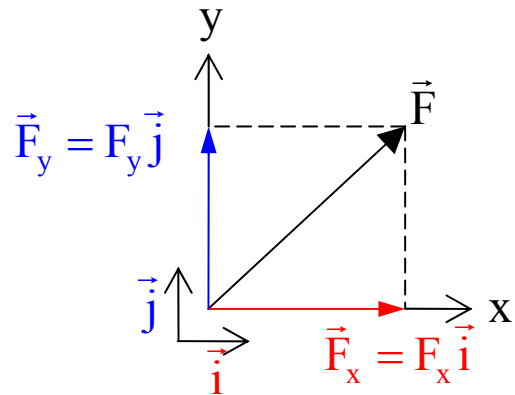


ΔΥΝΑΜΗ ΚΑΙ ΡΟΠΗ

Διάλυση δύναμης \vec{F}

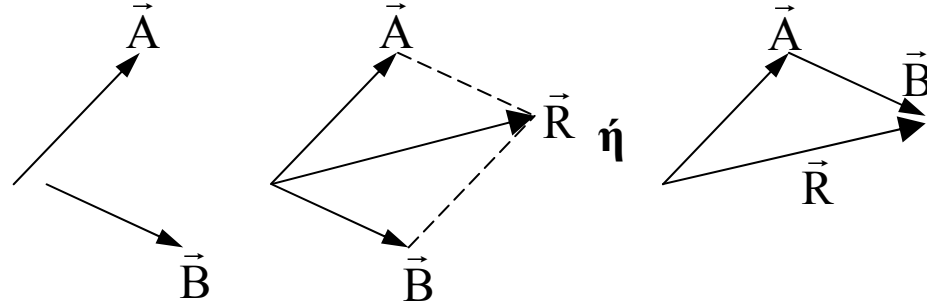
- Καρτεσιανές Συντεταγμένες / Συνιστώσες



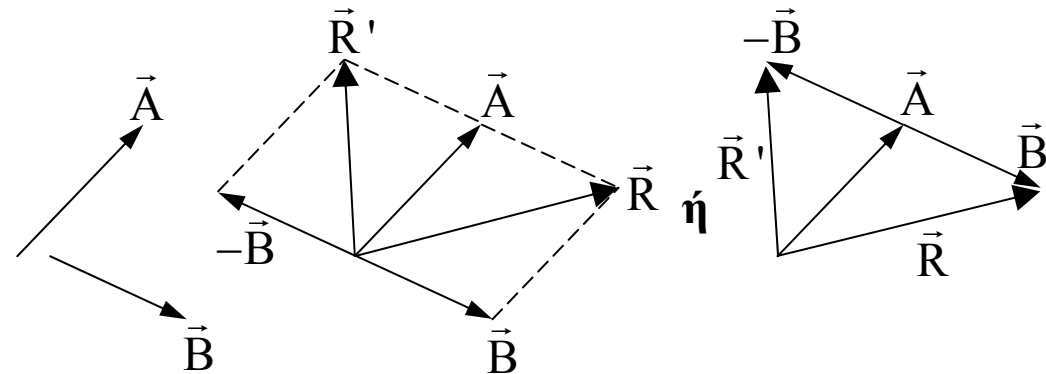
$$\begin{cases} F_x = |F| \cos \theta & \text{Νόμος Παραλληλογράμμου: } \vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} \\ F_y = |F| \sin \theta & \text{Μοναδιαία διανύσματα βάσης: } \vec{i}, \vec{j} \\ |F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \end{cases}$$

Ιδιότητες διανυσμάτων

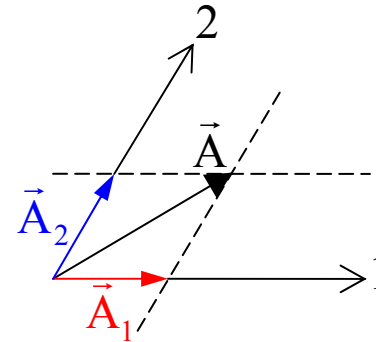
- Πρόσθεση $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$



- Αφαίρεση $\vec{R}' = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

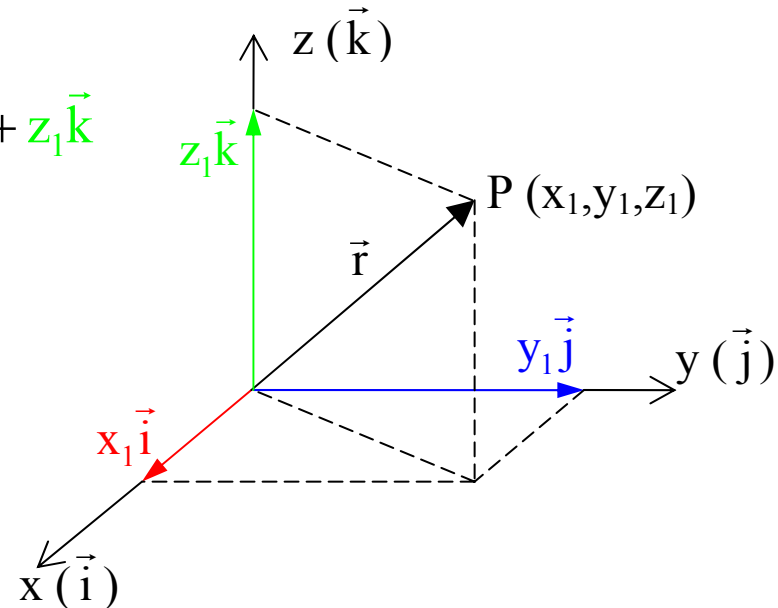


- Συνιστώσες διανύσματος: \vec{A} : $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$



- Διάνυσμα θέσης:

$$\vec{r} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$



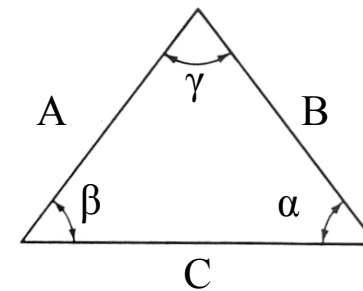
- Τριγωνομετρικές ιδιότητες:

α) Νόμος Ημιτόνων:

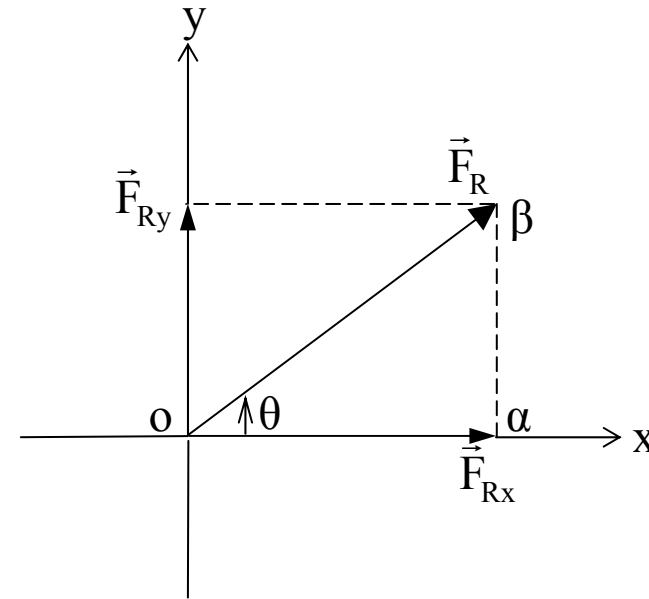
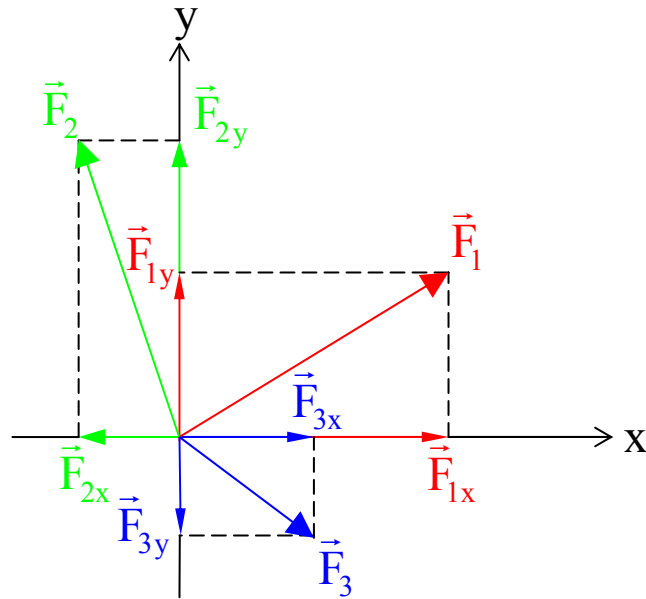
$$\frac{A}{\sin \alpha} = \frac{B}{\sin \beta} = \frac{C}{\sin \gamma}$$

β) Νόμος Συνημιτόνων:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma}$$



“Συντρέχον” σύστημα δυνάμεων



- Γι' αυτήν την περίπτωση (συντρέχουσες δυνάμεις) γίνεται αλγεβρική πρόσθεση των συνιστωσών ώστε να υπολογιστεί η συνισταμένη δύναμη \vec{F}_R όπως φαίνεται στο σχήμα:

$$\vec{F}_R = \Sigma \vec{F} = \vec{F}_{Rx} + \vec{F}_{Ry} = F_{Rx} \vec{i} + F_{Ry} \vec{j} = (\Sigma F_x) \vec{i} + (\Sigma F_y) \vec{j}, \text{ αφού } F_{Rx} = \Sigma F_x, F_{Ry} = \Sigma F_y$$

- Το μέτρο της δύναμης δίνεται από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο οαβ:

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

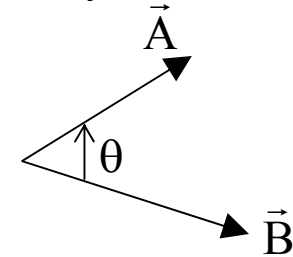
- Το συνημίτονο κατεύθυνσης της δύναμης δίνεται από τη σχέση:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \right)$$

Γινόμενα διανυσμάτων – Εσωτερικό γινόμενο

- Το εσωτερικό γινόμενο δύο τυχαίων διανυσμάτων είναι **βαθμωτό** μέγεθος και δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$



- Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (\text{ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα})$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \quad (\text{ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα})$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j}) \cdot (B_x \vec{i} + B_y \vec{j}) = A_x B_x + A_y B_y$$

- Με βάση τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου, για τα μοναδιαία διανύσματα ισχύουν οι εξής σχέσεις: **α)** $\vec{i} \cdot \vec{i} = (1)(1) \cos 0^\circ = 1$, **β)** $\vec{i} \cdot \vec{j} = (1)(1) \cos 90^\circ = 0$ και ομοίως για τα υπόλοιπα μοναδιαία.

- Γωνία μεταξύ δύο τυχαίων διανυσμάτων: $\theta = \cos^{-1} \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$
όπου, $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$, $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$

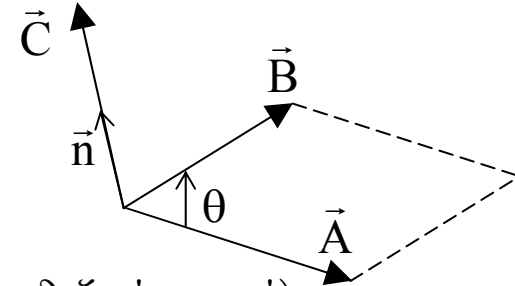
Γινόμενα διανυσμάτων – Εξωτερικό γινόμενο

• Το εξωτερικό γινόμενο δύο τυχαίων διανυσμάτων είναι **διανυσματικό** μέγεθος και δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (AB \sin \theta) \vec{n},$$

όπου το διάνυσμα \vec{n} είναι μοναδιαίο και **κάθετο** στο επίπεδο AB

(η φορά του διανύσματος \vec{C} προσδιορίζεται με το κανόνα του μοχλού του δεξιού χεριού)



• Ιδιότητες εξωτερικού γινομένου:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) = \vec{A} \times \vec{B}_1 + \vec{A} \times \vec{B}_2$$

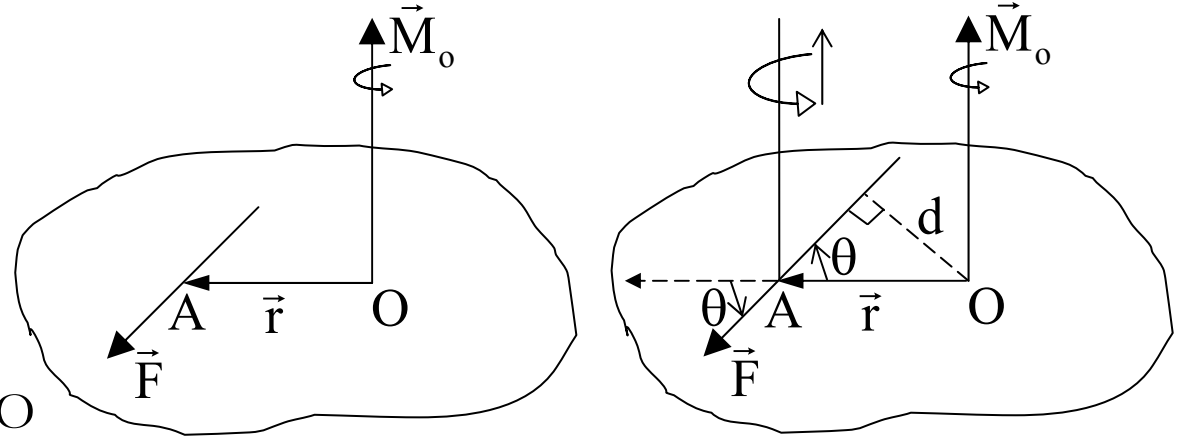
$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - B_y A_z) \vec{i} - (A_x B_z - B_x A_z) \vec{j} + (A_x B_y - B_x A_y) \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

• Για τα μοναδιαία διανύσματα ισχύουν οι εξής σχέσεις: **α)** $\vec{i} \times \vec{j} = (1)(1)(\sin 90^\circ) \vec{k} = \vec{k}$
β) $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$ **γ)** $\vec{i} \times \vec{i} = 0$ και ομοίως για τα υπόλοιπα μοναδιαία.

Διάγραμμα Ροπής Δύναμης M

- Η ροπή είναι διανυσματικό μέγεθος και δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$
 όπου $\vec{r} \equiv$ διάνυσμα θέσης από το σημείο O σε κάθε σημείο της γραμμής δράσης της \vec{F} .



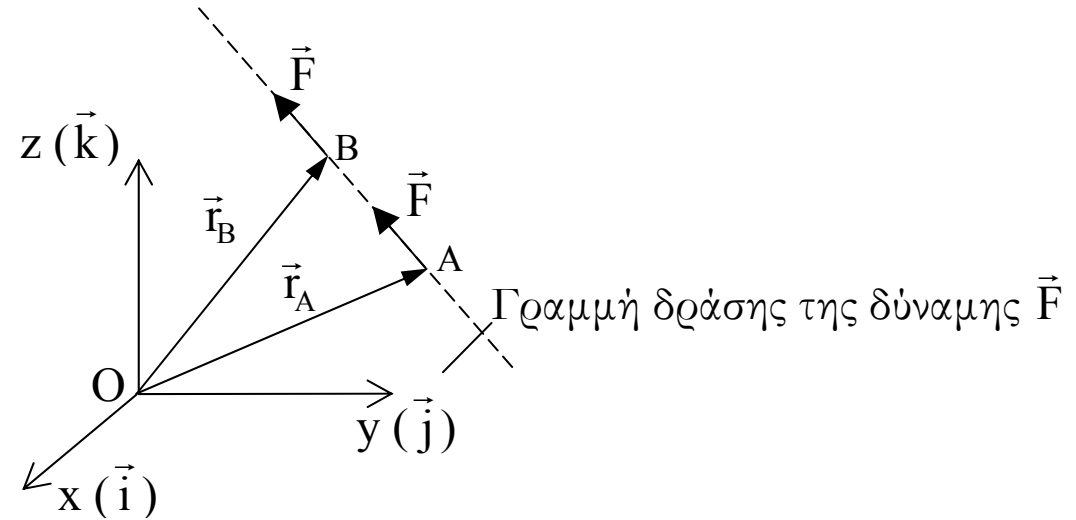
- Η δύναμη \vec{F} προκαλεί περιστροφή της ράβδου ως προς το σημείο O (μέτρο M_O).
- Το μέτρο της ροπής υπολογίζεται από το τύπο: $M_O = rF \sin \theta = F(r \sin \theta) = Fd$ όπου $d =$ βραχίονας ροπής (κάθετη απόσταση από το σημείο O στη γραμμή δράσης της F).
- Η κατεύθυνση του \vec{M}_O καθορίζεται από τον κανόνα του μοχλού όπως εφαρμόζεται και στο εξωτερικό γινόμενο $\vec{r} \times \vec{F}$.

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = (r_y F_z - r_z F_y) \vec{i} - (r_x F_z - r_z F_x) \vec{j} + (r_x F_y - r_y F_x) \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Αρχή Μετατόπισης της Δύναμης F

- Η δύναμη F μπορεί να μετατοπιστεί στη γραμμή δράσης χωρίς να μεταβληθεί η ροπή της ως προς το O. Δηλαδή ισχύει η παρακάτω ισότητα:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_A \times \vec{F} = \vec{r}_B \times \vec{F}$$



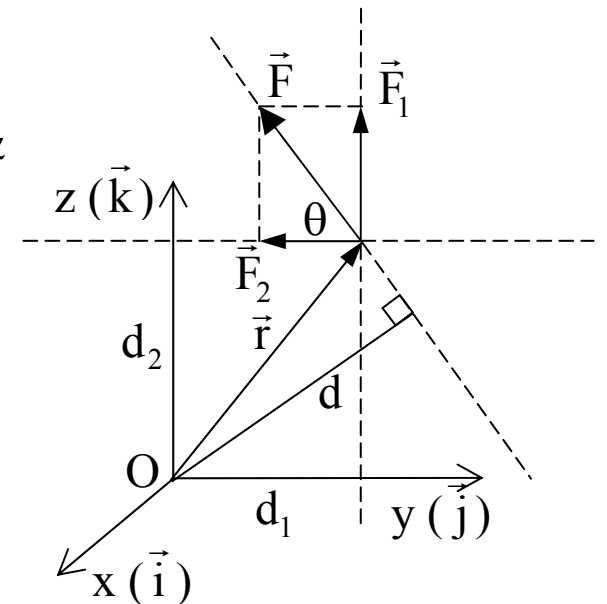
Αρχή Ροπών

- Η ροπή δύναμης ως προς το σημείο O είναι ίση με το άθροισμα των ροπών των συνιστωσών της ως προς το σημείο O:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{r} \times \vec{F}$$

- Το μέτρο της ροπής υπολογίζεται από την ήδη γνωστή σχέση, λαμβάνοντας υπόψη και τη γεωμετρία του προβλήματος που φαίνεται στο διπλανό σχήμα:

$$|M_O| = Fd = (F_1 + F_2)d = (F \sin \theta + F \cos \theta)d$$



Ροπή Δύναμης (M_e) ως προς Άξονα e

- Η ροπή της Δύναμης F ως προς το σημείο O δίνεται από τη σχέση:

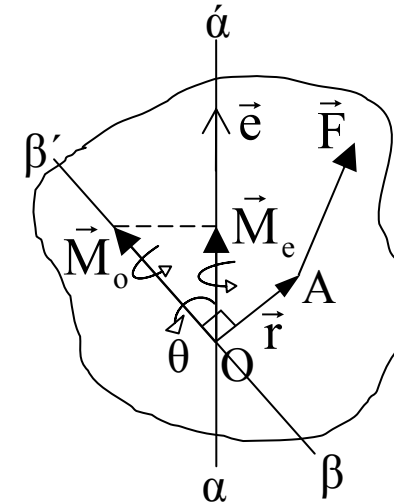
$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

- Η ροπή της Δύναμης F ως προς τον άξονα e , είναι η προβολή του διανύσματος M_O στον άξονα e . Δηλαδή:

$$\vec{M}_e = \vec{e} \cdot \vec{M}_O = \vec{e} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) \text{ [μεικτό τριπλό γινόμενο]}$$

$$\vec{M}_e = (e_x \vec{i} + e_y \vec{j} + e_z \vec{k}) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{M}_e = M_e \vec{e} = [\vec{e} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})] \vec{e}$$

$\alpha\alpha' =$ Γραμμή δράσης ροπής M_e

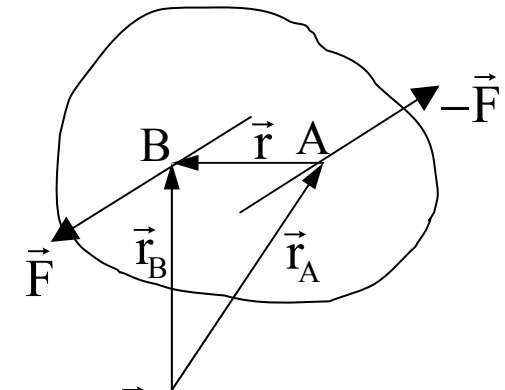


$\beta\beta' =$ Γραμμή δράσης ροπής M_O

Ροπή Ζεύγους

- Ζεύγος \equiv Δυο παράλληλες δυνάμεις ίσου μεγέθους και αντίθετης φοράς με απόσταση r .
- Η ροπή παραγόμενη από ζεύγος είναι ίση με το άθροισμα των ροπών και των δυο δυνάμεων ως προς τυχαίο σημείο O :

$$\vec{M}_O = \vec{r}_B \times \vec{F} + \vec{r}_A \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F} \Rightarrow \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

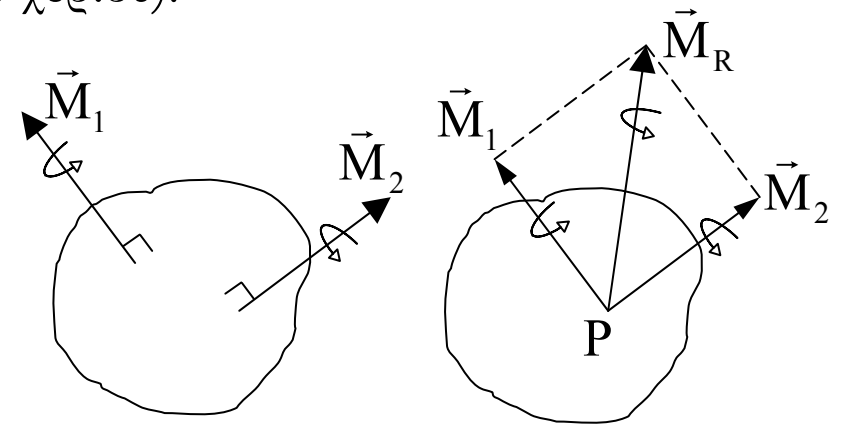


- Το διάνυσμα \vec{M}_O είναι **ελεύθερο** μιας και εξαρτάται από το διάνυσμα θέσης, οριζόμενο από δυο τυχαία σημεία A και B και μπορεί να ενεργεί σε κάθε σημείο. Η κατεύθυνση του \vec{M}_O καθορίζεται από το κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία (κανόνας του δεξιού χεριού).

