοιας του κλάσματος, είναι ότι η σημασία δεν αποκτιέται άμεσα, αλλά έμμεσα από τις εσωτερικές διασυνδέσεις του συστήματος τους. Αυτό μπορεί να γίνει φανερό αν προσέξουμε, για παράδειγμα, ότι η σημασία του ενός δευτέρου, δηλαδή ότι είναι μικρότερο της μονάδος, δεν είναι άμεσα εμφανής, όπως στα σχολικά μαθηματικά. Αυτή συνεπάγεται έμμεσα από τις σχέσεις και τις πράξεις του σώματος Q. Συγκεκριμένα θα πρέπει να σκεφτούμε ότι:

$$\frac{1}{2}=\left[(1,2)\right],\ 1=\left[(\alpha,\alpha)\right]=\left[(1,1)\right],\ \text{με } \alpha\neq 0$$

οπότε με τη χρησιμοποίηση του ορισμού της ανισότητας

$[(\alpha_1,\alpha_2)]<[(\beta_1,\beta_2)] \Leftrightarrow \exists\,(m,n)\in\mathbb{N}\times(\mathbb{N}-\{0\}):\quad [(\beta_1,\beta_2)]-[(\alpha_1,\alpha_2)]=[(m,n)]$ [3]

συμπεραίνουμε ότι

$$1-\frac{1}{2}=\left[(1,1)\right]-\left[(1,2)\right]=\left[(1,1)\right]+\left[(-1,2)\right]=\left[(1\cdot 2+1\cdot(-1),1\cdot 2)\right]=\left[(1,2)\right]$$

που σημαίνει ότι

$$\exists(1,2)\in(\mathbb{N}-\{0\})^2:\left[(1,1)\right]-\left[(1,2)\right]=\left[(1,2)\right]$$

και έτσι

$\left[(1,2)\right]<\left[(1,1)\right]$ δηλαδή $\frac{1}{2}<1$

Ο έμμεσος αυτός προσδιορισμός της σημασίας του κλάσματος από τα συμφραζόμενα, από τη συγκυρία (context), εκφράζει τον συγκυριακό (contexual) χαρακτήρα του. Επίσης θα πρέπει να σημειώσουμε ότι όπως ορίστηκε το κλάσμα εδώ, δηλαδή ως

$[(\alpha_1,\alpha_2)]=\{(x,y):x,y\in\mathbb{Z},\ y\neq 0,\ a_1y=a_2x\}\subseteq\mathbb{Z}x(\mathbb{Z}-\{0\})$,
είναι μια σχέση κι όχι ένα οντολογικό παράγωγο μιας εμπειρικής θεώρησης του θέματος. Αυτό δείχνει τη σχεσιακή (relational) υφή του συγκεκριμένου τρόπου σκέψης.

Από την αντιπαράθεση των δυο αυτών θεωρητικών προσεγγίσεων στην έννοια του κλάσματος γίνεται ολοφάνερο ότι πρόκειται για δυο διαφορετικούς τρόπους σκέψης. Και δεν είναι υπερβολή να πούμε ότι εκφράζουν άλλου είδους γνωστικές διαδικασίες. Είναι δηλαδή επιστημολογικά ασύμβατες θεωρήσεις.

Αυτή τη γνωστική απόκλιση μπορούμε να την παρατηρήσουμε και στη γεωμετρία, γενικά. Κι αυτό γιατί η σχολική γεωμετρία εδραιώνεται πάνω σε εξατομικευμένα γεωμετρικά αντικείμενα, τα οποία μορφοποιούνται και λειτουργούν μ' έναν εμπειρικό - ενορατικό τρόπο σκέψης. Αντίθετα στο πανεπιστήμιο, συγκεκριμένα στα πρώτα έτη του Τμήματος Μαθηματικών του ΑΠΘ, η γεωμετρία είναι στον αστερισμό των διανυσματικών χώρων, που σημαίνει ότι οι δομές και η δομική σκέψη είναι το θεωρητικό της πλαίσιο.

Οι επισημάνσεις αυτές δείχνουν ότι υπάρχει βαθύ επιστημολογικό ρήγμα των πανεπιστημιακών και των σχολικών Μαθηματικών. Κι αυτό σίγουρα δεν συνηγορεί υπέρ της άποψης ότι ο πτυχιούχος μαθηματικός μπορεί να διδάξει σχολικά Μαθηματικά και κατά συνέπεια να συμβάλει στην κατανόηση τους από τους μαθητές του, λόγω της συσσώρευσης, μόνο, μαθηματικών γνώσεων στη διάρκεια των σπουδών του. Από την άλλη μεριά θα ήταν πολύ επιπόλαιη οποιαδήποτε σκέψη απόρριψης των πανεπιστημιακών Μαθηματικών ως ακατάλληλα γι' αυτούς που θα διδάξουν Μαθηματικά στη Μέση Εκπαίδευση. Γιατί χωρίς αμφιβολία, αποτελούν μια σημαντική πηγή διαμόρφωσης της σύγχρονης μαθηματικής σκέψης, αλλά και της επιστημονικής ταυτότητας των υποψηφίων "δασκάλων" των Μαθηματικών. Για να ξεπεραστεί αυτό το αδιέξοδο είναι αναγκαία η επίγνωση της

φύσης και της ορθολογικότητας των Μαθηματικών ως επιστημονικός κλάδος και ως σχολικό μάθημα. Αυτη η επίγνωση αποτελεί μια από τις σημαντικότερες πλευρές της προετοιμασίας και της επιμόρφωσης των "δασκάλων" των Μαθηματικών.

Ένα δεύτερο ζήτημα σχετίζεται με την πραγματοποίηση της διδασκαλίας των Μαθηματικών από έναν πτυχιούχο μαθηματικό. Αυτό διαφαίνεται αν σκεφτούμε ότι αυτός που διδάσκει σχολικά Μαθηματικά δεν αναμεταδίδει, απλά και μόνο τα κεφάλαια των αντίστοιχων σχολικών βιβλίων στους μαθητές του, αλλά τα ερμηνεύει, τα εμπλουτίζει και μεθοδεύει την προσαρμογή τους στις εκάστοτε ιδιαιτερότητες των μαθητών του. Διαισθανόμαστε λοιπόν ότι η γνώση των πανεπιστημιακών και σχολικών Μαθηματικών, μόνο, δεν αρκεί, αλλά χρειάζεται ένα είδος γνώσεων και ικανοτήτων ειδικότητας, αυτής του "δασκάλου" των Μαθηματικών. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Στο σχολικό βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου μετά την εισαγωγή της έννοιας του κλάσματος εξετάζεται το ζήτημα της ισότητας (ή ισοδυναμίας) και ανισότητας των κλασμάτων. Ο τρόπος παρουσίασης είναι ο εξής:

- Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο χωρισμένο σε 4 ίσα μέρη και σημειώνεται με χρώμα τα $\frac{3}{4}$ αυτού
- Στη συνέχεια διαμερίζεται το κάθε τέταρτο σε 2 ίσα μέρη, οπότε το ορθογώνιο είναι τώρα διαμερισμένο σε $4\cdot2=8$ ίσα μέρη και το χρωματισμένο σε $3\cdot2=6$ ίσα μέρη.
- Προκύπτει έτσι στη θέση του χρωματισμένου τμήματος ο κλασματικός αριθμός $\frac{6}{8}$. Κι εφ' όσον και οι δυο κλασματικοί αριθμοί εκφράζουν το ίδιο μέρος του ορθογωνίου, συμπεραίνεται ότι αυτοί είναι ισοδύναμοι και σημειώνεται ότι $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{3\cdot2}{4\cdot2}$

- Με όμοιο τρόπο μεθοδεύεται και το αποτέλεσμα $\frac{3}{4}=\frac{15}{20}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}$, οπότε γενικεύοντας τις περιπτώσεις αυτές διατυπώνεται το συμπέρασμα ότι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\cdot\lambda}{\beta\cdot\lambda}$
- Ως πόρισμα αυτής της ιδιότητας δίνεται χωρίς παράδειγμα, και η ιδιότητα: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha:\lambda}{\beta:\lambda}$
- Με βάση την πρώτη ιδιότητα παρουσιάζεται η διαδικασία μετατροπής ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα, π.χ. τα κλάσματα $\frac{3}{4}, \frac{21}{5}$ μετατρέπονται ως εξής:

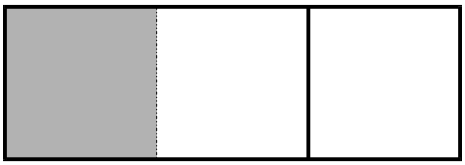
  $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{15}{20}$, $\frac{21}{5}=\frac{21\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{84}{20}$
- Στη συνέχεια προσδιορίζεται η σχέση ανισότητας, μεταξύ δυο κλασμάτων από την αντίστοιχη ανισότητα των αριθμητών τους αν είναι ομώνυμα κι αν είναι ετερώνυμα ανάγεται αυτή η περίπτωση στην προηγούμενη αφού πρώτα μετατραπούν αυτά σε ομώνυμα.

Χωρίς μεγάλη δυσκολία μπορεί κανείς να επισημάνει ότι η προσέγγιση αυτή των ισοδύναμων κλασμάτων και της πολύ βασικής ιδιότητας τους, δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\cdot\lambda}{\beta\cdot\lambda}$, είναι τεχνητή και αυθαίρετη. Με άλλα λόγια δεν απορρέουν μέσα από μια φυσική ή μαθηματική αναγκαιότητα, η οποία να δικαιολογεί την παρουσία τους. Είναι μια μάλλον αφ' υψηλού πρόταση τους, που για να μη διατυπωθούν απροκάλυπτα αξιωματικά, δογματικά, εισάγονται με μια επίπλαστη εποπτικότητα. Βέβαια από μαθηματική άποψη είναι θεωρητικά συνεπείς. Για τους μαθητές όμως, δεν πρέπει να είναι εύπεπτα γιατί εμφανίζονται ως εγκεφαλικές επινοήσεις των μαθηματικών. Εδώ ο "δάσκαλος" των Μαθηματικών μπορεί, <u>αν θέλει</u>, να παίξει το δικό του ρόλο στην αντιμετώπιση αυτής της γνωστικής "παρενέργειας". Μπορεί στην προκειμένη περίπτωση να κάνει, είτε

διευκρινιστικά είτε ανασκευάζοντας λίγο την πορεία του σχολικού βιβλίου, την εξής παρέμβαση:

- Για την σύγκριση των κλασμάτων διακρίνει δυο είδη, αυτή των ομώνυμων κι αυτή των ετερώνυμων. Το πρώτο είδος, ανάγεται αμέσως στη σχέση των αριθμητών, δηλαδή σε μια σύγκριση φυσικών αριθμών. Στο δεύτερο εξετάζει τις περιπτώσεις $\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{3},\frac{1}{4}$, απ' όπου μπορεί να γενικεύσει γι' όλα τα ετερώνυμα κλάσματα.
- Αναπαριστά το $\frac{1}{2}$ με μισό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και το $\frac{1}{3}$ με το ένα τρίτο ενός ίσου ορθογωνίου.

$\frac{1}{2}$



$\frac{1}{3}$

Εποπτικά γίνεται φανερό ότι το $\frac{1}{2}$ είναι μεγαλύτερο από το $\frac{1}{3}$. Στο σημείο αυτό θέτει το εξής κρίσιμο ερώτημα: Πόσο πιο μεγάλο είναι το $\frac{1}{2}$ από το $\frac{1}{3}$;

Για την απάντηση του μπορεί να παρακινήσει τους μαθητές του σ' έναν πειραματισμό με μετρήσεις, ή με συγκρίσεις σε χιλιοστομετρικό χαρτί, οπότε, αργά ή γρήγορα θα τοποθετήσουν το ένα ορθογώνιο επί του άλλου.

Τότε δεν θα δυσκολευθούν να διαπιστώσουν, είτε με λογικούς συλλογισμούς είτε εμπειρικά, ότι η μεσαία διακεκομμένη γραμμή, που αντιπροσωπεύει τη διαχωριστική γραμμή του πρώτου ορθογωνίου χωρίζει το μεσαίο τρίτο του ορθογωνίου σε δυο ίσα μέρη, εκ των οποίων το ένα εκφράζει την υπεροχή του $\frac{1}{2}$ από το $\frac{1}{3}$. Το ερώτημα τώρα είναι πως θα εκφραστεί ποσοτικά, δηλαδή με κλάσμα, αυτό το μέρος του ορθογωνίου. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να σκεφθούν ότι για να είναι κλάσμα το συγκεκριμένο μέρος του ορθογωνίου θα πρέπει να αποτελέσει ενα πολλαπλάσιο μιας νέας κλασματικής μονάδας του ίδιου μεγέθους. Αξιοποιώντας λοιπόν την προηγούμενη διαπίστωση, ότι το ζητούμενο μέρος είναι το μισό του ενός τρίτου του ορθογωνίου, θα σκεφθούν να χωρίσουν στη μέση και το πρώτο και το τελευταίο τρίτο του ορθογωνίου.

Έτσι προκύπτει αμέσως ότι το ζητούμενο μέρος είναι το $\frac{1}{6}$ του ορθογωνίου.

Εδώ ο "δάσκαλος" των Μαθηματικών θέτει το ερώτημα: Ποιο κλάσμα εκφράζει σ' αυτή την τελευταία ισοδιαμέριση του ορθογωνίου το $\frac{1}{2}$ και ποια το $\frac{1}{3}$;

Από το σχήμα φαίνεται ότι το $\frac{1}{2}$ είναι τώρα $\frac{3}{6}$ και το $\frac{1}{3}$ είναι $\frac{2}{6}$.

