ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΟΧΗΣ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ: Μηχανικη Του Στερεου Σωματος.

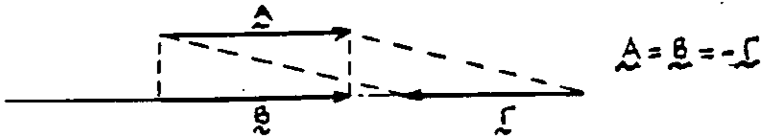
0. ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Η Μηχανικη ερευνα τα φυσικα φαινομενα που σχετιζονται με την αλλαγη της θεσης και τη μεταβολη της μορφης των σωματων, δηλ μελετα ο,τι αφορα την κινηση και την παραμορφωση τους.
Η Στατικη ειναι ο κλαδος της Μηχανικης που εξεταζει την ισορροπια των στερεων σωματων (απαραμορφωτων).
Βασικο αιτιο για την αλλαγη της καταστασης ενος σωματος (κινηση-παραμορφωση) θεωρουνται οι δυναμεις.
Η δυναμη ειναι ενα διανυσματικο μεγεθος, δηλ. παριστανεται με ενα γεωμετρικο διανυσμα και ετσι χαρακτηριζεται απο το μετρο της, τη διευθυνση της και την φορα της. αλλα διανυσματικα μεγεθη ειναι η ταχυτητα, η επιταχυνση κλπ ενω βαθμωτα μεγεθη οπως η μαζα, ο χρονος κλπ. καθοριζονται πληρως μ'εναν αριθμο
<u>Μοναδα μετρησης</u> για τη δυναμη ειναι το Newton (S.I.): $1N = 1Kg \cdot 1m/sec^2$ και πολλαπλασια του: $1KN = 10^3 N$, $1MN = 10^6 N$, $1GN = 10^9 N$.

1. ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ-ΣΥΝΙΣΤΑΜΕΝΗ (ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ)

<u>Ανασκοπηση απο την αναλυτικη γεωμετρια.</u>

δυο διανυσματα $\underset{\sim}{A}$ και $\underset{\sim}{B}$ λεγονται ισα και γραφουμε $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B}$ οταν εχουν το ιδιο μετρο, ειναι παραλληλα και εχουν την ιδια φορα. Λεγονται αντιθετα και γραφουμε $\underset{\sim}{A} = -\underset{\sim}{B}$ οταν εχουν το ιδιο μετρο, ειναι παραλληλα και εχουν αντιθετες φορες.

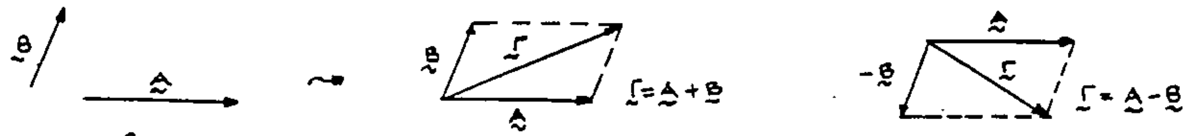


<u>Στοιχειωδεις πραξεις διανυσματων</u>

Βαθμωτο γινομενο: Το γινομενο διανυσματος $\underset{\sim}{A}$ με τον αριθμο λ ειναι το διανυσμα $\underset{\sim}{B}$ που εχει μετρο $|\lambda| \cdot A$ οπου το $A = |\underset{\sim}{A}|$ συμβολιζει το μετρο του $\underset{\sim}{A}$, ειναι παραλληλο με το $\underset{\sim}{A}$ και εχουν την ιδια φορα αν $\lambda > 0$ ή αντιθετη αν $\lambda < 0$ γραφουμε $\underset{\sim}{B} = \lambda \underset{\sim}{A}$

Αθροισμα δυο διανυσματων $\underset{\sim}{A}$ και $\underset{\sim}{B}$ ειναι το διανυσμα $\underset{\sim}{\Gamma}$ που οριζεται ως εξης: αν παρουμε τα $\underset{\sim}{A}$ και $\underset{\sim}{B}$ σαν παρακειμενες πλευρες ενος παραλληλογραμμου τοτε το $\underset{\sim}{\Gamma}$ ειναι το διανυσμα με αρχη την κοινη αρχη των $\underset{\sim}{A}$ και $\underset{\sim}{B}$ και περας την απεναντι κορυφη του παρα/γραμμου επι της διαγωνιου (κανονας του παρ/γραμμου). Τοτε το $\underset{\sim}{\Gamma}$ λεγεται συνισταμενη των $\underset{\sim}{A}$ και $\underset{\sim}{B}$ και τα $\underset{\sim}{A}$ και $\underset{\sim}{B}$ συνιστωσες του $\underset{\sim}{\Gamma}$.

Η αφαιρεση $\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B}$ των $\underset{\sim}{A}$ και $\underset{\sim}{B}$ οριζεται απο την ισοτητα: $\underset{\sim}{\Gamma}=\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}+(-\underset{\sim}{B})$.



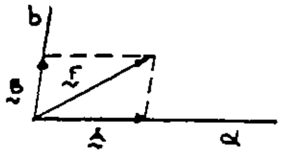
Ισχυουν οι ιδιοτητες:

$$\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}+\underset{\sim}{A} \qquad \lambda(\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B})=\lambda\underset{\sim}{A}+\lambda\underset{\sim}{B}$$

$$\underset{\sim}{A}+(\underset{\sim}{B}+\underset{\sim}{\Gamma})=(\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B})+\underset{\sim}{\Gamma} \qquad (\lambda+\mu)\cdot\underset{\sim}{A}=\lambda\underset{\sim}{A}+\mu\underset{\sim}{A}$$

Αναλυση ενος διανυσματος.

Χρησιμοποιωντας τον κανονα παρ/γραμμου μπορουμε αντιστροφα να αναλυσουμε ενα διανυσμα $\underset{\sim}{\Gamma}$ σε δυο συνιστωσες $\underset{\sim}{A}$ και $\underset{\sim}{B}$ κατα μηκος δυο δοσμενων ευθειων α και b.



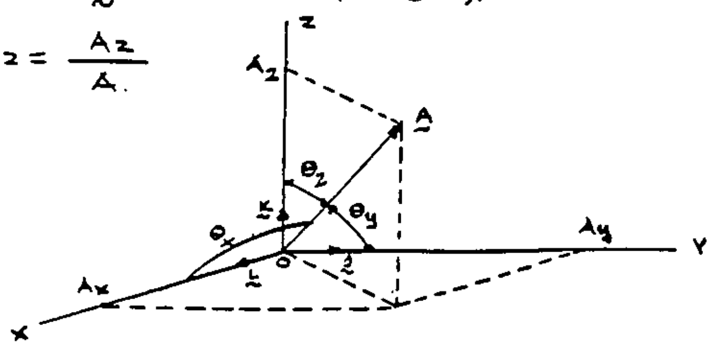
πραγματι φερνοντας απο το περας του $\underset{\sim}{\Gamma}$ παραλληλες προς τις α και b οριζουμε πανω σ'αυτες τα $\underset{\sim}{A}$ και $\underset{\sim}{B}$

Αναλυτικη παρασταση διανυσματος.

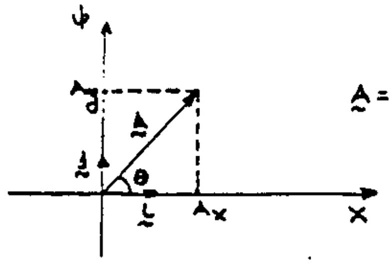
Ας ειναι $oxyz$ ενα τρισορθογωνιο συστημα αξονων με βασικα διανυσματα $\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}, \underset{\sim}{k}$ αντιστοιχα στους αξονες ox, oy, oz. Και $\underset{\sim}{A}$ ενα διανυσμα με συντεταγμενες A_x, A_y, A_z. Τοτε ειναι: $\underset{\sim}{A}=A_x\cdot\underset{\sim}{i}+A_y\cdot\underset{\sim}{j}+A_z\cdot\underset{\sim}{k}$ και $A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$

ενω τα συνημιτονα κατευθυνσεως του $\underset{\sim}{A}$ δινονται απο τις σχεσεις:

$$\cos\theta_x=\frac{A_x}{A}, \quad \cos\theta_y=\frac{A_y}{A}, \quad \cos\theta_z=\frac{A_z}{A}.$$



$\underset{\sim}{A} = A_x \cdot \underset{\sim}{i} + A_y \cdot \underset{\sim}{j}$, $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$



$\underset{\sim}{A} = A_x \underset{\sim}{i} + A_y \cdot \underset{\sim}{j}$

$A_x = A \cdot \cos\theta$

$A_y = A \cdot \sin\theta$

Ετσι οι πράξεις που ορίσθηκαν παραπάνω μπορούν να γραφούν αναλυτικά ως εξής:

ας είναι $\underset{\sim}{A} = A_x \cdot \underset{\sim}{i} + A_y \cdot \underset{\sim}{j} + A_z \cdot \underset{\sim}{k}$ και $\underset{\sim}{B} = B_x \underset{\sim}{i} + B_y \cdot \underset{\sim}{j} + B_z \underset{\sim}{k}$.

τότε: $\underset{\sim}{\Gamma} = \underset{\sim}{A} \pm \underset{\sim}{B} = (A_x \pm B_x)\underset{\sim}{i} + (A_y \pm B_y)\underset{\sim}{j} + (A_z \pm B_z)\underset{\sim}{k}$

$\underset{\sim}{B} = \lambda \underset{\sim}{A} = (\lambda A_x)\underset{\sim}{i} + (\lambda A_y)\underset{\sim}{j} + (\lambda A_z)\underset{\sim}{k}$

για διανύσματα του επιπέδου oxψ ισχύουν οι παραπάνω τύποι με $A_z = B_z$

<u>Εσωτερικό γινόμενο δύο</u> διανυσμάτων $\underset{\sim}{A}$ και $\underset{\sim}{B}$ λέγεται ο αριθμός:
$A \cdot B \cdot \cos\theta$, όπου θ είναι η κυρτή γωνία $(0 \leq \theta \leq 180°)$ μεταξύ των $\underset{\sim}{A}$ $\underset{\sim}{B}$, παρίσταται με $\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}$ και έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{A}$

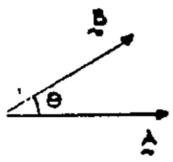
$\underset{\sim}{A} \cdot (\underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{\Gamma}) = \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{\Gamma}$

είναι $\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{A} = A^2$, αν $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \neq \underset{\sim}{0}$ τότε $\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{A} \perp \underset{\sim}{B}$

χρησιμοποιώντας την αναλυτική παράσταση των διανυσμάτων θα έχουμε

$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$ και για διανύσματα του επιπέδου oxψ:

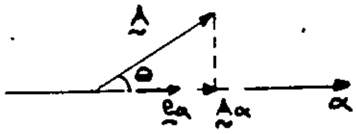
$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y$.



$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} = A \cdot B \cdot \cos\theta \Rightarrow \theta = \text{τοξ}\cos \frac{\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}}{A \cdot B} = \frac{A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z}{\sqrt{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2) \cdot (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)}}$

$0° \leq \theta \leq 180°$

χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο μπορούμε να βρούμε την προβολή ενός διανύσματος πάνω σε μια ευθεία:



αν $\underset{\sim}{A}_\alpha$ η προβολή του $\underset{\sim}{A}$ στην ευθεία α

είναι $\underset{\sim}{A}_\alpha = A \cdot \cos\theta \cdot \underset{\sim}{e}_\alpha$

όπου $\underset{\sim}{e}_\alpha$ το μοναδιαίο της α

αλλά $\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{e}_\alpha = A \cdot 1 \cdot \cos\theta = A \cdot \cos\theta$

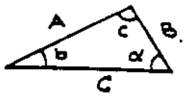
$\Rightarrow \underset{\sim}{A}_\alpha = (\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{e}_\alpha)\underset{\sim}{e}_\alpha$

αν θ οξεία τότε $\underset{\sim}{A}_\alpha$ ομόρροπο του $\underset{\sim}{e}_\alpha$

αν θ αμβλεία τότε $\underset{\sim}{A}_\alpha$ αντίρροπο του $\underset{\sim}{e}_\alpha$

Συνισταμένη συντρεχουσών δυνάμεων.

Για να βρει κάποιος την συνισταμένη $\underset{\sim}{R}$ n δυνάμεων $\underset{\sim}{F_1}, \underset{\sim}{F_2}, \dots \underset{\sim}{F_n}$ που συντρέχουν σ' ένα σημείο μπορεί να εφαρμόσει τον κανόνα του παρ/μου σε συνδυασμό με τις τριγωνομετρικές σχέσεις:



νόμος ημιτόνων: $\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$

νόμος συνημιτόνου: $C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2A \cdot B \cdot \cos c}$

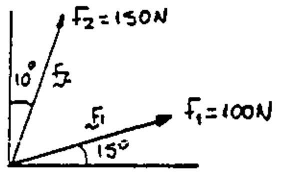
Ωστόσο η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται εύκολα στην περίπτωση δύο δυνάμεων. Για περισσότερες δυνάμεις είναι ευκολότερο να χρησιμοποιήσουμε την αναλυτική παράσταση των δυνάμεων με τις καρτεσιανές τους συντεταγμένες. Τότε οι συντεταγμένες της συνισταμένης $\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{F_1} + \underset{\sim}{F_2} + \dots + \underset{\sim}{F_n}$ θα είναι: $\underset{\sim}{R} = \sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{F_i} \rightarrow R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$, $R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$, $R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}$

όπου F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} είναι οι συντεταγμένες της δύναμης $\underset{\sim}{F_i}$.

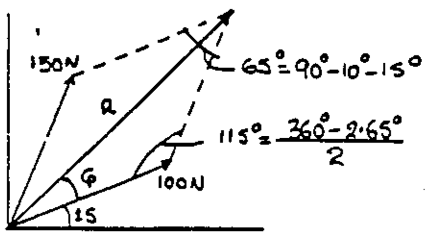
Και για δυνάμεις στο επίπεδο oxy ($F_{iz}=0$) $\rightarrow R_z = 0$.

Παράδειγμα.

Να προσδιοριστεί το μέτρο και η διεύθυνση της συνισταμένης των δυνάμεων του σχήματος.



α) μέθοδος παρ/μου

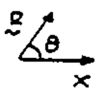


Από τον νόμο των συνημιτόνων θα έχουμε:

$$R = \sqrt{100^2 + 150^2 - 2 \cdot 100 \cdot 150 \cdot \cos 115^\circ} = 212{,}6\,N$$

από τον νόμο των ημιτόνων: $\frac{150}{\sin\varphi} = \frac{212.6}{\sin 115} \rightarrow \varphi = 39{,}8^\circ$

άρα η γωνία της $\underset{\sim}{R}$ με τον άξονα x είναι $\theta = 39{,}8 + 15 = 54{,}8^\circ$



b) αναλυτική μέθοδος

$F_{1x} = 100 \cdot \cos 15^\circ = 96{,}6N$, $F_{1y} = 100 \cdot \sin 15^\circ = 25{,}9N$

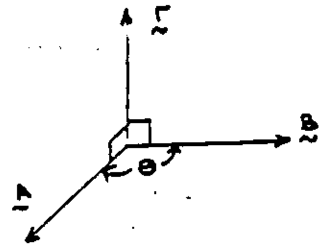
$F_{2x} = 150 \cdot \cos(90-10) = 26N$, $F_{2y} = 150 \cdot \sin(90-10) = 147{,}7N$

$\rightarrow R_x = 96{,}6 + 26 = 122{,}6N$, $R_y = 25{,}9 + 147{,}7 = 173{,}6N$

$R = \sqrt{122{,}6^2 + 173{,}6^2} = 212{,}6N$.

$\cos\theta = \frac{R_x}{R} = \frac{122{,}6}{212{,}6} = 0{,}577 \rightarrow \theta = 54{,}8^\circ$

εξωτερικο γινομενο δυο διανυσματων $\underset{\sim}{A}$ και $\underset{\sim}{B}$ λεγεται το διανυσμα $\underset{\sim}{\Gamma}$ που εχει μετρο $\Gamma = A \cdot B \cdot \sin\theta$ οπου θ η κυρτη γωνια των $\underset{\sim}{A}$ και $\underset{\sim}{B}$, διευθυνση κα θετη στο επιπεδο των $\underset{\sim}{A}$ και $\underset{\sim}{B}$ και φορα τετοια ωστε η τριαδα $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{\Gamma}$ να ειναι δεξιοστροφη (χρησιμοποιουμαι δεξιοστροφα συστηματα αξονων).
το εξωτερικο γινομενο συμβολιζεται: $\underset{\sim}{\Gamma} = \underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B}$



Ιδιοτητες εξωτερικου γινομενου.

$\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B} = -(\underset{\sim}{B} \times \underset{\sim}{A})$

$(\lambda \underset{\sim}{A}) \times \underset{\sim}{B} = \lambda(\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B}) = \underset{\sim}{A} \times (\lambda \underset{\sim}{B})$

$\underset{\sim}{A} \times (\underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{\Gamma}) = \underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{\Gamma}$

αν $\underset{\sim}{A} // \underset{\sim}{B} \rightarrow \underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{0}$

για τα μοναδιαια διανυσματα $\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}, \underset{\sim}{k}$ ενος καρτεσιανου συστηματος αξονων ειναι: $\underset{\sim}{i} \times \underset{\sim}{j} = \underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{j} \times \underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{i}$, $\underset{\sim}{k} \times \underset{\sim}{i} = \underset{\sim}{j}$

Ετσι το εξωτερικο γινομενο γραφεται αναλυτικα:

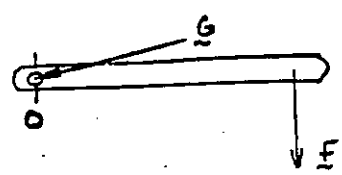
$\underset{\sim}{\Gamma} = \underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B} = (A_y \cdot B_z - A_z B_y)\underset{\sim}{i} + (A_z \cdot B_x - B_z \cdot A_x)\underset{\sim}{j} + (A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x)\underset{\sim}{k}$

αν τα διανυσματα $\underset{\sim}{A}$ και $\underset{\sim}{B}$ βρισκονται στο επιπεδο $0xy$, $A_z = B_z = 0$ και $\underset{\sim}{\Gamma} = \underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B} = (A_x B_y - A_y B_x)\underset{\sim}{k} = \Gamma_z \underset{\sim}{k}$ δηλ. παραλληλο με τον αξονα z

2. ΡΟΠΕΣ

2.1 Ροπή Δύναμης ως προς Σημείο

Θεωρειστε ενα σωμα στερεωμενο σ' ενα σημειο οπως φαινεται στο σχημα.