Συνισταμένη Ροπών

- Οι ροπές ζευγών είναι ελεύθερα διανύσματα και μπορούν να μετατοπισθούν σε ένα κοινό σημείο P και να προστεθούν διανυσματικά. Δηλαδή:

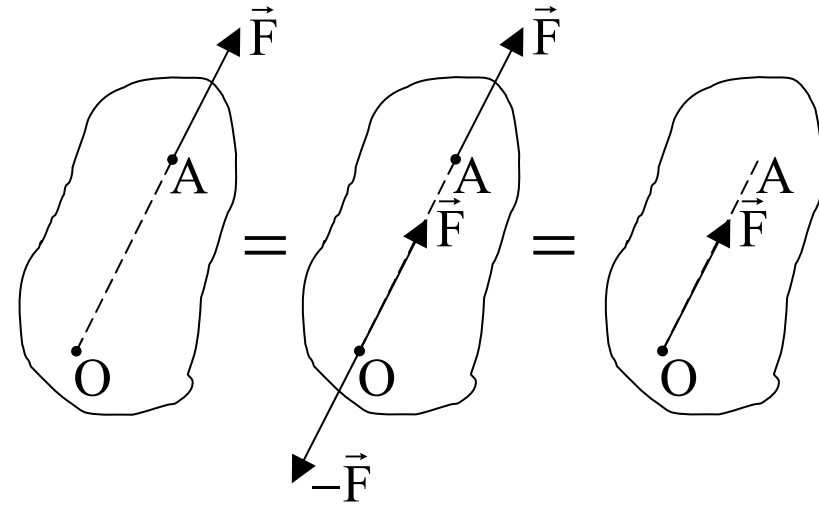
$$\vec{M}_R = \Sigma \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$



Μετατόπιση Δύναμης σ' ένα Στερεό

1) Μετατόπιση της F σε ένα σημείο O στη γραμμή δράσης της.

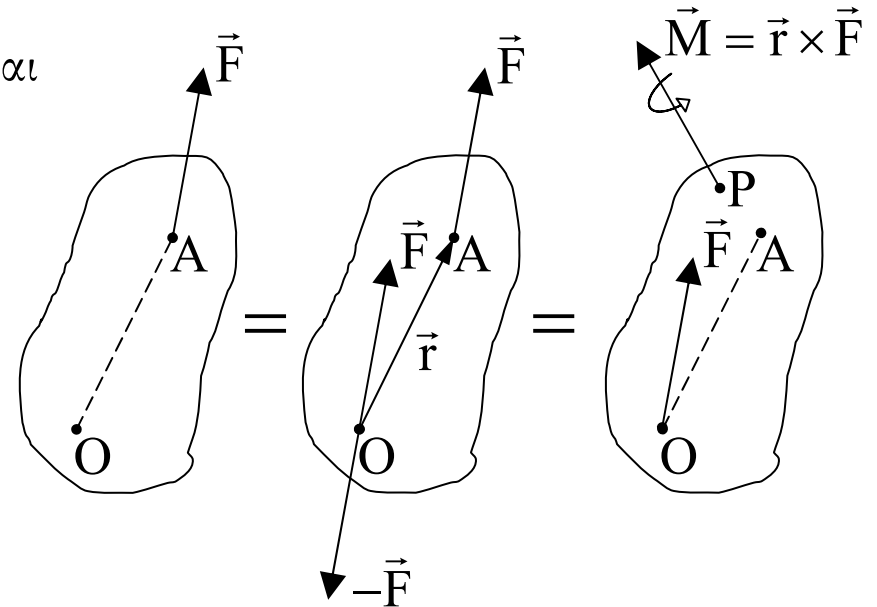
- Αρχή μετατόπισης: Το αποτέλεσμα δράσης της δύναμης σε ένα στερεό σώμα δεν αλλάζει, όταν η δύναμη εφαρμόζεται σε ένα άλλο σημείο που βρίσκεται στη γραμμή δράσης. Η \vec{F} είναι ένα μετατοπιζόμενο διάνυσμα.



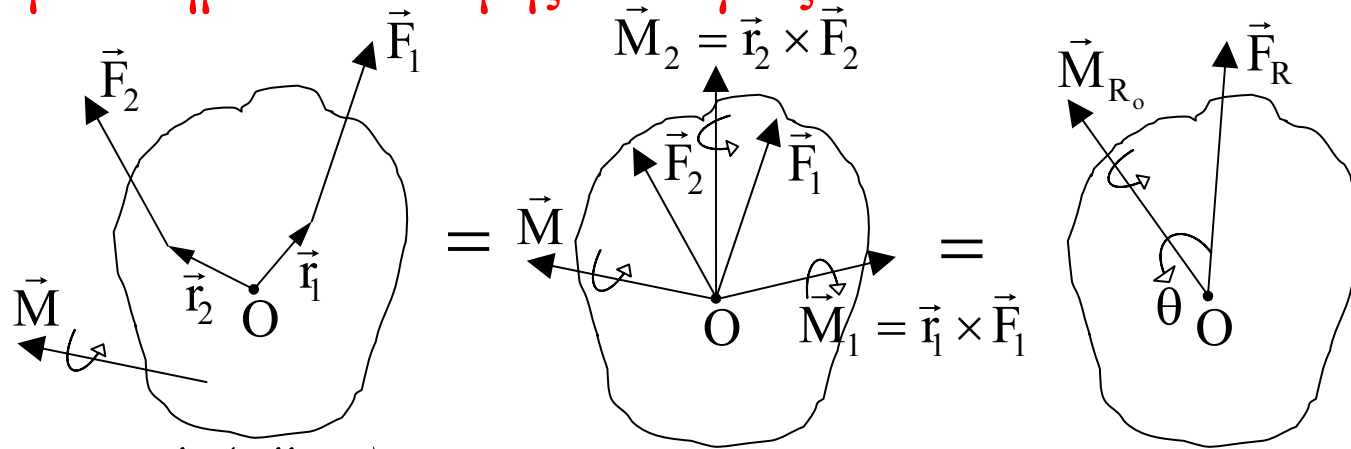
2) Μετατόπιση της \vec{F} σε ένα σημείο O που δεν βρίσκεται στη γραμμή δράσης της.

- Το μέτρο και η κατεύθυνση της \vec{M} προσδιορίζονται υπολογίζοντας τη ροπή ως προς το O όταν η δύναμη βρίσκεται στην αρχική της θέση.

- Το \vec{M} είναι κάθετο στο επίπεδο που σχηματίζουν τα διανύσματα \vec{r} και \vec{F} .



Συνισταμένη Συστημάτων Δύναμης – Ζεύγους Ροπών



1) 3D (Διανυσματική Ανάλυση)

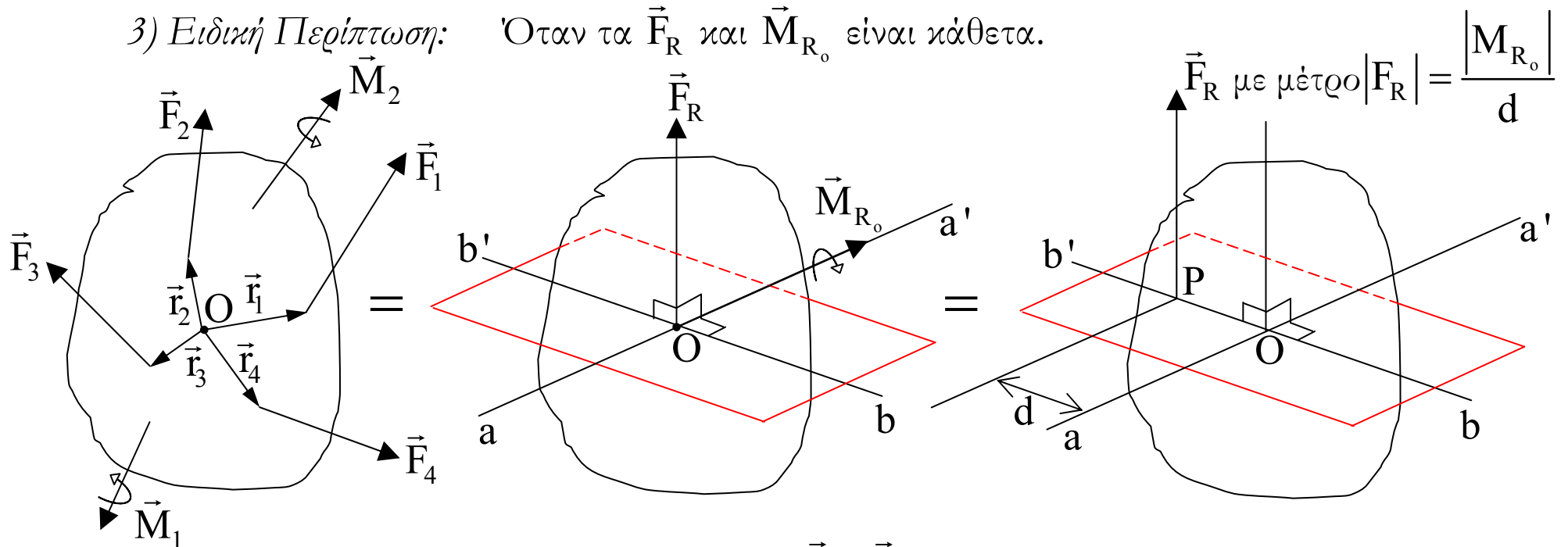
- Το μέτρο και η κατεύθυνση της \vec{F}_R είναι ανεξάρτητα από τη θέση του O . Το \vec{M}_{R_0} είναι ένα ελεύθερο διάνυσμα αλλά το μέτρο και η κατεύθυνση του εξαρτώνται από τη θέση του O .

$$\vec{F}_R = \Sigma \vec{F}, \quad \vec{M}_{R_0} = \Sigma \vec{M} + \Sigma (\vec{r} \times \vec{F}) = \Sigma \vec{M}_0$$

2) 2D (Βαθμωτή ανάλυση)

$$\left. \begin{array}{l} F_{R_x} = \Sigma F_x \\ F_{R_y} = \Sigma F_y \end{array} \right\} \Rightarrow F_R = \sqrt{F_{R_x}^2 + F_{R_y}^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{F_{R_y}}{F_{R_x}}, \quad M_{R_0} = \Sigma M_0$$

3) Ειδική Περίπτωση: Όταν τα \vec{F}_R και \vec{M}_{R_0} είναι κάθετα.

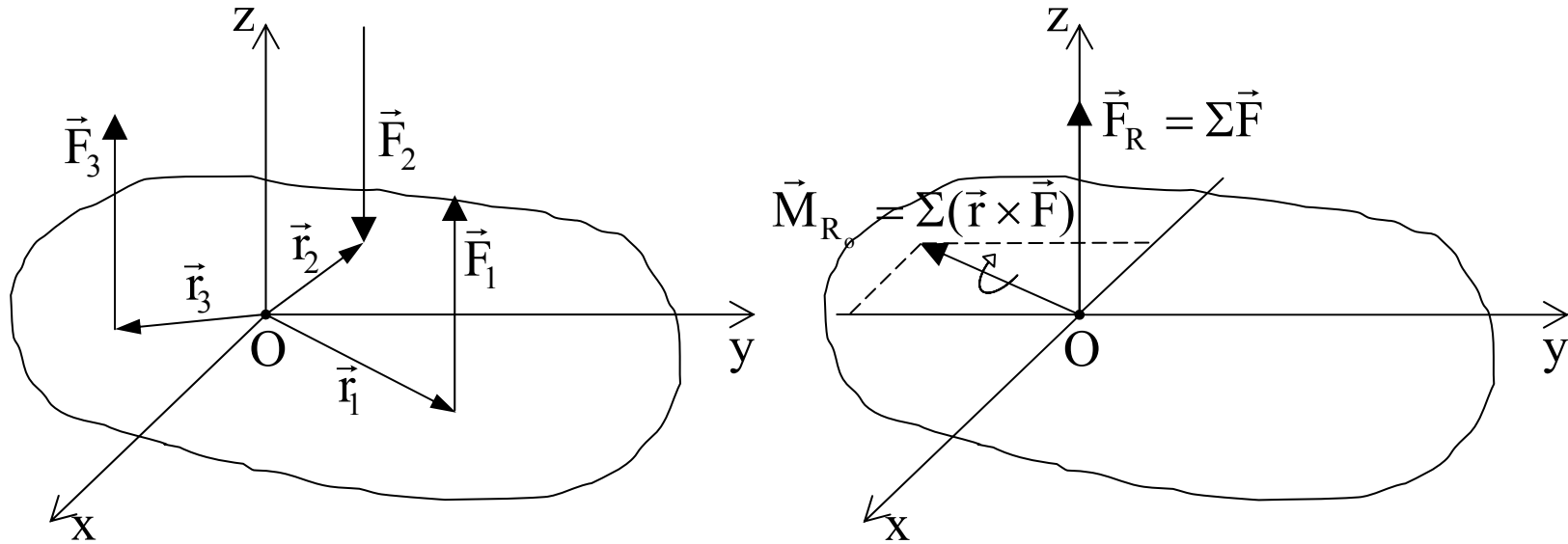


- Και σε αυτή τη περίπτωση οι συνισταμένες \vec{F}_R , \vec{M}_{R_0} προκύπτουν απ' τις σχέσεις:

$$\vec{F}_R = \Sigma \vec{F}, \quad \vec{M}_{R_0} = \Sigma \vec{M} + \Sigma (\vec{r} \times \vec{F}) = \Sigma \vec{M}_0$$

- Η \vec{M}_{R_0} μπορεί πάντα να εξαλειφθεί μετακινώντας την \vec{F}_R στο σημείο P. Το P βρίσκεται έτσι ώστε η σωστή φορά της \vec{M}_{R_0} να διατηρείται, δηλ. η ροπή της \vec{F}_R ως προς το σημείο O είναι ίση με το \vec{M}_{R_0} .

Παράλληλες Δυνάμεις



- $$\mathbf{r}_x = \frac{M_{R_y}}{F_R}, \quad \mathbf{r}_y = \frac{M_{R_x}}{F_R} \text{ και } M_{R_x} = \Sigma M_x, \quad M_{R_y} = \Sigma M_y \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{r}_x F_R = \Sigma M_y \\ \mathbf{r}_y F_R = \Sigma M_x \end{cases}$$

Διανεμημένα Φορτία

- Σημειακές Δυνάμεις \approx οριακή περίπτωση κατανεμημένων δυνάμεων.
- Συνισταμένη Γραμμικού Φορτίου.

$$w = w(x) = \text{Δύναμη/Μήκος}$$

$$dF = w(x)dx = dA$$

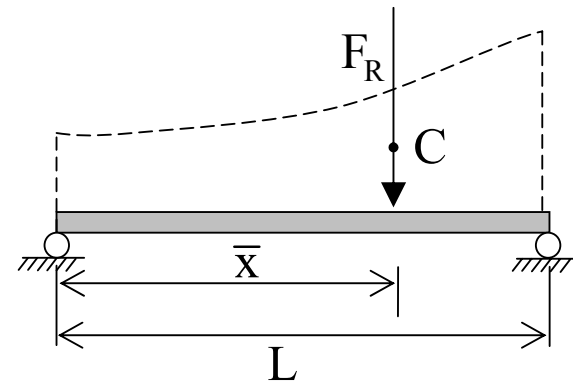
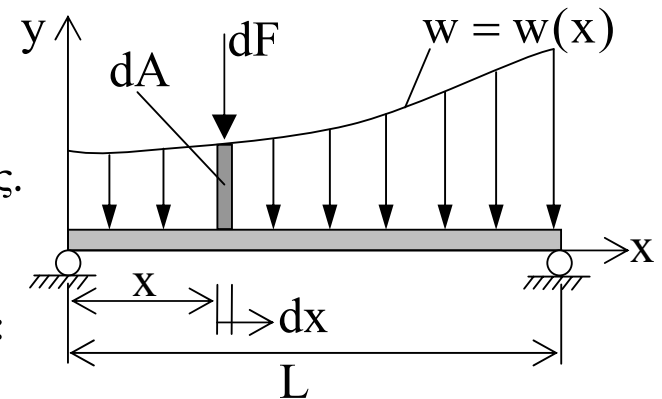
όπου dA είναι το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.

- Ολοκληρώνοντας τη παραπάνω σχέση στο μήκος της ράβδου παίρνουμε μια σχέση για το μέτρο της δύναμης:

$$F = \int_0^L w(x)dx = \int_0^L dA = A$$

- Η συνισταμένη δύναμη F_R του κατανεμημένου φορτίου ασκείται σε ένα σημείο C που αποτελεί τη τετμημένη του γεωμετρικού κέντρου C της επιφάνειας A .

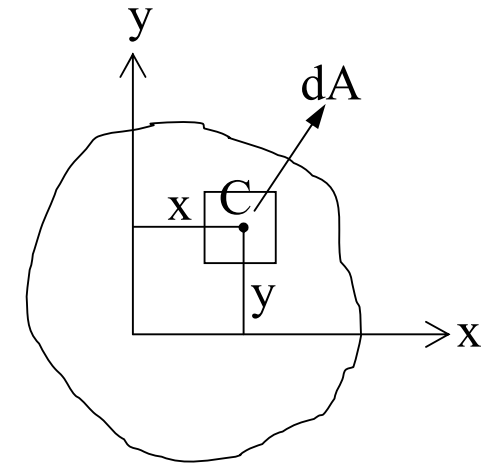
$$F\bar{x} = \int_A x dF = \int_A x dA \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int_A x dA}{F} = \frac{\int_A x dA}{A}$$



Γεωμετρικό Κέντρο (Γ.Κ.) επίπεδων επιφανειών

- Αν η γεωμετρική επιφάνεια έχει άξονα συμμετρίας, το Γ.Κ. βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας. Αν η γεωμετρική επιφάνεια έχει 2 άξονες συμμετρίας, το Γ.Κ. είναι η τομή τους.

$$x_C = \frac{\int x \, dA}{A}, \quad y_C = \frac{\int y \, dA}{A}$$

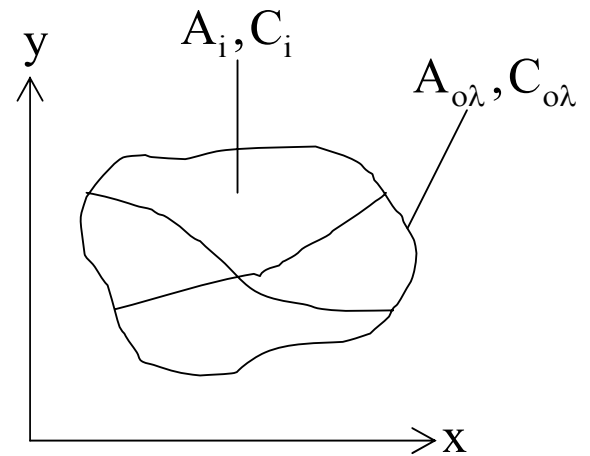


Σύνθετη Επιφάνεια

- Στη περίπτωση σύνθετης επιφάνειας, το Γ.Κ. υπολογίζεται από τα επιμέρους Γ.Κ. των επιφανειών της συνολικής επιφάνειας.

$$x_C = \frac{\int x \, dA}{A} = \frac{\sum \int_{A_i} x_{C_i} \, dA_i}{\sum A_i} = \frac{\sum x_{C_i} A_i}{\sum A_i}$$

$$y_C = \frac{\int y \, dA}{A} = \frac{\sum \int_{A_i} y_{C_i} \, dA_i}{\sum A_i} = \frac{\sum y_{C_i} A_i}{\sum A_i}$$



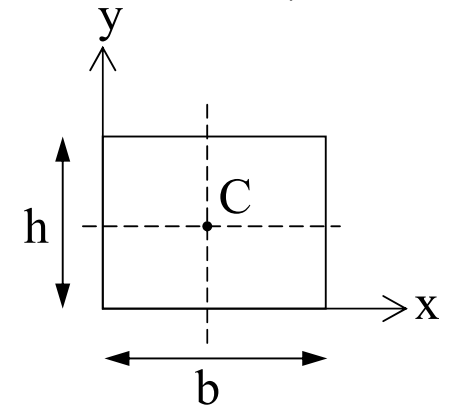
Παραδείγματα Υπολογισμού Γ.Κ. επιφανειών

- Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο

Το Γ.Κ. είναι η τομή των 2 αξόνων συμμετρίας της επιφάνειας. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής:

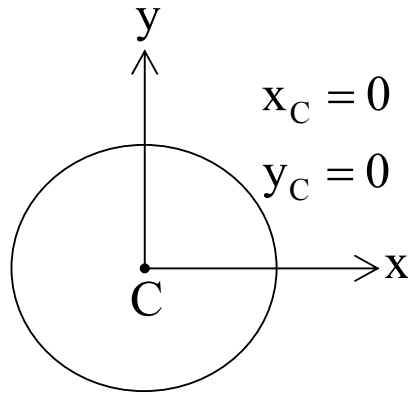
$$x_C = \frac{\int_A x \, dA}{A} = \frac{\int_A x \, dx \, dy}{b \, h} = \frac{\int_0^h dy \int_0^b x \, dx}{b \, h} = \frac{y \Big|_0^h \frac{x^2}{2} \Big|_0^b}{b \, h} = \frac{h \, b^2}{2 \, b \, h} = \frac{b}{2}$$

$$y_C = \frac{\int_A y \, dA}{A} = \frac{\int_A y \, dx \, dy}{b \, h} = \frac{\int_0^b dx \int_0^h y \, dy}{b \, h} = \frac{x \Big|_0^b \frac{y^2}{2} \Big|_0^h}{b \, h} = \frac{b \, h^2}{2 \, b \, h} = \frac{h}{2}$$

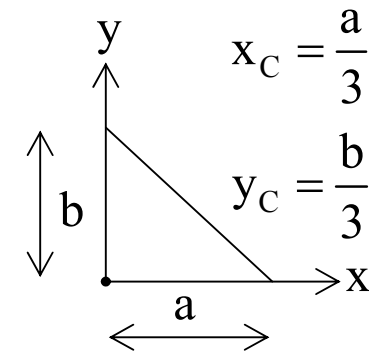


- Παραδείγματα άλλων επιφανειών

Κύκλος



Τρίγωνο



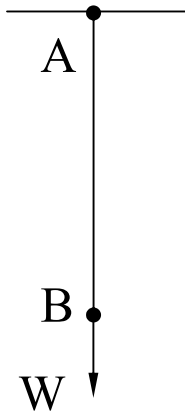
Ισορροπία Υλικού Σημείου

- Υλικό Σημείο ~ Σώμα με μηδενικές διαστάσεις \Rightarrow όλες οι δυνάμεις συντρέχουσες.