Διαμορφώνονται έτσι δυο ειδικές περιπτώσεις ισοδύναμων κλασμάτων, $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ και $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$, με μια γενετική διαδικασία. Ταυτόχρονα αναδεικνύεται ο τρόπος προσδιορισμού της υπεροχής των δυο αυτών ετερώνυμων κλασμάτων με τη μετατροπή τους σε αντίστοιχα ισοδύναμα κλάσματα που θα είναι ομώνυμα.

- Αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί για τα κλάσματα $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{4}$ και στη συνέχεια για πιο γενικές περιπτώσεις, όπως π.χ. για το $\frac{2}{3}$ και το $\frac{3}{5}$, όπου εδώ η σύγκριση θα γίνει αρχικά με μετατροπή τους σε ομώνυμα και μετά θα αναπαρασταθούν σ' ένα σχήμα για να προσδιορισθεί η υπεροχή.
- Τελικά έχουν δημιουργηθεί οι προϋποθέσεις για γενίκευση της έννοιας των ισοδύναμων κλασμάτων, για τη διατύπωση της βασικής τους ιδιότητας, για τη σύγκριση των κλασμάτων γενικά. Επίσης προετοιμάσθηκε ο δρόμος για την αφαίρεση ετερώνυμων κλασμάτων και λόγω ομοιότητας για την πρόσθεση τους.

Να σημειώσουμε ότι η ειδοποιός διαφορά αυτών των δυο προσεγγίσεων είναι η μέθοδος παρουσίασης του θέματος. Στην πρώτη περίπτωση χρησιμοποιείται ένα είδος εποπτικό – αξιωματικού τρόπου διαπραγμάτευση ενώ στη δεύτερη μια γενετικό-κατασκευαστική μεθόδευση. Από καθαρά μαθηματική άποψη αυτή η ευαισθητοποίηση είναι άνευ σημασίας, γιατί η έμφαση δίνεται στα μαθηματικά "αποτελέσματα" (δηλαδή στις "ετοιμοπαράδοτες" μαθηματικές έννοιες, αξιώματα και θεωρήματα) και στην οργάνωση, τακτοποίηση, των μεταξύ τους συνεπαγωγών σ' ένα λογικά συνεπές και μη αντιφατικό

σύστημα κι <u>όχι</u> στις γνωστικές διαδικασίες και αναγκαιότητες που διαμορφώνουν τα "αποτελέσματα" αυτά. Ο "δάσκαλος" των Μαθηματικών όμως έχει ανάγκη αυτό το "παρασκήνιο" της μαθηματικής γνώσης, για να μπορέσει να δικαιολογήσει τα μαθηματικά "αποτελέσματα" σε <u>μη-μαθηματικούς</u> και να τους καλλιεργήσει το μαθηματικό τρόπο σκέψης κι όχι απλώς να τον μυήσει στα μαθηματικά "μυστικά". Αυτό σημαίνει ότι σε σχέση με την ορθολογικότητα των καθαρών Μαθηματικών ο "δάσκαλος" των Μαθηματικών έχει ανάγκη μια διαφορετική επιστημολογική θεώρηση των Μαθηματικών, η οποία να δίνει έμφαση στα εννοιολογικά, μεθοδολογικά, δομικά κ.α. ζητήματα. Στον επιστημονικό "εξοπλισμό", λοιπόν, των "δασκάλων" των Μαθηματικών θα πρέπει να περιλαμβάνεται εκτός από τη γνώση των ιδίων των Μαθηματικών κι αυτή η επιστημολογική θεώρηση, για να μπορέσει να πραγματοποιήσει, μ' ένα δημιουργικό κι όχι μηχανιστικό τρόπο, το έργο στο οποίο κλήθηκε να επιτελέσει. Και είναι αλήθεια ότι αυτό το επιπλέον εφόδιο στην επιστημονική κατάρτιση των "δασκάλων" των Μαθηματικών είναι ένα μόνο μέρος των γενικότερων αναγκών που έχει για την άσκηση της επαγγελματικής του ειδικότητας. Υπάρχει, δηλαδή ένα ευρύ πεδίο ιδιαίτερης επιστημονικής μόρφωσης και προετοιμασίας των "δασκάλων" των Μαθηματικών, που απαρτίζει τη Διδακτική των Μαθηματικών. Αυτές οι παρατηρήσεις επισημαίνουν μια πολύ σημαντική πλευρά του "παρασκηνίου" πίσω από την πραγματοποίηση της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Πρόκειται για τον κλάδο της Διδακτικής των Μαθηματικών ως καθοριστικός θεωρητικός και πρακτικός τομέας της επιστημονικής εξειδίκευσης των "δασκάλων" των μαθηματικών.

Μέχρι τώρα θίξαμε τη διδασκαλία των Μαθηματικών από την πλευρά του "δασκάλου" των Μαθηματικών. Η διδασκαλία, όμως, δεν είναι αυτοσκοπός, αποβλέπει στη μάθηση, τη

νοητική ανάπτυξη του μαθητή. Με άλλα λόγια η διδασκαλία, γενικά και των Μαθηματικών ειδικότερα, είναι αλληλένδετη με τη μάθηση. Κι αυτό σημαίνει ότι ο "δάσκαλος" των Μαθηματικών δεν μπορεί να αδιαφορεί για την έκβαση και την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας του. Κατά συνέπεια θα πρέπει να πάρει σοβαρά υπ' όψη του, να έχει επίγνωση, των ψυχολογικών λειτουργιών και δυσκολιών του μαθητή κατά τη μάθηση των Μαθηματικών. Είναι υποχρεωμένος, λοιπόν, να έχει κάποιες γνώσεις από τον τομέα της ψυχολογίας της μάθησης, οι οποίες δεν πρέπει να είναι αποσπασματικές, αλλά συνυφασμένες μέσα στο πλαίσιο της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Αυτή η δεοντολογική επισήμανση και προτροπή μπορεί διαισθητικά να είναι σωστή και εύλογη, δεν συνειδητοποιείται όμως εύκολα από τους μαθηματικούς και κατά κανόνα είναι ασύμβατη με τη νοοτροπία των καθαρών Μαθηματικών. Για να φανεί αυτή η διαφοροποιημένη στάση στο ζήτημα της ψυχολογίας της μάθησης των Μαθηματικών θα δούμε την περίπτωση της έννοιας του κλάσματος. Στην "Παιδαγωγική Ψυχολογική Εγκυκλοπαίδεια Λεξικό" το κλάσμα αναφέρεται μόνο μέσα στο λήμμα "Αριθμητικό Σύστημα", με τη μορφή των ρητών αριθμών. Είναι χαρακτηριστικό ότι ο συγγραφέας του, που είναι μαθηματικός, δεν κάνει καμιά νύξη για την ψυχολογική διάσταση του θέματος, όπως θα έπρεπε λόγω του χώρου μέσα στο οποίο είναι ενταγμένο, αλλά δίνει έμφαση μόνο στην αξιωματικό-κατασκευαστική θεμελίωση του [4]. Από την άλλη μεριά έχει διαπιστωθεί, διεθνώς και στην Ελλάδα, ότι οι μαθητές έχουν μεγάλες δυσκολίες στην απόκτηση της έννοιας του κλάσματος [5], που σημαίνει ότι υπάρχει πρόβλημα στη μάθηση του συγκεκριμένου θέματος. Ένα πρόβλημα που η μεγάλη του γεωγραφική διασπορά αποκλείει την εκδοχή μιας γενικής αποτυχίας στη μαθηματική συστηματοποίηση του θέματος κατά συνέπεια μας επιτρέπει να ισχυρισθούμε ότι το ζήτημα της