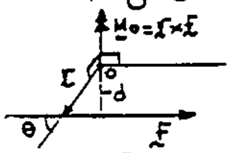
απο την εμπειρια του περιμενει καποιος οτι η δυναμη $\underset{\sim}{F}$ τεινει να περιστρεψει ή θα περιστρεψει (αν υπαρχει η δυνατοτητα στροφης) το σωμα γυρω απο το σημειο O.
Μαλιστα τοσο πιο μεγαλη ειναι η επιρροη της δυναμης οσο πιο μακρυα εφαρμοζεται απο το σημειο O
ακομα καταλαβαινει καποιος οτι μια δυναμη $\underset{\sim}{G}$ που περνα απο το O δεν μπορει να προκαλεσει στροφη γυρω απο το σημειο αυτο.

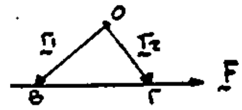
Η ροπη μιας δυναμης γυρω απο ενα σημειο ειναι ακριβως ενα μετρο της τασης που εχει η δυναμη να περιστρεψει ενα σωμα γυρω απο το σημειο αυτο.

Η ροπη μιας δυναμης ως προς ενα σημειο Ο ειναι ενα διανυσματικο μεγεθος που οριζεται σαν το εξωτερικο γινομενο: $\mathbf{M}_o = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$ οπου $\mathbf{r}$ το διανυσμα με αρχη το Ο και περας ενα σημειο της δυναμης $\mathbf{F}$.

Επομενως η ροπη ειναι ενα διανυσμα καθετο στο επιπεδο των $\mathbf{r}$ και $\mathbf{F}$, εχει μετρο $M_o = r\cdot F\cdot \sin\theta = d\cdot F$ οπου d η αποσταση του Ο απο την $\mathbf{F}$ και φορα τετοια ωστε η τριαδα $\mathbf{r}, \mathbf{F}, \mathbf{M}_o$ να ειναι δεξιοστροφη.

Επισης θεωρουμε οτι ο αξονας της ροπης περνα απο το Ο. Γεωμετρικα παριστανεται μ' ενα βελος με δυο αιχμες ⟶. Μοναδα μετρησης της ροπης ειναι το Nm και τα παραγωγα του.

(a) 

(b) 

Θα δειξουμε οτι η ροπη της $\mathbf{F}$ ως προς ενα σημειο Ο δεν εξαρταται απο το περας της $\mathbf{F}$ πανω στην $\mathbf{F}$. Πραγματι ειναι (σχ. b): $\mathbf{r}_2\times\mathbf{F} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{B\Gamma})\times\mathbf{F} = \mathbf{r}_1\times\mathbf{F} + \mathbf{B\Gamma}\cancel{\times}\mathbf{F} = \mathbf{r}_1\times\mathbf{F}$ διοτι $\mathbf{B\Gamma}/\!/\mathbf{F}$

Επομενως μια δυναμη $\mathbf{F}$ ειναι ενα ολισθαινον διανυσμα: μπορει να εφαρμοζεται σε οποιοδηποτε σημειο του αξονα της. Εαν ως προς καποιο καρτεσιανο συστημα ειναι:

$\mathbf{r} = r_x\cdot\mathbf{i} + r_y\cdot\mathbf{j} + r_z\cdot\mathbf{k}$ και $\mathbf{F} = F_x\cdot\mathbf{i} + F_y\cdot\mathbf{j} + F_z\cdot\mathbf{k}$ →

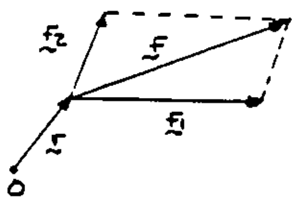
→ $\mathbf{M}_o = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = (r_y\cdot F_z - r_z\cdot F_y)\,\mathbf{i} + (r_z\cdot F_x - r_x\cdot F_z)\,\mathbf{j} + (r_x\cdot F_y - r_y\cdot F_x)\,\mathbf{k}$.

Εαν η δυναμη $\mathbf{F}$ βρισκεται στο επιπεδο Oxy τοτε η ροπη της ως προς καποιο σημειο του επιπεδου θα ειναι παντα καθετη στο επιπεδο Oxy. δηλ $\mathbf{M} = M_z\cdot\mathbf{k}$ και $|M_z| = M = F\cdot d$, θα ειναι $M_z > 0$ οταν η ροπη ειναι αριστεροστροφη ↺ δηλ τεινει να στρεψει ενα σωμα γυρω απο το σημειο κατα την αντιωρολογιακη φορα, και $M_z < 0$ οταν ειναι δεξιοστροφη ↻.

Οι ροπες $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_n$ των δυναμεων $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots \mathbf{F}_n$ γυρω απο το ιδιο σημειο σαν διανυσματα προστιθενται διανυσματικα δηλ. θα δωσουν μια συνισταμενη ροπη στο Ο: $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_n$

Οταν ομως οι δυναμεις βρισκονται στο ιδιο επιπεδο Oxy τοτε οι ροπες τους, ως προς καποιο σημειο του επιπεδου θα ειναι συγγραμμικα διανυσματα (καθετα στο Oxy στο σημειο αυτο): $\mathbf{M}_i = M_{iz}\cdot\mathbf{k}$ $i = 1, 2, \dots n$ επομενως $M_z = M_{1z} + M_{2z} + \dots + M_{nz}$ δηλ προστιθενται τα αλγεβρικα τους μετρα και $\mathbf{M} = M_z\,\mathbf{k}$. Συνηθως στην περιπτωση επιπεδων δυναμεων συμβολιζουμε με M το αλγεβρικο μετρο της ροπης δηλ $M = M_z$.

ας ειναι $\mathbf{F}$ μια δυναμη με συνιστωσες $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ δηλ $\mathbf{F}=\mathbf{F_1}+\mathbf{F_2}$.



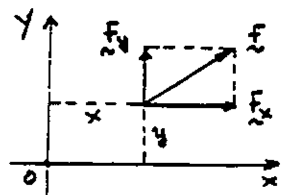
Ροπη της $\mathbf{F}$ ως προς O: $\mathbf{M_o}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\mathbf{r}\times(\mathbf{F_1}+\mathbf{F_2})=\mathbf{r}\times\mathbf{F_1}+\mathbf{r}\times\mathbf{F_2}$

αλλα $\mathbf{r}\times\mathbf{F_1}$ και $\mathbf{r}\times\mathbf{F_2}$ ειναι οι ροπες των $\mathbf{F_1}$ και $\mathbf{F_2}$ ως προς το Ο

Ετσι αποδειξαμε το θεωρημα (θεωρημα του Varignon):

Η ροπη μιας δυναμης γυρω απο καποιο σημειο ειναι ιση με το αθροισμα των ροπων των συνιστωσων της γυρω απο το ιδιο σημειο

ας ειναι $\mathbf{F}$ μια δυναμη στο επιπεδο οxy.



$\mathbf{F_x}=F_x\cdot\mathbf{i}$

$\mathbf{F_y}=F_y\cdot\mathbf{j}$ $\quad \mathbf{F}=\mathbf{F_x}+\mathbf{F_y}$

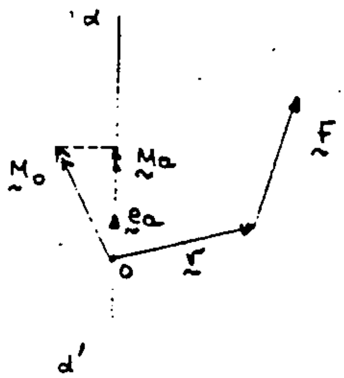
Συμφωνα με το προηγουμενο θεωρημα:

ροπη της $\mathbf{F}$ ως προς O = ροπη της $\mathbf{F_x}$ + ροπη της $\mathbf{F_y}$

$\rightsquigarrow$ $M_o=-F_x\cdot y+F_y\cdot x$ οπου M_o το αλγεβρικο μετρο της $\mathbf{M_o}$

2.2 Ροπη Δυναμης ως προς Αξονα

Η ροπη δυναμης γυρω απο αξονα οριζεται σαν η προβολη του διανυσματος της ροπης της δυναμης ως προς τυχαιο σημειο του αξονα, πανω στον αξονα.



$\mathbf{e_a}=e_{ax}\cdot\mathbf{i}+e_{ay}\,\mathbf{j}+e_{az}\,\mathbf{k}$ το μοναδιαιο του αξονα αα'

οπως εχουμε δει η προβολη του $\mathbf{M_o}$ στον αα' με χρηση εσωτερικου γινομενου ειναι:

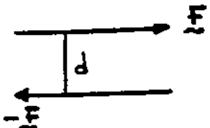
$\mathbf{M_a}=(\mathbf{M_o}\cdot\mathbf{e_a})\cdot\mathbf{e_a}$

αλλα $\mathbf{M_o}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$

$$\rightsquigarrow \mathbf{M_o}\cdot\mathbf{e_a}=(\mathbf{r}\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{e_a}=\begin{vmatrix} e_{ax} & e_{ay} & e_{az}\\ r_x & r_y & r_z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

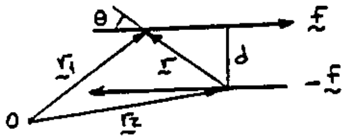
2.3 Ζευγος Δυναμεων - Ροπη Ζευγους

Ενα ζευγος δυναμεων αποτελειται απο δυο δυναμεις που εχουν παραλληλους αξονες σε απόσταση d, ισα μετρα και αντιθετη φορα:



Η συνισταμενη δυναμη του ζευγους ειναι μηδεν.

Η ροπη του ζευγους ως προς καποιο σημειο O ειναι ιση με το αθροισμα των ροπων των δυναμεων του ζευγους γυρω απο το ιδιο σημειο:



ειναι $\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{r_1} \times \underset{\sim}{F} - \underset{\sim}{r_2} \times \underset{\sim}{F} = (\underset{\sim}{r_1} - \underset{\sim}{r_2}) \times \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F}$

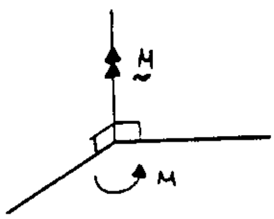
Ετσι η ροπη του ζευγους ειναι καθετη στο επιπεδο των δυναμεων και εχει μετρο $M = r \cdot F \cdot \sin\theta = F \cdot d$ δηλ ανεξαρτητο απο το σημειο ως προς το οποιο θεωρουμε την ροπη.

Αρα η ροπη του ζευγους ειναι ενα ελευθερο διανυσμα δηλ μπορει να εφαρμοζεται σε οποιοδηποτε σημειο. Επειδη η συνισταμενη του ζευγους ειναι μηδεν τελικα ενα ζευγος αντιπροσωπευεται απο την ροπη του $\underset{\sim}{M}$, ετσι θα λεμε ζευγος ροπης $\underset{\sim}{M}$ ή απλα ζευγος $\underset{\sim}{M}$.

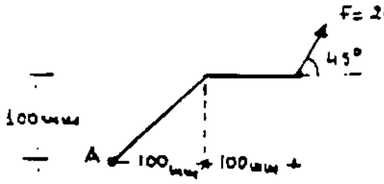
Εφ' οσον η ροπη του ζευγους ειναι ελευθερο διανυσμα δυο ζευγη $\underset{\sim}{M_1}$, $\underset{\sim}{M_2}$ μπορουν να θεωρηθουν οτι εφαρμοζονται στο ιδιο σημειο οποτε δινουν σαν συνισταμενη το ζευγος $\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{M_1} + \underset{\sim}{M_2}$

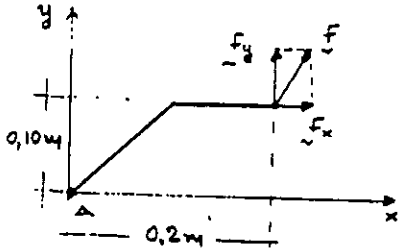
Εαν τα ζευγη $\underset{\sim}{M_1}$, $\underset{\sim}{M_2}$ αναφερονται στο ιδιο επιπεδο (δηλ οι $\underset{\sim}{M_1}$, $\underset{\sim}{M_2}$ ειναι καθετες στο ιδιο επιπεδο) τοτε και η $\underset{\sim}{M}$ θα ενεργει σ' αυτο το επιπεδο και τα ζευγη προστιθενται αλγεβρικα: $M = M_1 + M_2$ οπου σ' αυτη την περιπτωση με M συμβολιζουμε το αλγεβρικο μετρο μιας ροπης $\underset{\sim}{M}$ ($M>0$ για ↶, $M<0$ για ↷)

Ενα ζευγος $\underset{\sim}{M}$ συμβολιζεται μ' ενα καμπυλο βελος ↶ επανω στο επιπεδο του.



■ Να προσδιορισθει η ροπη της δυναμης του σχηματος γυρω απο το σημειο Α





Αναλυουμε την $\underset{\sim}{F}$ στις συνιστωσες της $\underset{\sim}{F_x}$ $\underset{\sim}{F_y}$ οποτε συμφωνα με το θεωρημα του Varignon η ροπη της $\underset{\sim}{F}$ ως προς Α θα ισουται με το αθροισμα των ροπων των $\underset{\sim}{F_x}$, $\underset{\sim}{F_y}$

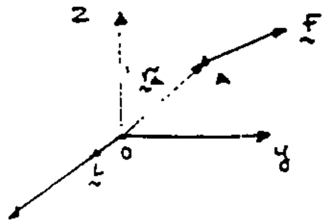
Ειναι $F_x = 200\cdot\cos45 = 141,4\ N$

$F_y = 200\cdot\sin45 = 141,4\ N.$

$\rightsquigarrow M_A = -141,4\cdot0,1 + 141,4\cdot0,2$ ↺+

$\rightsquigarrow M_A = 14,1\ Nm$ ↺ και $\underset{\sim}{M_A} = 14,1\cdot\underset{\sim}{k}$

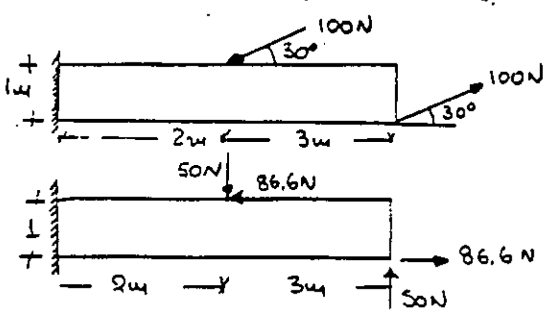
■ Να υπολογισθει η ροπη της δυναμης $\underset{\sim}{F} = -40i + 20j + 10\underset{\sim}{k}$ που εφαρμοζεται στο σημειο $A(-3,4,6)$ γυρω απο τον αξονα x.



το μοναδιαιο του αξονα x ειναι το $\underset{\sim}{i}$ $(1,0,0)$

$$\rightsquigarrow \underset{\sim}{M}_x = (\underset{\sim}{M}_O\cdot\underset{\sim}{i})\cdot\underset{\sim}{i} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 4 & 6\\ -40 & 20 & 10\end{vmatrix}\cdot\underset{\sim}{i} = -80\,\underset{\sim}{i}$$

■ Να βρεθει η ροπη του ζευγους που φαινεται στο σχημα



αναλυουμε τις δυναμεις στις συνιστωσες τους και προσθετουμε τα δυο ζευγη που προκυπτουν.

Ειναι $F_x = \pm100\cos30° = \pm86,6N$

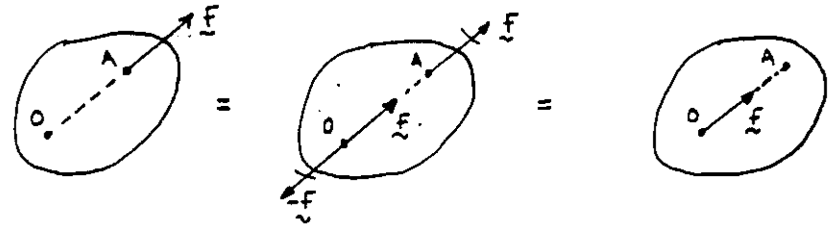
$F_y = \pm100\sin30° = \pm50N.$

$\rightsquigarrow M = 50\cdot3 + 86,6\cdot1 = 236,6\ Nm$ ↺

3. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΣΕ ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΜΑ.

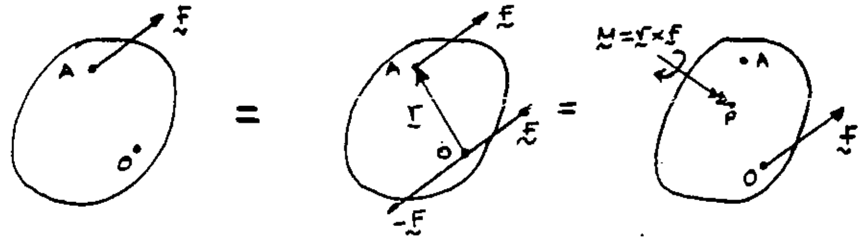
3.1 Μετακινηση δυναμης πανω σ'ενα στερεο.

a) Μεταφορα δυναμης πανω στον αξονα της.