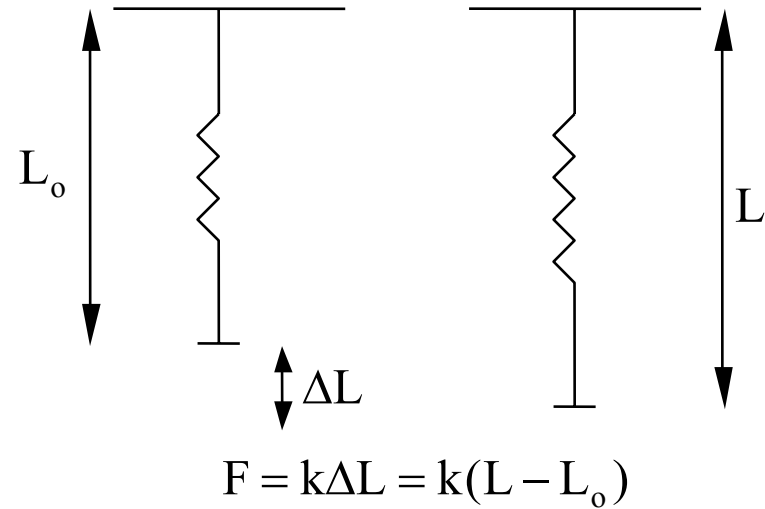
- Συνισταμένη Υλικού Σημείου: $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases}$

- Συνδετικά Μέσα

1) Καλώδια

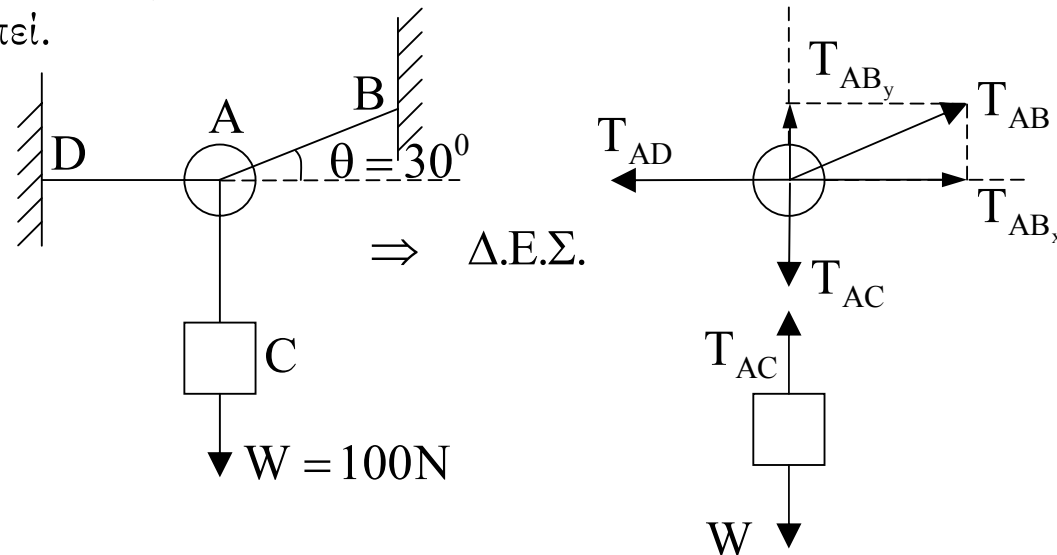


2) Ελατήρια



Παράδειγμα σε Δύο Διαστάσεις

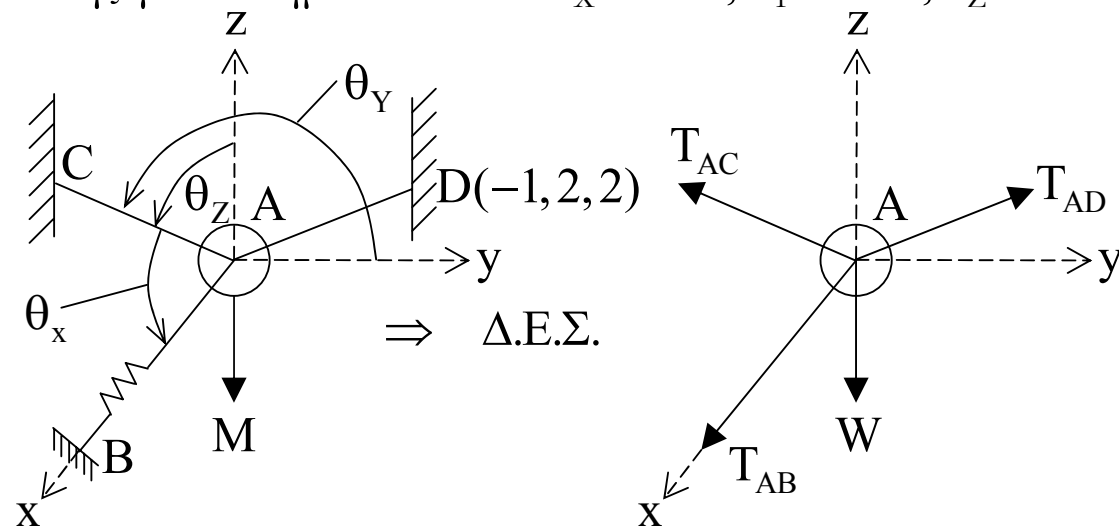
- Να βρεθούν οι δυνάμεις των καλωδίων AD και AB, που ασκούνται στο κρικό A ώστε αυτός να ισοροπεί.



- Η ισορροπία των καθέτων δυνάμεων για το βάρος C μας δίνει:
 $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_{AC} - W = 0 \Rightarrow T_{AC} = 100[\text{N}]$
- Η ισορροπία των καθέτων δυνάμεων για το κρικό A μας δίνει:
 $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_{AB_y} - T_{AC} = 0 \Rightarrow T_{AB} \sin(30^0) = 100 \Rightarrow T_{AB} = 200[\text{N}]$
- Η ισορροπία των οριζοντίων δυνάμεων για το κρικό A μας δίνει:
 $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_{AB_x} - T_{AD} = 0 \Rightarrow T_{AB} \cos(30^0) = T_{AD} \Rightarrow T_{AD} = 173[\text{N}]$

Παράδειγμα σε Τρεις διαστάσεις

- Κύλινδρος μάζας 100 Kg αναρτάται από δύο νήματα και ένα ελατήριο σταθεράς $K=1,5 \text{ KN/m}$. Να βρεθούν οι δυνάμεις των νημάτων και η επιμήκυνση του ελατηρίου. Οι γωνίες κατεύθυνσης για το νήμα AC είναι: $\theta_x = 120^\circ$, $\theta_y = 135^\circ$, $\theta_z = 60^\circ$.



- Η ισορροπία των δυνάμεων για το κύλινδρο μας δίνει: $\Sigma \vec{F} = \vec{T}_{AB} + \vec{T}_{AC} + \vec{T}_{AD} + \vec{W} = 0$
- Αναλύουμε τα διανύσματα του προβλήματος με βάση τα μοναδιαία διανύσματα των κυρίων αξόνων. Έτσι προκύπτει για τα \vec{T}_{AB} , \vec{T}_{AC} , \vec{T}_{AD} και \vec{W} :

$$\vec{T}_{AB} = T_{AB} \vec{i}$$

$$\vec{T}_{AC} = [T_{AC} \cos(120^\circ)]\vec{i} + [T_{AC} \cos(135^\circ)]\vec{j} + [T_{AC} \cos(60^\circ)]\vec{k} T_{AC} =$$

$$= -0,5 T_{AC} \vec{i} - 0,707 T_{AC} \vec{j} + 0,5 T_{AC} \vec{k}$$

$$\vec{T}_{AD} = T_{AD} \left[\frac{-1\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} \right] = -0,33 T_{AD} \vec{i} + 0,67 T_{AD} \vec{j} + 0,67 T_{AD} \vec{k}$$

$$\vec{W} = -981\vec{k}$$

• Γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας του σώματος, ώστε να υπολογίσουμε τις άγνωστες δυνάμεις και στη συνέχεια την επιμήκυνση του ελατηρίου:

$$\begin{cases} \Sigma F_X = 0 \\ \Sigma F_Y = 0 \\ \Sigma F_Z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{AB} - 0,5 T_{AC} - 0,33 T_{AD} = 0 \\ -0,707 T_{AC} + 0,67 T_{AD} = 0 \\ 0,5 T_{AC} + 0,67 T_{AD} - 981 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{AB} = 694[\text{N}] \\ T_{AC} = 813[\text{N}] \\ T_{AD} = 862[\text{N}] \end{cases}$$

$$T_{AB} = K \Delta l_{AB} \Rightarrow \Delta l_{AB} = \frac{T_{AB}}{K} = \frac{694[\text{N}]}{1,5 \cdot 10^3 [\text{N/m}]} = 0,462[\text{m}]$$

Ισορροπία Στερεού Σώματος

- Η ισορροπία δυνάμεων στο σημείο i μας δίνει:
 $\Sigma \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{F}_i + \Sigma \vec{F}_{ij} = 0$, όπου \vec{F}_i εξωτερική και \vec{F}_{ij} εσωτερική.

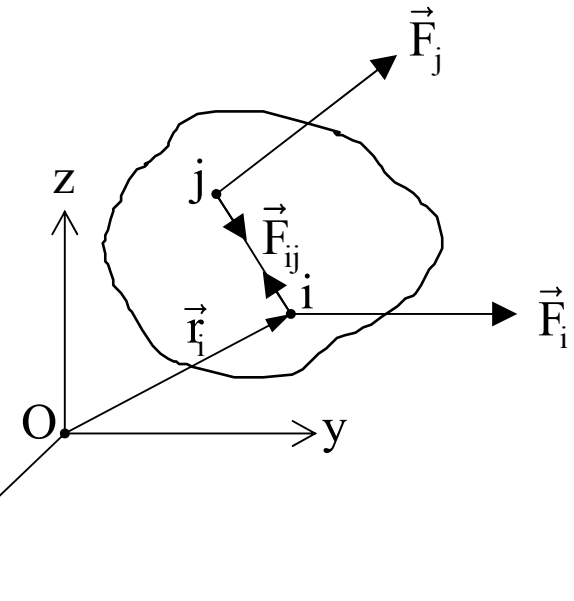
- Η ισορροπία δυνάμεων σε όλο το σώμα μας δίνει:
 $\Sigma[\Sigma \vec{F}_i] = \Sigma[\vec{F}_i + \Sigma \vec{F}_{ij}] = 0 \Rightarrow \Sigma \vec{F}_i + \Sigma \Sigma \vec{F}_{ij} = 0 \Rightarrow \Sigma \vec{F} = \Sigma \vec{F}_i = 0$
 0 , νόμος δράσης-αντίδρασης

- Το συμπέρασμα που προκύπτει από τη παραπάνω σχέση είναι ότι το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων είναι ίσο με μηδέν.

- Ομοίως για τις ροπές ως προς το σημείο i :
 $\Sigma \vec{M}_i = 0 \Rightarrow \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \Sigma \vec{F}_{ij}) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \Sigma \vec{F}_{ij} = 0$

- Η ισορροπία ροπών για όλο το σώμα μας δίνει:
 $\Sigma[\Sigma \vec{M}_i] = 0 \Rightarrow \Sigma[\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \Sigma \vec{F}_{ij}] = \Sigma[\vec{r}_i \times \vec{F}_i] = 0 \Rightarrow \Sigma \vec{M}_O = 0$

δηλαδή το άθροισμα των ροπών ως προς το O είναι ίσο με το μηδέν.

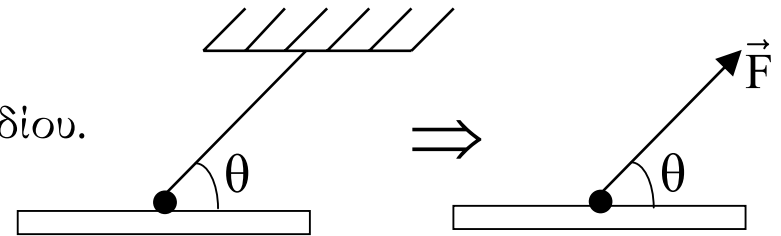


Σύνδεσμοι / Αντιδράσεις συνδέσμων

- Τύποι συνδέσμων/Αντιδράσεις

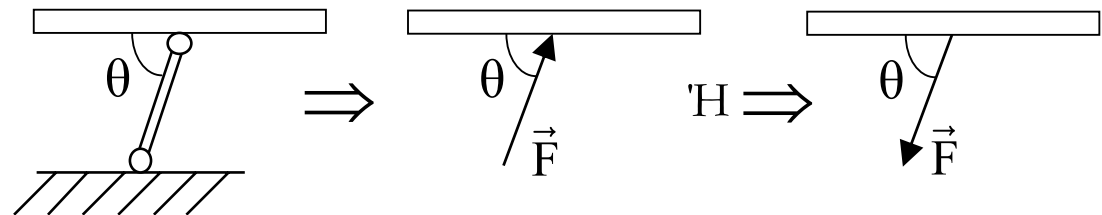
1) Καλώδιο

Προκύπτει ένας άγνωστος η δύναμη \vec{F} ,
η οποία είναι εφελκυστική και στη διεύθυνση του καλωδίου.



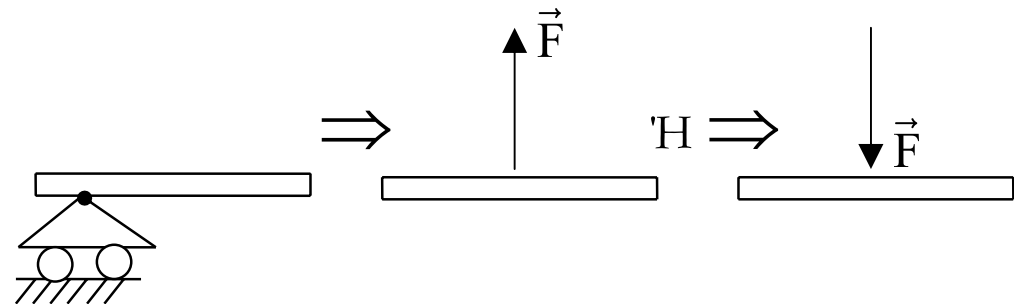
2) Δεσμική ράβδος

Προκύπτει ένας άγνωστος η δύναμη \vec{F} ,
η οποία είναι στη διεύθυνση της ράβδου.



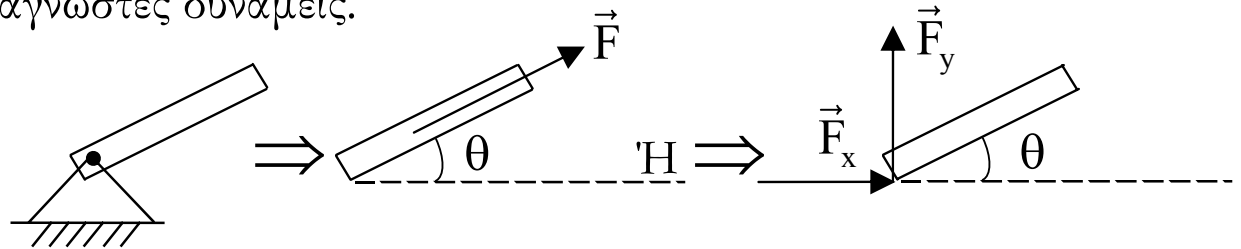
3) Κύλιση

Προκύπτει ένας άγνωστος η δύναμη \vec{F} ,
η οποία είναι κάθετη στην επιφάνεια στήριξης.



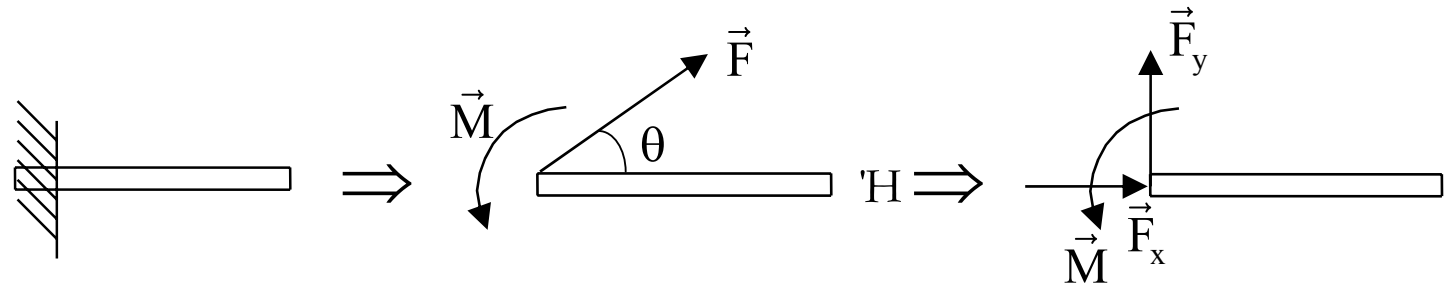
4) Άρθρωση

Προκύπτει ένας άγνωστος η δύναμη \vec{F} , η οποία είναι παράλληλη στην επιφάνεια στήριξης.
Η δύναμη \vec{F} αναλυόμενη δίνει 2 άγνωστες δυνάμεις.



5) Πάκτωση

Προκύπτουν τρεις άγνωστοι, οι 2 συνιστώσες της δύναμης \vec{F} και η ροπή \vec{M} .



Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος (Δ.Ε.Σ.)

- Σχεδιάζουμε το σώμα ελεύθερο από συνδέσμους και στις θέσεις τους βάζουμε άγνωστες αντιδράσεις. Το βάρος του σώματος ασκείται στο Κ.Β. που για **ομογενή** σώματα συμπίπτει με το Γ.Κ.

- Γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για το σώμα:

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma \vec{F} = 0 \\ \Sigma \vec{M}_o = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \Sigma \vec{F}_x = 0 \\ \Sigma \vec{F}_y = 0 \\ \Sigma \vec{M}_o = 0 \end{array} \right\}$$

- Σε ισοδυναμία με τις παραπάνω εξισώσεις ισορροπίας θα μπορούσαμε να γράψουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma \vec{F}_a = 0 \\ \Sigma \vec{M}_A = 0 \\ \Sigma \vec{M}_B = 0 \end{array} \right\} \text{ όπου } \vec{F}_a \text{ συνιστώσες σε κάποιο τυχαίο άξονα } a \text{ και } A, B \text{ τυχαία σημεία έτσι} \\ \text{ώστε το ευθύγραμμο τμήμα } AB \text{ να } \mathbf{MHN} \text{ είναι κάθετο στον άξονα } a.$$

Παράδειγμα 1°

- Γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας. Από την ισορροπία στον άξονα x:

$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow \text{Προκύπτει η άγνωστη } \vec{A}_x$$

- Από την ισορροπία των ροπών ως προς το σημείο A:

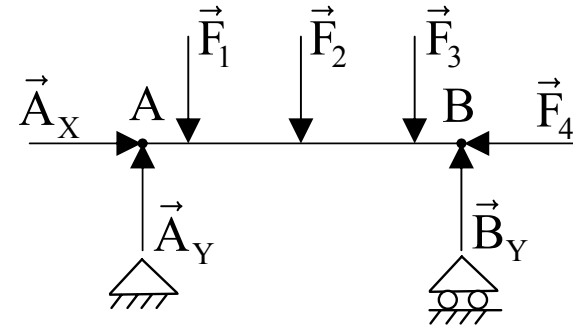
$$\Sigma \vec{M}_A = 0 \Rightarrow \text{Προκύπτει η άγνωστη } \vec{B}_y$$

- Από την ισορροπία των ροπών ως προς το σημείο B:

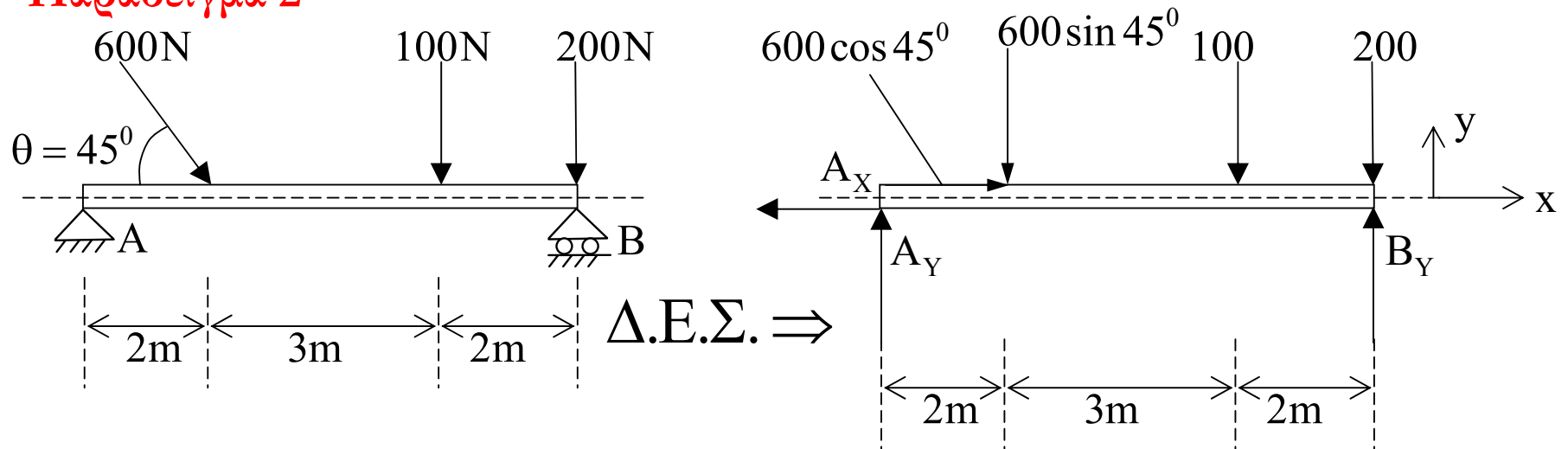
$$\Sigma \vec{M}_B = 0 \Rightarrow \text{Προκύπτει η άγνωστη } \vec{A}_y$$

- Επίσης θα μπορούσαμε να γράψουμε ισοδύναμα το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων ισορροπίας για το προσδιορισμό των αγνώστων αντιδράσεων:

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma \vec{M}_A = 0 \\ \Sigma \vec{M}_B = 0 \\ \Sigma \vec{M}_C = 0 \end{array} \right\}, \text{ όπου } C \text{ είναι ένα σημείο που } \Delta \mathbf{E} \mathbf{N} \text{ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα } AB.$$



Παράδειγμα 2^ο



$\Delta.E.\Sigma. \Rightarrow$

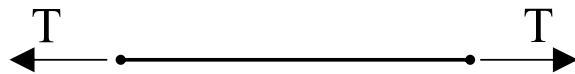
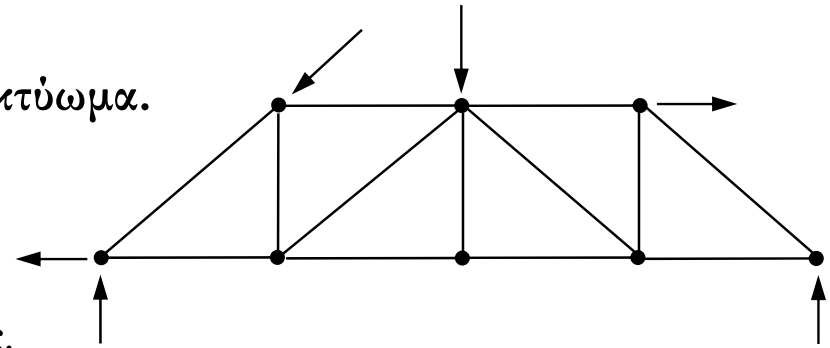
- Έχοντας σχεδιάσει σωστά το Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος, γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για το προσδιορισμό των αγνώστων αντιδράσεων:

$$\begin{cases} \Sigma \vec{F}_x = 0 \\ \Sigma \vec{M}_B = 0 \\ \Sigma \vec{F}_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 600 \cos(45^\circ) - A_x = 0 \\ (100)2 + [600 \sin(45^\circ)]5 - 7A_y = 0 \\ 332 - 600 \sin(45^\circ) - 100 - 200 + B_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_x = 424 \text{ N} \\ A_y = 332 \text{ N} \\ B_y = 393 \text{ N} \end{cases}$$

Τα θετικά πρόσημα για τα μέτρα των αντιδράσεων δείχνουν ότι σωστά υποθέσαμε αρχικά τις φορές τους στο Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος.