μαθηματικής θεμελίωσης των κλασμάτων δεν μπορεί να έχει την καθοριστική ευθύνη για την δυσχέρεια αυτή. Οι αιτίες του θα πρέπει να αναζητηθούν στις νοητικές δυνατότητες και τους ανασταλτικούς παράγοντες των μαθητών για την απόκτηση και κατανόηση της συγκεκριμένης μαθηματικής γνώσης. Για να μπορέσουμε τώρα να ανιχνεύσουμε τη ρίζα του προβλήματος θα πρέπει να επισημάνουμε τις νοητικές αλλαγές που απαιτούνται από το μαθητή για την αφομοίωση της νέας γνώσης, αυτή των κλασμάτων.

Το πρώτο που θα παρατηρήσουμε είναι ότι η αρχική αντίληψη του αριθμού σχηματίζεται στην προσχολική ηλικία των παιδιών ως συνδυασμός, δυο προσεγγίσεων: της μάθησης ή καλύτερα της "τυφλής" μάθησης (δηλαδή αποστήθισης) διαδοχικά των πρώτων αριθμητικών ονομάτων και της χρησιμοποίησης τους για να αποδώσουν το αποτέλεσμα της καταμέτρησης των στοιχείων διαφόρων μικρών ομάδων ομογενών αντικειμένων. Μ' αυτό τον τρόπο εγχαράσσονται οι αριθμοί στο μυαλό τους, ως στερεότυπο, με τη μορφή μιας διατεταγμένης σειράς. Και η διάταξη αυτή παίζει ρυθμιστικό ρόλο στη συγκεκριμένη διαμόρφωση της αρχικής έννοιας του αριθμού, που σημαίνει ότι για τα παιδιά ο αριθμός είναι ένα όνομα σ' αυτή τη σειρά. Από την άλλη μεριά η σύνδεση του αριθμού με την καταμέτρηση και πιο συγκεκριμένα με το αποτέλεσμα της, προσλαμβάνεται από τα παιδιά ως ένα χαρακτηριστικό της εκάστοτε ομάδας αντικειμένων που καταμετρείται κι έτσι να προσδίδεται σ' αυτόν μια υπόσταση, όπως π.χ. το χρώμα των πραγμάτων. Ο κάθε αριθμός λοιπόν έχει για τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας μια δική του ύπαρξη κι αυτό σημαίνει ότι διαμορφώνουν μια οντολογική αντίληψη για τον αριθμό[6].

Στο Δημοτικό Σχολείο τώρα, ο αριθμός εισάγεται ως πληθικός αριθμός, δηλαδή ως χαρακτηριστικό των ισοδυνάμων συνόλων, των συνόλων, μ' άλλα λόγια που τα στοιχεία τους αντιστοιχίζονται ένα προς ένα. Μ' αυτό τον τρόπο ο

αριθμός δεν είναι μια αυτοδύναμη ύπαρξη, μια οντότητα, αλλά συγκροτείται από τη συσχέτιση άλλων εννοιών, συγκεκριμένα από την έννοια του συνόλου κι αυτή της αντιστοιχίας. Παρατηρούμε λοιπόν ότι, από γνωστική άποψη, η έννοια του αριθμού, στην προκειμένη περίπτωση, διαμορφώνεται έμμεσα ως συνέπεια των συσχετίσεων μεταξύ των συνόλων και εκφράζει μια σχέση. Κι αυτό σ' αντίθεση με την αντίληψη που διαμορφώνουν, κατά κανόνα, τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας για τον αριθμό, η οποία χαρακτηρίζεται από έναν αυτοπροσδιορισμό του αριθμού, ως άμεση αντανάκλαση του αποτελέσματος της καταμέτρησης πραγμάτων. Όπως φαίνεται όμως οι μικροί μαθητές δεν υιοθετούν τη σχεσιακή αντίληψη του αριθμού και με την έμφαση που δίνεται, κατά τη διδασκαλία, στην εργαλειακή (κι όχι στην εννοιολογική) πλευρά του αριθμού, δηλαδή ως λειτουργικό στοιχείο των μετρήσεων και των υπολογισμών, εδραιώνεται στη σκέψη τους ο εμπειρικός και διατακτικός χαρακτήρας του αριθμού.

Σ' αυτό το πνεύμα ο κλασματικός αριθμός δεν είναι συμβατός, γιατί από τη μια η διάταξη χάνει την ικανότητα να διαμορφώνει τους νέους αυτούς αριθμούς, καθ' όσον δεν έχει την προνομιακή θέση που είχε στους φυσικούς αριθμούς, από την άλλη η συσσωρευτική ή "καταμετρική" αντίληψη των αριθμών, που συμπεριέχεται στο συγκεκριμένο τρόπο σκέψης, δεν είναι λειτουργικός στα κλάσματα. Έχει μάλιστα επισημανθεί ότι η γνώση των κλασματικών αριθμών δεν είναι φυσική γνώση, με την έννοια ότι δεν είναι αυτονόητη, εμπειρική γνώση [7], σ' αντίθεση με την οντολογική αντίληψη για τον αριθμό που έχουν διαμορφώσει τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας και παγίωσαν στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου. Ψυχολογικές επίσης έρευνες έδειξαν ότι στο νοητικό μοντέλο των παιδιών, μέχρι την ηλικία 10-12 ετών, επικρατεί η εποπτική αντίληψη και η συγκεκριμενοποιημένη (δηλαδή μη