δηλ. η επιδραση μιας δυναμης πανω σ' ενα στερεο σωμα δεν μεταβαλλεται οταν αυτη μεταφερεται πανω στον αξονα της. Επομενως η δυναμη ειναι ενα ολισθαινον διανυσμα: μπορει να εφαρμοζεται σ' οποιοδηποτε σημειο του αξονα της.

b) Μεταφορα δυναμης σε σημειο εκτος του αξονα της.



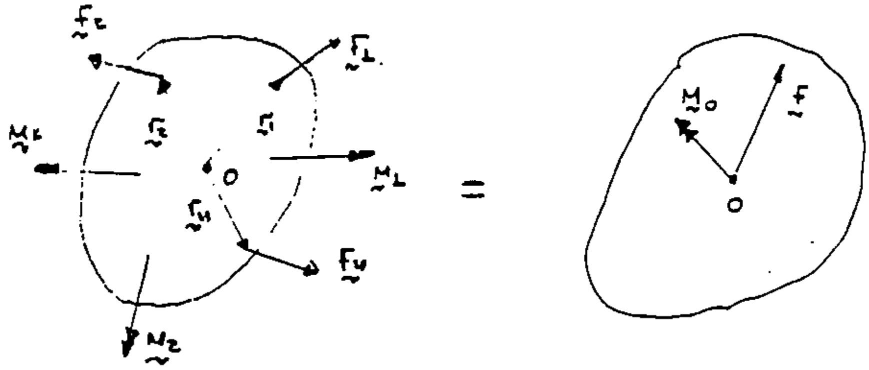
δηλ μπορουμε να μεταφερουμε μια δυναμη απο ενα σημειο A σ' ενα σημειο O εξω απο τον αξονα της αφου λαβουμε υπ' οψη μας και τη ροπη ζευγους $\underset{\sim}{M}=\underset{\sim}{r}\times\underset{\sim}{F}$ που προκυπτει απο αυτη την μεταφορα.

Η $\underset{\sim}{M}$ σαν ροπη ζευγους (ελευθερο διανυσμα) μπορει να εφαρμοζεται σε οποιοδηποτε σημειο P.

Συνισταμένες ενός συστήματος δυνάμεων και ζευγών.—

Ένα σύστημα δυνάμεων και ζευγών που ενεργούν σ' ένα στερεό σώμα μπορεί να αναχθεί σ' ένα απλούστερο που να περιλαμβάνει μια συνισταμένη δύναμη και μια συνισταμένη ροπή:

Θεωρείστε ένα στερεό στο οποίο ενεργούν οι δυνάμεις $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, ..\mathbf{F}_\nu$ και τα ζεύγη $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, .. \mathbf{M}_k$



Σύμφωνα με τα προηγούμενα μπορούμε να μεταφέρουμε όλες τις δυνάμεις σ' ένα σημείο O εάν εφαρμόσουμε στο σώμα και τις ροπές που προκύπτουν από την μεταφορά αυτή δηλ. τις $\mathbf{r}_1\times\mathbf{F}_1$, $\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_2$, ... $\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{F}_\nu$

Έτσι οι δυνάμεις στο O μπορούν να προστεθούν σε μια συνισταμένη

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_\nu .$$

Εξάλλου οι ροπές $\mathbf{M}_1 .. \mathbf{M}_k$, $\mathbf{r}_1\times\mathbf{F}_1, .. \mathbf{r}_\nu\times\mathbf{F}_\nu$ σαν ροπές ζευγών είναι ελεύθερα διανύσματα και μπορούν να εφαρμοστούν σ' οποιοδήποτε σημείο π.χ. το O και να δώσουν μια συνισταμένη ροπή:

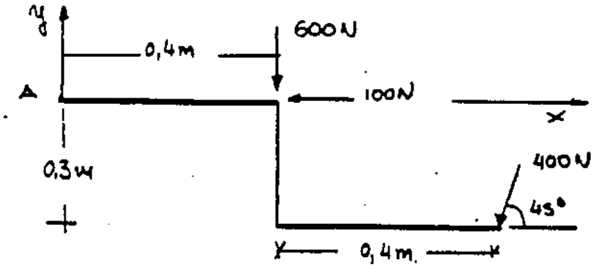
$$\mathbf{M}_o = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_k + \mathbf{r}_1\times\mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{r}_\nu\times\mathbf{F}_\nu$$

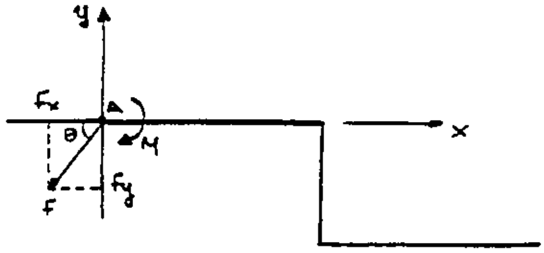
Όταν έχουμε συνεπίπεδες δυνάμεις οι ροπές θα είναι κάθετες στο επίπεδό τους (παράλληλα διανύσματα) άρα μπορούν να προστεθούν αλγεβρικά.

Σημείωση. η $\mathbf{F}$ δεν εξαρτάται από την θέση του O.
η $\mathbf{M}_o$ όμως εξαρτάται αφού εξαρτάται από τις ροπές των $\mathbf{F}_1 .. \mathbf{F}_\nu$ ως προς το σημείο αυτό.

Παραδείγματα.

■ Να αντικατασταθούν οι παρακάτω δυνάμεις με ένα ισοδύναμο σύστημα μιας συνισταμένης δύναμης και ροπής στο σημείο A.





Η συνισταμένη δύναμη θα είναι $\underset{\sim}{F} = \Sigma \underset{\sim}{F_i} \rightarrow F_x = \Sigma F_{ix}\ ,\ F_y = \Sigma F_{iy}$

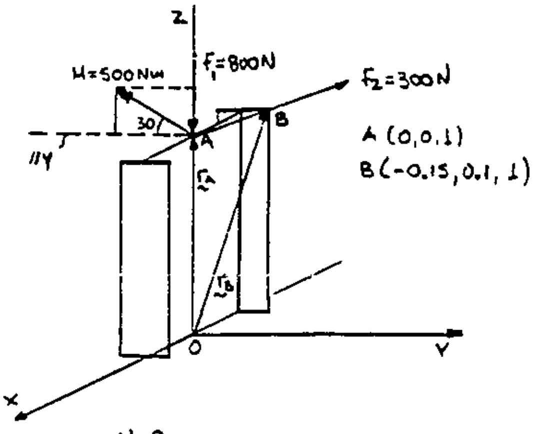
$\rightarrow F_x = -100 - 400 \cdot \cos 45 = -382{,}8\ N$

$F_y = -600 - 400 \cdot \sin 45 = -882{,}8 N$

$\rightarrow F = \sqrt{382{,}8^2 + 882{,}8^2} = 962 N$ και $\theta = \tau o\xi\varepsilon\varphi \dfrac{882{,}8}{382{,}8} = 66{,}5°$

οι ροπές των δυνάμεων θα είναι κάθετες στο επίπεδο xy και μπορούν να προστεθούν αλγεβρικά. είναι: $M_A = -600 \cdot 0{,}4 - 400 \cdot \sin 45 \cdot 0{,}8 - 400 \cdot \cos 45 \cdot 0{,}3 = -551\ Nm$ ↻

■



Να αντικατασταθεί το σύστημα των δυνάμεων $\underset{\sim}{F_1}$, $\underset{\sim}{F_2}$ και του ζεύγους $\underset{\sim}{M}$ με μια συνισταμένη δύναμη και ροπή στο O.

διανυσματική παράσταση δυνάμεων και ροπής:

$\underset{\sim}{F_1} = -800\underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{F_2} = 300 \cdot \underset{\sim}{e_{AB}}$ όπου $\underset{\sim}{e_{AB}}$ το μοναδιαίο του $\underset{\sim}{AB}$

$$\underset{\sim}{e_{AB}} = \frac{\underset{\sim}{AB}}{AB} = \frac{-0.15\underset{\sim}{i} + 0.1\underset{\sim}{j}}{\sqrt{0.15^2 + 0.1^2}} = -0.83\underset{\sim}{i} + 0.55\underset{\sim}{j} \rightarrow \underset{\sim}{F_2} = -249\underset{\sim}{i} + 165\underset{\sim}{j}$$

$\underset{\sim}{M} = -500 \cdot \cos 30 \underset{\sim}{j} + 500 \cdot \sin 30 \underset{\sim}{k} = -433\underset{\sim}{j} + 250 \cdot \underset{\sim}{k}$

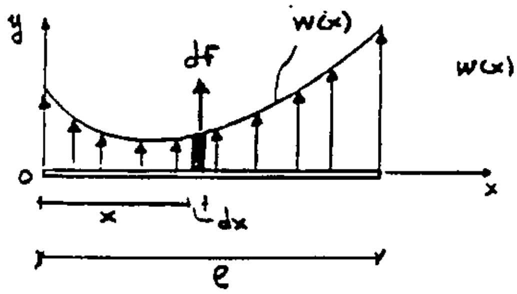
$\underset{\sim}{r_B} = -0.15\underset{\sim}{i} + 0.1\underset{\sim}{j} + 1 \cdot \underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{r_A} = 1\underset{\sim}{k}$

Έτσι στο O θα έχουμε μια συνισταμένη δύναμη $\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F_1} + \underset{\sim}{F_2} = -249\underset{\sim}{i} + 165\underset{\sim}{j} - 800\underset{\sim}{k}$

και μια συνισταμένη ροπή $\underset{\sim}{M_O} = \underset{\sim}{M} + \underbrace{\underset{\sim}{r_A} \times \underset{\sim}{F_1}}_{0} + \underset{\sim}{r_B} \times \underset{\sim}{F_2} = -165\underset{\sim}{i} - 682\underset{\sim}{j} + 250\underset{\sim}{k}$

Οι δυναμεις που ασκουνται στα διαφορα σωματα προερχονται ειτε απο την μεταξυ τους επ
οποτε κατανεμονται στις επιφανειες επαφης (δυναμη/επιφανεια) ειτε ασκουνται απο
καποιο πεδιο (π.χ βαρυτητας) οποτε κατανεμονται στον ογκο του σωματος (δυναμη/ο
Οι μοναχικες δυναμεις που μεχρι τωρα θεωρησαμε ειναι οριακη περιπτωση των διανεμη-
μενων οταν αυτες ασκουνται σε μια πολυ μικρη περιοχη.
Μια περιπτωση διανεμημενου φορτιου ειναι το γραμμικο που διανεμεται σε ενα μη-
κος ℓ. Π.χ. οταν ενα επιφανειακο φορτιο ασκειται σε μια επιφανεια με πολυ μικρ-
η μια διασταση.

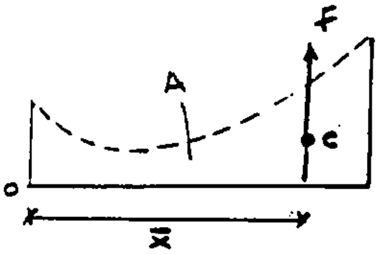
Συνισταμενη γραμμικου φορτιου



w(x) = δυναμη/μηκος.

Ας ειναι w(x) ενα γραμμικο φορτιο παραλληλο με τον αξονα y. Ζηταμε να βρουμε την συνισταμενη του και την θεση της.
Θεωρουμε στην θεση x ενα απειροστο τμημα dx. Η δυναμη σ' αυτο το τμημα ειναι $dF = w(x)\cdot dx = dA$. οπου dA ειναι το εμβαδο του σκιασμενου τμηματος.

Επομενως η συνισταμενη στο μηκος ℓ θα ειναι: $F = \int_0^{\ell} w(x)\cdot dx = A$ οπου A ειναι το εμβαδο κατω απο την καμπυλη w(x).



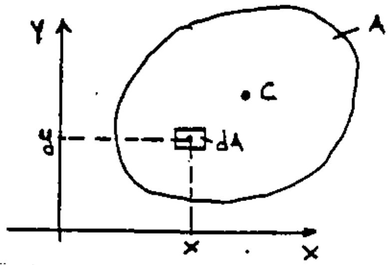
Η συνισταμενη προφανως ειναι κατακορυφη και εστω απεχει αποσταση $\bar{x}$ απο το Ο. Παιρνοντας ροπες ως προς Ο εχουμε: ροπη της $dF = dF\cdot x = x\cdot dA$.
→ ροπη διανεμημενου φορτιου = $\int_A x\cdot dA$ (διπλο ολοκληρωμα στην επιφανεια A).

Εξισωνοντας την ροπη του διανεμημενου φορτιου με την ροπη της συνισταμενης F εχουμε: $F\cdot\bar{x} = \int_A x\cdot dA$

$$\to \bar{x} = \frac{\int_A x\,dA}{F} = \frac{\int_A x\,dA}{A}$$

που εξ ορισμου ειναι η τετμημενη του γεωμετρικου κεντρου C της επιφανειας A οπως θα δουμε αμεσως παρακατω.
Ωστε η συνισταμενη του γραμμικου φορτιου ισουται με το εμβαδο της επιφανειας φορτισεως και περναει απο το γεωμετρικο της κεντρο.

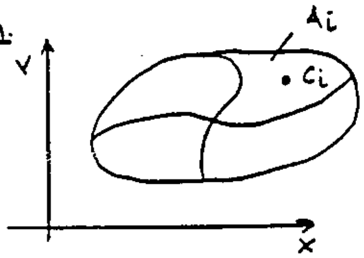
Γεωμετρικο κεντρο επιπεδων επιφανειων.



Για μια επιπεδη επιφανεια A το γεωμετρικο κεντρο c οριζεται σαν το σημειο με συν-τεταγμενες: $x_c = \frac{\int_A x\,dA}{A}$, $y_c = \frac{\int_A y\,dA}{A}$. οπου A το εμβαδο της επιφανειας, και τα ολοκλη-ρωματα ειναι τα διπλα επανω στην A.

Αν η επιφανεια εχει αξονα συμμετριας το γεωμετρικο κεντρο θα βρισκεται πανω σ'αυτον. Επομενως αν εχει δυο αξονες συμμετριας θα ειναι η τομη τους.

Συνθετη διατομη.



για μια συνθετη επιφανεια $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ θα ειναι:

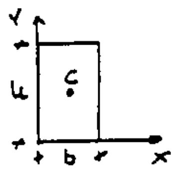
$$x_c = \frac{\int_A x\,dA}{A} = \frac{\Sigma \int_{A_i} x\,dA}{\Sigma A_i} = \frac{\Sigma x_{ci} \cdot A_i}{\Sigma A_i}$$

και $y_c = \frac{\Sigma y_{ci} \cdot A_i}{\Sigma A_i}$

Ετσι μπορουμε μια συνθετη επιφανεια να την διασπασουμε σε απλουστερες για τις οποιες ξερουμε το γ.κ. και να εφαρμοσουμε τους παραπανω τυπους.

Παραδειγματα.

■ ορθογωνιο παρ/γραμμο.



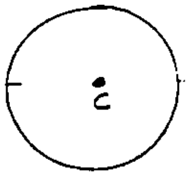
προφανως το γ.κ. θα ειναι στην τομη των αξο-νων συμμετριας δηλ. $x_c = \frac{b}{2}$, $y_c = \frac{h}{2}$

Ας εφαρμοσουμε ομως τον ορισμο:

$$x_c = \frac{\int_A x \cdot dA}{A} = \frac{\int_A x\,dx\,dy}{b \cdot h} = \frac{\int_0^h dy \cdot \int_0^b x \cdot dx}{b \cdot h} = \frac{y\Big|_0^h \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^b}{b \cdot h} = \frac{h \cdot b^2}{2 \cdot b \cdot h} = \frac{b}{2}$$

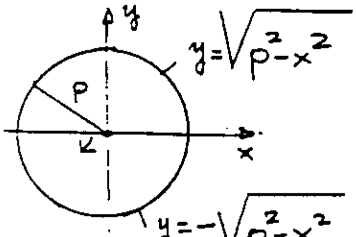
$$y_c = \frac{\int_A y \cdot dA}{A} = \frac{\int_A y \cdot dx\,dy}{b \cdot h} = \frac{\int_0^b dx \int_0^h y \cdot dy}{b \cdot h} = \frac{x\Big|_0^b \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^h}{b \cdot h} = \frac{b \cdot h^2}{2\,b \cdot h} = \frac{h}{2}.$$

■ κυκλος.



γ.κ προφανως ειναι το κεντρο του κυκλου (κεντρο συμμετρια

Με τον ορισμο εχουμε:

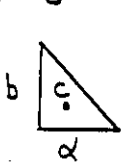


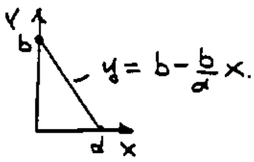
$$A\cdot x_c=\int_A x\,dx\,dy=\int_{-\rho}^{\rho}x\,dx\cdot\int_0^{\sqrt{\rho^2-x^2}}dy+\int_{-\rho}^{\rho}x\,dx\cdot\int_{-\sqrt{\rho^2-x^2}}^{0}dy$$

$$=2\int_{-\rho}^{\rho}x\,dx\cdot\int_0^{\sqrt{\rho^2-x^2}}dy=-\frac{2}{2}\int_{-\rho}^{\rho}\sqrt{\rho^2-x^2}\,d(\rho^2-x^2)=$$

$$=-\frac{(\rho^2-x^2)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{-\rho}^{\rho}=0\Rightarrow x_c=0 \text{ ομοιως } y_c=0$$

■ Ορθογωνιο Τριγωνο

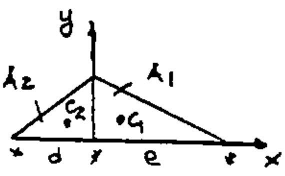




$$A\cdot x_c=\int_A x\,dx\,dy=\int_0^{\alpha}dx\cdot\int_0^{b-\frac{b}{\alpha}x}x\cdot dy=\int_0^{\alpha}x\left(b-\frac{b}{\alpha}x\right)dx=b\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\alpha}-\frac{b}{\alpha}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\alpha}=\frac{b\alpha^2}{6}$$

$$\rightsquigarrow x_c=\frac{b\alpha^2/6}{\alpha\cdot b/2}=\frac{\alpha}{3} \text{ ομοιως } y_c=\frac{b}{3}$$

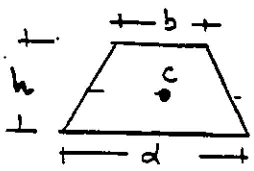
■ Γενικο τριγωνο.