Δικτυώματα

- **Δικτύωμα:** Κατασκευή που αποτελείται από λεπτές ράβδους που ενώνονται στα άκρα τους. Τα σημεία ενώσεώς τους καλούνται κόμβοι.
- Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται ένα **επίπεδο δικτύωμα**.
- Όλες οι δυνάμεις εφαρμόζονται στους κόμβους και το βάρος των ράβδων αμελείται.
- Οι ράβδοι ενώνονται στους κόμβους με **αρθρώσεις**.
- Κάθε ράβδος δέχεται στα άκρα της ίσες και αντίθετες δυνάμεις κατά τη διεύθυνση του άξονά της.
- Η εντατική κατάσταση των ράβδων ενός δικτυώματος είναι είτε εφελυστική είτε θλιπτική. Οι ράβδοι ενός δικτυώματος **ΔΕΝ** πρέπει να καταπονούνται από στρέψη ή κάμψη.



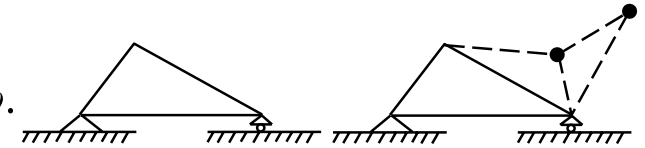
Εφελυστική εντατική κατάσταση.
Όπου T η τάση της ράβδου.



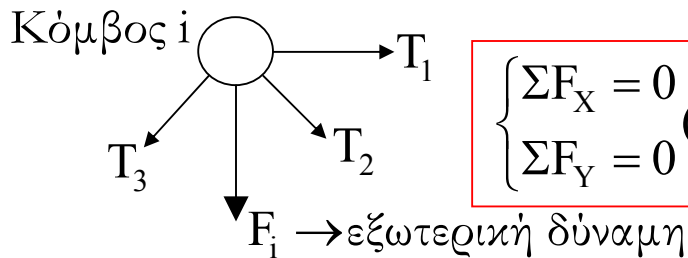
Θλιπτική εντατική κατάσταση.
Όπου T η τάση της ράβδου.

Υπολογισμός Δικτυωμάτων

- Το απλό δικτύωμα προκύπτει από απλή παράθεση τριγώνων.
- Για τα δικτυώματα ισχύει γενικά η σχέση: $\rho = 2\kappa - 3$, όπου ρ = αριθμός των ράβδων του δικτυώματος και κ = αριθμός των κόμβων. Αν το δικτύωμα είναι απλό τότε οι 2κ εξισώσεις των κόμβων είναι αρκετές για τον υπολογισμό των $\rho = 2\kappa - 3$ τάσεων των ράβδων και των τριών αντιδράσεων. Η μεθοδολογία υπολογισμού έχει ως εξής:



- 1) Αρχικά υπολογίζουμε τις αντιδράσεις του δικτυώματος.
- 2) Κατόπιν, ξεκινάμε από τον κόμβο με το πολύ 2 άγνωστες δυνάμεις. Από τις εξισώσεις ισορροπίας βρίσκουμε τις άγνωστες δυνάμεις και προχωρούμε.

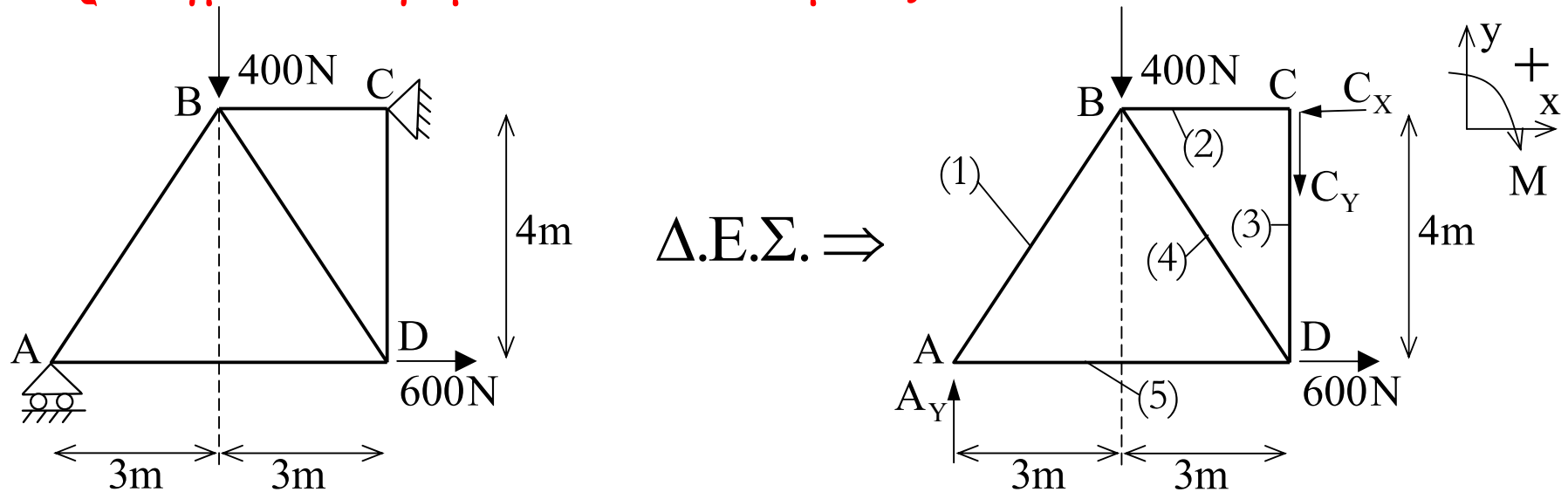


$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \end{cases} (*)$$

Αν ο κόμβος εμφανίζει δύο αγνώστους τότε η (*) είναι αρκετή. Αν ο κόμβος εμφανίζει περισσότερους αγνώστους τότε χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα της (*) σε γειτονικούς κόμβους.

- 3) Υποθέτουμε συμβατικά όλες τις τάσεις στις ράβδους εφελκυστικές, επομένως οι δυνάμεις στους κόμβους κατευθύνονται προς τις ράβδους ή απομακρύνονται από τους κόμβους (όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα).
- 4) Αν προκύψουν αρνητικές \Rightarrow δυνάμεις κατευθύνονται στον κόμβο (θλιπτικές).

Παράδειγμα Υπολογισμού Απλού Δικτυώματος

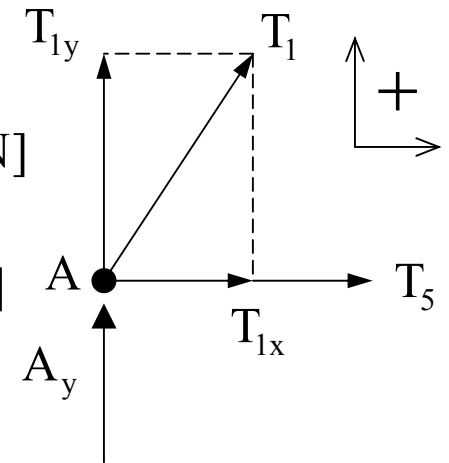


Βήμα 1^ο: Υπολογίζουμε τις άγνωστες αντιδράσεις του δικτυώματος. Οι εξισώσεις ισορροπίας για όλο το δικτύωμα μας δίνουν:

$$\begin{cases} \Sigma F_X = 0 \\ \Sigma M_C = 0 \\ \Sigma F_Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 600 - C_X = 0 \\ A_Y(6) - 400(3) - 600(4) = 0 \\ A_Y - 400 - C_Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_X = 600 \text{ [N]} \\ A_Y = 600 \text{ [N]} \\ C_Y = 200 \text{ [N]} \end{cases}$$

Βήμα 2^ο: Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των κόμβων. Αρχικά εντοπίζουμε το κόμβο ο οποίος να έχει το πολύ 2 άγνωστες δυνάμεις. Υπάρχουν δύο κόμβοι που συγκεντρώνουν 2 άγνωστες δυνάμεις, οι κόμβοι **A** και **C**, ενώ οι κόμβοι **B** και **D** συγκεντρώνουν 3 άγνωστες δυνάμεις. Ξεκινούμε από το κόμβο **A**:

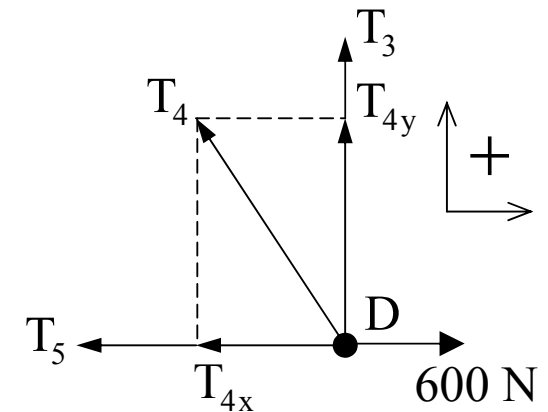
$$\begin{cases} \Sigma F_Y = 0 \\ \Sigma F_X = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_y + T_{1y} = 0 \\ T_5 + T_{1x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{1y} = -A_y \\ T_5 + T_1 \frac{3}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = -\frac{5}{4} A_y = -750 \text{ [N]} \\ T_5 = -\frac{3}{5} T_1 = 450 \text{ [N]} \end{cases}$$



Γνωρίζοντας τώρα την T_5 ο κόμβος **D** έχει δύο άγνωστες δυνάμεις:

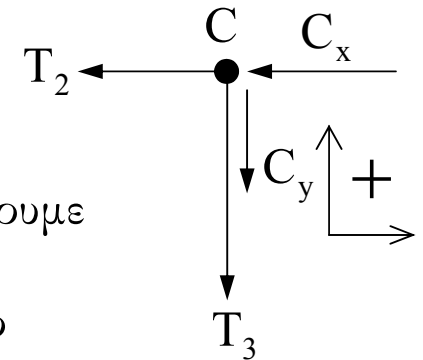
$$\begin{cases} \Sigma F_X = 0 \\ \Sigma F_Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 600 - T_5 - T_{4x} = 0 \\ T_3 + T_{4y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_4 = \frac{5}{3} (600 - T_5) \\ T_3 = -T_{4y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_4 = 250 \text{ [N]} \\ T_3 = -\frac{4}{5} T_4 = -200 \text{ [N]} \end{cases}$$



Τέλος υπολογίζουμε το κόμβο C για να υπολογιστεί και η τελευταία τάση T_2 της ράβδου 2:

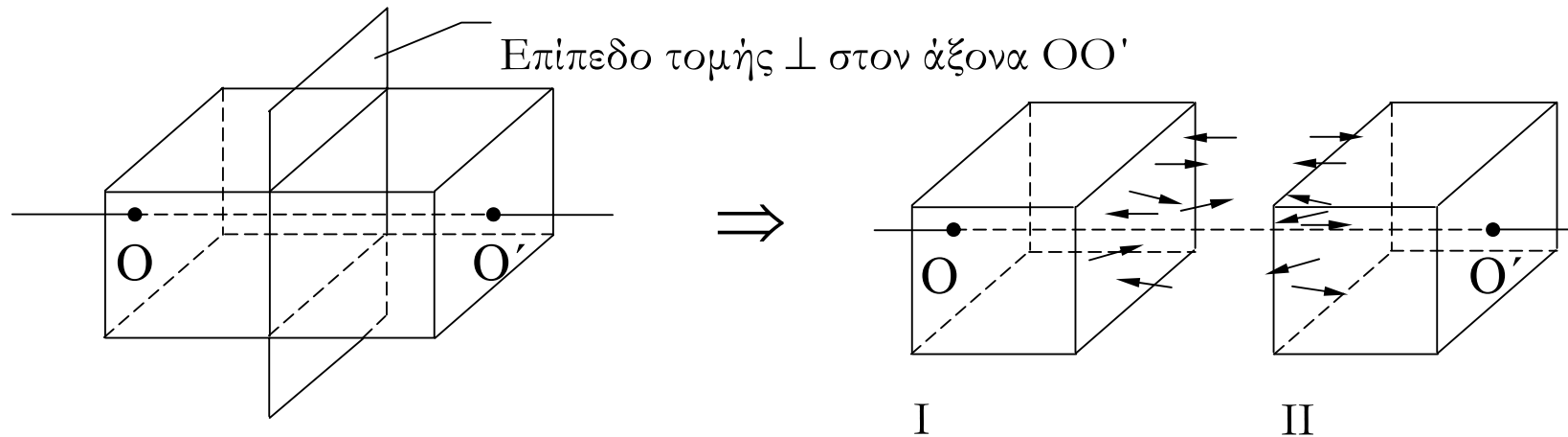
$$\begin{cases} \Sigma F_X = 0 \\ \Sigma F_Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -C_x - T_2 = 0 \\ -C_y - T_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_2 = -C_x = -600 \text{ [N]} \\ T_3 = -C_y = -200 \text{ [N]} \text{ (έλεγχος)} \end{cases}$$



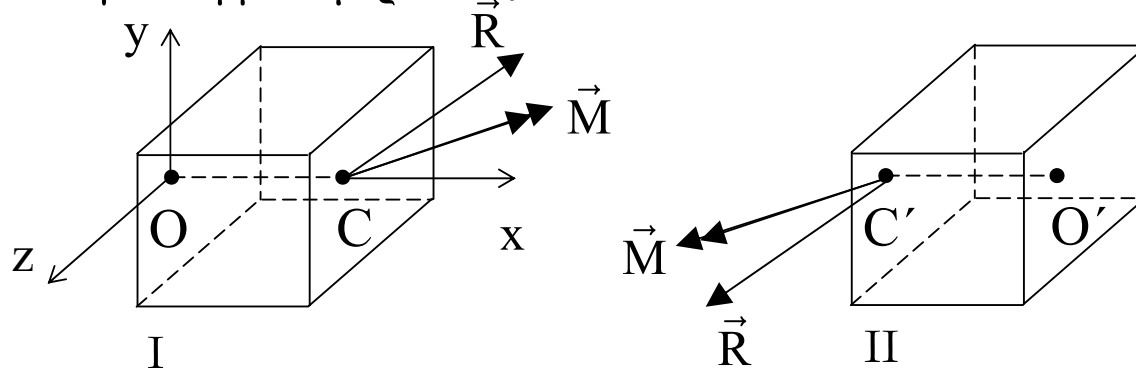
• Μετά τον υπολογισμό των τάσεων των ράβδων στους κόμβους, σχεδιάζουμε τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος όλων των ράβδων του δικτύματος, σημειώνοντας αντίστοιχα εφελκυστική ή θλιπτική φόρτιση, έχοντας υπόψη το νόμο της δράσης – αντίδρασης μεταξύ των ράβδων και των κόμβων.

Ράβδος 1)	$T_1 = 750 \text{ [N]}$	$T_1 = 750 \text{ [N]}$	Θλιπτική εντατική κατάσταση
Ράβδος 2)	$T_2 = 600 \text{ [N]}$	$T_2 = 600 \text{ [N]}$	Θλιπτική εντατική κατάσταση
Ράβδος 3)	$T_3 = 200 \text{ [N]}$	$T_3 = 200 \text{ [N]}$	Θλιπτική εντατική κατάσταση
Ράβδος 4)	$T_4 = 250 \text{ [N]}$	$T_4 = 250 \text{ [N]}$	Εφελκυστική εντατική κατάσταση
Ράβδος 5)	$T_5 = 450 \text{ [N]}$	$T_5 = 450 \text{ [N]}$	Εφελκυστική εντατική κατάσταση

Φορτία Διατομής Δοκού



- Οι εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται μετά τη τομή σε κάθε ένα από τα τμήματα I και II είναι ίσες και αντίθετες (νόμος δράσης – αντίδρασης).
- Μεταφέρουμε όλες τις δυνάμεις των τμημάτων I και II στο γεωμετρικό τους κέντρο (σημεία C και C' πάνω στον άξονα OO') και τις συνθέτουμε στη συνιστώσα δύναμη \vec{R} και ροπή \vec{M} που συνεπάγεται η μεταφορά τους.

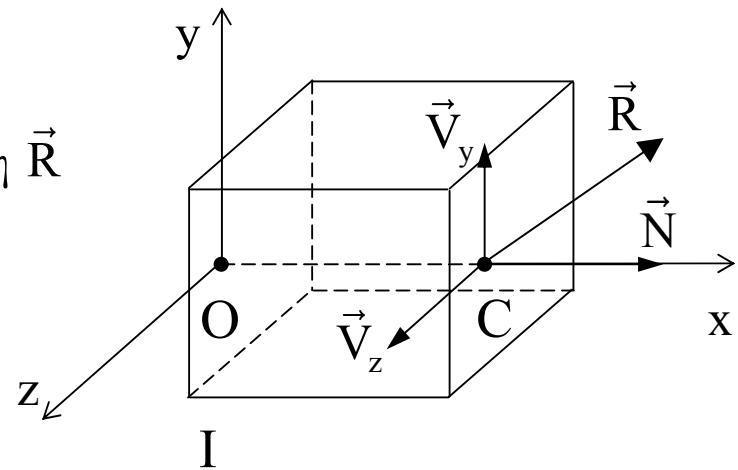


- **Εξετάζουμε το τμήμα I:** Η συνισταμένη δύναμη \vec{R} αναλύεται σε τρεις συνιστώσες στους άξονες x, y, z:

$$\vec{R}_x = \vec{N} \text{ (αξονική δύναμη // OC),}$$

$$\vec{R}_y = \vec{V}_y \text{ (τέμνουσα δύναμη } \perp \text{ επίπεδο zx),}$$

$$\vec{R}_z = \vec{V}_z \text{ (τέμνουσα δύναμη } \perp \text{ επίπεδο xy).}$$

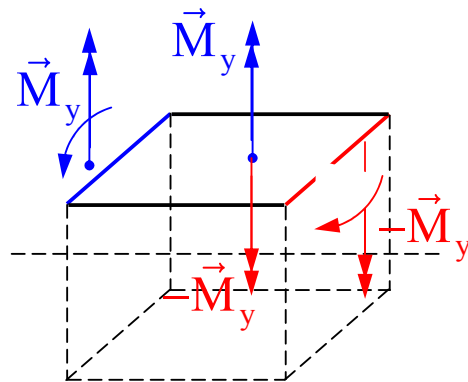
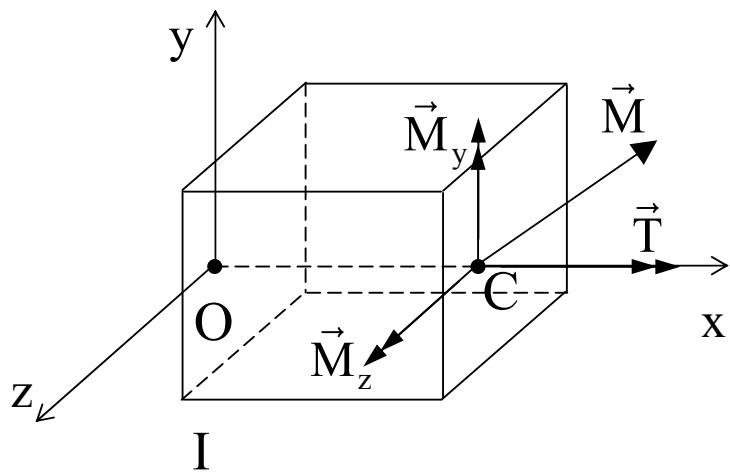
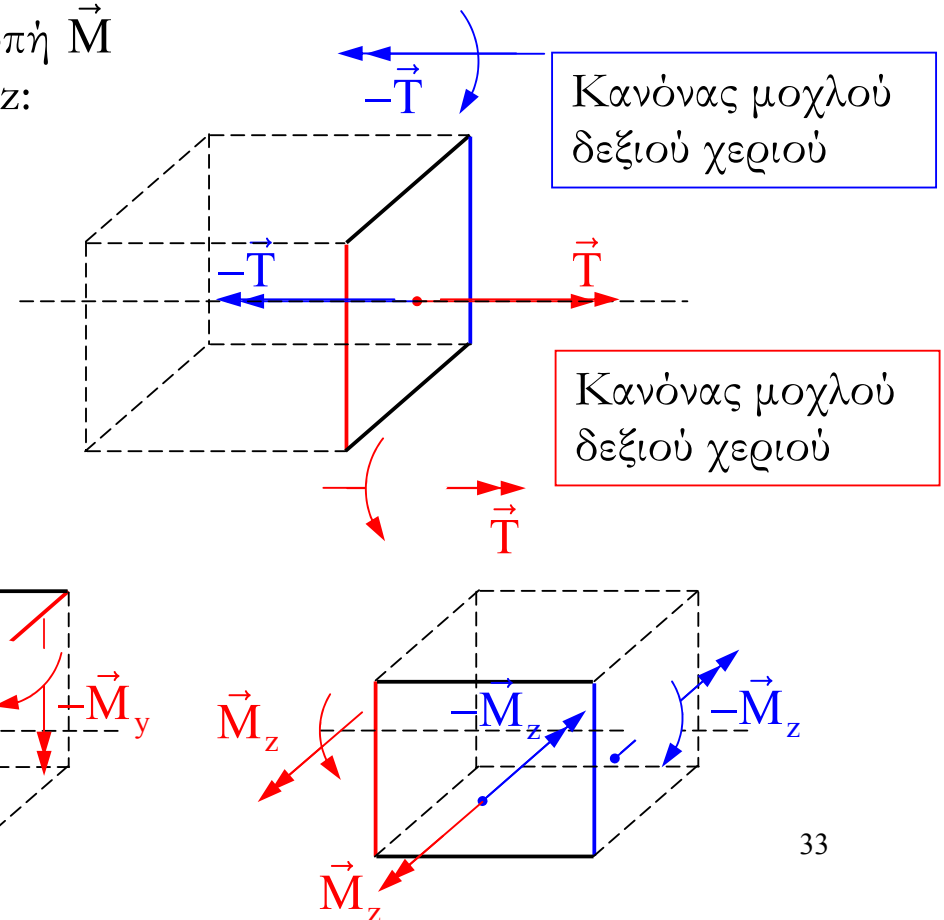


- **Εξετάζουμε το τμήμα I:** Η συνισταμένη ροπή \vec{M} αναλύεται σε τρεις συνιστώσες στους άξονες x, y, z:

$$\vec{M}_x = \vec{T} \text{ (ροπή στρέψης, // OC),}$$

$$\vec{M}_y \text{ (ροπή κάμψης, } \perp \text{ επίπεδο zx),}$$

$$\vec{M}_z \text{ (ροπή κάμψης, } \perp \text{ επίπεδο xy).}$$

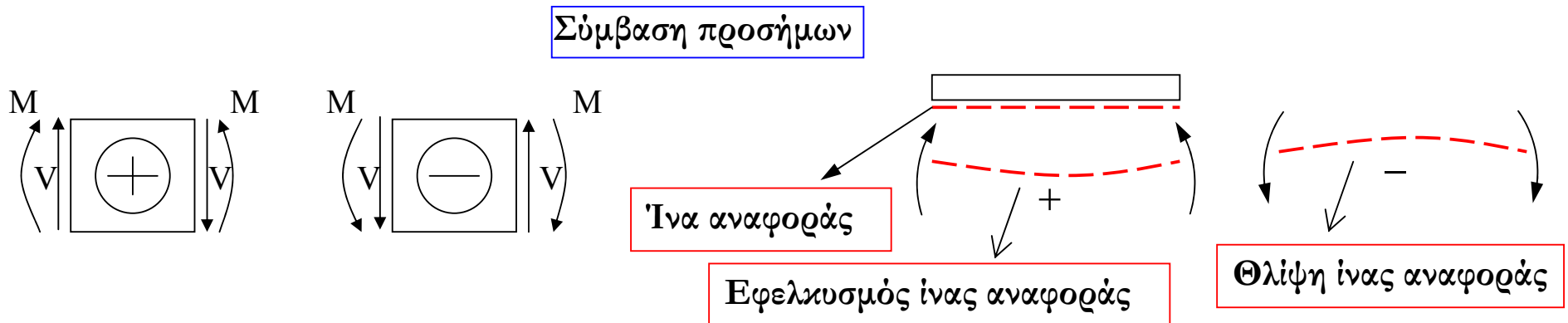


Υπολογισμός φορτίων διατομής σε τυχαία θέση της δοκού

- Προσδιορίζουμε τις εξωτερικές αντιδράσεις της δοκού.
- Κάνουμε μια τομή κάθετη στον οριζόντιο άξονα της δοκού. Σε κάθε ένα από τα δύο τμήματα της δοκού που προκύπτουν, εφαρμόζουμε ίσα και αντίθετα φορτία της διατομής με κάποια υποθετική φορά.
- Γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για το ένα από τα δύο τμήματα και υπολογίζουμε τα άγνωστα φορτία της διατομής. Αν τα φορτία προκύψουν αρνητικά έχουν αντίθετη φορά από αυτή που αρχικά υποθέσαμε.