γενικευμένη), εμπειρική σκέψη [8]. Το μοντέλο αυτό ευνοεί, όπως είναι φυσικό, τη συσσωρευτική αντίληψη για τον αριθμό και όταν οι εκπαιδευτικές συνθήκες το επιτρέπουν, τότε αυτή εδραιώνεται στη συγκεκριμένη γνωστική δομή των μαθητών. Προσπαθώντας στη συνέχεια να εφαρμόσουν το μοντέλο αυτό για να ερμηνεύσουν και να χειριστούν τους κλασματικούς αριθμούς αποτυχαίνουν, που σημαίνει ότι αυτή η προϋπάρχουσα γνώση για τον αριθμό αποτελεί ένα εμπόδιο, ένα γνωστικό εμπόδιο, για την κατανόηση της νέας "θεωρίας", των κλασμάτων. Στην προκειμένη περίπτωση ή θα πρέπει να γίνει μια ριζική αναδιοργάνωση της αρχικής γνώσης ώστε να διαμορφωθεί ένα νέο μοντέλο που θα μπορεί να ερμηνεύει και τους φυσικούς και τους κλασματικούς αριθμούς, ή θα αγνοηθεί η συγκεκριμένη γνωστική ασυμβατότητα οπότε θα υποβαθμιστεί το επίπεδο μάθησης στη μηχανιστική εξάσκηση των υπολογιστικών διαδικασιών. Είναι φανερό ότι ανάλογα με την επιλογή καλλιεργείται στους μαθητές η μαθηματική συμπεριφορά και ο τρόπος σκέψης τους για το θέμα αυτό και όχι μόνο. Αξίζει να σημειώσουμε ότι στη δεύτερη περίπτωση, όπου η κατάσταση είναι μάλλον καθηλωτική, πολύ δύσκολα αλλάζει η μαθηματική στάση και νοοτροπία, που διαμόρφωσαν οι μαθητές, όταν η σχετική "θεωρία" επανεξετάζεται σ' ανώτερη σχολική βαθμίδα, όπως π.χ. στη Α' Γυμνασίου και κατά συνέπεια αναπαράγεται.

Ο "δάσκαλος" των Μαθηματικών μπορεί να παίξει αποφασιστικό ρόλο στο ξεπέρασμα του γνωστικού αυτού εμποδίου, ή έστω να δείξει μια διέξοδο του όπως και σ' άλλες ανάλογες περιπτώσεις. Κάτι τέτοιο όμως προαπαιτεί απ' αυτούς που διδάσκουν ή θα διδάξουν Μαθηματικά, εκτός από τη διάθεση παρέμβασης, μια επίγνωση και μια ικανότητα στα γνωστικο-ψυχολογικά προβλήματα μάθησης των Μαθηματικών. Γίνεται λοιπόν φανερή η σημασία του επιστημονικού αυτού τομέα στο υπόβαθρο της διδασκαλίας

των Μαθηματικών και κατά συνέπεια η αναγκαιότητα του στη μόρφωση και επιμόρφωση αυτών που θα διδάξουν ή διδάσκουν Μαθηματικά. Παρ' όλα αυτά δύσκολα μπορεί να ενσωματωθεί οργανικά αυτός ο τομέας, αυτό το είδος γνώσης, στο πνεύμα και τη νοοτροπία των Μαθηματικών για τα Μαθηματικά, όπου ευυπόληπτες είναι μόνο οι αποδείξεις θεωρημάτων και οι λύσεις μαθηματικών προβλημάτων. Ας μην ξεχνάμε ότι οι μαθητές δεν θα γίνουν μαθηματικοί κι αυτό που πρέπει να μάθουν, κατά κύριο λόγο, είναι ο μαθηματικός τρόπος σκέψης κι όχι τα θεωρήματα αυτά καθ' αυτά.

Με τις επισημάνσεις αυτές αναφαίνεται ότι ο μαθηματικός που θα θελήσει να διδάξει ή διδάσκει Μαθηματικά πρέπει να γνωρίζει και να μπορεί να αξιοποιεί στοιχεία από την ψυχολογία της μάθησης των Μαθηματικών, κάτι που το πτυχίο Μαθηματικών, από μόνο του, δεν το προϋποθέτει. Η γνώση αυτή δεν πρέπει να είναι απομονωμένη, αλλά συνυφασμένη μέσα στο πλαίσιο της Διδακτικής των Μαθηματικών, ως μια διάσταση του. Αποκαλύπτεται έτσι και ο διεπιστημονικός χαρακτήρας αυτού του τομέα, ο οποίος συγκροτείται, από τα όσα θίξαμε μέχρι τώρα, από την Επιστημολογία των Μαθηματικών, από τη Μεθοδολογία διδασκαλίας τους και από την Ψυχολογία των Μαθηματικών. Αυτές είναι οι τρεις βασικές συνιστώσες της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Με την προσέγγιση αυτή μας δόθηκε η ευκαιρία να δούμε τα Μαθηματικά πιο "στερεοσκοπικά", φωτίζοντας κι άλλες πλευρές τους που συνήθως είναι αθέατες στα πανεπιστημιακά και σχολικά εγχειρίδια. Κι αυτό έγινε μ' αφορμή την ετοιμότητα ενός τελειόφοιτου μαθηματικού να διδάξει την επιστήμη του στο σχολείο. Μέσα σ' αυτή την οπτική γωνία αναδείχθηκε, έστω και έμμεσα, μια πλουραλιστική εικόνα για τα Μαθηματικά κι έτσι εκθρονίστηκε, σ' ένα βαθμό, η απολυτοποίηση τους ως ένα σύστημα αναμφισβήτητων και παγκόσμιων αληθειών. Αυτό

είναι λίγο πολύ αναγκαίο όταν θέλουμε να δούμε τους τρόπους μαθηματικής επικοινωνίας ενός μαθηματικού με μη μαθηματικούς και μάλιστα όταν αυτοί οι τρόποι έχουν και διαπαιδαγωγικό προσανατολισμό, όπως στην περίπτωση της διδασκαλίας των σχολικών Μαθηματικών. Έτσι δεν πρέπει να περιχαρακωθούμε σ' ένα είδος Θεολογίας των Μαθηματικών κι αυτό μας ωθεί προς την υιοθέτηση ενός κριτικού σχετικισμού. Η σκοπιά αυτή, όπως είναι φυσικό, ανοίγει και το πλαίσιο του προβληματισμού μας, μ' αποτέλεσμα να μπορούμε να θέσουμε ερωτήματα που στην απολυτοποιημένη θεώρηση των Μαθηματικών δεν νομιμοποιούνται ή είναι αδιανόητα. Ένα τέτοιο ερώτημα, που έχει άμεση σχέση με την προοπτική ενός τελειόφοιτου μαθηματικού να διδάξει σχολικά Μαθηματικά είναι το εξής:

τα Μαθηματικά που διδάσκονται στα Ελληνικά σχολεία είναι ίδια με τα σχολικά Μαθηματικά των άλλων χωρών;

Αρχικά θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι τα Μαθηματικά ως αποκρυσταλλωμένες αλήθειες ή ως τυποκρατικό σύστημα είναι, χωρίς καμιά αμφιβολία, ίδια σ' όλα τα γεωγραφικά μήκη και πλάτη του σύγχρονου κόσμου. Τα μαθηματικά όμως ως πολιτισμικό και κοινωνικό φαινόμενο μπορεί να παρουσιάζει διαφορετικές "φυσιογνωμίες", ο μαθηματικός δηλαδή Λόγος, μπορεί να είναι διαφορετικός σε διαφορετικές πολιτισμικές και κοινωνικές συγκυρίες.