συμφωνα με τους τυπους της συνθετης διατομης.

$$x_c=\frac{x_{c_1}\cdot A_1+x_{c_2}A_2}{A_1+A_2}=\frac{e/3\ \frac{e\cdot h}{2}-d/3\ \frac{d\cdot h}{2}}{\frac{1}{2}\alpha h}=\frac{1}{3}(\alpha-2d) \qquad y_c=\frac{h}{3}.$$

■ Τραπεζιο.



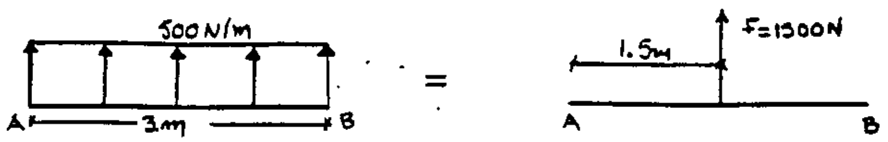
χωριζοντας το τραπεζιο σε δυο ορθογωνια τριγωνα και ενα ορθογωνιο

$$y_c=\frac{1}{3}\cdot\frac{\alpha+2b}{\alpha+b}\cdot h.$$

Παραδειγματα στα διανεμημενα φορτια.

Για καθε φορτιο να βρεθει η συνισταμενη και η θεση της.

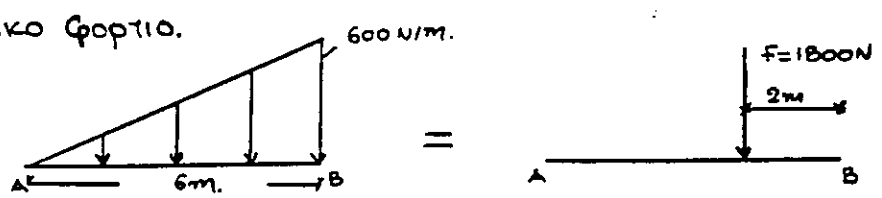
α). Ομοιομορφο φορτιο.



Ειναι F= εμβαδο επιφανειας φορτισεως = $500\frac{N}{m}\cdot 3m = 1500\,N$

και περνα απο το γ.κ. της ορθογωνιας επιφανειας δηλ. σε αποσταση $\frac{3}{2}=1,5m$ απο το Α.

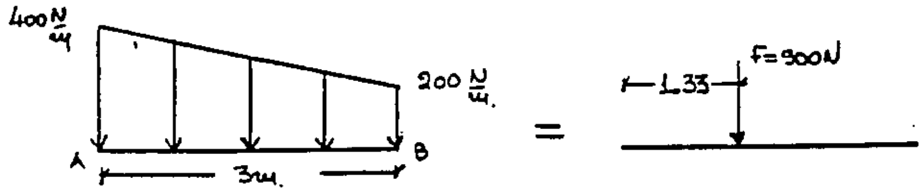
b) Τριγωνικο φορτιο.



ειναι F= εμβαδο τριγωνου = $\frac{1}{2}\cdot 6m\cdot 600\frac{N}{m} = 1800N$.

και περνα απο το γ.κ. του τριγωνου δηλ. σε αποσταση $\frac{6}{3}=2m$ απο το Β.

c) Τραπεζοειδες φορτιο.



F= εμβαδο τραπεζιου = $\frac{1}{2}(400+200)\cdot 3 = 900\,N$.

και εφαρμοζεται σε αποσταση $\frac{1}{3}\left(\frac{400+2\cdot 200}{400+200}\right)\cdot 3 = 1,33\,m$ απο το Α.

5. ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Εννοια υλικου σημειου: ενα σωμα με μηδενικες διαστασεις. Η μαζα του θεωρειται συγκεντρωμενη σ' ενα σημειο.
μπορουμε σε καποιο προβλημα να κανουμε αυτη την προσεγγιση οταν οι διαστασεις του σωματος ειναι πολυ μικροτερες απο τις αλλες διαστασεις του προβληματος.

αμεση συνεπεια: οι δυναμεις που ασκουνται σ' ενα υλικο σημειο ειναι παντα συντρεχουσες.

συνθηκες ισορροπιας υλικου σημειου.

απο τον δευτερο νομο του Νευτωνα: $\Sigma \underline{F} = m \cdot \underline{a}$ ακολουθει οτι ενα υλικο σημειο ισορροπει ($\underline{a}=\underline{0}$) οταν και μονον οταν η συνισταμενη των δυναμεων που ενεργουν στο υλικο σημειο ειναι μηδενικη δηλ. $\Sigma \underline{F} = \underline{0}$

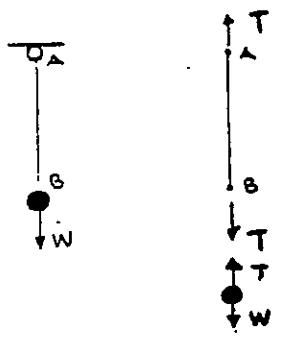
διαγραμμα ελευθερου σωματος

ενα υλικο σημειο συνδεεται με αλλα σωματα με διαφορα συνδετικα μεσα (καλωδια, ελατηρια, ραβδους) που ασκουν σ' αυτο δυναμεις, ισες και αντιθετες ασκουνται σ' αυτα απο το υλικο σημειο (νομος δρασης-αντιδρασης).
για να εξετασουμε την ισορροπια του υλικου σημειου το σχεδιαζουμε ελευθερο απο τους συνδεσμους και στις θεσεις τους βαζουμε τις αντιστοιχες δυναμεις.
Το σκαριφημα που παιρνουμε ετσι, λεγεται διαγραμμα ελευθερου σωματος. σ' αυτο για τις αγνωστες δυναμεις υποθετουμε καποια φορα, εαν το μετρο καποιας απ' αυτες προκυψει αρνητικο η πραγματικη φορα θα ειναι αντιθετη.

Συνδετικα Μεσα

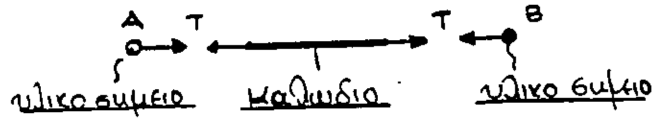
Καλωδια: θεωρουνται απαραμορφωτα και χωρις βαρος
ενα καλωδιο υποκειται μονο σε εφελκυστικη δυναμη κατα τη διευθυνση του, σταθερη σ' ολο το μηκος του.

π.χ.



στο καλωδιο ΑΒ ασκειται απο το υλικο σημειο βαρους W δυναμη T ιση και αντιθετη ενεργει στο υλικο σημειο.
απο την ισορροπια του υλικου σημειου προκυπτει T=W

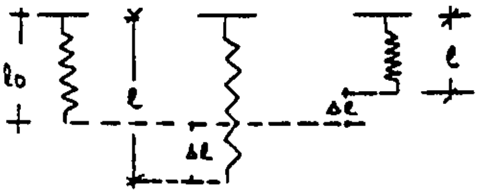
Παρατηρηση: αφου ενα καλωδιο παντα εφελκυεται η δυναμη που ασκει ενα υλικο σημειο στο καλωδιο παντα κατευθυνεται προς το υλικο σημειο και επομενως η δυναμη στο υλικο σημειο απο το καλωδιο θα κατευθυνεται προς το καλωδιο δηλ:



Ελατηρια: η μεταβολη του μηκους ενος ελατηριου απο μια δυναμη F ειναι αναλογη με την δυναμη.

$F = k \cdot \Delta l$, k (N/m): σταθερα ελατηριου , $\Delta l = l - l_0$, l = τελικο μηκος

l_0 = αρχικο μηκος , $\Delta l > 0$ εφελκυσμος , $\Delta l < 0$ συμπιεση.

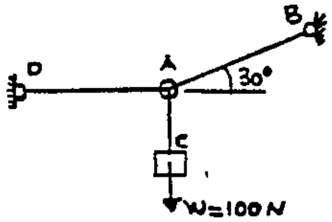


Συστηματα συνεπιπεδων δυναμεων.

συνθηκη ισορροπιας: $\Sigma \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{0} \rightarrow \Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ με τις οποιες μπορουμε να λυσουμε προβληματα με δυο αγνωστους.

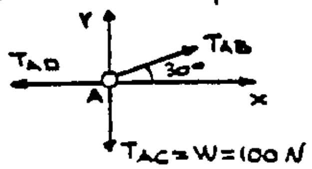
Παραδειγματα.

■ Εαν το συστημα του σχηματος ισορροπει στην θεση που φαινεται να υπολογισθουν οι δυναμεις στα καλωδια AD και AB.



οι δυναμεις στα καλωδια AD και AB θα βρεθουν εξεταζοντας την ισορροπια του κρικου A.

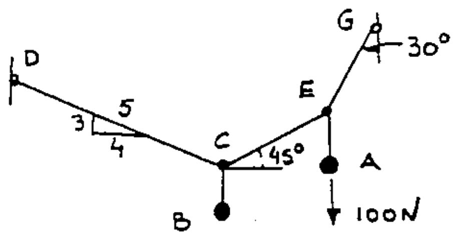
διαγραμμα ελευθερου σωματος:



Στο "υλικο σημειο" A ενεργουν οι αγνωστου μετρου αλλα γνωστης διευθυνσης δυναμεις T_{AD} και T_{AB} απο τα καλωδια AD και AB και η γνωστη δυναμη $T_{AC} = W = 100N$

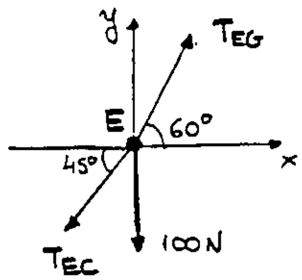
Συνθηκες ισορροπιας υλικου σημειου A : $\left.\begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 \rightarrow T_{AB} \cdot \cos 30 - T_{AD} = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow T_{AB} \cdot \sin 30 - 100 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} T_{AB} = 200N \\ T_{AD} = 173N \end{array}$

το σύστημα να ισορροπεί στη θέση που φαίνεται.



Ξεκινάμε από την ισορροπία του υλικού σημείου E όπου εμφανίζονται 2 μόνον άγνωστοι (όσες και οι εξισώσεις που διαθέτουμε).

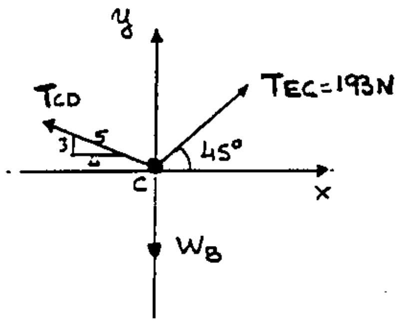
Σημείο E:



$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_x=0: \; T_{EG}\cdot\cos60^\circ - T_{EC}\cdot\cos45^\circ = 0 \\ \Sigma F_y=0: \; T_{EG}\cdot\sin60^\circ - T_{EC}\cdot\sin45^\circ - 100 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{EG}=273N \;,\; T_{EC}=193N.$$

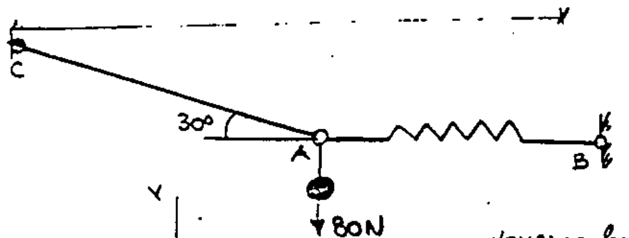
Σημείο C:



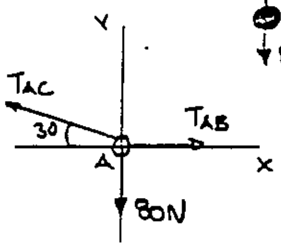
$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_x=0: \; 193\cdot\cos45^\circ - T_{CD}\cdot\frac{4}{5} = 0 \\ \Sigma F_y=0: \; 193\cdot\sin45^\circ + T_{CD}\cdot\frac{3}{5} - W_B = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow T_{CD}=170.6N \;,\; W_B=239N$$

■ Να προσδιοριστεί το απαιτούμενο μήκος για το καλώδιο AC ώστε το σύστημα να ισορροπεί στη θέση που φαίνεται



Δίνονται:
απαραμόρφωτο μήκος ελατηρίου: $l^0_{AB}=0.4m$,
σταθερά ελατηρίου $K=300N/m$



Αρκεί να βρούμε το τελικό μήκος του ελατηρίου AB (αφού βρούμε την δύναμη σ' αυτό) ώστε από την γεωμετρία του προβλήματος να βρούμε το μήκος του AC.

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow T_{AB}-T_{AC}\cdot\cos30=0.$$
$$T_{AC}\cdot\sin30-80=0 \rightarrow T_{AB}=139N,\; T_{AC}=160N$$

$$\rightarrow \Delta l_{AB}=\frac{139N}{300N/m}=0,46m \rightarrow l_{AB}=0,4+0,46=0,86m.$$

από το σχήμα: $l_{AC}\cdot\cos30+0,86=2 \rightarrow l_{AC}=1.32m$

Συστηματα στο Τριδιαστατο χωρο

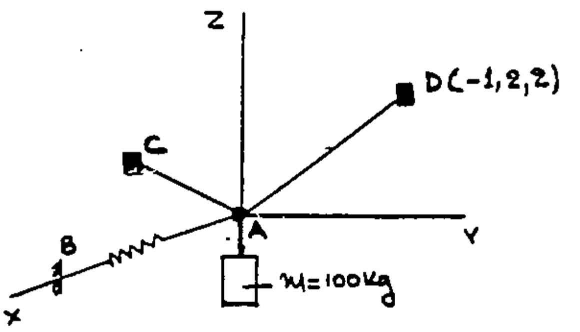
Η διανυσματικη συνθηκη ισορροπιας $\Sigma \underset{\sim}{F} = \Sigma F_x \cdot \underset{\sim}{i} + \Sigma F_y \cdot \underset{\sim}{j} + \Sigma F_z \cdot \underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{0}$ μας δινει τις τρεις αλγεβρικες εξισωσεις:

$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$\Sigma F_z = 0$$

Που αρκουν για να λυσουμε προβληματα με τρεις αγνωστους.

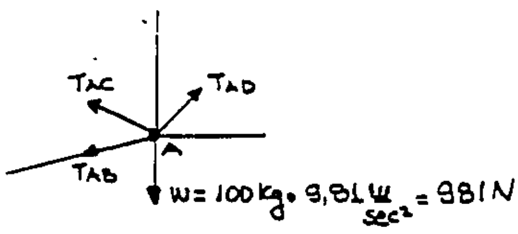
Παραδειγμα

Ο κυλινδρος του σχηματος μαζας 100 kg αναρταται απο δυο καλωδια και ενα ελατηριο σταθερας $K = 1.5\ kN/m$. Να βρεθουν οι δυναμεις των καλωδιων και η επιμηκυνση του ελατηριου.



δινονται οι γωνιες κατευθυνσεως του AC:

$\theta_x = 120°$, $\theta_y = 135°$, $\theta_z = 60°$



Ισορροπια υλικου σημειου A:

$\Sigma \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{0} \rightarrow \underset{\sim}{T}_{AB} + \underset{\sim}{T}_{AC} + \underset{\sim}{T}_{AD} + \underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{0}$

$\underset{\sim}{T}_{AB} = T_{AB} \cdot \underset{\sim}{i}$, $\underset{\sim}{T}_{AC} = T_{AC} \cdot \cos 120 \cdot \underset{\sim}{i} + T_{AC} \cdot \cos 135 \underset{\sim}{j} + T_{AC} \cdot \cos 60 \cdot \underset{\sim}{k} \rightarrow$

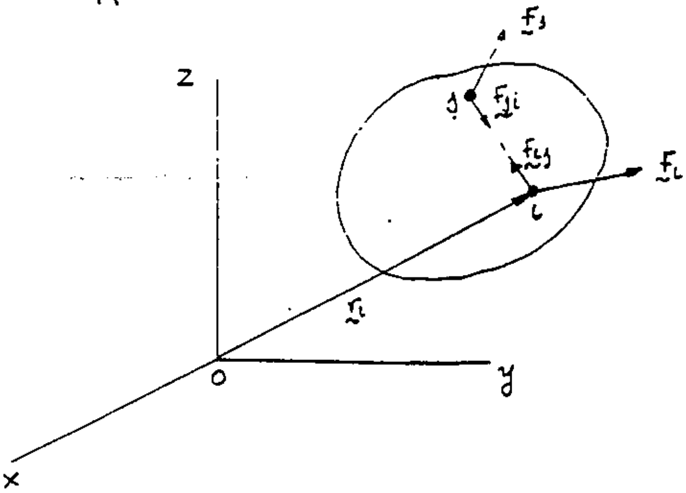
$\rightarrow \underset{\sim}{T}_{AC} = -0{,}5\, T_{AC}\, \underset{\sim}{i} - 0{,}707\, T_{AC}\, \underset{\sim}{j} + 0{,}5\, T_{AC} \cdot \underset{\sim}{k}$

$\underset{\sim}{T}_{AD} = T_{AD} \cdot \dfrac{-1\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k}}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} = -0.33\, T_{AD}\, \underset{\sim}{i} + 0{,}67\, T_{AD} \cdot \underset{\sim}{j} + 0{,}67\, T_{AD} \cdot \underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{W} = -981\, \underset{\sim}{k}$

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &: \ T_{AB} - 0.5\, T_{AC} - 0.33\, T_{AD} = 0 \\ \Sigma F_y = 0 &: \ -0{,}707\, T_{AC} + 0.67\, T_{AD} = 0 \\ \Sigma F_z = 0 &: \ 0.5\, T_{AC} + 0.67\, T_{AD} - 981 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow T_{AC} = 813N,\ T_{AD} = 862N,\ T_{AB} = 694N$$

<u>Και η παραμορφωση του ελατηριου ειναι:</u> $\Delta \ell_{AB} = \dfrac{T_{AB}}{K} = \dfrac{694\,N}{1.5 \cdot 10^3 \frac{N}{m}} = 0{,}46m.$

Συνθηκες Ισορροπιας.