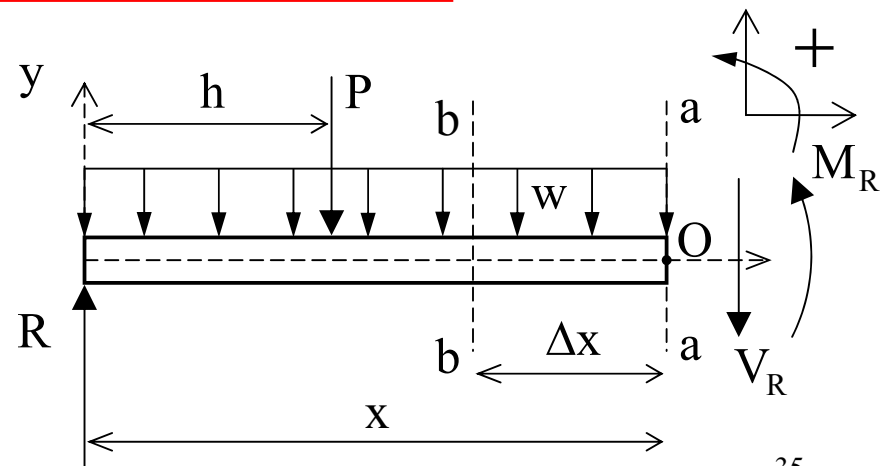
2-D: Διάτμηση και καμπτική ροπή σε δοκό

- Θεωρούμε ένα τμήμα της δοκού μεταξύ του άξονα yy' (όπου ασκείται η αντίδραση R) και του άξονα aa , και ομοιόμορφη εντατική κατάσταση στο z . Στο επίπεδο του σχήματος στην τομή aa (κάθετη στο x) σχεδιάζουμε τις εσωτερικές δυνάμεις V_R (διάτμηση) και M_R (καμπτική ροπή).



- Από τις εξισώσεις στατικής ισορροπίας της δοκού προκύπτει:

$$\begin{cases} \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_O = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_R + P + wx - R = 0 \\ M_R - Rx + P(x - h) + w \frac{x^2}{2} = 0 \end{cases}$$



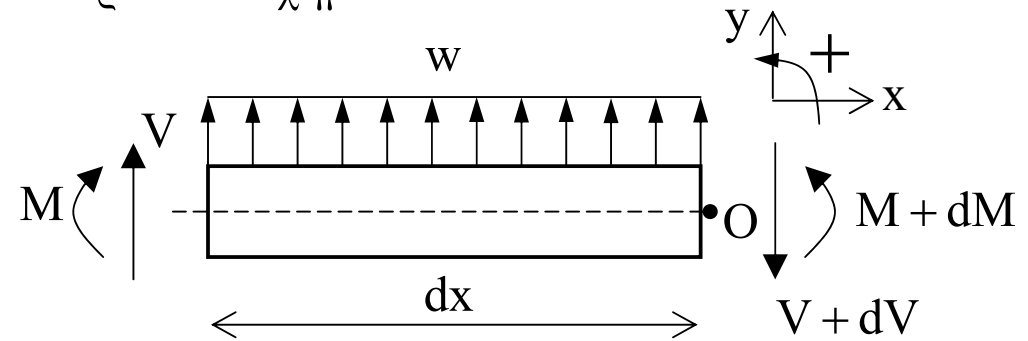
Σχέσεις μεταξύ φορτίου Διάτμησης και Ροπής

- Θεωρούμε ένα στοιχειώδες κομμάτι dx μιας ράβδου, στο οποίο ασκείται ένα καταναμημένο φορτίο w . Αν στο ένα άκρο του στοιχειώδους τμήματος dx εφαρμόζεται διάτμηση V και ροπή M , υποθέτουμε ότι στο άλλο άκρο θα έχουμε διάτμηση $V + dV$ και ροπή $M + dM$, όπως ακριβώς παριστάνεται στο παρακάτω σχήμα.

- Από τη στατική ισορροπία του σώματος στο κατακόρυφο άξονα προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V + w dx - (V + dV) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dV}{dx} = w \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = V \Big|_{V_1}^{V_2} = V_2 - V_1 = \int_{x_1}^{x_2} w dx$$



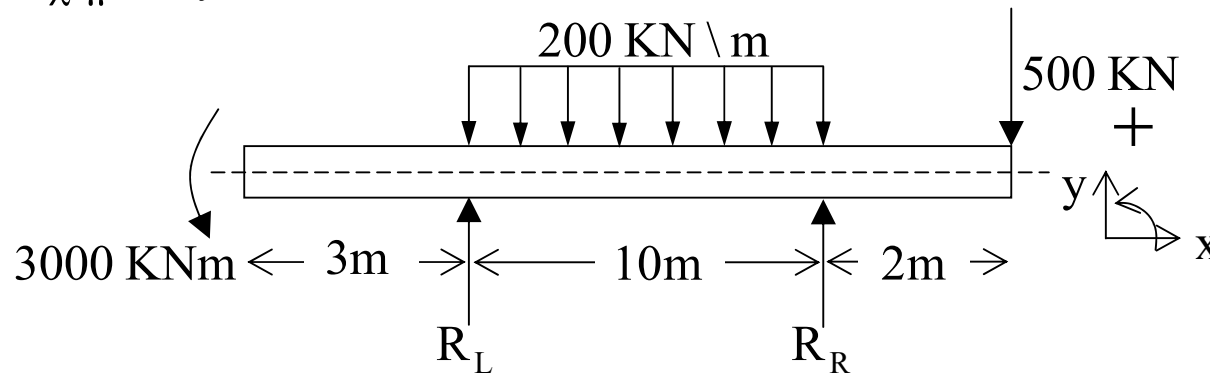
- Από τη στατική ισορροπία του σώματος για τις ροπές ως προς το σημείο O προκύπτει:

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow -M - V dx - w dx \frac{dx}{2} + (M + dM) = 0 \Rightarrow$$

$$V = \frac{dM}{dx} \Rightarrow \int_{M_1}^{M_2} dM = M \Big|_{M_1}^{M_2} = M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} V dx$$

Παράδειγμα 1°

Να υπολογιστούν τα διαγράμματα N , V , M [δηλαδή οι συναρτήσεις $M(x)$] για τη δοκό του παρακάτω σχήματος.



- Γράφουμε τις εξισώσεις στατικής ισορροπίας της δοκού ώστε να υπολογίσουμε τις άγνωστες αντιδράσεις R_L και R_R . Για να υπολογίσουμε εύκολα μια από τις δύο αντιδράσεις, παίρνουμε την εξίσωση στατικής ισορροπίας των ροπών, ως προς ένα από τα δύο σημεία που ενεργούν οι αντιδράσεις, για παράδειγμα ως προς το σημείο που ενεργεί η αντίδραση R_R .

$$\Sigma M_R = 0 \Rightarrow 3000 - R_L \cdot (10) + 200 \cdot 10 \cdot \frac{10}{2} - 500 \cdot (2) = 0 \Rightarrow R_L = 1200 \text{ [KN]}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_L - 200 \cdot (10) + R_R - 500 = 0 \Rightarrow R_R = 1300 \text{ [KN]}$$

- Υπολογίζουμε τις τέμνουσες δυνάμεις (εγκάρσιες) και τις καμπτιές ροπές στη δοκό. Κάνουμε εγκάρσια τομή στη δοκό κάθε φορά που έχουμε μεταβολή στη φόρτισή της.

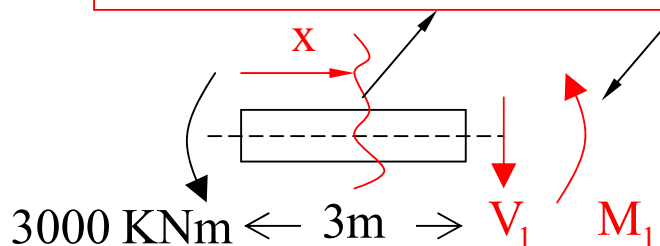
- Τμήμα 1° $0 \leq x \leq 3$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_1(x) = 0$$

$$\Sigma M_{\text{τομή}} = 0 \Rightarrow 3000 + M_1(x) = 0 \Rightarrow$$

$$M_1(x) = -3000 \text{ [KNm]}$$

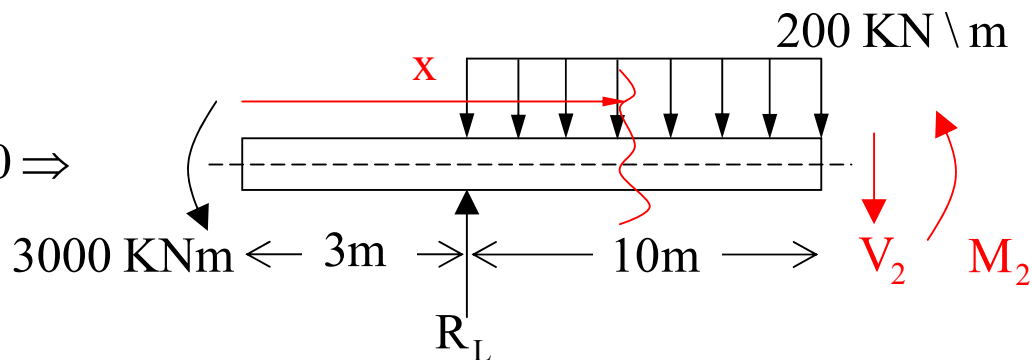
Στη θέση της τομής εφαρμόζουμε τις εσωτερικές δυνάμεις



- Τμήμα 2° $3 \leq x \leq 13$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -R_L + 200 \cdot (x - 3) + V_2(x) = 0 \Rightarrow$$

$$V_2(x) = 1800 - 200x \text{ [KN]}$$



$$\Sigma M_{\text{τομή}} = 0 \Rightarrow 3000 - R_L \cdot (x - 3) + 200(x - 3) \frac{(x - 3)}{2} + M_2(x) = 0 \Rightarrow$$

$$M_2(x) = -100(x - 3)^2 + 1200(x - 3) - 3000 \text{ [KNm]}$$

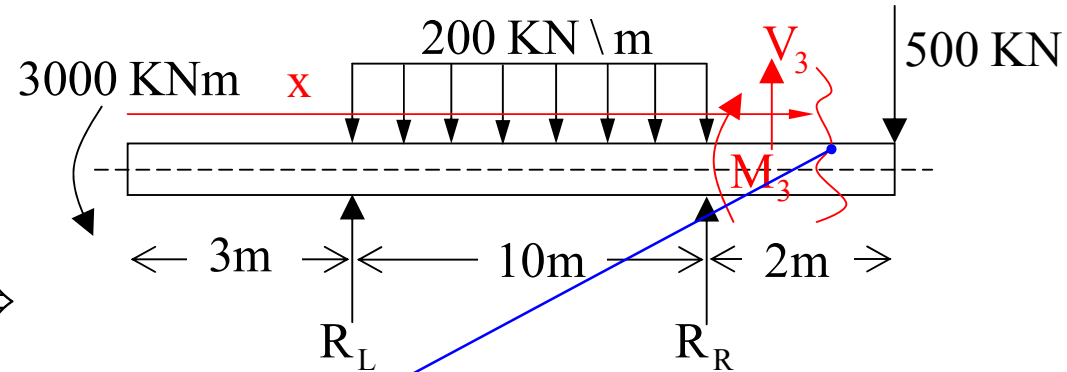
- Τμήμα 3° $13 \leq x \leq 15$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_3(x) - 500 = 0 \Rightarrow$$

$$V_3(x) = 500 \text{ [kN]}$$

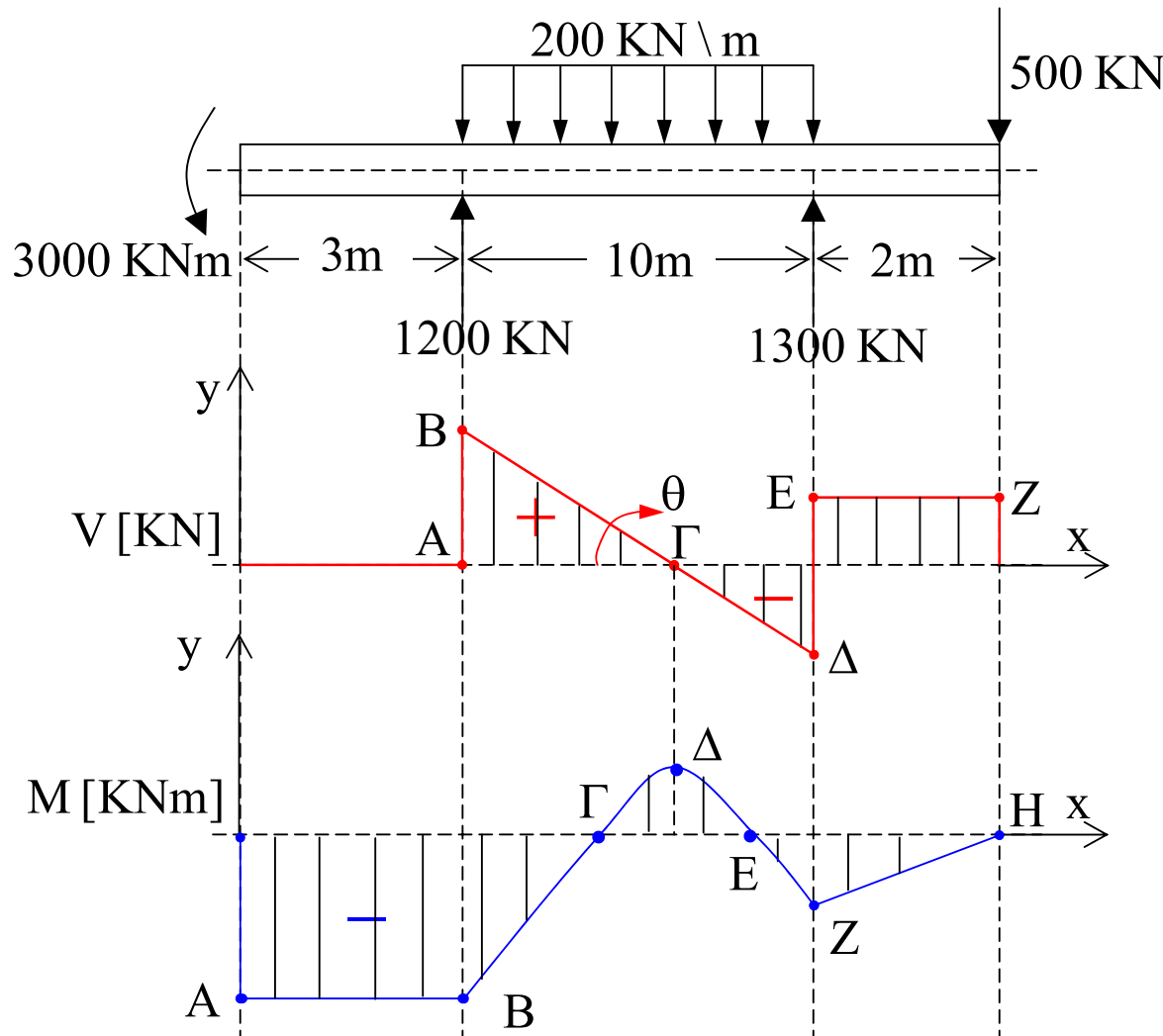
$$\Sigma M_{\text{τομή}} = 0 \Rightarrow M_3(x) + 500 \cdot (15 - x) = 0 \Rightarrow$$

$$M_3(x) = 500(x - 15) \text{ [kNm]}$$



Κάναμε τη τομή στο τρίτο τμήμα της δοκού και εφαρμόσαμε τις εσωτερικές δυνάμεις στο δεξί κομμάτι και όχι στο αριστερό, όπως κάναμε στα υπόλοιπα δύο τμήματα. Οι δυνάμεις που εφαρμόσαμε εδώ (V_3, M_3) ήταν ίσες και αντίθετες (δράση – αντίδραση) με τις (V_1, M_1) και (V_2, M_2). Αυτό έγινε διότι αν κοιτάξουμε τη τομή από δεξιά έχουμε λιγότερες δυνάμεις να αθροίσουμε στην εξίσωση ισορροπίας δυνάμεων και ροπών.

- Κατασκευή διαγράμματος εγέρσεων δυνάμεων $Q(x)$ και καμπτικών ροπών $M(x)$.



$$A(3,0), B(3,1200), \Gamma(9,0)$$

$$\Delta(13,-800), E(13,500), Z(15,500)$$

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{dV_2(x)}{dx} = \frac{d(1800 - 200x)}{dx} \Rightarrow$$

$$\varepsilon\phi\theta = -200 \Rightarrow \theta = 89,71^\circ$$

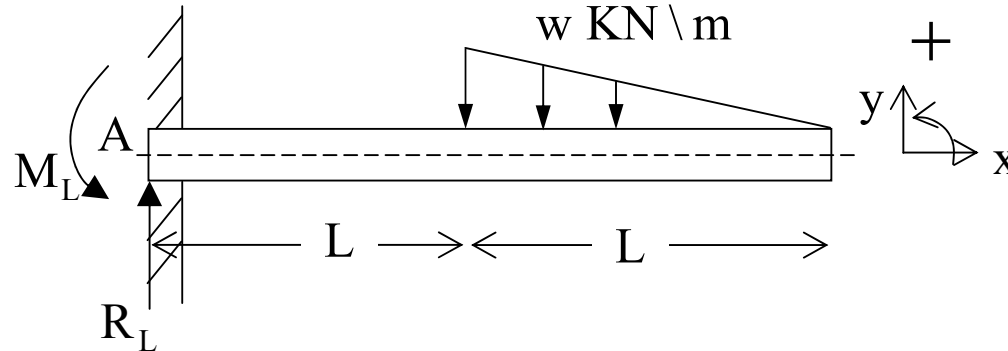
$$A(0,-3000), B(3,-3000), \Gamma(3.55,0)$$

$$\Delta(9,600), E(8.45,0), Z(13,-1000)$$

$$H(15,0)$$

Παράδειγμα 2°

Να υπολογιστούν τα διαγράμματα $V(x)$ και $M(x)$ για τη πρόβολο του παρακάτω σχήματος.



• Στη πρόβολο δεν ασκούνται αξονικές δυνάμεις, οπότε η πάκτωση «αντιδρά» με μια τέμνουσα δύναμη R_L και μια καμπτική ροπή M_L . Υπολογίζουμε τις αντιδράσεις της πάκτωσης από τις εξισώσεις στατικής ισορροπίας.

$$\begin{cases} \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_L - \frac{wL}{2} = 0 \\ M_L - \frac{wL}{2} \cdot (L + \frac{1}{3}L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_L = \frac{wL}{2} \\ M_L = \frac{2wL^2}{3} \end{cases}$$

- Υπολογίζουμε τις τέμνουσες δυνάμεις και τις καμπινιές ροπές στη δοκό. Κάνουμε εγκάρσια τομή στη δοκό κάθε φορά που έχουμε μεταβολή στη φόρτισή της.

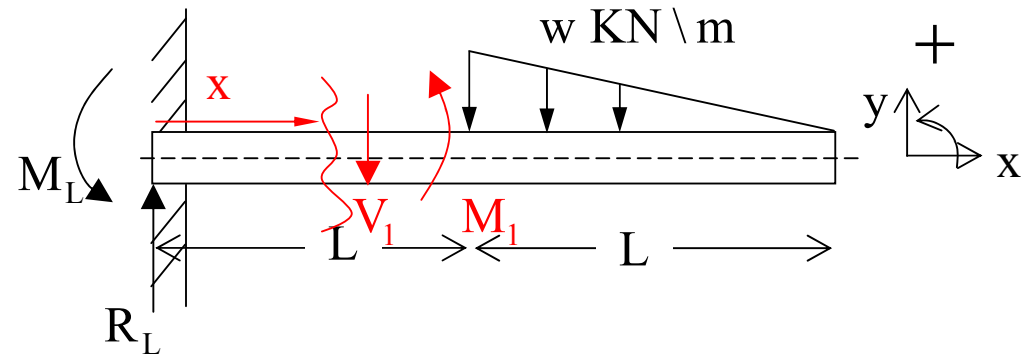
- Τμήμα 1° $0 \leq x \leq L$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_1(x) - R_L = 0 \Rightarrow$$

$$V_1(x) = \frac{wL}{2}$$

$$\Sigma M_{\text{τομή}} = 0 \Rightarrow M_L + M_1(x) - R_L x = 0 \Rightarrow$$

$$M_1(x) = -\frac{2wL^2}{3} + \frac{wL}{2}x$$

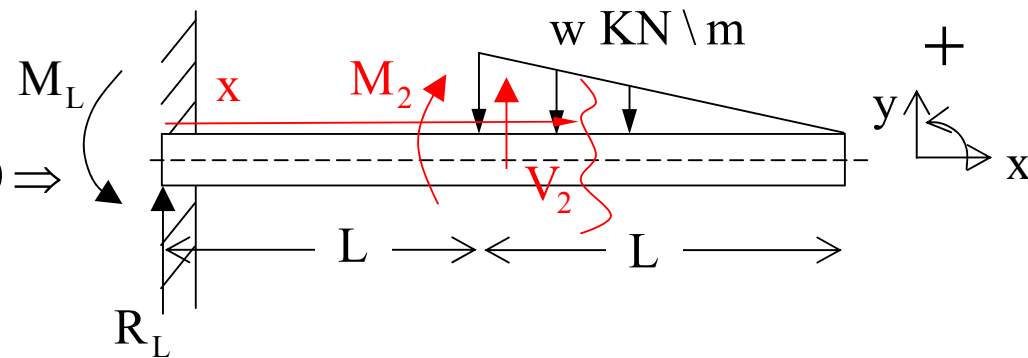


- Τμήμα 2° $L \leq x \leq 2L$

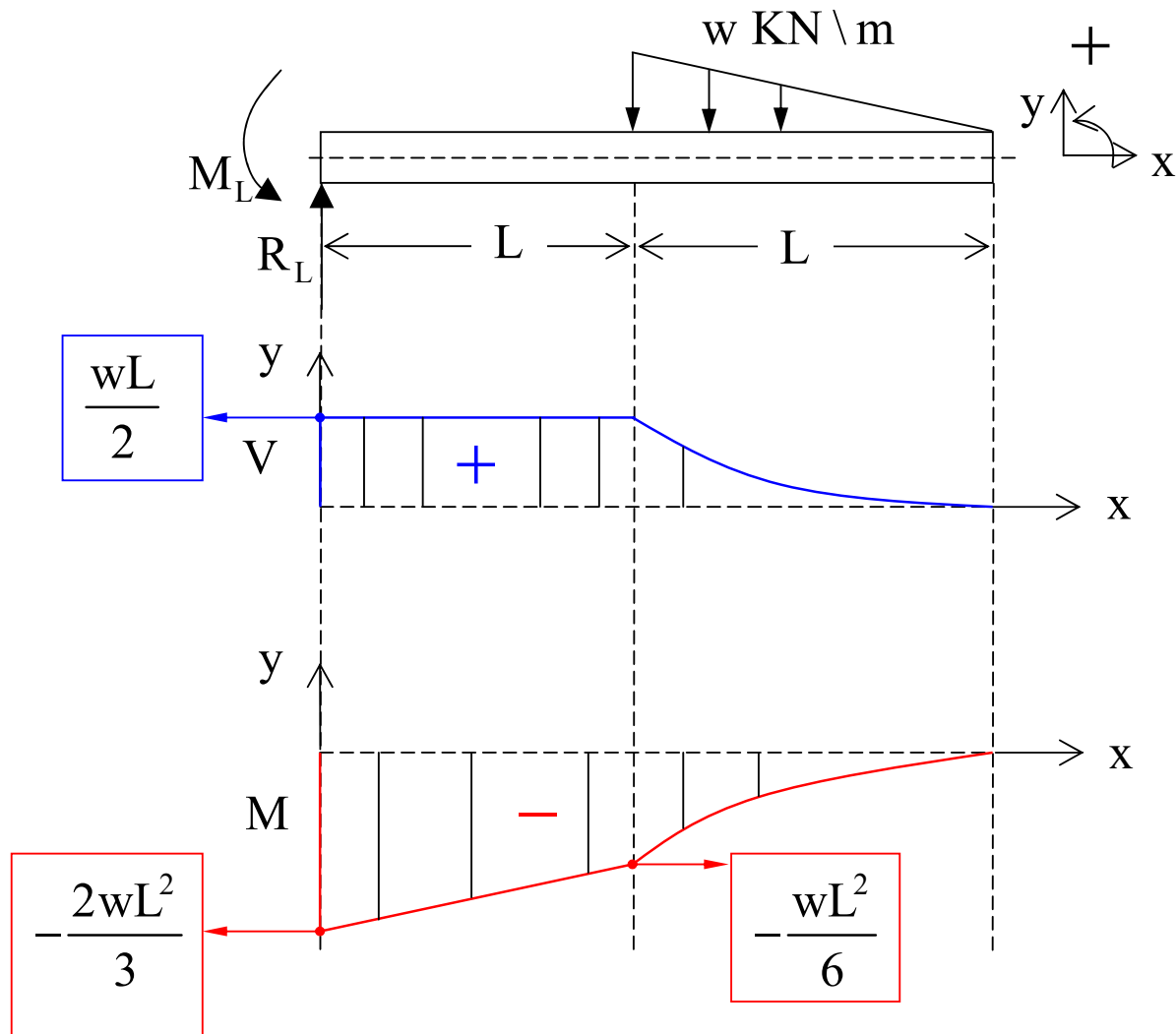
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_2(x) - \frac{w}{L}(2L - x) \cdot \frac{(2L - x)}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$V_2(x) = \frac{w}{2L}(2L - x)^2$$