Εδώ, ας σταθούμε για λίγο με σκοπό να διευκρινίσουμε τον όρο: Λόγος (discourse). Πρόκειται για έναν όρο της επικοινωνιολογίας ο οποίος εκφράζει το είδος της θεματολογίας και της αναπαράστασης των θεματικών περιεχομένων, που χαρακτηρίζεται από μια κοινότητα συνομιλητών ή από ένα θεσμικό πλαίσιο επικοινωνίας [9]. Για παράδειγμα το είδος της επικοινωνίας στο σχολείο είναι πολύ διαφορετικό απ' αυτό του στρατού ή της εκκλησίας. Αν περιοριστούμε στο χώρο της επιστήμης, τότε θα λέγαμε ότι ο επιστημονικός Λόγος είναι μια ειδική

περίπτωση Λόγου που αναπτύσσεται σε επιστημονικά θέματα. Το πρώτο που θα παρατηρήσουμε, στο σημείο αυτό, είναι ότι ο επιστημονικός Λόγος προβάλλει ως μια ρητορική της επιστήμης, πιο συγκεκριμένα ως ένα ρητορικό ύφος στην επιστήμη. Στην προκειμένη περίπτωση η έμφαση που δίνεται με τον όρο αυτό δεν είναι στα εκφραστικά σχήματα μιας επιστημονικής ομιλίας ή ενός κειμένου, αλλά στους τύπους της επιχειρηματολογίας τους [10]. Κι αυτό παραπέμπει στις εγγενείς μορφές της επιστημονικής κατανόησης και εξήγησης που εμπεριέχουν, ως συμφραζόμενα του όρου [11]. Από την άλλη μεριά ένας επιστημονικός Λόγος είναι δεοντολογικά και πολιτισμικά ιδιότυπος, που σημαίνει ότι εκφράζει και απηχεί τις σχετικές με την επιστήμη αξίες, πεποιθήσεις και κριτήρια εγκυρότητας μιας επιστημονικής κοινότητας ή μιας θεσποποιημένης κοινωνικής συγκυρίας. Αυτή λοιπόν η πλευρά του όρου αντανακλά συλλογικές στάσεις, συμπεριφορές και νοοτροπίες στο πεδίο της επιστημονικής σκέψης και δραστηριότητας.

Συνοψίζοντας θα λέγαμε ότι ο επιστημονικός Λόγος, έχει μια συνάφεια με τους όρους: επικοινωνιακός κώδικας [12], επιστημονικό "παράδειγμα" [13] και γνωστικό στυλ [14], που κατά μια έννοια τους εμπεριέχει, στον έναν ή άλλο βαθμό. Ο μαθηματικός, τώρα, Λόγος δεν είναι παρά μια εξειδίκευση του επιστημονικού Λόγου στα Μαθηματικά. Κι αξίζει να σημειώσουμε ότι ήδη έχουν επισημανθεί διάφορα είδη μαθηματικών Λόγων, όπως π.χ. η Ευκλείδεια και η Καρτεσιανή ρητορική [15], το "παράδειγμα" της *αλγεβρικής ανάλυσης* [16] και τα *εθνικά στυλ* στα Μαθηματικά [17]. Αυτή η τελευταία περίπτωση μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα γιατί σχετίζεται άμεσα με το ερώτημα που θέσαμε. Για το σκοπό αυτό παρατηρούμε ότι ο όρος "εθνικό στυλ στα Μαθηματικά" εκφράζει τις εθνικές ιδιαιτερότητες στα Μαθηματικά λόγω ύπαρξης εθνικών επιστημονικών παραδόσεων, ιστορικών και πολιτισμικών συνθηκών ή αντιστάσεων αλλά και πολιτικών

επιλογών. Στη νομιμοποίηση του όρου αυτού συνηγόρησε, κατά κάποιο τρόπο και ο Jacques Hadamard [Ζακ Ανταμαρ (1865-1963)], διακεκριμένος γάλλος ερευνητής των καθαρών Μαθηματικών, όταν επισήμανε [18] κάποιον "εθνικισμό" στη "γερμανική μαθηματική σχολή" μ' αφορμή μια ιδιόμορφη στάση της σ' ένα ζήτημα μαθηματικής μεθοδολογίας. Αλλά και τα δομικοκρατούμενα Μαθηματικά της ομάδας των γάλλων μαθηματικών με το ψευδώνυμο Nicolas Bourbaki [Νικολά Μπουρμπακί] αποτελεί μια σύγχρονη μαρτυρία εθνικού μαθηματικού Λόγου. Κι αυτό όχι λόγω της εθνικότητας των μελών της ομάδας, αλλά γιατί η μαθηματική τους "ιδεολογία" [19], απηχεί το ρεύμα του γαλλικού δομισμού (ή στρουκτουραλισμού) στα Μαθηματικά.

Είναι αλήθεια ότι μέσα στην ιστορική πορεία των Μαθηματικών μπορούμε να βρούμε αρκετές περιπτώσεις εθνικών ή "ομαδοποιημένων' διαφοροποιήσεων στο μαθηματικό Λόγο. Ενδεικτικά να αναφέρουμε την αγγλική εμμονή, μέχρι τις αρχές του 19ου αιώνα στη νευτώνεια αντίληψη και ορολογία του Απειροστικού λογισμού, σ' αντίθεση με το Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό της ηπειρωτικής Ευρώπης που αναπτύχθηκε από τον Leibniz (Λαϊμπνιτς) και τους οπαδούς του. Ανάλογες ιδιομορφίες μπορούμε να επισημάνουμε και στη χώρα μας. Αξίζει να σημειώσουμε δυο τέτοιες, πολύ χαρακτηριστικές, περιπτώσεις.

Η πρώτη έχει να κάνει με μια υποτιμητική στάση στις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες. Συγκεκριμένα το 1976 ένας γνωστός έλληνας ιστορικός των Μαθηματικών αναφερόμενος στις "λεγόμενες μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες" ισχυρίστηκε ότι

> "δεν είναι ορθόν να γίνεται λόγος περί 'μη Ευκλείδειων γεωμετριών', αλλά ο ορθός τίτλος των νέων αυτών επιτευγμάτων πρέπει να είναι: 'Ασκήσεις, επί της γεωμετρίας του Ευκλείδου'" [20].

Στην αρχή του αιώνα ένας υφηγητής, τότε, του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου της Αθήνας είχε μια ακόμη πιο αρνητική στάση όταν έγραφε:

> "Είμαι δε και έσομαι εσαεί και εξ ακραδάντου επιστημονικής πεποιθήσεως οπαδός της ευκλειδείου Γεωμετρίας, εξ ης πάσαι αι λοιπαί Γεωμετρίαι εκπορεύονται δι' ασκόπου ή αλόγου παραμορφώσεως ή αφαιρέσεως ή προσθέσεως αχρείων νεωτερισμών εις το περιεχόμενον εκείνης" [21].