Θεωρειστε ενα στερεο σωμα σε ισορροπια. Τοτε καθε υλικο σημειο του σωματος ισορροπει.

Στο τυχαιο υλικο σημειο i ασκουνται δυο ειδη δυναμεων:

οι εσωτερικες $\sum_{j\neq i}^{n} F_{ij}$ απο τα αλλα υλικα σημεια του σωματος, οπου F_{ij} ειναι η δυναμη που ασκειται στο i απο το j – προφανως (νομος δρασης-αντιδρασης) ιση και αντιθετη ασκειται απο το i στο j – και οι εξωτερικες με συνισταμενη F_i. η ισορροπια του i υλικου σημειου απαιτει:

$$F_i + \sum F_{ij} = 0$$

Παρομοιες εξισωσεις γραφονται για τα αλλα υλικα σημεια του σωματος. αθροιζοντας αυτες τις εξισωσεις εχουμε: $\sum F_i + \sum\sum F_{ij} = 0$

επειδη ομως οι εσωτερικες δυναμεις εμφανιζονται ανα ζευγη συγγραμμικων, ισων και αντιθετων δυναμεων ο δευτερος ορος μηδενιζεται και τελικα μενει

$\sum F_i = \boxed{\sum F = 0}$ δηλ. το αθροισμα των εξωτερικων δυναμεων του σωματος μηδενιζεται

Παιρνοντας τωρα τις ροπες των δυναμεων που ασκουνται στο i ως προς το τυχαιο σημειο O εχουμε: $r_i \times (F_i + \sum F_{ij}) = r_i \times F_i + r_i \times \sum F_{ij} = 0$ και αθροιζοντας με τις παρομοιες εξισωσεις για τα αλλα υλικα σημεια:

$\sum r_i \times F_i + \sum (r_i \times \sum F_{ij}) = 0$ ο δευτερος ορος για τον ιδιο λογο μηδενιζεται, οποτε τελικα:

$\sum r_i \times F_i = \boxed{\sum M_O = 0}$ δηλ. το αθροισμα των ροπων των εξωτερικων δυναμεων ως οποιοδηποτε σημειο μηδενιζεται

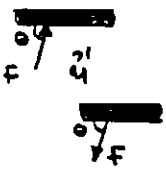
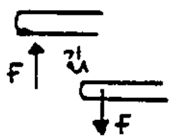
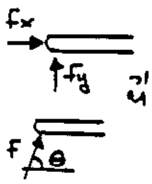
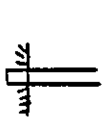
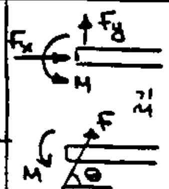
οι δυο αυτες συνθηκες ευκολα αποδεικνυεται οτι ειναι οχι μονο αναγκαιες αλλα και ικανες για την ισορροπια του στερεου σωματος.

Ισορροπια σε δυο διαστασεις.

Συνδεσμοι - Αντιδρασεις συνδεσμων - Διαγραμμα ελευθερου Σωματος

Η στηριξη ενος στερεου σωματος και η συνδεση του με αλλα σωματα γινεται με τους συνδεσμους. Γενικα ενας συνδεσμος απαγορευει την μετατοπιση του σημειου στηριξεως σε μια δοσμενη διευθυνση και ταυτοχρονα μεταβιβαζει στο σωμα μια δυναμη την ιδια διευθυνση, ειτε απαγορευει την στροφη του σωματος και ταυτοχρονα μεταβιβαζει στο σωμα μια ροπη ζευγους. Οι δυναμεις και οι ροπες που ασκουν οι διαφοροι συνδεσμοι στα σωματα ονομαζονται αντιδρασεις συνδεσμων.

Στη συνεχεια αναφερονται τα κυριωτερα ειδη συνδεσμων στο επιπεδο.

ονομασια συμβολισμος	απαγορευμενη μετακινηση	αντιδραση	αριθμος αγνωστων
 καλωδιο	η μετατοπιση του σημειου στηριξης στην κατευθυνση που εφελκυεται το καλωδιο		ενας αγνωστος. Η αντιδραση ειναι μια δυναμη που κατευθυνεται παντα απο το σωμα προς το καλωδιο στην διευθυνση του καλωδιου.
 δεσμικη ραβδος	η μετατοπιση του σημειου στηριξης στην διευθυνση της και προς τις δυο κατευθυνσεις.		ενας αγνωστος. Η αντιδραση ειναι μια δυναμη που ενεργει στη διευθυνση της ραβδου. Μπορει να εχει την μια ή την αλλη φορα.
 κυλιση.	η μετατοπιση καθετα στην επιφανεια στηριξης		Ενας αγνωστος. Η αντιδραση ειναι μια δυναμη καθετη στην επιφανεια στηριξης μπορει να εχει τη μια ή την αλλη φορα.
 αρθρωση	το σημειο στηριξεως ακινητοποιειται		δυο αγνωστοι. Η αντιδραση ειναι μια δυναμη με αγνωστες συνιστωσες F_x, F_y ή ισοδυναμα με αγνωστο μετρο και διευθυνση.
 πακτωση.	οι μετατοπισεις του ακρου στηριξης και η στροφη		τρεις αγνωστοι. Η αντιδραση ειναι μια δυναμη με δυο αγνωστες συνιστωσες και μια ροπη ή ισοδυναμα δυναμη αγνωστου μετρου και διευθυνσεως και μια ροπη.

σχεδιάζουμε το σώμα ελεύθερο από τους συνδέσμους και στις θέσεις τους βάζουμε τις άγνωστες αντιδράσεις· συμβολίζουμε με γράμματα τα άγνωστα μέτρα τους και τις άγνωστες γωνίες διευθύνσεως τους.
αν για κάποιες απ' αυτές (ή και όλες αν θεωρήσουμε σαν άγνωστες τις αντίστοιχες τους) γνωρίζουμε τις διευθύνσεις τους, τις σημειώνουμε με κάποιες υποθετικές φορές, αν κάποιων τα μέτρα προκύψουν αρνητικά οι πραγματικές φορές θα είναι αντίθετες.
σημειώνουμε τέλος τις γνωστές δυνάμεις (βάρος σώματος, άλλα φορτία και ροπές και εφαρμόζουμε τις συνθήκες ισορροπίας.

Σχόλιο: Το βάρος ενός σώματος ενεργεί στο κέντρο βάρους του που για ομοιογενές υλικό (σταθερής πυκνότητας) ταυτίζεται με το γεωμετρικό του κέντρο.

Εξισώσεις ισορροπίας.

στην περίπτωση του διδιάστατου προβλήματος οι διανυσματικές εξισώσεις ισορροπίας $\Sigma \underset{\sim}{F}=0$, $\Sigma \underset{\sim}{M}_0=0$ δίνουν τις εξισώσεις:

$$\Sigma F_x=0 \qquad \Sigma F_y=0 \qquad \Sigma M_0=0 \qquad (1)$$

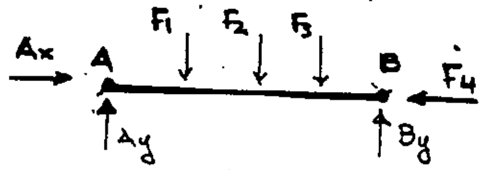
όπου ΣF_x, ΣF_y είναι το αλγεβρικό άθροισμα των x και y συνιστωσών όλων των δυνάμεων που ενεργούν στο σώμα, και ΣM_0 το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων αυτών των δυνάμεων (και ροπών που εφαρμόζονται στο σώμα) ως προς ένα τυχαίο σημείο O του επιπέδου.

δυο ισοδύναμα συστήματα δυνάμεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν

$$\Sigma F_a=0 \qquad \Sigma M_A=0 \qquad \Sigma M_B=0 \qquad (2)$$

όπου F_a οι συνιστώσες των δυνάμεων σε κάποιο άξονα a και A, B τυχαία σημεία, όμως η ευθεία AB δεν πρέπει να είναι κάθετη στον άξονα a.

π.χ.



άγνωστες οι αντιδράσεις A_x, A_y, B_y

τότε $\Sigma F_x=0 \rightarrow A_x$

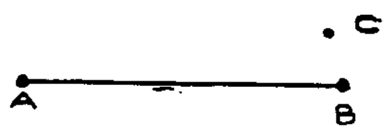
$\Sigma M_B=0 \rightarrow A_y$

$\Sigma M_A=0 \rightarrow B_y$

Επίσης ισοδύναμο σύστημα είναι και το

$$\Sigma M_A=0 \qquad \Sigma M_B=0 \qquad \Sigma M_C=0 \qquad (3)$$

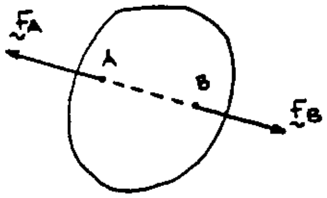
όπου τα A, B, C δεν πρέπει να βρίσκονται στην ίδια ευθεία



π.χ παίρνοντας στο προηγούμενο παράδειγμα αντί της $\Sigma F_x=0$ την $\Sigma M_C=0$ προσδιορίζουμε την,

Σχολιο

Σωματα που φορτιζονται με δυο δυναμεις.



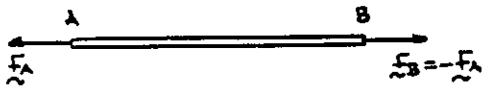
Η εξισωση ισορροπιας $\Sigma \underset{\sim}{F}=0$ γραφεται:

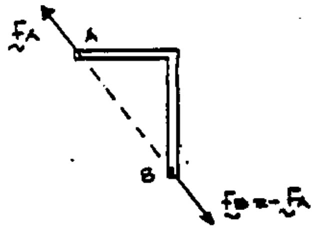
$\underset{\sim}{F}_A+\underset{\sim}{F}_B=\underset{\sim}{0} \rightarrow \underset{\sim}{F}_A=-\underset{\sim}{F}_B$ επομενως οι $\underset{\sim}{F}_A$ και $\underset{\sim}{F}_B$ θα ειναι αντιθετες.

Η συνθηκη $\Sigma \underset{\sim}{M}_o=\underset{\sim}{0} \rightarrow$ οτι ειναι και συνευθειακες.

Ωστε οταν ενα στερεο σωμα ισορροπει με την επιδραση δυο μονον δυναμεων, αυτες θα ειναι συνευθειακες, ισου μετρου και αντιθετης φορας.

π.χ.



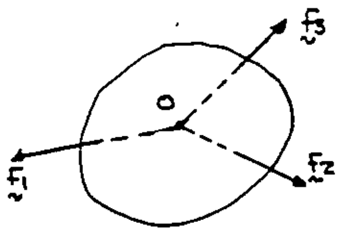


Σωματα που φορτιζονται με τρεις δυναμεις.

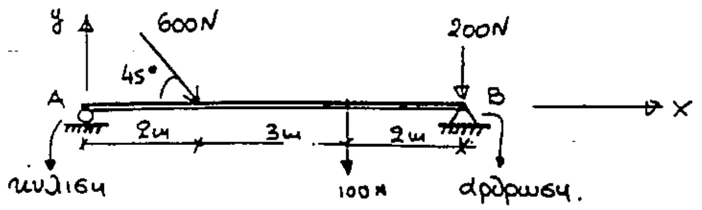
Θεωρειστε ενα σωμα που ισορροπει με την επιδραση τριων δυναμεων $\underset{\sim}{F}_1, \underset{\sim}{F}_2, \underset{\sim}{F}_3$ Εαν Ο ειναι το σημειο τομης των $\underset{\sim}{F}_1$, $\underset{\sim}{F}_2$ τοτε η εξισωση ισορροπιας $\Sigma \underset{\sim}{M}_o=\underset{\sim}{0}$ συνεπαγεται οτι και η $\underset{\sim}{F}_3$ πρεπει να περνα απο το Ο.

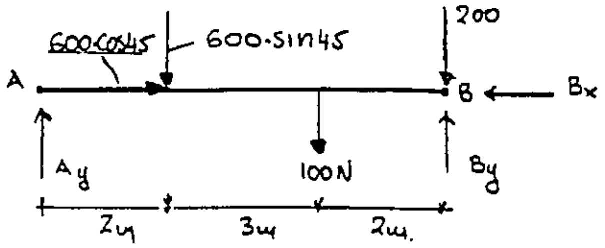
Επομενως οι τρεις δυναμεις θα ειναι συντρεχουσες. Εαν οι $\underset{\sim}{F}_1$, $\underset{\sim}{F}_2$ ειναι παραλληλες, τοτε θεωρουμε οτι τεμνονται στο απειρο αρα και η $\underset{\sim}{F}_3$ θα περνα απο το απειρο, δηλ θα ειναι παραλληλη των $\underset{\sim}{F}_1, \underset{\sim}{F}_2$

Ετσι σε καθε περιπτωση τρεις δυναμεις σε σωμα που ισορροπει ειναι συντρεχουσες και επομενως μονο οι εξισωσεις ισορροπιας των δυναμεων $\Sigma F_x=0$, $\Sigma F_y=0$ πρεπει να ικανοποιουνται.



■ Να υπολογισθούν οι αντιδράσεις της δοκού του σχήματος.





: διάγραμμα ελευθέρου σώματος.
στην κύλιση A έχουμε μια κατακόρυφη αντίδραση A_y
στην άρθρωση B δύο συνιστώσες B_x και B_y.

Επίσης έχουμε αναλύσει το φορτίο των 600N στις συνιστώσες του.

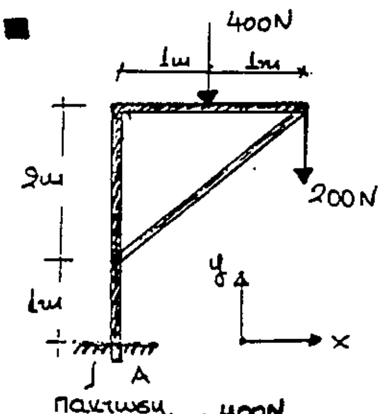
$\Sigma F_x = 0 \rightsquigarrow 600 \cdot \cos 45 - B_x = 0 \rightsquigarrow B_x = 424N.$

$\Sigma M_B = 0 \; +\circlearrowleft : \quad 100 \cdot 2 + 600 \cdot \sin 45 \cdot 5 - A_y \cdot 7 = 0 \Rightarrow A_y = 332N.$

$\Sigma F_y = 0 \rightsquigarrow 332 - 600 \cdot \sin 45 - 100 - 200 + B_y = 0 \Rightarrow B_y = 393N.$

τα θετικά πρόσημα για τα μέτρα των αντιδράσεων δείχνουν ότι σωστά επιλέξαμε τις φορές στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος

■



Να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στην πάκτωση A

Οι αντιδράσεις πακτώσεως είναι δύο συνιστώσες A_x, A_y και μια ροπή M_A.

Εξισώσεις ισορροπίας:

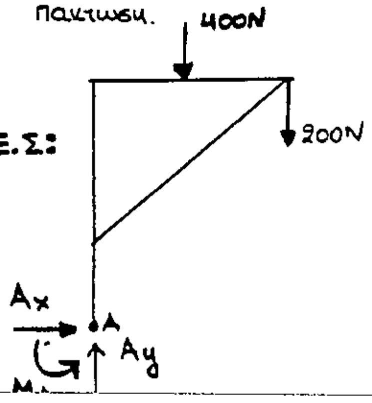
$\Sigma F_x = 0 \rightsquigarrow \underline{A_x = 0}$

$\Sigma F_y = 0 \rightsquigarrow A_y - 400 - 200 = 0 \rightsquigarrow \underline{A_y = 600N}$

$\circlearrowleft\!+ \; \Sigma M_A = 0 \rightsquigarrow -200 \cdot 2 - 400 \cdot 1 + M_A = 0$

$\rightsquigarrow \underline{M_A = 800Nm}$

Δ.Ε.Σ:



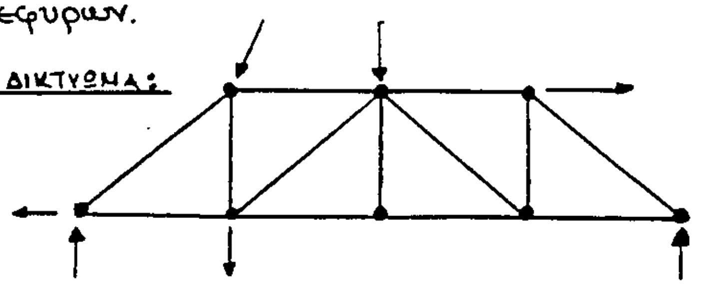
7. ΑΠΛΑ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΑ

Δικτυωμα ειναι μια κατασκευη που αποτελειται απο λεπτες ραβδους που ενωνονται στα ακρα τους. Τα σημεια ενωσεως των ραβδων λεγονται κομβοι του δικτυωματος.