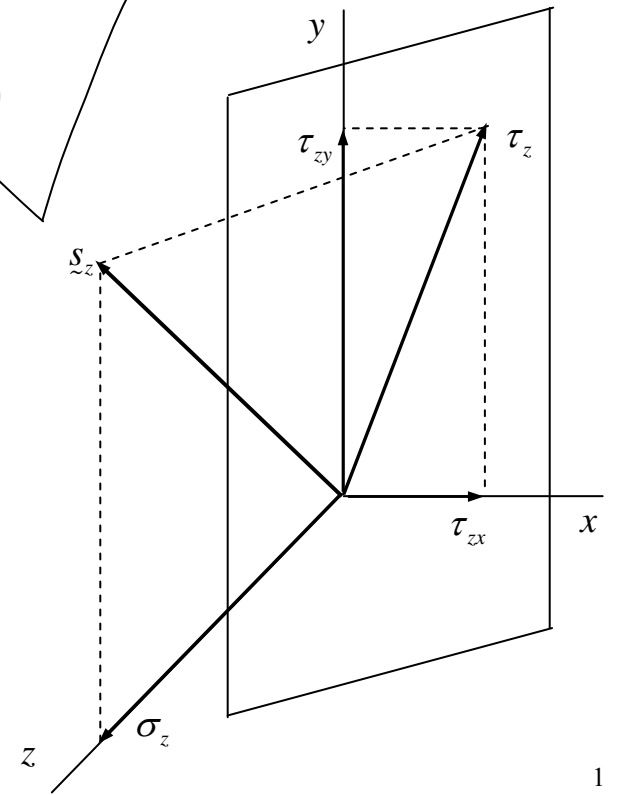
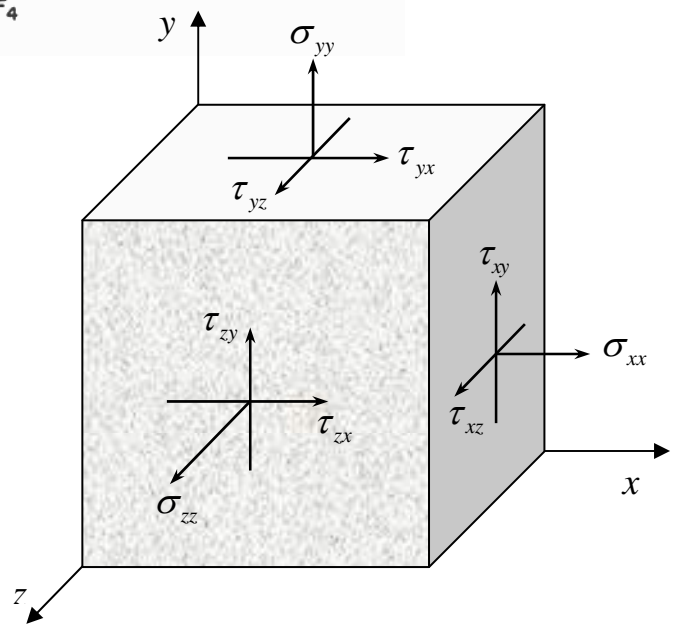
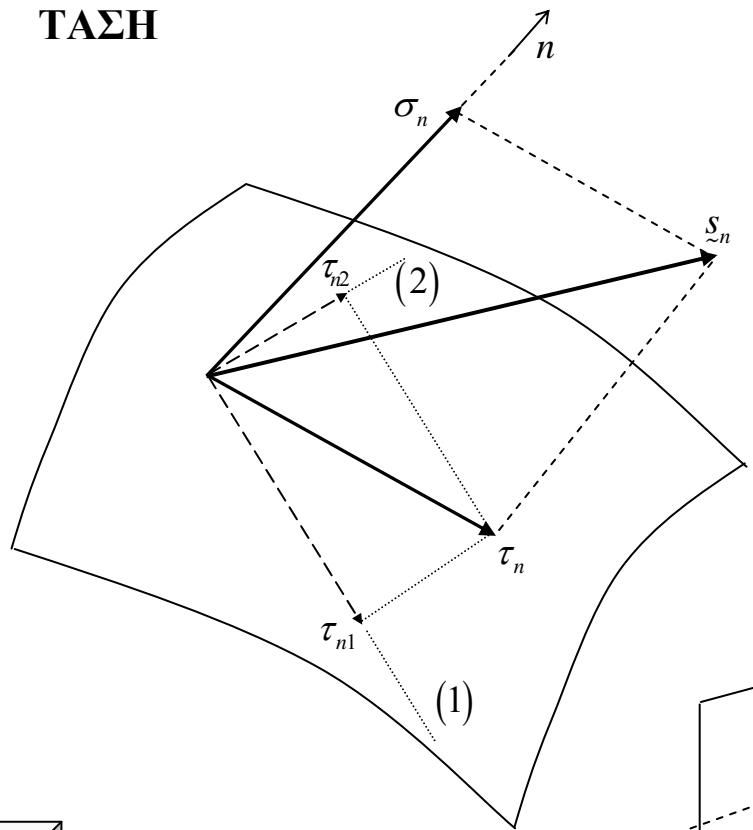
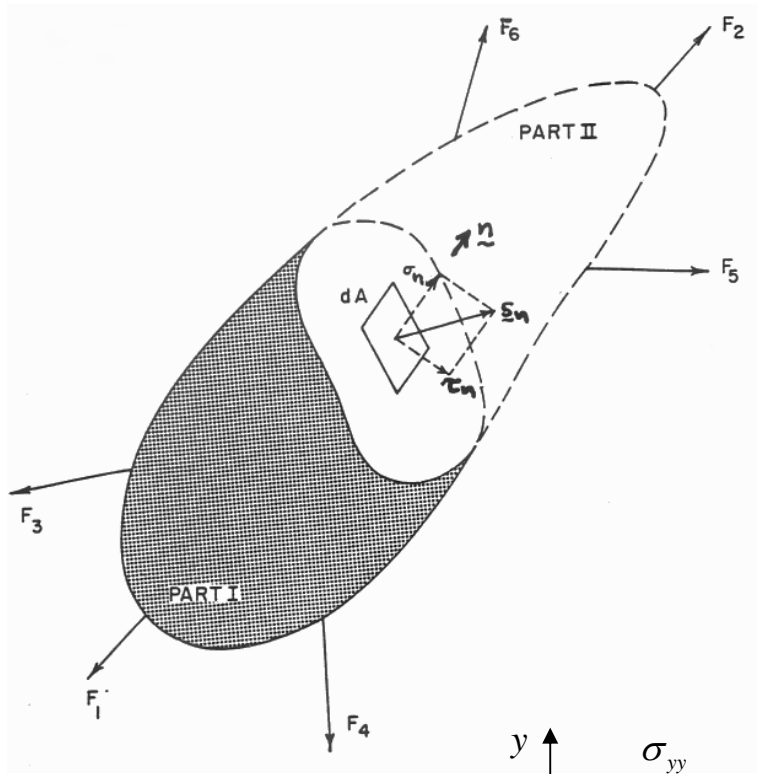
$$\Sigma M_{\text{τομή}} = 0 \Rightarrow M_2(x) + \frac{w}{2L}(2L - x)^2 \cdot \frac{1}{3}(2L - x) \Rightarrow M_2(x) = -\frac{1}{6}(2L - x)^3$$



- Κατασκευή διαγράμματος εγέρσιων δυνάμεων $V(x)$ και καμπτικών ροπών $M(x)$.



ΤΑΣΗ



Δι-διάστατη Εντατική Κατάσταση (2 D)

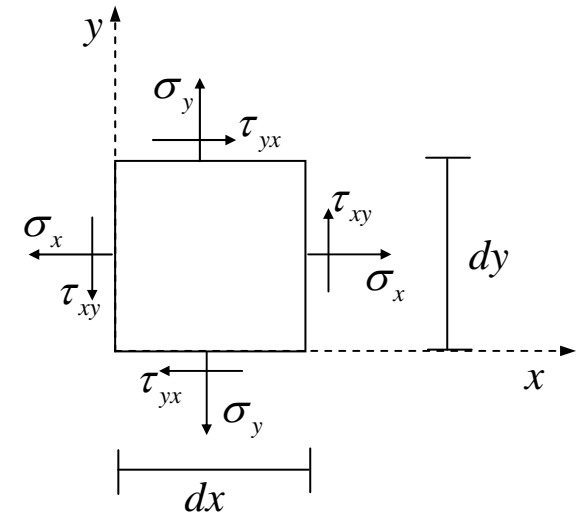
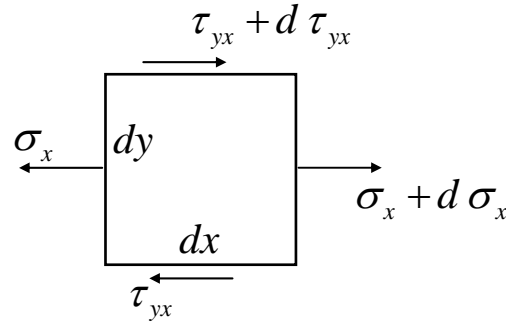
Ισοροπία

1) $\Sigma M=0$

τ_{xy} και τ_{yx} τείνουν να περιστρέψουν το στοιχειώδες τετράγωνο

$$\tau_{yx} \cdot (1 \cdot dx) \cdot dy = \tau_{xy} \cdot (1 \cdot dy) \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

2) $\Sigma F=0$

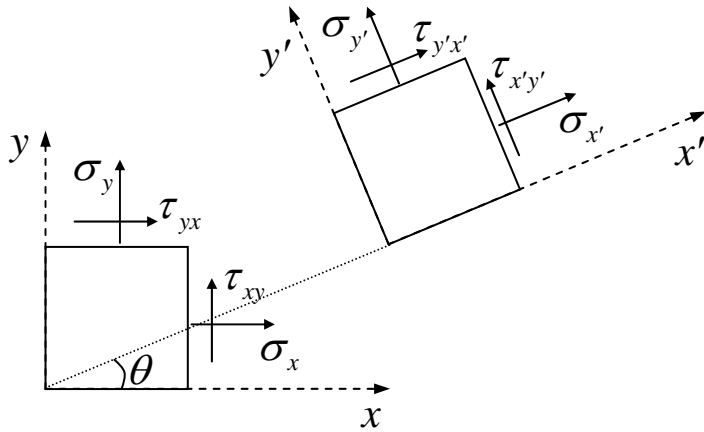


$$(\tau_{yx} + d \tau_{yx}) dx + (\sigma_x + d \sigma_x) dy - \tau_{yx} dx - \sigma_x dy = 0 \quad \Rightarrow \quad d \tau_{yx} \cdot dx + d \sigma_x \cdot dy = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d \tau_{yx}}{dy} + \frac{d \sigma_x}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

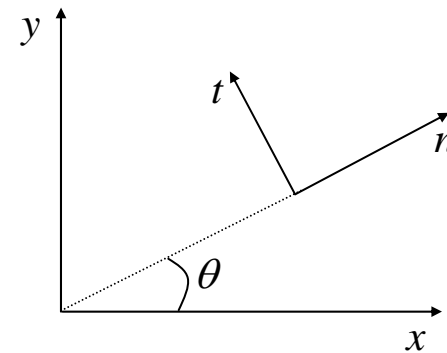
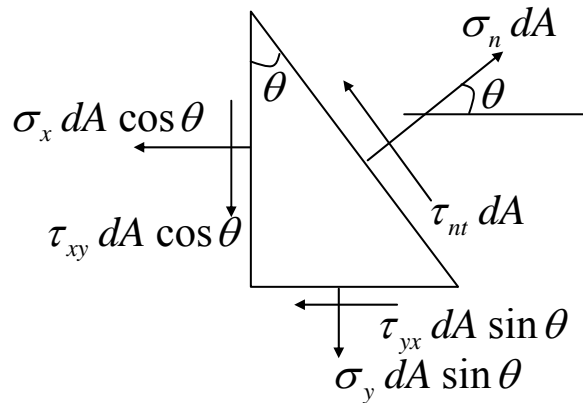
Εξισώσεις Ισοροπίας

Μετασχηματισμός Τάσης



$$(\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}) \xrightarrow{?} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$$

$$x \angle x' = \theta, \quad y \angle y' = \theta$$



$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta$$

$$\text{ή} \quad \tau_{nt} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\left. \begin{array}{l} \max \sigma_n \\ \max \tau_{nt} \end{array} \right\} ?$$

$$\left. \frac{d \sigma_n}{d \theta} \right|_{\theta=\theta_p} = 0 \rightarrow \sigma_n(\theta_p) = \sigma_p,$$

$$\left. \frac{d \tau_{nt}}{d \theta} \right|_{\theta=\theta_T} = 0 \rightarrow \tau_{nt}(\theta_T) = \tau_p$$

$$\frac{d \sigma_n}{d \theta} = 0 \rightarrow -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\frac{d \tau_{nt}}{d \theta} = 0 \rightarrow -(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + 2\tau_{xy} \sin 2\theta = 0 \Rightarrow \tan 2\theta_T = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$$\therefore 0 = \tan 2\theta_T + \frac{1}{\tan 2\theta_p} = \frac{\cos 2(\theta_p - \theta_T)}{\sin 2\theta_p \cos 2\theta_T} \Rightarrow \theta_T = \theta_p \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\cos 2\theta_p = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}, \quad \sin 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\Rightarrow \sigma_{p_{1,2}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad \theta = \theta_p \dots \dots \text{κύριες τάσεις}$$

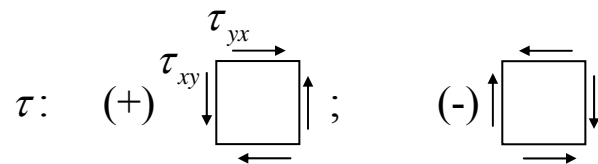
$$\tau_p = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad \theta = \theta_T \dots \dots \text{μέγιστη διατμητική τάση}$$

- $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{p1} + \sigma_{p2}$, $\tau_p = \frac{\sigma_{p1} - \sigma_{p2}}{2}$

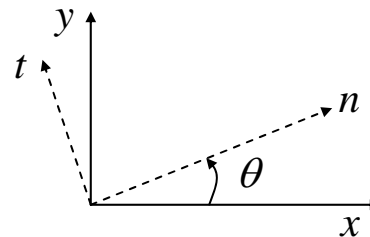
- $\theta_T = \theta_p \pm \frac{\pi}{4}$

- $2\tau_{nt} = \frac{d\sigma_n}{d\theta} = 0$ δηλ. διατμητική τάση μηδέν στα επίπεδα θ_p

- σ : (-) θλιπτική \downarrow ; (+) εφελκυστική \uparrow



- θ : (+) αριστερόστροφη από x



- **Κύκλος του Mohr:** $\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{nt}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$

$$(\sigma_n, \tau_{nt}) \rightarrow \text{κύκλος } (C, R): C = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right); R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- $\sigma_{p1,2} = C \pm R$

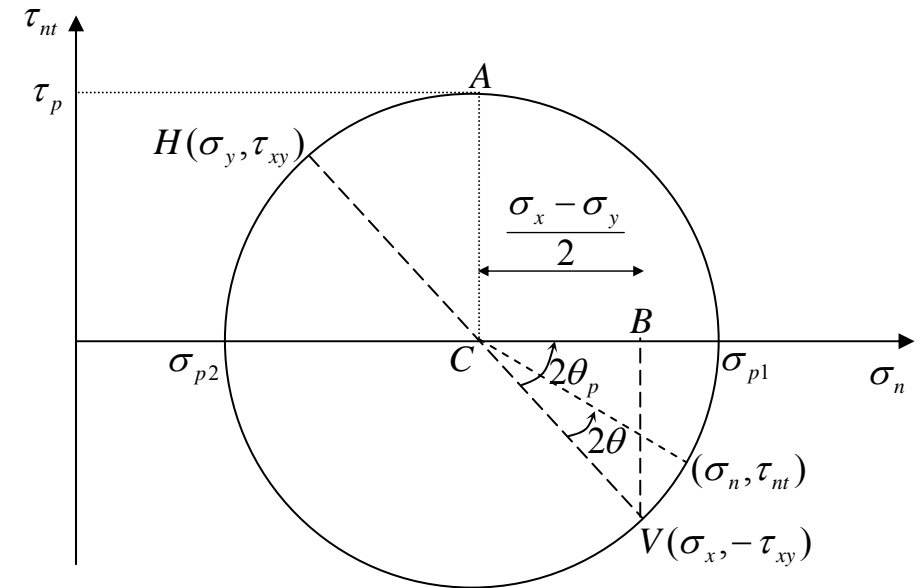
- $\tau_p = R$

- $2\theta_p = \tan^{-1} \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \tan^{-1} \frac{BV}{CB}$

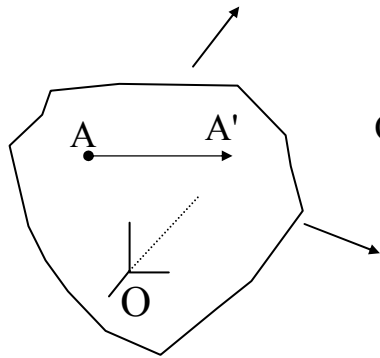
- $2\theta_p$ στο κύκλο του Mohr $\rightarrow \theta_p$ στο φυσικό χώρο

- $\tau_p \angle \sigma_p \rightarrow \pm \pi/2$ στο κύκλο του Mohr $\rightarrow \pm \pi/4$ στο φυσικό χώρο

- $\tau_{xy}(+)$ για \curvearrowright στροφή  $\tau_{xy}(-)$ για \curvearrowleft στροφή 

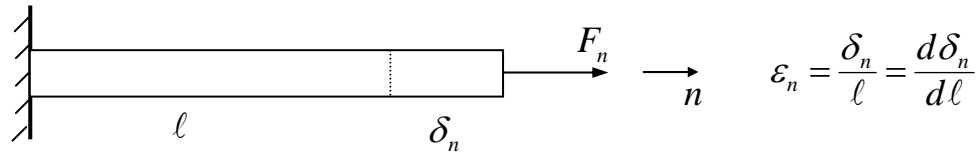


Παραμόρφωση



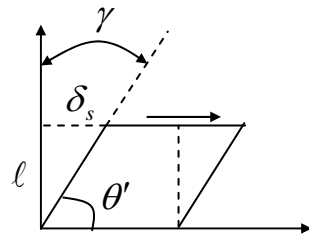
OA → OA' Αλλαγή μήκους και γωνίας

- Αξονική: ε_n



$$\varepsilon_n = \frac{\delta_n}{l} = \frac{d\delta_n}{dl}$$

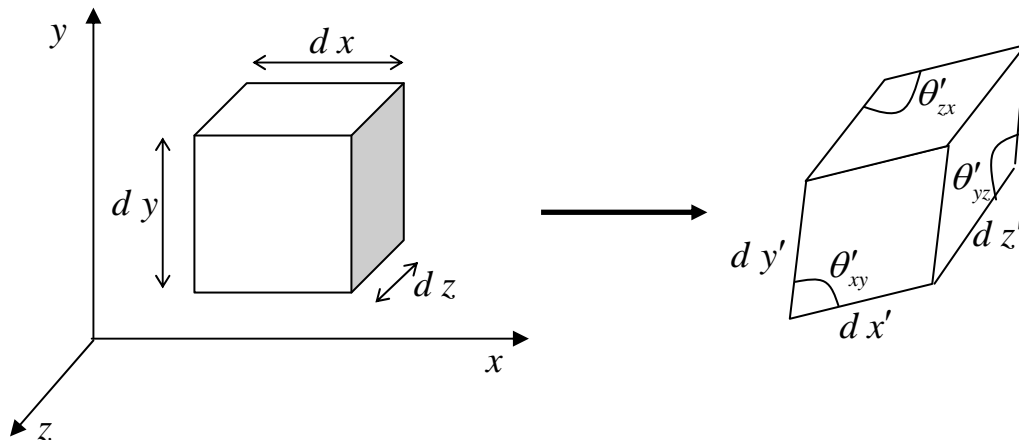
- Διατμητική: γ



$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta'$$

$$\gamma \text{ μικρό} \rightarrow \gamma \cong \tan \gamma = \frac{\delta_s}{l}$$