Είναι φανερό ότι η υπεροπτική αυτή στάση στις "νέες" Γεωμετρίες έχει ως βάση το ιστορικό μεγαλείο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Αυτό, όπως φαίνεται, μετουσιώθηκε σε μια υπέρμετρη εθνική υπερηφάνεια που προκάλεσε τη συγκεκριμένη επιλεκτικότητα και μεροληψία. Οι ακραίες αυτές περιπτώσεις μπορεί να είναι μεμονωμένες, αλλά απηχούν, μάλλον, μια γενικότερη στάση της ελληνικής ,μαθηματικής παιδείας, τη νεώτερη εποχή. Κι αυτό γιατί οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες μόνο τα τελευταία χρόνια διδάσκονται στα Τμήματα Μαθηματικών των Ελληνικών Πανεπιστημίων και μάλιστα υποβαθμισμένα και περιθωριακά. Αλλά και η σχετική βιβλιογραφία που είναι διαθέσιμη στα ελληνικά μέχρι σήμερα είναι πολύ περιορισμένη και ως επί το πλείστον στοιχειώδης. Οι ενδείξεις αυτές υποδεικνύουν την ύπαρξη ισχυρών πεποιθήσεων στην Ελληνική μαθηματική παιδεία για την ιστορική αξία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, που αντιστέκονται στην παραγκώνιση της, ή, έστω, δεν την ευνοούν.

Μια δεύτερη περίπτωση ελληνικής, ιδιομορφίας που συνηγορεί στις προηγούμενες εκτιμήσεις, αποτελεί η επίσημη άρνηση, στα μέσα της δεκαετίας του 1980 της προσαρμογής της Γεωμετρίας του Λυκείου στο πνεύμα της μεταρρύθμισης των Μοντέρνων Μαθηματικών, το οποίο δέσποζε την εποχή αυτή σ' όλο το περιεχόμενο των σχολικών μας

Μαθηματικών, εκτός της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Η πιο χαρακτηριστική μαρτυρία είναι η απάντηση στην ερώτηση:

γιατί δεν ευθυγραμμιζόμαστε και σ' αυτό το μέρος του σχολικού μας προγράμματος με τα διεθνή δεδομένα;

που έδωσε ο υπεύθυνος, τότε, σύμβουλος για τα σχολικά Μαθηματικά του επιτελικού οργάνου για τη σχολική εκπαίδευση του Υπουργείου Παιδείας, λέγοντας:

"Δεν θα γίνουμε εθνικοί μειοδότες" [22].

Η εθνική αυτή έμφαση στην Ευκλείδεια Γεωμετρία υποδηλώνει μια ελληνική ιδιομορφία, η οποία μας επιτρέπει να διαισθανθούμε την ελληνική ιδιαιτερότητα του μαθηματικού Λόγου στα σχολικά Μαθηματικά σε σχέση μ' άλλες χώρες.

Η όψη αυτή των Μαθηματικών αποτελεί μια εκδήλωση του πολιτισμικού τους υπόβαθρου, η οποία εξετάζεται και αναλύεται από την οπτική γωνία των Εθνομαθηματικών. Πρόκειται για μια προσέγγιση στη μαθηματική παιδεία η οποία προωθείται διεθνώς τα τελευταία 10 χρόνια και έχει ως αντικείμενο τις ιδιαιτερότητες της γνωστικής και ιστορικής ανάπτυξης των Μαθηματικών λόγω των πολιτισμικών και πολιτικών πλαισίων της [23]. Με τον τρόπο αυτό εμπλουτίζεται η άποψη μας για τα Μαθηματικά και τη μαθηματική παιδεία φωτίζοντας τις συλλογικές νοοτροπίες και στάσεις που προσιδιάζουν στα εκάστοτε μαθηματικά ιδεώδη. Η επίγνωση λοιπόν αυτών των διαστάσεων της μαθηματικής παιδείας παίζει σημαντικό ρόλο στην υπέρβαση του "τεχνοκρατικού" χαρακτήρα των Μαθηματικών και στην ανάδειξη των μορφωτικών αξιών τους.

Από την άλλη μεριά οι ερευνητές των Μαθηματικών αποστρέφονται τις ανθρωπολογικές διαφοροποιήσεις του μαθηματικού Λόγου γιατί, λόγω της συμμετοχής τους στο διεθνές γίγνεσθαι των Μαθηματικών και επηρεασμένοι, όπως είναι, από την καθολική εγκυρότητα των μαθηματικών αληθειών, αντιλαμβάνονται την παγκοσμιότητα των

μαθηματικών γνώσεων μ' έναν απόλυτο τρόπο. Κατά συνέπεια η λογικό-αξιωματική ισοπέδωση των μαθηματικών σπουδών περιορίζει ή εμποδίζει την ευαισθητοποίηση και συνειδητοποίηση της ποικιλίας των επιστημολογικών προσεγγίσεων, των γνωστικών και ιστορικών ιδεωδών των πολιτισμικών και μορφωτικών αξιών των Μαθηματικών από τους φοιτητές και πτυχιούχους μαθηματικούς. Και είναι αλήθεια ότι αυτό το κενό επηρεάζει λίγο έως καθόλου τους ελάχιστους από τους απόφοιτους των Μαθηματικών Τμημάτων όπου θα στραφούν προς την έρευνα των Μαθηματικών, αλλά αποτελεί μεγάλο μειονέκτημα για την πλειονότητα των πτυχιούχων μαθηματικών που θα διδάξουν, με τον ένα ή άλλο τρόπο, Μαθηματικά. Κι αυτό γιατί ένας σημαντικός ρόλος του "δασκάλου" των Μαθηματικών είναι η καλλιέργεια της μαθηματικής κουλτούρας των μαθηματικών, παράλληλα με την ανάπτυξη του μαθηματικού τρόπου σκέψης. Για το ρόλο όμως αυτό ο πτυχιούχος μαθηματικός είναι, όπως επισημάναμε, απροετοίμαστος και μάλλον ανυποψίαστος, λόγω του φορμαλιστικού χαρακτήρα των πανεπιστημιακών Μαθηματικών. Είναι φανερό ότι και σ' αυτή την περίπτωση καλείται η Διδακτική των Μαθηματικών να καλύψει την ανεπάρκεια της μονολιθικότητας των καθαρών Μαθηματικών στην προετοιμασία των "δασκάλων" των Μαθηματικών.

Γίνεται φανερό από τις προηγούμενες επισημάνσεις ότι το απόφθεγμα, το σλόγκαν:

> για να είσαι καλός "δάσκαλος" των Μαθηματικών πρέπει να ξέρεις καλά Μαθηματικά και να είσαι καλός άνθρωπος,

που υπάρχει σιωπηρά ή δημόσια διατυπωμένο, είναι παραπλανητικό και ανασταλτικό. Παραπλανητικό γιατί τονίζει έναν καθαρά μαθηματικό λογιοτατισμό και μια απλοϊκή ηθικοκρατία κι όχι την αναγκαιότητα της εξειδικευμένης μόρφωσης και κατάρτισης του "δασκάλου" των Μαθηματικών, ούτε την αξία μιας ολόπλευρης προσωπικότητας

του. Κι έχει ανασταλτικό χαρακτήρα γιατί πίσω από την αποσιώπηση της σημασίας της Διδακτικής των Μαθηματικών στην επιστημονική και επαγγελματική εξειδίκευση του "δασκάλου" αυτού του μαθήματος κρύβεται η μη αναγνώριση της στο σύστημα των ακαδημαϊκών Μαθηματικών και κατά συνέπεια περιθωριοποιείται και εμποδίζεται η ανάπτυξη κι ο ρόλος της. Είναι το ίδιο σα να λέμε ότι ο καλός εκλογολόγος θα πρέπει να ξέρει καλά Μαθηματικά και να είναι έντιμος άνθρωπος, παραγνωρίζοντας τη Στατιστική ως τον κατ' εξοχή μαθηματικό κλάδο που χαρακτηρίζει την ειδικότητα αυτή.