Επιπεδο λεγεται ενα δικτυωμα οταν ολες οι ραβδοι και οι δυναμεις που ασκουνται σ'αυτο ανηκουν στο ιδιο επιπεδο.

Επιπεδα δικτυωματα χρησιμοποιουνται συχνα για την υποστηριξη στεγων και γεφυρων.

ΕΠΙΠΕΔΟ ΔΙΚΤΥΩΜΑ:

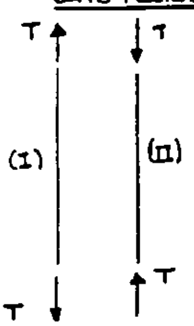


Η μελετη ενος δικτυωματος συνισταται στον υπολογισμο των δυναμεων που ασκουνται στις ραβδους.

Για τον σκοπο γινονται δυο βασικες παραδοχες:

a) ολες οι δυναμεις εφαρμοζονται στους κομβους. Το βαρος των ραβδων αμελειται.

b) οι ραβδοι ενωνονται στους κομβους με αρθρωσεις.



αποτελεσμα: καθε ραβδος δεχεται στα ακρα της δυο ισες και αντιθετες δυναμεις κατα την διευθυνση του αξονα της.

Η δυναμη T ονομαζεται ταση της ραβδου:

εφελκυστικη οταν τεινει να επιμηκυνει την ραβδο

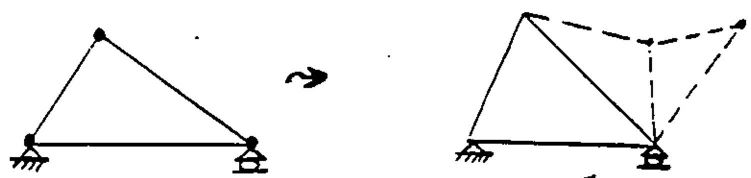
θλιπτικη οταν τεινει να επιβραχυνει την ραβδο.

(I) : εφελκυσμος

(II) : θλιψη.

απλο δικτυωμα

ενα δικτυωμα πρεπει να ειναι στερεος σχηματισμος (να αποκλειονται σχετικες μετακινησεις των στοιχειων του).
το απλουστερο στερεο δικτυωμα ειναι το **τριγωνικό:**

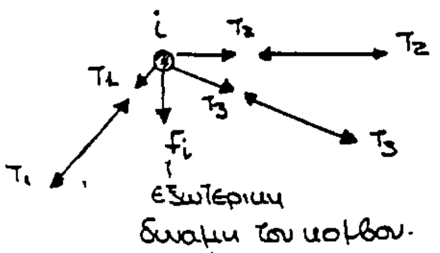


απλο δικτυωμα.

απλο λεγεται το δικτυωμα που κατασκευαζουμε οταν ξεκινωντας απο το τριγωνικο δικτυωμα ενωνουμε καθε φορα δυο νεες ραβδους.
ετσι η προσθηκη δυο ραβδων καθε φορα αυξανει τον αριθμο των κομβων του δικτυωματος κατα μοναδα.
Ετσι αν κ ειναι ο αριθμος των κομβων του απλου δικτυωματος και ρ ο αριθμος των ραβδων $\Rightarrow$ $p=2k-3$. ...(οπου 3 ο αριθμος των αρχικων ραβδων).

Υπολογισμος των Τασεων των Ραβδων

Οι δυναμεις μεταβιβαζονται στις ραβδους απο τους κομβους επομενως ισες και αντιθετες δυναμεις ασκουνται απο τις ραβδους στους κομβο



εαν το δικτυωμα ισορροπει καθε κομβος ισορροπει. Ετσι απο την ισορροπια καθε κομβου παιρνουμε δυο εξισωσεις $\Sigma F_x=0$, $\Sigma F_y=0$.
εαν λοιπόν ο κομβος εμφανιζει δυο αγνωστες δυναμεις μπορουμε απο τις εξισωσεις ισορροπιας του να τις υπολογισουμε.
Εαν ο κομβος εμφανιζει περισσοτερες δυναμεις, θα χρησιμο ποιησουμε αποτελεσματα απο τις αντιστοιχες εξισωσεις ισορροπιας σε γειτονικο κομβο.

<u>Συμπερασμα:</u>
Εαν το δικτυωμα ειναι απλο οι 2κ εξισωσεις των κομβων τα αρκουν για τον υπολογισμο των $p=2k-3$ τασεων των ραβδων και των τριων αντιδρασεων του δικτυωματος.

Μεθοδος των κομβων

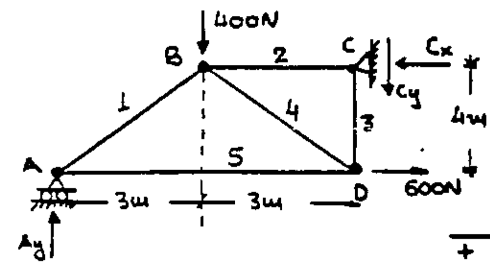
Η μεθοδος των κομβων εφαρμοζεται ως εξης:

Ξεκιναμε απο τον κομβο με δυο το πολυ αγνωστες δυναμεις (αν ο κομβος αυτος ανηκει σε καποια στηριξη θα πρεπει πρωτα να εχουμε βρει τις αντιδρασεις της στηριξεως). Απο τις εξισωσεις ισορροπιας του κομβου υπολογιζουμε τις αγνωστες δυναμεις. Συνεχιζουμε με τον νεο κομβο που εμφανιζει δυο αγνωστες δυναμεις, και προχωρωντας κατ' αυτο τον τροπο υπολογιζουμε ολες τις τασεις.

Αρχικα θεωρουμε ολες τις τασεις εφελκυστικες (επομενως οι δυναμεις στους κομβους κατευθυνονται προς τις ραβδους). Εαν καποιες προκυψουν αρνητικες σημαινει οτι ειναι θλιπτικες (η δυναμη στον κομβο κατευθυνεται προς αυτον).

Παραδειγμα

■ Να υπολογισθουν οι τασεις του δικτυωματος.



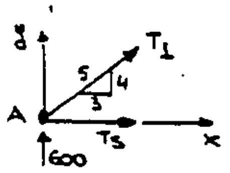
Βλεπουμε οτι κομβος με δυο αγνωστες δυναμεις δεν υπαρχει (κομβοι με δυο ραβδους υπαρχουν μονο στις στηριξεις) γι'αυτο υπολογιζουμε πρωτα τις αντιδρασεις.

$\xrightarrow{+}\ \Sigma F_x=0$: $600 - C_x = 0 \rightarrow C_x = 600N$

$+\circlearrowleft\ \Sigma M_C=0$: $-A_y\cdot 6+400\cdot 3+600\cdot 4=0 \rightarrow A_y=600N$

$+\uparrow\ \Sigma F_y=0$: $600-400-C_y=0 \rightarrow C_y=200N$

κομβος A



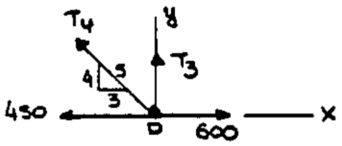
$\Sigma F_x=0 \rightarrow \frac{3}{5}\cdot T_1+T_5=0$

$\Sigma F_y=0 \rightarrow \frac{4}{5}T_1+600=0$

$T_1=-750N$ δηλ. θλιπτικη

$T_5=450N$

κομβος D.



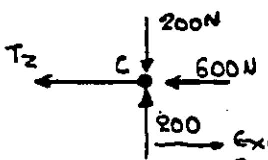
$\Sigma F_x=0 \rightarrow -T_4\cdot\frac{3}{5}-450+600=0$

$\Sigma F_y=0 \rightarrow T_4\cdot\frac{4}{5}+T_3=0$

$\rightarrow T_4=250N$

$T_3=-200N$ θλιπτικη.

κομβος C.



εχει βρεθει θλιπτικη επομενως η δυναμη του κομβου εχει φορα προς αυτον.

$\Sigma F_x=0$: $-600-T_2=0 \rightarrow T_2=-600N$ θλιπτικη.

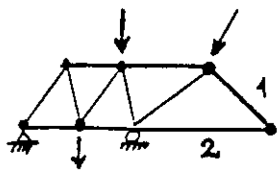
$\Sigma F_y=0$: $200-200=0$ (ελεγχος).

Σχολιο: Ραβδοι με Μηδενικες Τασεις

ο υπολογισμος των τασεων των ραβδων ενος δικτυωματος απλουστευεται οταν μπορουμε να εντοπισουμε τις ραβδους με μηδενικη ταση:

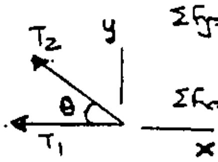
Περιπτωση 1η. οταν σ' εναν κομβο που δεν δεχεται εξωτερικα φορτια ή αντιδρασεις στηριξεως ενωνονται μονο δυο ραβδοι τοτε οι τασεις των ραβδων αυτων ειναι μηδενικες.

π.χ.



$T_1=T_2=0$.

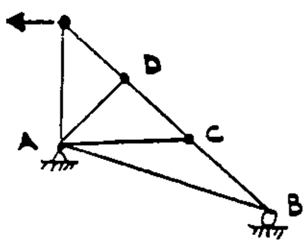
Πραγματι:



$\Sigma F_y=0 \rightarrow T_y\cdot\sin\theta=0$
$\Rightarrow T_2=0$
$\Sigma F_x=0 \rightarrow -T_1-\cancel{T_2\cos\theta}$
$\Rightarrow T_1=0$

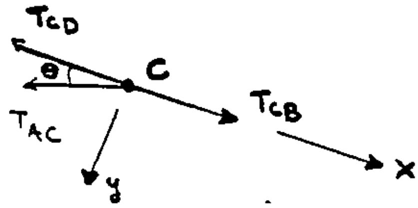
Περιπτωση 2η. οταν σ' εναν κομβο που δεν δεχεται εξωτερικα φορτια ή αντιδρασεις στηριξεως ενωνονται τρεις ραβδοι εκ των οποιων οι δυο ειναι συγγραμμικες τοτε η τριτη ραβδος εχει μηδενικη ταση.

π.χ.



στους κομβους C και D συμβαινει η περιπτωση 2
αρα $T_{AD}=T_{AC}=0$.

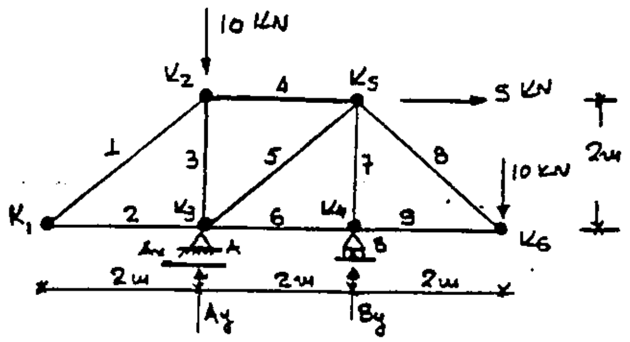
Πραγματι:



$\Sigma F_y=0 \rightarrow T_{AC}\cdot\sin\theta=0 \Rightarrow T_{AC}=0$

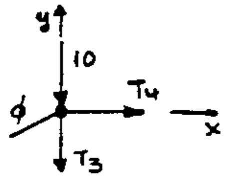
Παράδειγμα

■ Να υπολογισθούν οι τάσεις του δικτυώματος.



Εδώ υπάρχουν κόμβοι με δύο άγνωστες δυνάμεις και πρώτα ξεκινάμε από τον K1 ο οποίος έχει δύο ράβδους και είναι αφόρτιστος $\rightarrow$ $T_1=T_2=0$

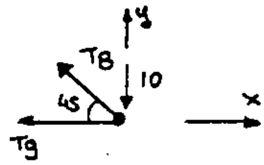
Κόμβος K_2:



$\Sigma F_x=0 \rightarrow T_4=0.$

$\Sigma F_y=0 \rightarrow -T_3-10=0 \rightarrow T_3=-10$

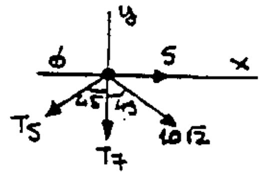
Κόμβος K_6:



$\Sigma F_y=0 \rightarrow T_8\cdot\sin45-10=0 \rightarrow T_8=10\sqrt{2}$

$\Sigma F_x=0 \rightarrow -10\cdot\sqrt{2}\cdot\cos45-T_9=0 \rightarrow T_9=-10$

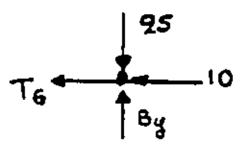
Κόμβος K_5:



$\Sigma F_x=0 \rightarrow -T_5\cdot\cos45+5+10\sqrt{2}\cdot\cos45=0 \rightarrow T_5=15\sqrt{2}$

$\Sigma F_y=0 \rightarrow -T_7-15\sqrt{2}\cdot\cos45-10\sqrt{2}\cdot\cos45=0 \rightarrow T_7=-25.$

Κόμβος K_4:



$\Sigma F_y=0 \rightarrow B_y=25$

$\Sigma F_x=0 \rightarrow T_6=-10$

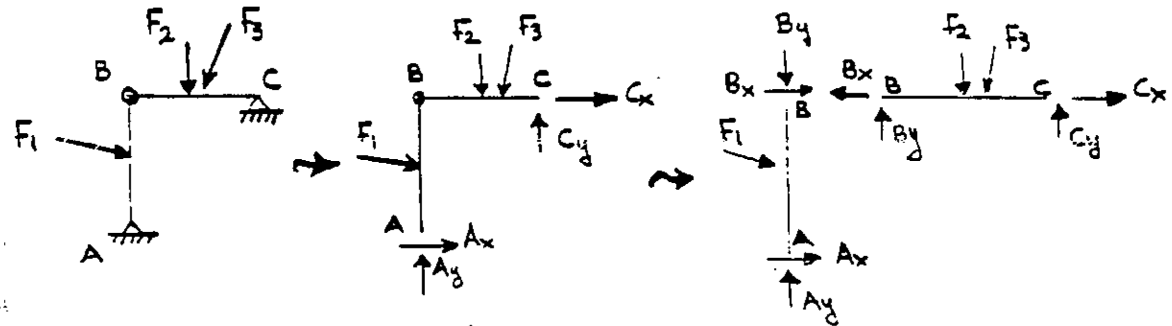
Για έλεγχο μπορούμε να βρούμε την B_y από την ισορροπία του δικτυώματος:

$\Sigma M_A=0 \rightarrow -10\cdot4+B_y\cdot2-5\cdot2=0 \rightarrow B_y=25$ (όσο βρήκαμε και πριν).

8. ΠΛΑΙΣΙΑ

Αντίθετα με τα δικτυώματα που τα μέλη τους (ράβδοι δικτυώματος) δέχονται μόνο δυο δυνάμεις (επομένως συνευθειακές ίσες και αντίθετες) τα πλαίσια είναι σύνθετες κατασκευές που τα μέλη τους μπορούν να δέχονται περισσότερες από δυο δυνάμεις (και ροπές).
Η μελέτη ενός πλαισίου συνίσταται στον υπολογισμό αυτών των δυνάμεων (κ ροπών).
Επίπεδο λέγεται ένα πλαίσιο όταν όλα τα μέλη του και οι δυνάμεις που ενεργούν σ' αυτό βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

π.χ.



το πλαίσιο του σχήματος αποτελείται από δυο μέλη AB και BC που ενώνονται με **άρθρωση στο B.** Στόχος μας είναι να υπολογίσουμε τις εξωτερικές αντιδράσεις A_x, A_y, C_x, C_y και τις εσωτερικές δυνάμεις B_x B_y μεταξύ των μελών του πλαισίου.

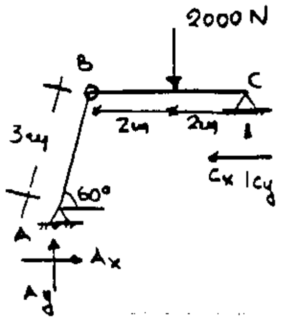
Η διαδικασία που ακολουθούμε **είναι η εξής:**
Αφού το πλαίσιο ισορροπεί κάθε μέλος του θα ισορροπεί και θα παρέχει τρεις εξισώσεις ισορροπίας: $\Sigma F_x=0$, $\Sigma F_y=0$, $\Sigma M_o=0$.
Έτσι η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων όλων των μελών μας παρέχει τις τιμές όλων των αγνώστων.
Η ισορροπία του πλαισίου σαν σύνολο απαιτεί την ικανοποίηση των συνθηκών $\Sigma F_x=0$, $\Sigma F_y=0$, $\Sigma M_o=0$, σ' αυτές βέβαια δεν υπεισέρχονται οι εσωτερικές δυνάμεις μεταξύ των μελών του πλαισίου.
Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις εξισώσεις για έλεγχο των εξωτερικών αντιδράσεων μετά την επίλυση του πλαισίου.