$\varepsilon \rightarrow (+)$ επιμήκυνση ; $\gamma \rightarrow (+)$ $\theta' < \frac{\pi}{2}$



$$\varepsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{d\delta_x}{dx}$$

$$\varepsilon_y = \frac{dy' - dy}{dy} = \frac{d\delta_y}{dy}$$

$$\varepsilon_z = \frac{dz' - dz}{dz} = \frac{d\delta_z}{dz}$$

$$\varepsilon_n = \frac{dn' - dn}{dn}$$

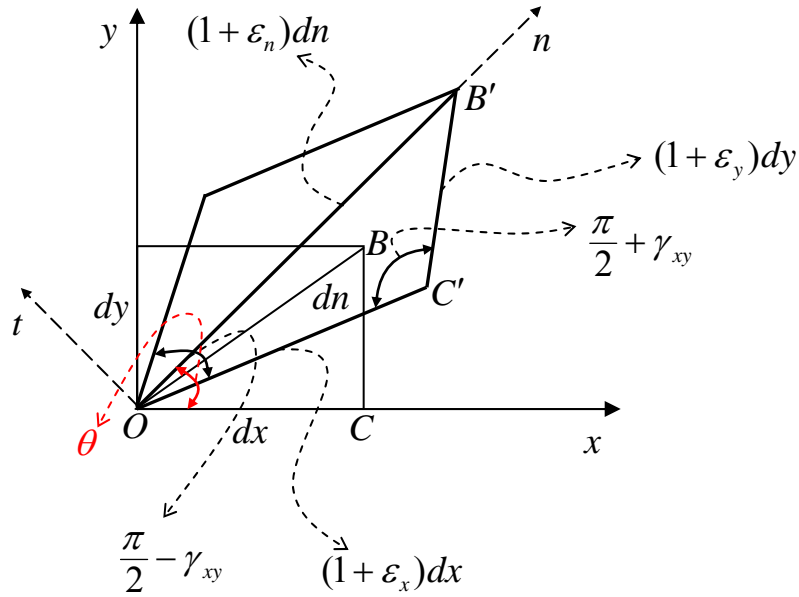
$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \theta'_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\pi}{2} - \theta'_{yz}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\pi}{2} - \theta'_{zx}$$

$$\gamma_{nt} = \frac{\pi}{2} - \theta'_{nt}$$

Δι-διάστατη (2-D) Παραμόρφωση



$$(OB')^2 = (OC')^2 + (C'B')^2 - 2(OC')(C'B') \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right) \Rightarrow$$

$$[(1 + \varepsilon_n)dn]^2 = [(1 + \varepsilon_x)dx]^2 + [(1 + \varepsilon_y)dy]^2 - 2[(1 + \varepsilon_x)dx][(1 + \varepsilon_y)dy][-\sin \gamma_{xy}]$$

$$dx = dn \cos \theta \quad , \quad dy = dn \sin \theta \quad , \quad \sin \gamma \cong \gamma \quad , \quad \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\} \ll 1$$

Ορθή και διατμητική παραμόρφωση σε τυχαίο επίπεδο

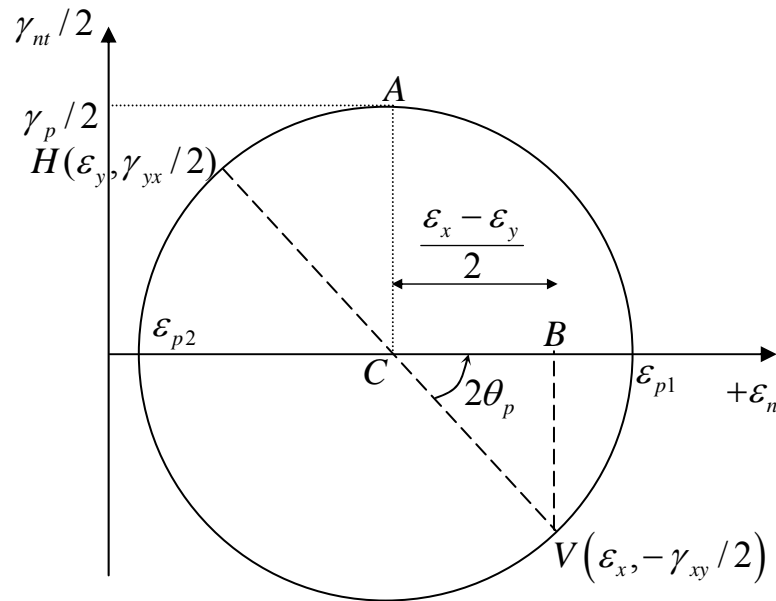
$$\therefore \varepsilon_n = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad , \quad \gamma_{nt} = -2(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\sigma_x \rightarrow \varepsilon_x \quad , \quad \sigma_y \rightarrow \varepsilon_y \quad , \quad \tau_{xy} \rightarrow \varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

Ομοίως,
$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_n &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \\ \gamma_{nt} &= -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Κύριες παραμορφώσεις,
Κύκλος Mohr κ.λπ.

$$\varepsilon_{p_{1,2}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}, \quad \tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$



$$\frac{\gamma_p}{2} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_{p_{1,2}} = C \pm R$$

$$C = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}, \quad R = \frac{\gamma_p}{2}$$

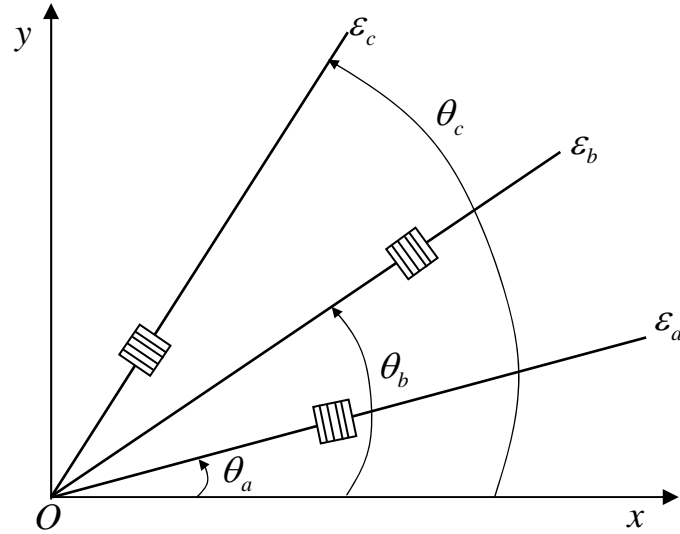
Επιμηκυνσιόμετρα

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x \cos^2 \theta_a + \varepsilon_y \sin^2 \theta_a + \gamma_{xy} \sin \theta_a \cos \theta_a$$

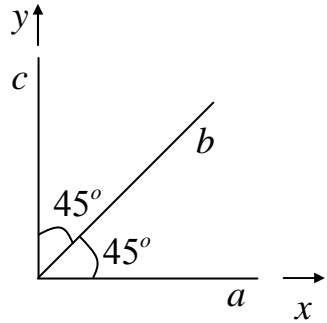
$$\varepsilon_b = \varepsilon_x \cos^2 \theta_b + \varepsilon_y \sin^2 \theta_b + \gamma_{xy} \sin \theta_b \cos \theta_b$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_x \cos^2 \theta_c + \varepsilon_y \sin^2 \theta_c + \gamma_{xy} \sin \theta_c \cos \theta_c$$

$$\Rightarrow (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}) \text{ από τα } \rightarrow (\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c)$$



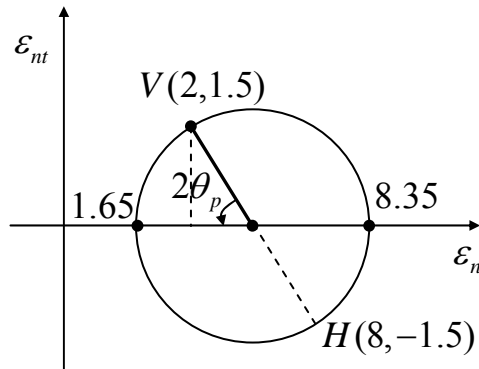
Παράδειγμα



$$\varepsilon_a = 2 \times 10^{-4}, \quad \varepsilon_b = 3.5 \times 10^{-4}, \quad \varepsilon_c = 8 \times 10^{-4}$$

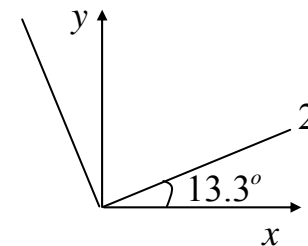
$$\varepsilon_a = \varepsilon_x = 2 \times 10^{-4}, \quad \varepsilon_c = \varepsilon_y = 8 \times 10^{-4}, \quad \varepsilon_b = \varepsilon_x \cos^2 45^\circ + \varepsilon_y \sin^2 45^\circ + \gamma_{xy} \sin 45^\circ \cos 45^\circ$$

$$\therefore \frac{\gamma_{xy}}{2} = \varepsilon_{xy} = -1.5 \times 10^{-4}$$

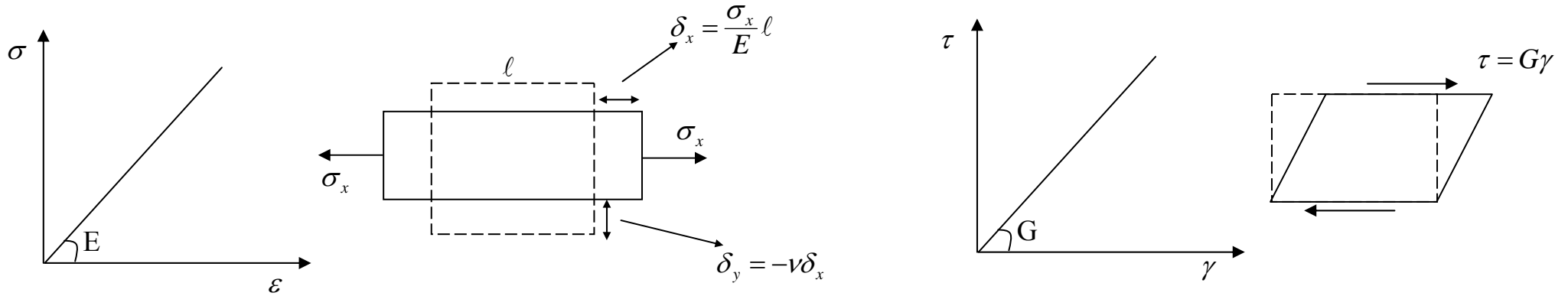


$$R = \frac{\gamma_p}{2} = \sqrt{\left(\frac{2-8}{2}\right)^2 + 1.5^2} \times 10^{-4} = 3.35 \times 10^{-4}, \quad C = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = 5 \times 10^{-4}, \quad \varepsilon_{p1,2} = C \pm R = \begin{cases} 8.35 \times 10^{-4} \\ 1.65 \times 10^{-4} \end{cases}$$

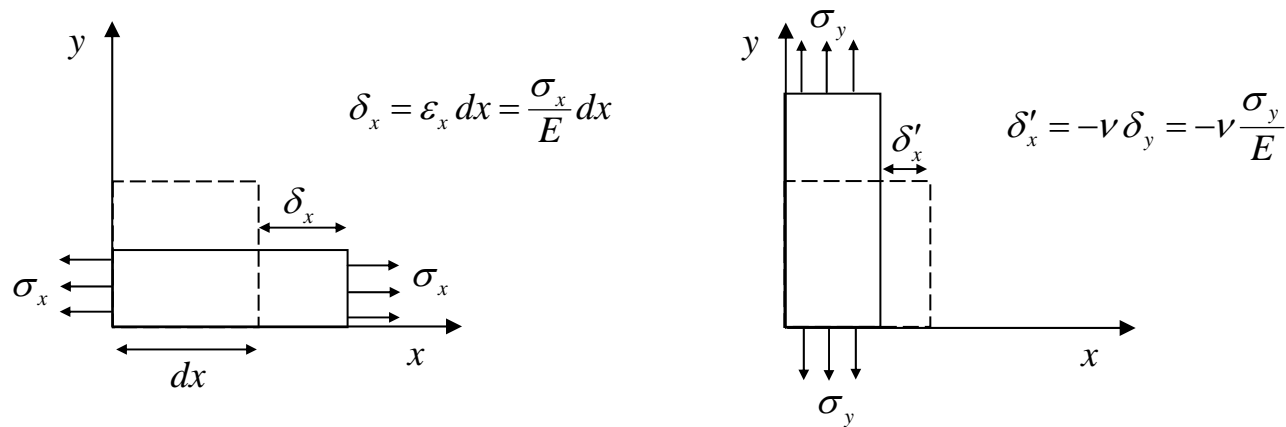
$$2\theta_p = \tan^{-1} \frac{1.5}{5-2} \rightarrow \theta_p = 13.3^\circ$$



Νόμος του Hooke



Μεταβολή μήκους (παραμόρφωση) στη διεύθυνση x



$$\delta_x + \delta'_x = \frac{\Delta l}{l} \Big|_x = \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} \Rightarrow$$

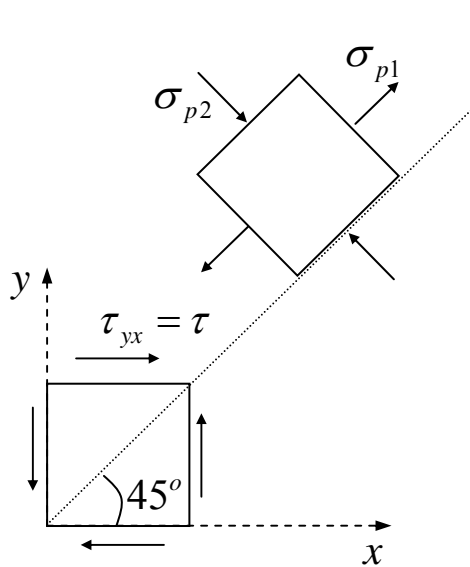
$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \end{aligned}$$

2D

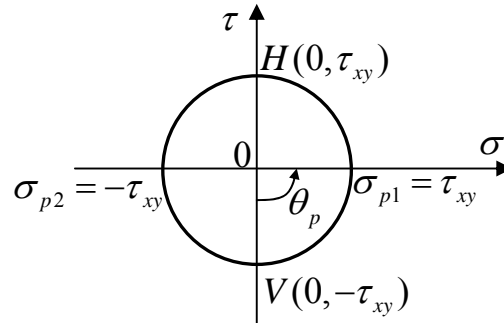
$$\epsilon_x = \frac{(\sigma_x - \nu\sigma_y)}{E} \quad , \quad \epsilon_y = \frac{(\sigma_y - \nu\sigma_x)}{E}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \quad , \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x)$$

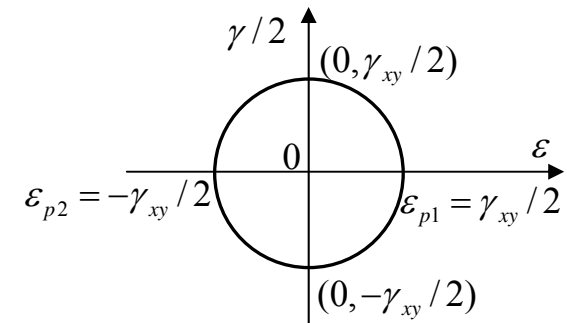
$$\epsilon_z = \frac{-\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \quad ; \quad \sigma_z = 0$$



Καθαρή Διάτμηση



$$R = \tau_{xy} = \tau \rightarrow \sigma_{p1,2} = \pm \tau_{xy} = \pm \tau$$



$$R = \gamma_{xy}/2 \rightarrow \epsilon_{p1,2} = \pm \gamma_{xy}/2$$

Νόμος του Ηooke: $\sigma_{p1} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{p1} + \nu\epsilon_{p2}) \rightarrow \tau = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\gamma}{2} - \nu\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma \Rightarrow \frac{\tau}{\gamma} = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow E = 2(1+\nu)G$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z)], \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\epsilon_y + \nu(\epsilon_x + \epsilon_z)], \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y)], \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{zx}$$

Επίπεδη ένταση: $\sigma_z \equiv 0$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\epsilon_z = \frac{-\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left\{\frac{E}{1-\nu}[\epsilon_x + \epsilon_y]\right\} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_x + \epsilon_y)$$

Επίπεδη παραμόρφωση: $\epsilon_z \equiv 0$

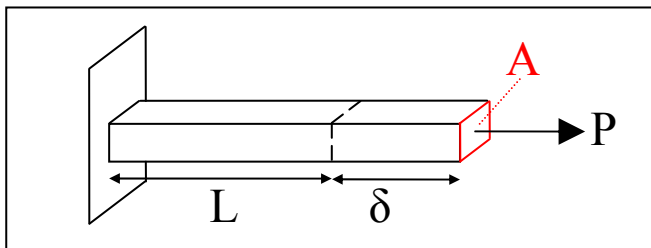
$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\epsilon_x + \nu\epsilon_y]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\epsilon_y + \nu\epsilon_x]$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\epsilon_x + \epsilon_y)$$

Αξονική Φόρτιση



$$\delta = \varepsilon L = \frac{\sigma}{E} L, \quad \sigma = \frac{P}{A}$$

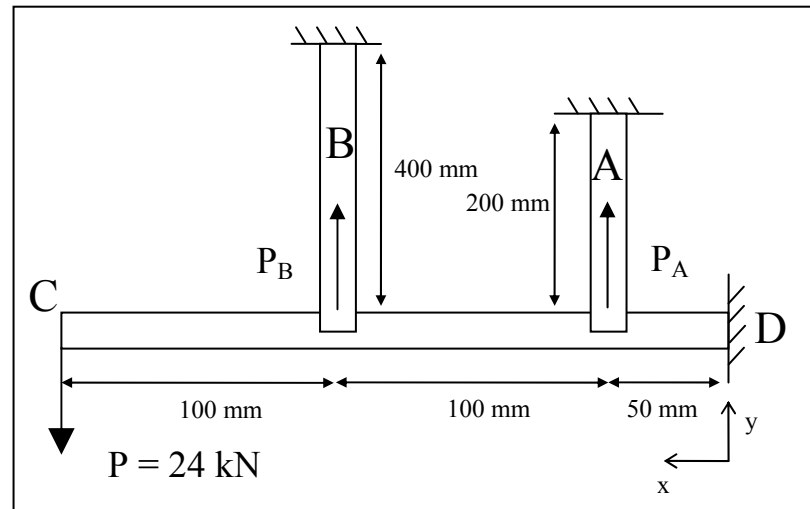
$$\therefore \delta = \frac{PL}{AE}$$

Υπερστατικοί Φορείς

CD ακαμπτο

$E_A = 200 \text{ GPa}, \sigma_{YA} = 500 \text{ MPa}, A_A = 150 \text{ mm}^2$ $\sigma_A, \sigma_B, \frac{\sigma_{YA}}{\sigma_A}, \frac{\sigma_{YB}}{\sigma_B}, ?$

$E_B = 100 \text{ GPa}, \sigma_{YB} = 400 \text{ MPa}, A_B = 200 \text{ mm}^2$



$$M_D = 0 \Rightarrow P(0.25\text{m}) - P_B(0.15\text{m}) - P_A(0.05\text{m}) = 0 \Rightarrow P_A + 3P_B = 120\text{kN} \quad (1)$$

$$\frac{\delta_c}{250} = \frac{\delta_B}{150} = \frac{\delta_A}{50} \Rightarrow \delta_A = \frac{\delta_B}{3} = \frac{\delta_c}{5} \Rightarrow \delta_B = 3\delta_A$$

$$\frac{P_B L_B}{A_B E_B} = 3 \frac{P_A L_A}{A_A E_A} \Rightarrow \frac{P_B (0.4\text{m})}{(0.2\text{m})(0.1\text{m})} = 3 \frac{P_A (0.2\text{m})}{(0.15\text{m})(0.2\text{m})}$$

$$\therefore P_A = P_B \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow P_A = P_B = 30\text{kN}$$

$$\sigma_A = \frac{P_A}{A_A} = \frac{30(10)^3 \text{ N}}{150(10)^{-6} \text{ m}^2} = 200(10)^6 \text{ N/m}^2 = 200 \text{ MPa} (+), \quad \sigma_B = 150 \text{ MPa} (+), \quad k_A = \frac{\sigma_{YA}}{\sigma_A} = \frac{500}{200} = 2.5, \quad k_B = \frac{\sigma_{YB}}{\sigma_B} = \frac{400}{150} = 2.67$$

$$\delta_C = \frac{5}{3} \delta_B = \frac{5 P_B L_B}{3 A_B E_B} = \frac{5 \cdot 30(10)^3 (0.400) \text{ Nm}}{3 \cdot 200(10)^{-6} (100)(10)^9 \text{ m}^2 \text{ Pa}} = 1(10)^{-3} \text{ m} = 1 \text{ mm}$$

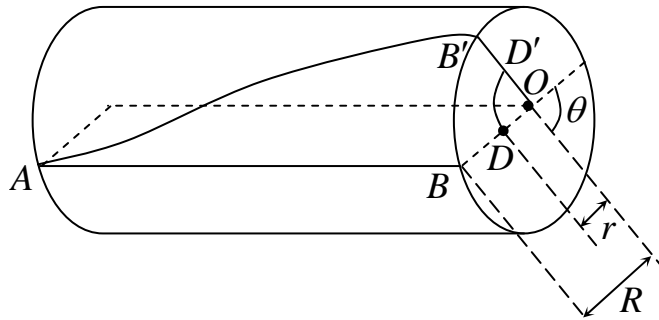
Στρέψη



Ασκούμενη Ροπή

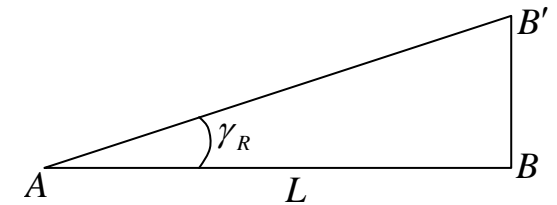
$$M = \int_A r \tau dA \dots \Sigma M = 0$$

• Παραμόρφωση



$$\tan \gamma_R = \frac{BB'}{L} = \frac{R\theta}{L}, \quad \tan \gamma = \frac{DD'}{L} = \frac{r\theta}{L}$$

$$\tan \gamma \approx \gamma \text{ (διατμητική παραμόρφωση)}$$



$$\gamma_R = \frac{R\theta}{L}, \quad \gamma = \frac{r\theta}{L} \Rightarrow \gamma = \frac{\gamma_R}{R} r$$

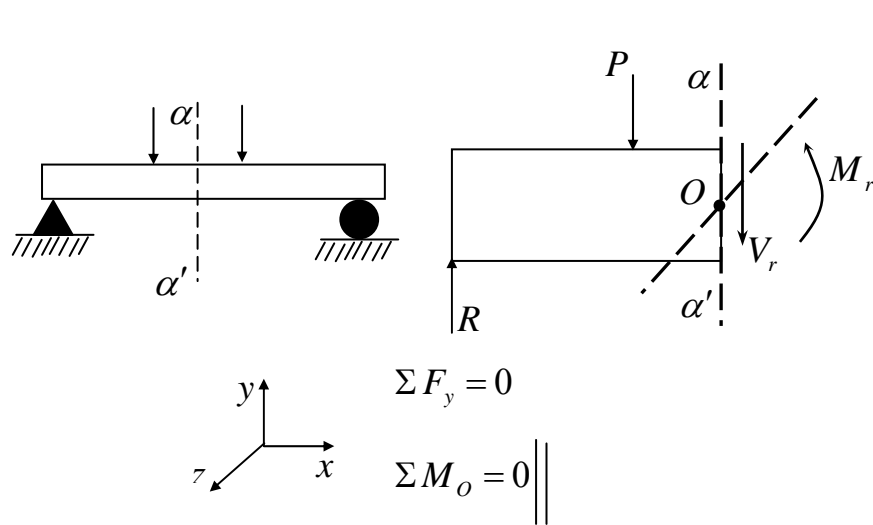
• Τάση

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \Rightarrow \tau = G\gamma = \frac{G\gamma_R}{R} r \rightarrow \tau = \frac{\tau_R}{R} r$$