Συμπερασματικά θα λέγαμε ότι η Διδακτική των Μαθηματικών είναι μια πρόκληση για την ποιότητα της ειδικότητας του "δασκάλου" των Μαθηματικών και για την αποστεγανοποίηση του καθαρού μαθηματικού Λόγου.

Παραπομπές - Σημειώσεις

[1] βλ. Αλιμπινίση,Α κ.ά: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ, Τεύχος Α΄, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων 1987, σελ. 115.

[2] βλ. Λάκκη, Κ.: Άλγεβρα, Θεσ/νίκη, 1980, σελ. 93-96.

[3] βλ. Το ίδιο, σελ 96.

[4] βλ. Παιδαγωγική Ψυχολογική Εγκυκλοπαίδεια Λεξικό, εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα, 1989, τόμος 2ος, σελ. 708-710. Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο ίδιος συγγραφέας έχει την ίδια στάση και στο βιβλίο του "Διδακτική των Μαθηματικών", εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα, 1988, σελ. 320-7.

[5] βλ. Hart, K. et. al.: Children's Understanding of Mathematics, John Murray, 1981, σελ 64-81 και Χασάπη Δ.: Προβλήματα κατανόησης βασικών αριθμητικών εννοιών, περ. Σύγχρονη Εκπαίδευση, 12, 1983, σελ 54-7.

[6] βλ. Βαϊνά, Κ.: Συμβολή στη Διδασκαλία των Μαθηματικών του Δημοτικού, εκδ. Τυποσπουδή, 1995, σελ. 26.

[7] βλ. Pitkethly, A/R Hunting: A Review of Recent Research in the Area of Inintial Fraction Concepts, Educational Studies in Mathematics 30,1996, σελ. 5-38, ειδ. σελ. 5 και Critical Reviews in Mathematics Education, Materien und Studien, Band 9, Institut fur Didaktik der Mathematik der Universitat Bielefeld, 1979, σελ. 12-13.

[8] βλ. Δημητρίου, Α.: Γνωστική Ανάπτυξη, εκδόσεις ART of TEXT, 1993, σελ. 388-9

[9] βλ. Hψyrup, J.: In Measure, Number and Weight, State University of New York Press, 1994, σελ 279-80.

[10] βλ. Pera, M.: The Discourses of Science, The University of Chicago Press, 1994.

[11] βλ. π.χ. Gaukrocer, S.: Explanatory Structures, The Harvester Press, 1978.

[12] Κώδικας επικοινωνίας είναι ένα σύστημα, σημείων ή συμβόλων που διαμορφώνει ένα σημασιολογικό πεδίο στα πλαίσια μιας επικοινωνιακής κοινότητας.

[13] Επιστημονικό "παράδειγμα" είναι ένα συγκροτημένο σύνολο πεποιθήσεων, κριτηρίων εγκυρότητας, μεθοδολογικών αρχών και διαδικασιών στα πλαίσα της επιστήμης, που ασπάζονται τα μέλη μιας επιστημονικής κοινότητας.

[14] Γνωστικό στυλ (δηλ ύφος) είναι ένα πρότυπο του τρόπου ανάπτυξης και ελέγχου της γνωστικής διαδικασίας που χαρακτηρίζει τη νοητική συμπεριφορά ομάδας ανθρώπων.

[15] βλ. Fauvel,J: Cartesian and Euclidean Rhetoric, For the Learning of Mathematics, 8(1), 1988, σελ. 25-9
Ως ρητορική θεωρείται, εδώ, το πώς χρησιμοποιείται η γλώσσα στη μαθηματική επικοινωνία. Η Ευκλείδεια ρητορική χαρακτηρίζεται ως μια γραμμική, αυτάρκης και

κλειστή παρουσίαση "άκαμπτων" και "αναλλοίωτων" αληθειών, ενώ η καρτεσιανή επικεντρώνεται στην έκθεση των ευρετικών μεθόδων, μ' ένα τρόπο προσωπικής εκμυστήρευσης, ανοικτό και θεωρητικά μη συμπαγή.

[16] βλ. Calinger, R. (ed): Vita Mathematica, The Mathematical Association of America, 1996, σελ. 145,148. Η "αλγεβρική ανάλυση" αποτελούσε ένα είδος Μαθηματικών, στα τέλη του 18ου και στη διάρκεια του 19ου αιώνα, που χαρακτηρίζεται από την αλγεβρο-συνδυαστική θεώρηση και τρόπο διαπραγμάτευσης τους.

[17] βλ. Ausejo, E. / M. Hormigón (eds): Paradigms and Mathematics, Siglo XX1 de Espana Editores, 1996 σελ. 243.

[18] βλ. Hadamard, J.: Ψυχολογία της Επινόησης στα Μαθηματικά, εκδ. Κάτοπτρο, 1995, σελ. 110.

[19] βλ. Flato, M.: Η ισχύς τως Μαθηματικών, εκδ. Κάτοπτρο, 1993, σελ. 85.

[20] βλ. Σταμάτη, Ε.Σ.: Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, εν Αθήναις, 1976, σελ. 175 και του ιδίου: Ελληνικά Μαθηματικά, Αθήναι, 1976, σελ. 126-7.

[21] βλ. Καστάνη, Ν.: Ένα ιστορικό μνημείο "Ευκλείδειας σκλήρυνσης" στη νεώτερη Ελλάδα, Ενημερωτικό Φυλλάδιο του Ομίλου για την Ιστορία των Μαθηματικών, τεύχος 7, Φευβρουάριος 1988, σελ. 12.

[22] βλ. Καστάνη, Ν.: "Να φύγει ο Ευκλείδης - Δεν θα γίνουμε εθνικοί μειοδότες". Μια ιστορικό-διδακτική εξέταση της αντίφασης στη σχολική μας γεωμετρία. Μαθηματική Επιθεώρηση, 31, 1986, σελ 3-18, ειδ σελ. 3.

[23] βλ. Ausejo, E / M Hormigón, πρ. παρ. [17], σελ. 246 και Barton, B: Making Sense of Ethnomathematics: Ethnomathematics is Making Sense, Educational Studies in Mathematics, 31, 1996, σελ. 201-233.