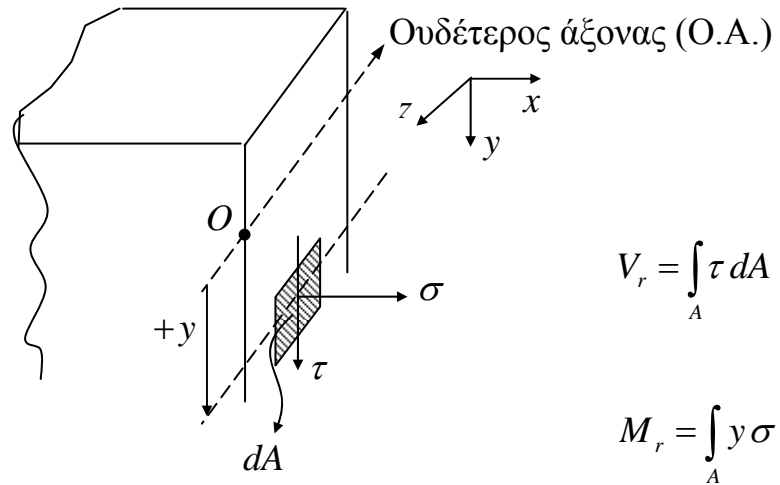
$$\therefore M = \int_A \frac{\tau_R}{R} r^2 dA = \frac{\tau_R}{R} \int_A r^2 dA = \frac{\tau_R}{r} \int_A r^2 dA \Rightarrow \tau = \frac{M r}{J} ; \quad J \equiv \int_A r^2 dA$$

$$J \equiv \int_A r^2 dA \dots \text{πολική ροπή αδράνειας} \quad \left(J = \int_A r^2 dA = \int_0^R r^2 d(\pi r^2) = \int_0^R 2\pi r^3 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2} \right)$$

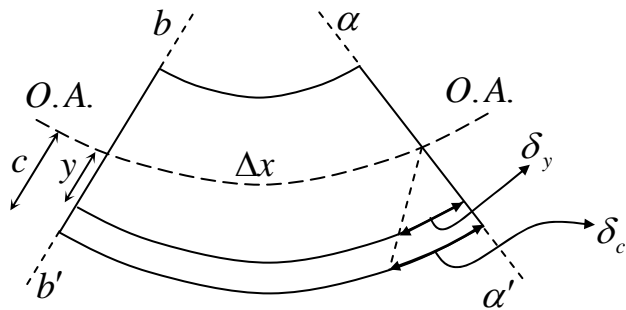
$$\gamma = \frac{r\theta}{L}, \quad \gamma = \frac{\gamma_R}{R} r, \quad \tau = \frac{M r}{J} \Rightarrow \theta = \frac{M L}{J G} \left(= \frac{\tau L}{r G} \right)$$



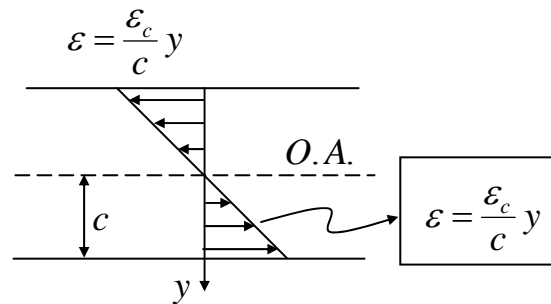
Κάμψη



Καμπτική Παραμόρφωση

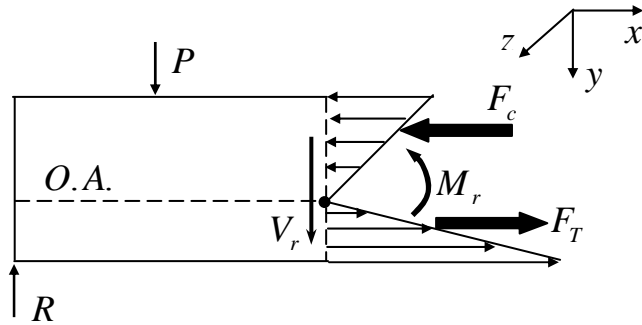


$$\frac{\delta_y}{\delta_c} = \frac{y}{c} \rightarrow \delta_y = \frac{\delta_c}{c} y$$



Στατική: $\Sigma F = 0$, $\Sigma M = 0$
 $(F_c = -F_T \Rightarrow M_r)$

Καμπτική Τάση



$$\bullet \Sigma F_x = 0 \rightarrow \int_A \sigma dA = 0 \quad \text{Hooke: } \sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = E \varepsilon_x$$

$$\Rightarrow \sigma = E\varepsilon \rightarrow \sigma = E \frac{\varepsilon_c}{c} y \Rightarrow \boxed{\frac{\sigma}{y} = \frac{\sigma_c}{c}}$$

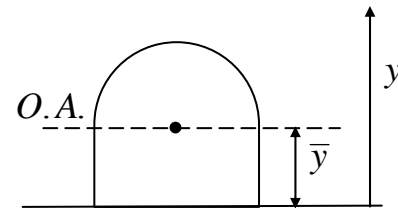
$$\bullet M = M_r = \int_A \sigma y dA = \int_A \frac{\sigma_c}{c} y^2 dA = \frac{\sigma_c}{c} \int_A y^2 dA = \frac{\sigma}{y} \int_A y^2 dA = \frac{\sigma}{y} I$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{My}{I} ; \quad I \equiv \int_A y^2 dA ; \quad I = \text{ροπή αδράνειας ως προς κεντρικό άξονα}$$

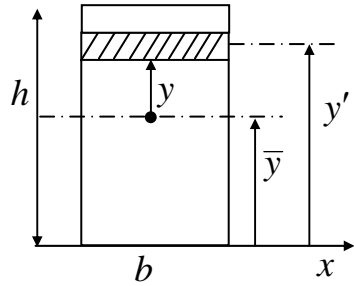
Και από την $\int_A \sigma dA = 0 \rightarrow \int_A y dA = 0$

$\Rightarrow K.A. \equiv O.A.$ (Κεντρικός άξονας \equiv Ουδέτερος άξονας)

O. A. $\bar{y} = \frac{1}{A} \int_A y' dA \rightarrow I = \int_A y'^2 dA$

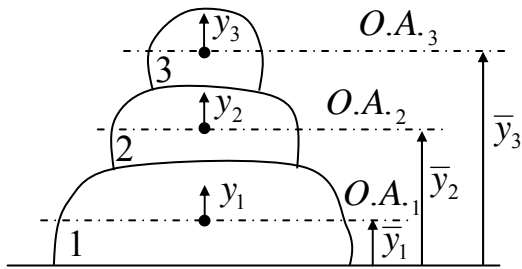


Ροπή αδράνειας

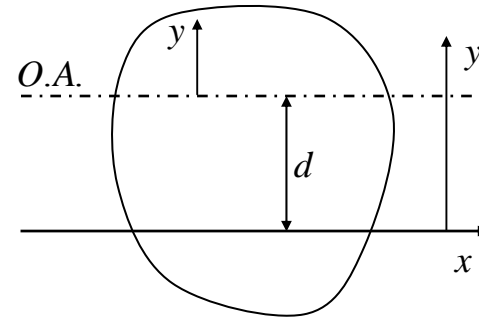


$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_A y' dA = \frac{1}{bh} \int_0^h y' d(by') = \frac{b}{bh} \left[\frac{y'^2}{2} \right]_0^h = \frac{h}{2}$$

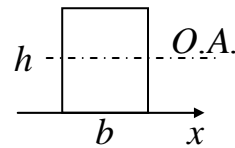
$$I = I_{OA} = \int_A y^2 dA = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}$$



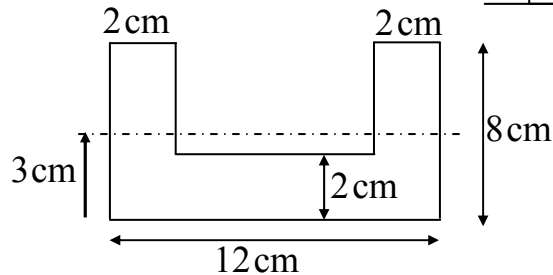
$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^3 A_i}$$



$$I_x = I_{OA} + Ad^2$$

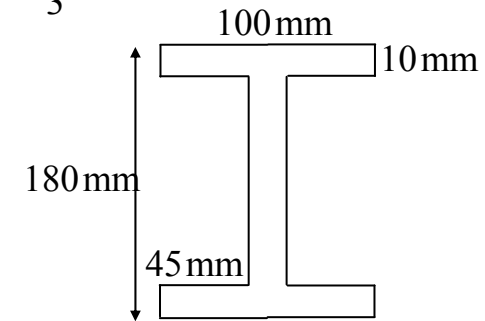


$$I_x = I_{OA} + bh \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{1}{3}bh^3$$



$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{(8 \times 12) \cdot 4 - (8 \times 6) \cdot 5}{(8 \times 12) - (8 \times 6)} = 3 \text{ cm}$$

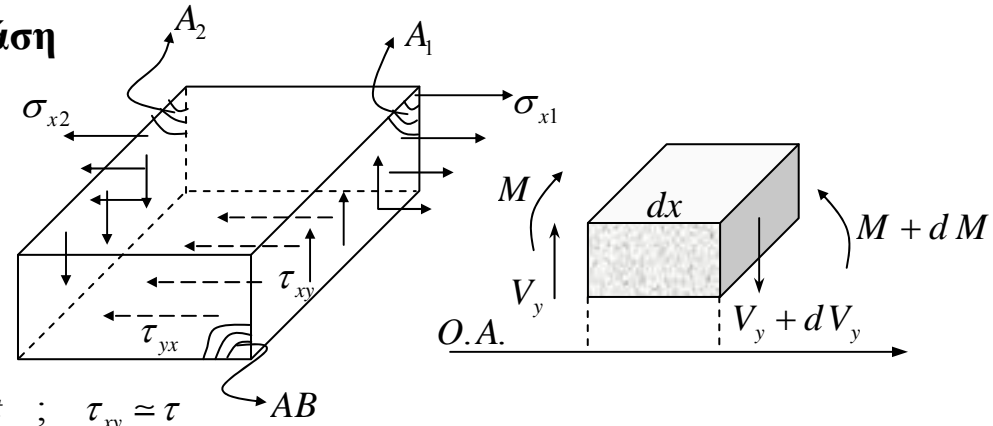
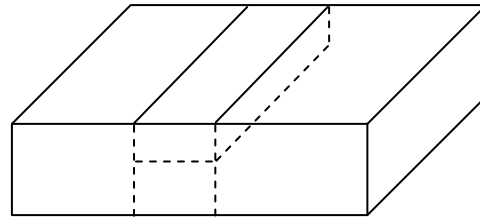
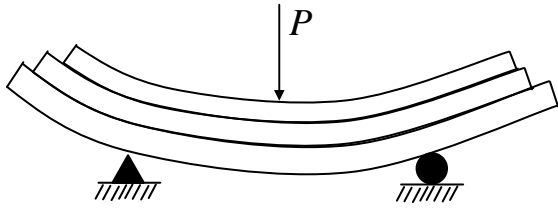
$$I_{OA} = 2 \frac{1}{3} (2) (5)^3 + \frac{1}{3} (12) (3)^3 - \frac{1}{3} (8) (1)^3 = 272 \text{ cm}^4$$



$$\bar{y} = \frac{180}{2} = 90 \text{ mm} \quad \dots \text{ άξονας συμμετρίας}$$

$$I = \frac{1}{12} (100) (180)^3 - 2 \frac{1}{12} (45) (160)^3 = 17.88 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Διατμητική Τάση



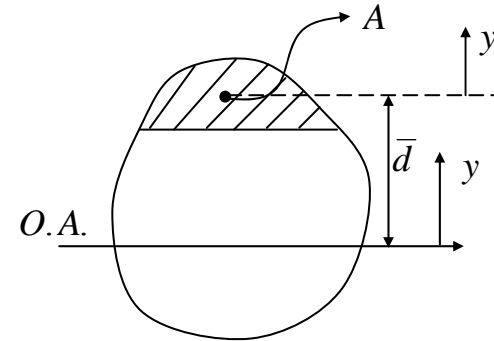
$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \int_{A_1} \sigma_{x1} dA - \int_{A_2} \sigma_{x2} dA - \int_{AB} \tau_{xy} dA = 0 \quad A_1 = A_2, \quad AB = (dx)t \quad ; \quad \tau_{xy} \approx \tau$$

$$\sigma_{x1} = \frac{M + dM}{I_{OA}} y, \quad \sigma_{x2} = \frac{M}{I_{OA}} y, \quad I_{OA} \equiv I \Rightarrow \tau(dx)t = \frac{dM}{I} \int_A y dA \rightarrow \tau = \frac{dM}{dx} \frac{1}{It} \int_A y dA \quad \frac{dM}{dx} = V \quad \text{και} \quad \int_A y dA \equiv Q$$

$$\therefore \tau = \frac{VQ}{It}$$

• **Q:** $Q = \int_A y dA = \int_A (\bar{d} + y_1) dA = \bar{d} \times A \quad (\text{επειδή} \int_A y_1 dA = 0)$

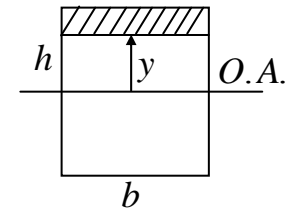
Σύνθετες Διατομές: $Q = \sum_{i=1}^N A_i \bar{d}_i$



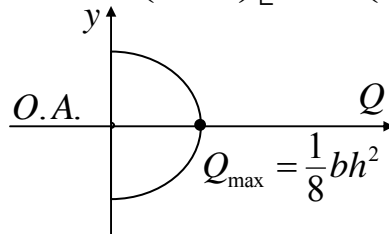
α) $Q = 0$ στην κορυφή και στην βάση $Q_T = Q_B = 0$

β) $\tau_{\max} \rightarrow \begin{cases} V_{\max} \\ \frac{Q}{t} \max \end{cases}$

$$Q(y) = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left[\frac{h}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right] = \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]$$

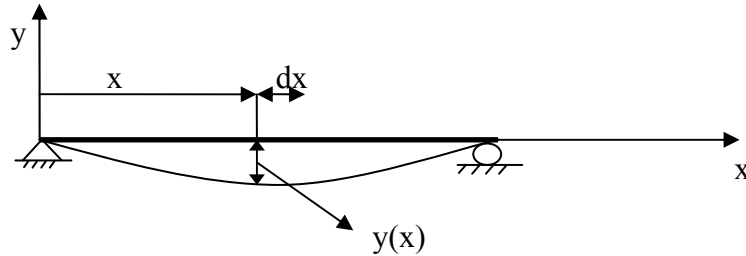


γ) Q_{\max} στον Ο.Α. αν $t = \text{σταθ.}$

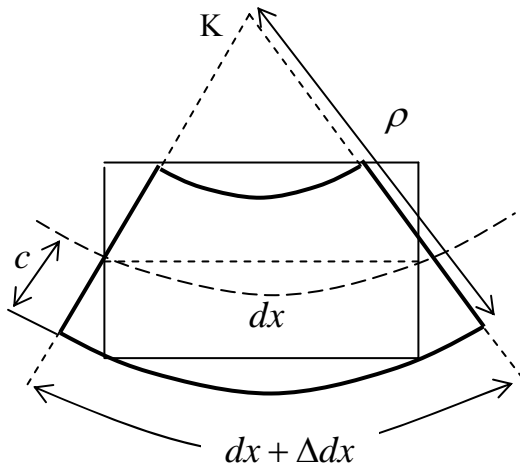


Κάμψη Δοκών – Ελαστική Γραμμή

- Σαν ελαστική γραμμή δοκού ορίζεται ο παραμορφωμένος ουδέτερος άξονας της δοκού ή αλλιώς η γραμμή των βυθίσεων της δοκού



- Απειροστό τμήμα της δοκού μεταξύ x και dx



ρ ακτίνα καμπυλότητας



$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \approx y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

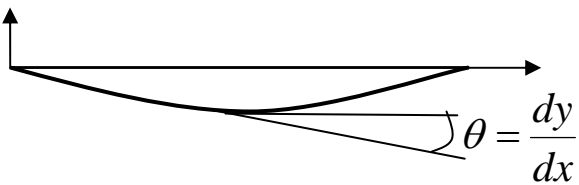
$$\left. \begin{aligned} dx &= \rho d\theta \\ dx + \Delta dx &= (\rho + c) d\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dx + \Delta dx}{dx} = \frac{\rho + c}{\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta dx}{dx} = \epsilon_c = \frac{c}{\rho} \Rightarrow \frac{\sigma_c}{E} = \frac{1}{\rho} c \Rightarrow \frac{Mc}{EI_z} = \frac{d^2 y}{dx^2} c$$

$$\Rightarrow \therefore \frac{M}{EI_z} = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{Εξίσωση ελαστικής γραμμής}$$

- $M > 0 \rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} > 0 \Rightarrow$ Η ελαστική γραμμή στρέφει τα κοίλα άνω.
- $M < 0 \rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} < 0 \Rightarrow$ Η ελαστική γραμμή στρέφει τα κοίλα κάτω.



- Κοίλα άνω:  Κοίλα κάτω: 

- Κλίση ελαστικής γραμμής: 

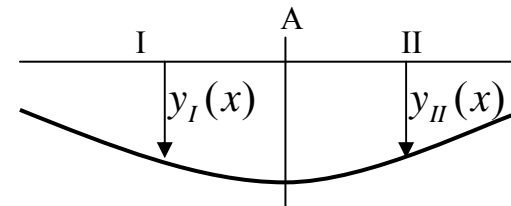
- Υπολογισμός ελαστικής γραμμής

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI_z} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \int \frac{M}{EI_z} dx + c_1 \Rightarrow y(x) = \int \left[\int \frac{M}{EI_z} dx \right] dx + c_1 x + c_2$$

Οι c_1 και c_2 προσδιορίζονται από οριακές συνθήκες:

- Πάκτωση:  $y(0) = \frac{dy}{dx}(0) = 0$
- Άρθρωση ή κύλιση:  $y(0) = 0$

- Αν δυο τμήματα της δοκού έχουν διαφορετικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά ή φυσικές ιδιότητες, τότε η βύθιση υπολογίζεται για τα επιμέρους τμήματα και οι πρόσθετες σταθερές ολοκλήρωσης προσδιορίζονται από τις συνθήκες συνέχειας στα κοινά σημεία.



Πρέπει: $y_I(A) = y_{II}(A)$ και $\frac{dy_I}{dx}(A) = \frac{dy_{II}}{dx}(A)$

Παράδειγμα

EI σταθερό

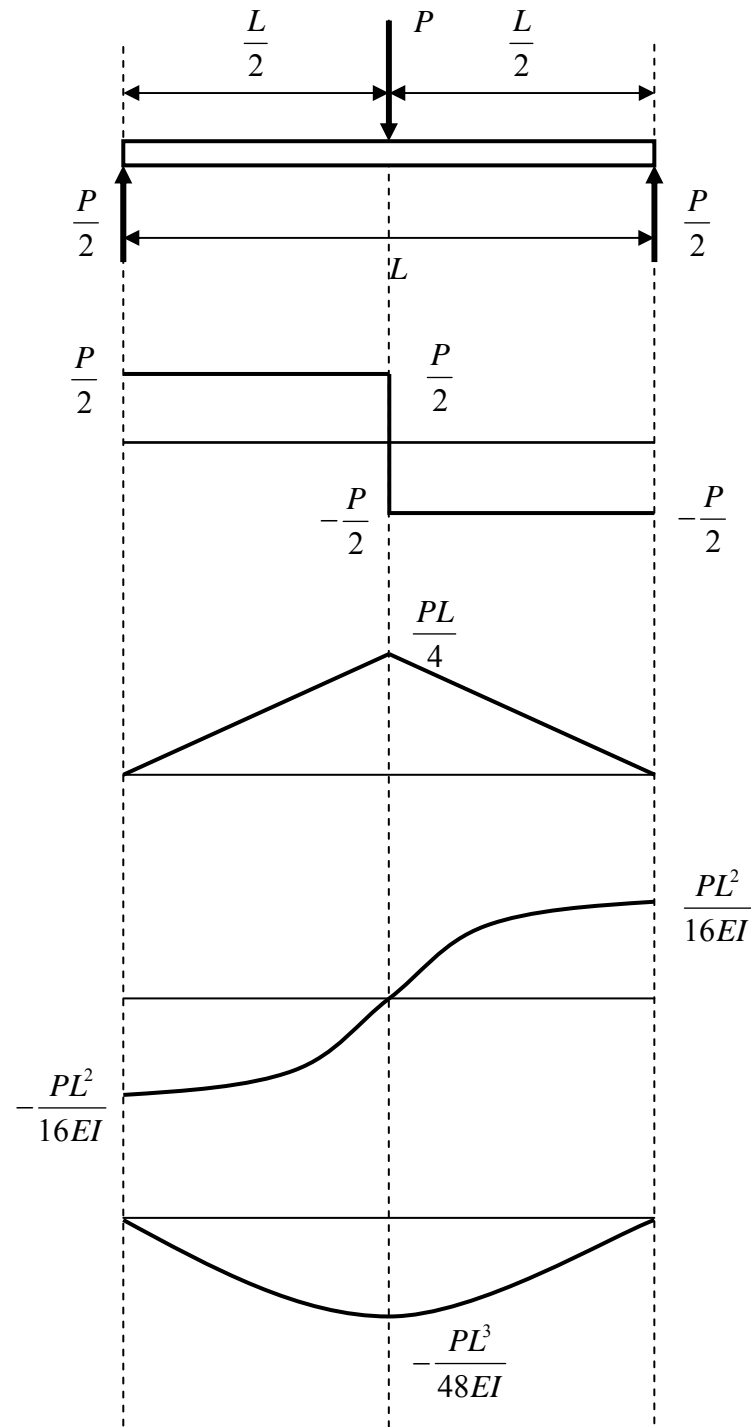
- Φορτίο: $-w \equiv \frac{dV}{dx} = EI \frac{d^4 y}{dx^4}$

- Διάτμηση: $V = \frac{DM}{dx} = EI \frac{d^3 y}{dx^3}$

- Ροπή: $M = EI \frac{d^2 y}{dx^2}$

- Παραμόρφωση (Βύθιση): y

Κλίση: $\theta = \frac{dy}{dx}$



- Υπολογισμός βύθισης y

$$M = \frac{P}{2}x \Rightarrow EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{2}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EI \frac{dy}{dx} = \frac{P}{4}x^2 + c_1 \Rightarrow \quad (1)$$

$$\Rightarrow EIy = \frac{P}{12}x^3 + c_1x + c_2 \quad (2)$$

$$\text{Συνοριακές συνθήκες: } \begin{cases} y(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \\ \frac{dy}{dx}\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \rightarrow c_1 = -\frac{PL^2}{16} \end{cases}$$

Τελικά:

$$(1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{4}x^2 - \frac{PL^2}{16} \right) \rightarrow \begin{cases} x=0, \frac{dy}{dx}(0) = -\frac{PL^2}{16EI} \\ x=\frac{L}{2}, \frac{dy}{dx}\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow y = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{12}x^3 - \frac{PL^2}{16}x \right) \rightarrow \begin{cases} x=0, y(0) = 0 \\ x=\frac{L}{2}, y\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{PL^3}{48EI} \end{cases}$$