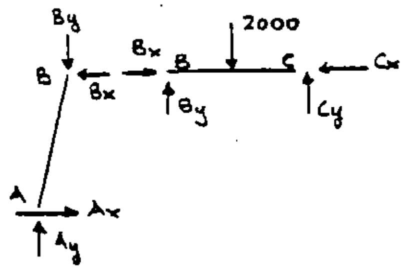
ΣΧΟΛΙΟ

Στη παρούσα ανάλυση τα πλαίσια αντιμετωπίζονται σαν σύνθετοι φορείς στους οποίους προσδιορίζονται μόνο οι αντιδράσεις μεταξύ των μελών του (εσωτερικές ή εξωτερικές) και όχι οι αντίστοιχες

Παραδειγματα

■





Τμημα AB: $+\circlearrowleft\ \Sigma M_A=0:\ B_x\cdot 3\cdot \sin 60 - B_y\cdot 3\cdot \cos 60=0$

$\xrightarrow{+}\ \Sigma F_x=0:\ A_x-B_x=0$

$+\uparrow\ \Sigma F_y=0:\ A_y-B_y=0$

Τμημα BC: $\overset{+}{\circlearrowleft}\ \Sigma M_C=0:\ 2000\cdot 2 - B_y\cdot 4=0$

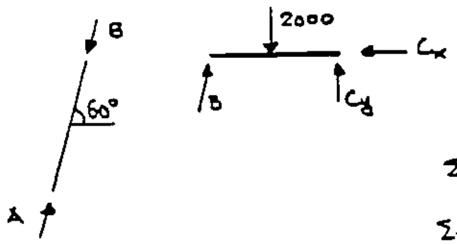
$\xrightarrow{+}\ \Sigma F_x=0:\ B_x-C_x=0$

$+\uparrow\ \Sigma F_y=0:\ B_y-2000+C_y=0$

απο τις παραπανω εξισωσεις βρισκουμε: $A_x=B_x=577N$, $A_y=B_y=1000N$

$C_x=577N$, $C_y=1000N$.

Λυση δευτερη: παρατηρουμε οτι το μελος AB δεχεται μονο δυο δυναμεις την $\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A_x}+\underset{\sim}{A_y}$ και $\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B_x}+\underset{\sim}{B_y}$ αρα θα ειναι αυτες ισες και αντιθετες στην διευθυνση AB (δες εντατα με δυο μονο δυναμεις).



Τμημα BC:

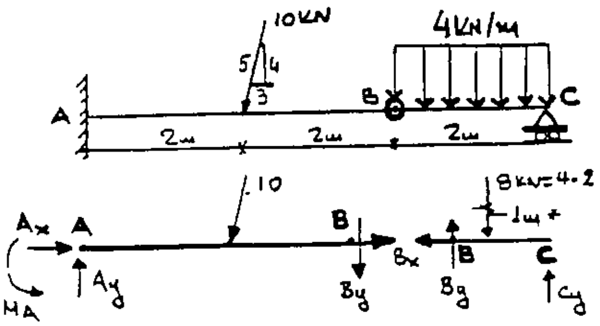
$\Sigma M_C=0:\ 2000\cdot 2 - B\cdot \sin 60\cdot 4=0 \Rightarrow B=1154{,}7$

$\Sigma F_x=0:\ 1154{,}7\cdot \cos 60 - C_x=0 \Rightarrow C_x=577$

$\Sigma F_y=0:\ 1154{,}7\cdot \sin 60-2000+C_y=0 \Rightarrow C_y=1000$

και $A=B=1154{,}7$. Παρατηρουμε οτι η δευτερη λυση ειναι πιο συντομη γι' αυτο παντα εκμεταλλευομαστε την υπαρξη μελων με δυο μονο δυναμεις.

■ Να επιλυθει το πιο κατω συστημα



Τμημα BC:
$$\left.\begin{aligned} &\Sigma F_x=0 \rightsquigarrow B_x=0\\ &\circlearrowleft^{+}\ \Sigma M_B=0 \rightsquigarrow -8\cdot 1+C_y\cdot 2=0\\ &\Sigma F_y=0 \rightsquigarrow B_y-8+C_y=0 \end{aligned}\right\}\ (1)$$

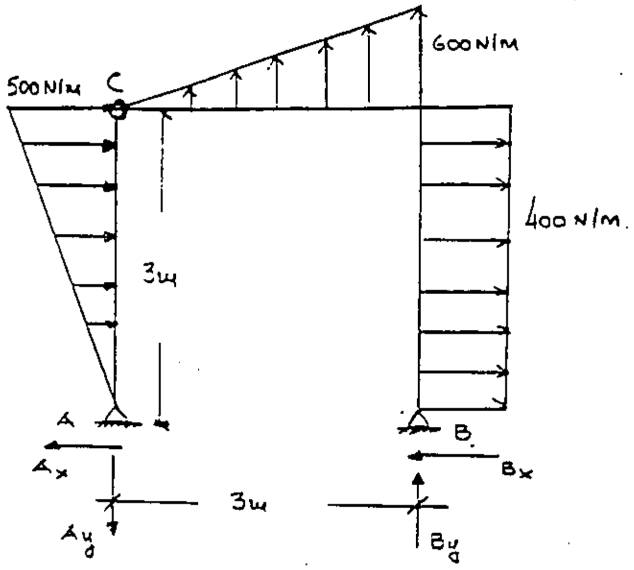
Τμημα AB:
$$\left.\begin{aligned} &\Sigma F_x=0:\ A_x-10\cdot\tfrac{3}{5}+B_x=0\\ &\circlearrowleft^{+}\ \Sigma M_A=0:\ M_A-10\cdot\tfrac{4}{5}\cdot 2-B_y\cdot 4=0\\ &\Sigma F_y=0:\ A_y-10\cdot\tfrac{4}{5}-B_y=0 \end{aligned}\right\}\ (2)$$

(1), (2) $\rightarrow$ $A_x=6kN$ $\quad A_y=12kN$ $\quad M_A=32kNm$.

$B_x=0$ $\quad B_y=4kN$

$C_y=4kN$

■ Να υπολογισθούν οι εσωτερικές αντιδράσεις του πλαισίου.



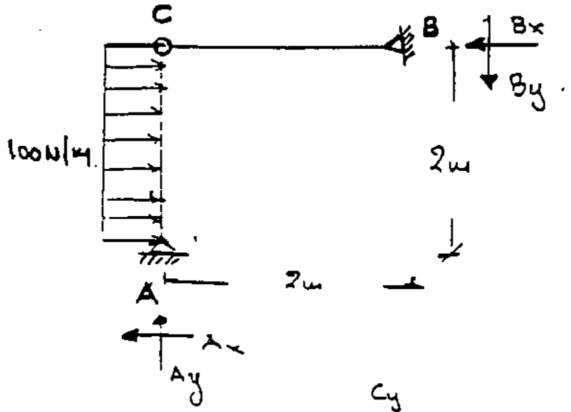
$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_C = 0 \rightsquigarrow -A_x \cdot 3 + \frac{1}{2}\, 500 \cdot 3 \cdot \frac{3}{3} = 0 \rightsquigarrow A_x = 250\ N$

$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_B = 0 \rightsquigarrow A_y \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 3 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 3 \cdot 1 - 400 \cdot 3 \cdot 1.5 \Rightarrow A_y = 1400\ N.$

$\Sigma F_x = 0 \rightsquigarrow -250 + \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 3 + 400 \cdot 3 - B_x = 0 \rightsquigarrow B_x = 1700\ N$

$\Sigma F_y = 0 \rightsquigarrow \frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 3 - 1400 + B_y = 0 \rightsquigarrow B_y = 500\ N.$

■



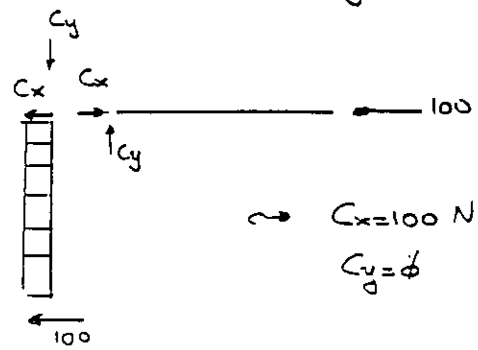
Να επιλυθεί το πλαίσιο.

$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_C = 0 \rightsquigarrow -A_x\, 2 + 100 \cdot 2 \cdot 1 = 0 \rightsquigarrow A_x = 100\ N$

$\Sigma F_x = 0 \rightsquigarrow -B_x - 100 + 100\ 2 = 0 \rightsquigarrow B_x = 100\ N$

$\Sigma M_C^{CB} = 0 \rightarrow B_y = 0.$

$\Sigma F_y = 0 \rightsquigarrow A_y = 0$



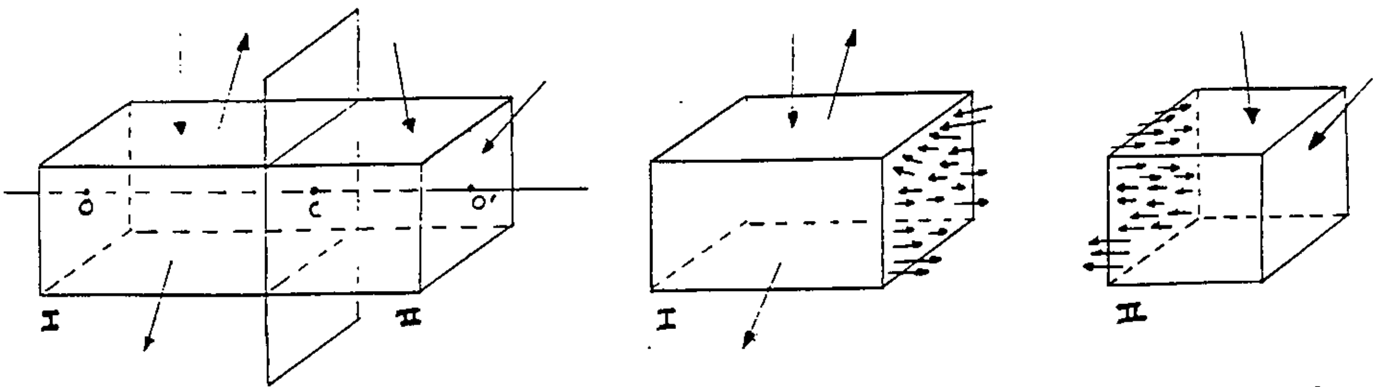
$\rightsquigarrow C_x = 100\ N$

$C_y = 0$

9. ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ.

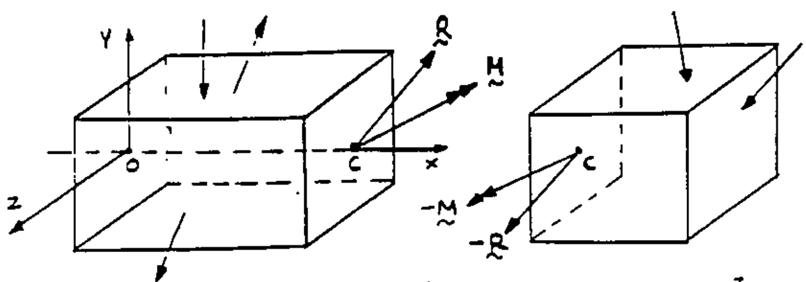
9.1 ΦΟΡΤΙΑ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΔΟΚΟΥ

ας ειναι I και II, τα τμηματα στα οποια χωριζεται μια δοκος που ισορροπε με μια υποθετικη τομη καθετη στον αξονα της:



Αφου η δοκος ισορροπει καθε τμημα της θα ισορροπει. Επομενως σε καθε τομη θα υπαρχουν διανεμημενες δυναμεις (εσωτερικες δυναμεις) που ισορροπουν τ εξωτερικες δυναμεις καθε τμηματος. Ειναι φανερο οτι στις δυο διατομες οι εσωτερ δυναμεις θα ειναι ισες και αντιθετες (νομος δρασης-αντιδρασης).

Μεταφερουμε τις δυναμεις στο γεωμετρικο κεντρο της διατομης οποτε θα δωσουν εκει μια συνισταμενη δυναμη $\underset{\sim}{R}$ και μια συνισταμενη ροπη $\underset{\sim}{M}$.



ας ειναι oxyz ενα τρισορθογωνιο συστημα αξονων του οποιου ο αξονας x ειναι ο κεντ αξονας της δοκου και επομενως οι y και z θα βρισκονται επανω στην διατομη.

Η συνιστωσα $\underset{\sim}{R}_x = \underset{\sim}{N}$ της $\underset{\sim}{R}$ ονομαζεται αξονικη δυναμη της δοκου και οι $\underset{\sim}{R}_y =$, και $\underset{\sim}{R}_z = \underset{\sim}{V}_z$ τεμνουσες δυναμεις.

Η συνιστωσα $\underset{\sim}{M}_x = \underset{\sim}{T}$ της $\underset{\sim}{M}$ ονομαζεται ροπη στρεψης και οι $\underset{\sim}{M}_y$ και $\underset{\sim}{M}_z$ ροπες καμψης.

Ολες αυτες οι συνιστωσες αποτελουν τα φορτια διατομης της δοκου, και οπως θα με στην αντοχη των υλικων ειναι καθοριστικα για τον υπολογισμο της αντοχης της δο οταν οι εξωτερικες δυναμεις βρισκονται στο επιπεδο οxy τα φορτια διατομης της δοκου περιοριζονται στα N, $V=V_y$ και $M=M_z$

Συμφωνα με τα προηγουμενα για να υπολογισει καποιος τα φορτια διατομης της δοκου σε καποια θεση ακολουθει την εξης διαδικασια:

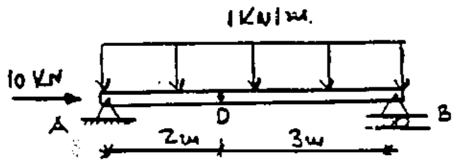
a) προσδιοριζει τις εξωτερικες αντιδρασεις της δοκου.

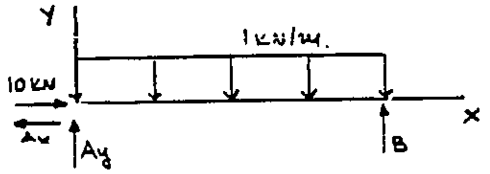
b) με μια τομη καθετη στον αξονα της δοκου στη θεση εκεινη χωριζει την δοκο σε δυο τμηματα. Εφαρμοζει στις δυο διατομες τα αγνωστα φορτια διατομης με καποια υποθετικη φορα. (Ισες και αντιθετες στις δυο διατομες).

c) απο τις εξισωσεις ισορροπιας του ενος απο τα δυο τμηματα υπολογιζουμε τα φορτια διατομης. Εαν τα μετρα καποιων προκυψουν αρνητικα σημαινει οτι εχουν αντιθετη φορα απ' αυτην που υποθεσαμε.

Παραδειγματα

■ Να βρεθουν τα φορτια διατομης της δοκου στο σημειο D.



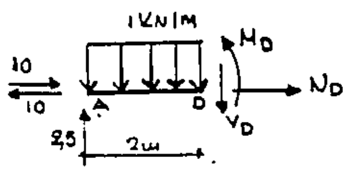


αντιδρασεις: $\Sigma f_x=0: \ 10-A_x=0 \rightarrow A_x=10KN$

$\circlearrowleft + \ \Sigma M_B=0: \ -A_y\cdot 5+1\cdot 5\cdot \frac{5}{2}=0 \rightarrow A_y=2{,}5KN$

$\Sigma f_y=0: \ 2{,}5-1\cdot 5+B=0 \rightarrow B=2{,}5KN.$

Φορτια διατομης στο D.



ισορροπια τμηματος AD:

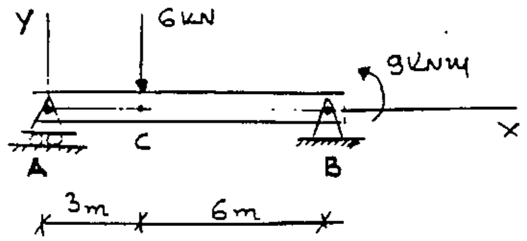
$\Sigma f_x=0: \ N_D+10-10=0 \rightarrow N_D=0\,KN$

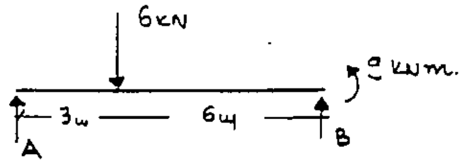
$\Sigma f_y=0: \ 2{,}5-1\cdot 2-V_D=0 \rightarrow V_D=0{,}5KN$

$\circlearrowleft + \ \Sigma M_D=0: \ -2{,}5\cdot 2+1\cdot 2\cdot \frac{2}{2}+M_D=0 \rightarrow M_D=3KNm.$

Τα θετικα προσημα για τα μετρα των N_D, V_D, M_D δειχνουν οτι οι φορες τους υποτεθηκαν σωστα.

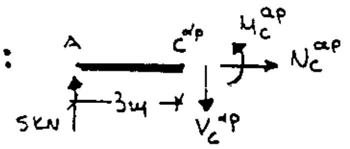
■ Να προσδιοριστούν τα φορτία διατομής αριστερά και δεξιά από το σημείο εφαρμογής της μοναδιαίας δύναμης της δοκού του σχήματος.





$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0 \quad -A\cdot 9 + 6\cdot 6 + 9 = 0 \rightarrow A = 5\,KN$

C^{ap} :

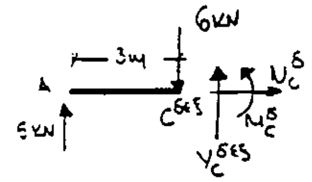


$\Sigma F_x = 0 \rightarrow N_C^{ap} = 0$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow 5 - V_C^{ap} = 0 \rightarrow V_C^{ap} = 5\,KN$

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0 \rightarrow -5\cdot 3 + M_C^{ap} = 0 \rightarrow M_C^{ap} = 15\,KNm.$

$C^{\delta\varepsilon\xi}$:

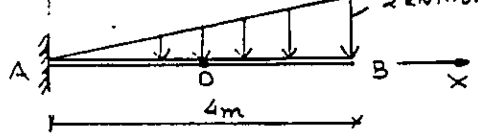


$\Sigma F_x = 0 \rightarrow N_C^{\delta\varepsilon\xi} = 0$

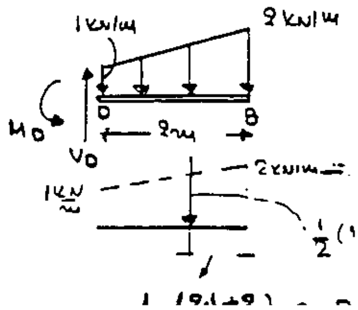
$\Sigma F_y = 0 \rightarrow 5 - 6 + V_C^{\delta\varepsilon\xi} = 0 \rightarrow V_C^{\delta\varepsilon\xi} = 1.$

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0 \rightarrow -5\cdot 3 + M_C^{\delta\varepsilon\xi} = 0 \rightarrow M_C^{\delta\varepsilon\xi} = 15\,KNm.$

■ Να υπολογισθούν τα M, V στο μέσον D της δοκού του σχήματος.



παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την ισορροπία του τμήματος DB δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τις αντιδράσεις.



$\Sigma F_y = 0: \quad V_D - \frac{1}{2}(1+2)\cdot 2 = 0 \rightarrow V_D = 3\,KN.$

$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0: \quad M_D - 3\cdot 2 + 3\cdot \frac{8}{9} = 0 \rightarrow M_D = 3{,}33\,KNm.$

$\frac{1}{2}(2\cdot 1 + 2) \cdot 2$

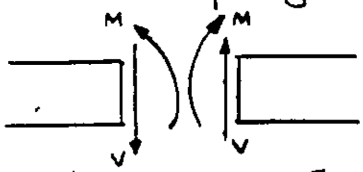
9.2 Διαγραμματα Τεμνουσων Δυναμεων και Καμπτικων Ροπων

Επιπεδο προβλημα

Συμφωνα με τα προηγουμενα σε καθε διατομη της δοκου αντιστοιχει μια τεμνουσα δυναμη V και μια καμπτικη ροπη **M**. Ετσι οι **V** και **M** οριζονται σαν συναρτησεις V(x) και M(x) της τετμημενης του αξονα της δοκου.

Οι γραφικες παραστασεις των συναρτησεων αυτων ειναι τα λεγομενα διαγραμματα των φορτιων διατομης. Οι V(x), M(x) αλλαζουν εκφραση εκει που αλλαζει εκφραση το διανεμημενο φορτιο ή υπαρχει μοναχικη δυναμη ή μοναχικη ροπη (επηρεαζει μονον την M(x)).

Για τις τεμνουσες δυναμεις και τις καμπτικες ροπες γινεται η εξης παραδοχη προσημων: η V ειναι θετικη οταν στην αριστερη διατομη εχει φορα προς τα κατω και επομενως στην δεξια προς τα επανω. η M ειναι θετικη οταν στην αριστερη διατομη εχει την αντιωρολογιακη φορα και επομενως στην δεξια την ωρολογιακη:



Η διαδικασια που ακολουθειται για την κατασκευη των διαγραμματων των M(x) και V(x) ειναι η εξης:

a) Ευρεση αντιδρασεων.

b) Ευρεση των M(x) και V(x) για ολα τα τμηματα στα οποια χωριζεται η δοκος απο χαρακτηριστικα σημεια δηλ: στηριξεις, σημεια εφαρμογης μοναχικων δυναμεων και ροπων, σημεια αλλαγης διανεμημενων φορτιων, ελευθερα ακρα.

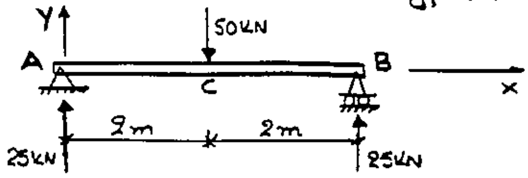
c) Γραφικη παρασταση των M(x), V(x)

Σχολιο: συμφωνα με την παραδοχη προσημων για τις V και M, οταν τις υπολογιζουμε απο αριστερα: οι δυναμεις που κατευθυνονται προς τα επανω δινουν θετικα V και M ενω αυτες που κατευθυνονται προς τα κατω αρνητικα.

Οταν τις υπολογιζουμε απο δεξια: οι προς τα επανω δυναμεις δινουν αρνητικα V και θετικα M, ενω οι προς τα κατω θετικα V και αρνητικα M.

Παραδείγματα.

■. Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα των $M(x)$ και $V(x)$ για την δοκό του σχήματο

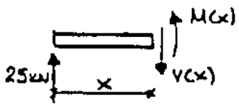


αντιδράσεις: $\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0 \rightarrow -A_y \cdot 4 + 50 \cdot 2 = 0 \rightarrow A_y = 25$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow 25 - 50 + B_y = 0 \rightarrow B_y = 25$

θα εξετάσουμε τα τμήματα AC: $0 \le x \le 2$ και CB: $2 \le x \le 4$ (C: σημείο εφαρμ γης μοναδικού φορτίου).

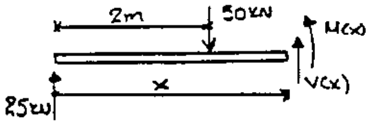
Τμήμα AC: $0 \le x \le 2$



$V(x) = 25\,KN$

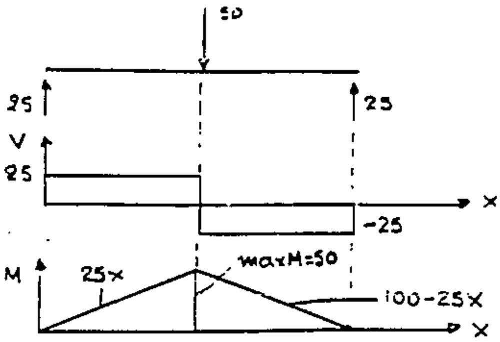
$M(x) = 25 \cdot x$

Τμήμα CB: $2 \le x \le 4$

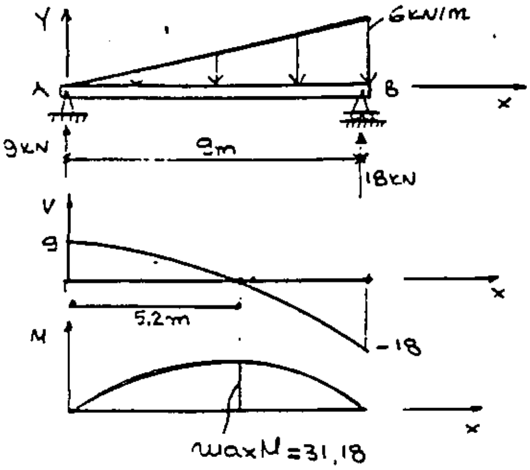


$V(x) = 25 - 50 = -25\,KN$

$M(x) = 25 \cdot x - 50(x-2) = 100 - 2$



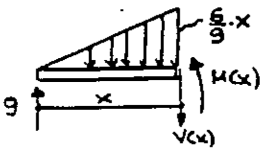
■. Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα $M(x)$, $V(x)$ της δοκού του σχήματος.



αντιδράσεις: $\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0 \rightarrow -A_y \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 \cdot \frac{9}{3} = 0 \rightarrow A_y = 9$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow 9 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 + B_y = 0 \rightarrow B_y = 18$

Εδώ τα $M(x)$, $V(x)$ θα έχουν ενιαία έκφραση στο



$V(x) = 9 - \frac{1}{2} x \cdot \frac{6}{9} x = -\frac{x^2}{3} + 9$

$V(x) = 0 \rightarrow x = 5,2\,m.$

$M(x) = 9x - \frac{1}{2} x \frac{6}{9} x \cdot \frac{x}{3} = -\frac{x^3}{9} + 9x$

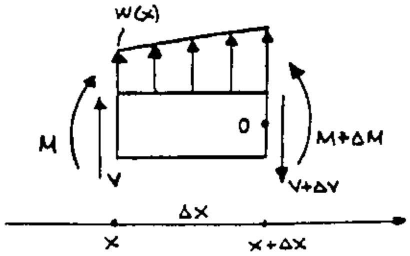
$\max M$: $\rightarrow \frac{dM}{dx} = -\frac{x^2}{3} + 9 = 0 \rightarrow x = 5,2\,m$

και $\max M = 31,18\,KNm$

93 Σχεσεις μεταξυ Διανεμημενου Φορτιου, Τεμνουσας δυναμης και Ροπης Καμψης

Εξεταζουμε την ισορροπια ενος τμηματος Δx μιας δοκου που φορτιζεται μ'ενα διανεμημενο φορτιο $w(x)$:

Στα επομενα $w(x)$ συμβολιζει το αλγεβρικο μετρο του $\underset{\sim}{w}$ δηλ $w>0$ οταν $w\uparrow$ και $w<0$ οταν $w\downarrow$



για Δx πολυ μικρο το $w(x)$ θα ειναι σχεδον ομοιομορφο →

$\Sigma F_y=0: \quad V + w(x)\cdot\Delta x - V - \Delta V = 0 \rightarrow \dfrac{\Delta V}{\Delta x} = w(x)$

$\circlearrowleft + \Sigma M_O=0: \quad -M - V\cdot\Delta x - w(x)\cdot\Delta x\cdot\dfrac{\Delta x}{2} + M + \Delta M = 0 \rightarrow \dfrac{\Delta M}{\Delta x} = V + w(x)\cdot\dfrac{\Delta x}{2}$

παιρνοντας τα ορια των παραπανω σχεσεων οταν $\Delta x \to 0$ →

$$\boxed{\frac{dV}{dx} = w(x)} \qquad \text{και} \qquad \boxed{\frac{dM}{dx} = V}$$

Ιδιοτητες διαγραμματων φορτιων διατομης.

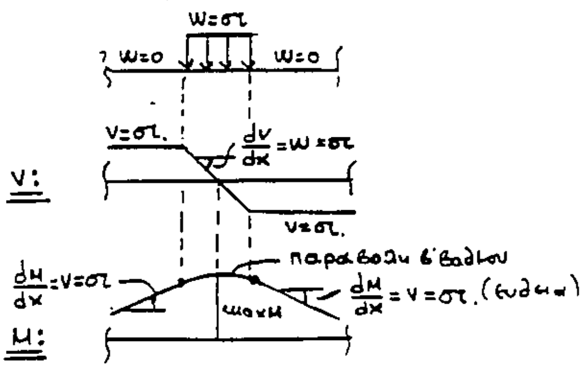
Απο τις παραπανω σχεσεις προκυπτουν οι εξης ιδιοτητες για τα διαγραμματα M, V

I) στα τμηματα οπου $w(x)=0$ → $V(x)=$ σταθερη. , $M(x)=$ ευθεια με κλιση $V=$ σταθ

" " " $w(x)=$ σταθ. → $V(x)=$ ευθεια με κλιση $w=$ στ., $M(x)=$ παραβολη β' βαθμου

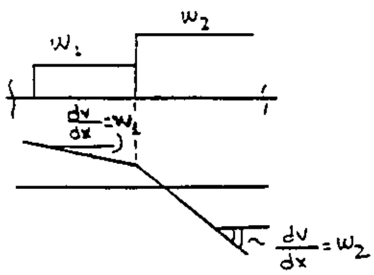
γενικα αν το $w(x)$ ειναι πολυωνυμο n βαθμου τοτε $V(x)=$ πολυωνυμο $n+1$ βαθμου και $M(x)=$ πολυωνυμο $n+2$ βαθμου.

II) στα σημεια οπου $V(x)=0$ → η $M(x)$ παιρνει ακραια τιμη.



III) στα τμηματα οπου $w(x)$ αυξανει → $V(x)$ στρεφει τα κοιλα προς τα ανω: , αν $w(x)$ φθ
→ $V(x)$ στρεφει τα κοιλα προς τα κατω:
οπου $W(x)>0$ → $M(x)$: , οπου $w(x)<0$ → $M(x)$:

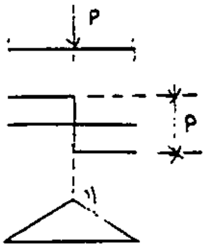
IV) στα σημεια αλλαγης του διανεμημενου φορτιου η $V(x)$ εμφανιζει γωνιακο σημει

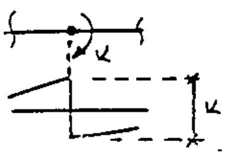


V) στα σημεια εφαρμογης μοναδικης δυναμης: η $V(x)$ εμφανιζει αλμα ισο με την δυ-
μη και η $M(x)$ γωνιακο σημειο. Στα σημεια εφαρμογης μοναδικης ροπης η $M(x)$ εμφανιζει αλμα ισο με την ροπη. (η $V(x)$ δεν επηρεαζεται).

V:

M:





VI) η σχεση $dV=w\cdot dx$ → $\int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{x_1}^{x_2} w\,dx$ → $V_2 = V_1 + \int_{x_1}^{x_2} w\,dx$ δηλ η τεμνουσα δυν στη θεση x_2 ισουται με την τεμνουσα στη θεση x_1 συν το προσημασμενο εμβαδο τ φανειας φορτισεως απο x_1 εως x_2.

Επισης η σχεση $dM=V\,dx$ → $\int_{M_1}^{M_2} dM = \int_{x_1}^{x_2} V\,dx$ → $M_2 = M_1 + \int_{x_1}^{x_2} V\,dx$ δηλ η καμπτικ ροπη στην θεση x_2 ισουται με την καμπτικη ροπη στην θεση x_1 συν το προσ σμενο εμβαδον του διαγραμματος των τεμνουσων απο x_1 εως x_2.

Κατασκευη διαγραμματων M, V με χρηση των ιδιοτητων τους.

Κανοντας χρηση των ιδιοτητων τους μπορουμε ευκολα να κατασκευασουμε τα διαγραμματα των $M(x)$, $V(x)$, χωρις να βρουμε τις αναλυτικες τους εκφρασεις. Ακολουθουμε την παρακατω διαδικασια:

a) Υπολογιζουμε τις εξωτερικες αντιδρασεις.

b) Ξεκινωντας απο το αριστερο ακρο της δοκου οπου η V εχει καποια τιμη V_A, βρισκουμε τις τιμες της V για χαρακτηριστικα σημεια (στηριξεις, σημεια εφαρμογης μοναχικων δυναμεων, σημεια αλλαγης διανεμημενου φορτιου, ελευθερα ακρα) εφαρμοζοντας την σχεση $V_2 = V_1 +$ προσημασμενο εμβαδο $w(x)\Big|_{x_1}^{x_2}$ και ενωνουμε με τις καταλληλες γραμμες δηλ. ευθεια αν $w(x)=$ στ., παραβολη β' βαθμου αν $w(x)=$ γραμμικο κ.ο.κ., βεβαια οπου υπαρχει μοναχικη δυναμη η V θα εχει αλμα ισο με την δυναμη.

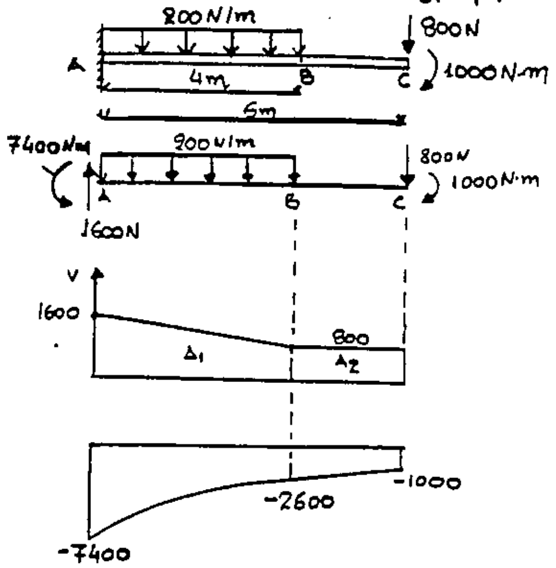
c) Αφου κατασκευασουμε το διαγραμμα της $V(x)$, ξεκινωντας παλι απο το αριστερο ακρο οπου η M εχει καποια τιμη M_A βρισκουμε τις τιμες της M για χαρακτηριστικα σημεια (τα ιδια οπως πριν + σημεια εφαρμογης μοναχικων ροπων) εφαρμοζοντας την σχεση $M_2 = M_1 +$ προσ. εμβαδο $V(x)\Big|_{x_1}^{x_2}$ και ενωνουμε με τις καταλληλες γραμμες δηλ ευθεια αν $V=$ στ, παραβολη β βαθμου αν V γραμμικο κ.ο.κ. Οπου υπαρχει μοναχικη ροπη η M θα εχει αλμα ισο με την ροπη.

Να σημειωθει οτι μπορει καποιος να βρει και τις αναλυτικες εκφρασεις των $V(x)$ και $M(x)$ σε καποιο διαστημα (x_1, x_2) ως εξης:
αν η $M(x)$ ειναι π.χ σ' αυτο το διαστημα παραβολη β' βαθμου θα εχει την εκφραση: $M(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Rightarrow \dfrac{dM}{dx} = V(x) = 2\alpha x + \beta \Rightarrow \dfrac{dV}{dx} = w(x) = 2\alpha$.

$$\left.\begin{aligned} M(x_1) &= \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma \\ V(x_1) &= 2\alpha x_1 + \beta \\ w(x_1) &= 2\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{για γνωστα } M(x_1), V(x_1), w(x_1) \text{ βρισκουμε τα } \alpha, \beta, \gamma.$$

Παραδειγματα.

■ Να σχεδιασθουν τα διαγραμματα $M(x), V(x)$ για την δοκο του σχηματος.



αντιδρασεις:

$(+\ \Sigma M_A=0 \rightarrow M_A - 200\cdot4\cdot2 - 800\cdot6 - 1000 = 0 \rightarrow M_A = 7400$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y - 200\cdot4 - 800 = 0 \rightarrow A_y = 1600N$

χαρακτηριστικα σημεια: A, B, C

$V_A = 1600$, $V_B = 1600 - 200\cdot4 = 800$, $V_C = 800$

Τμημα AB $(0\le x\le 4)$: $w=-200=\sigma\tau.$ → $V(x)$: ευθεια.

Τμημα BC $(4\le x\le 6)$: $w=0$ → $V(x)=$ σταθερή.

$M_A = -7400$, $M_B = -7400 + A_1 = -7400 + \frac{1}{2}(1600+800)\cdot4 = -2600$

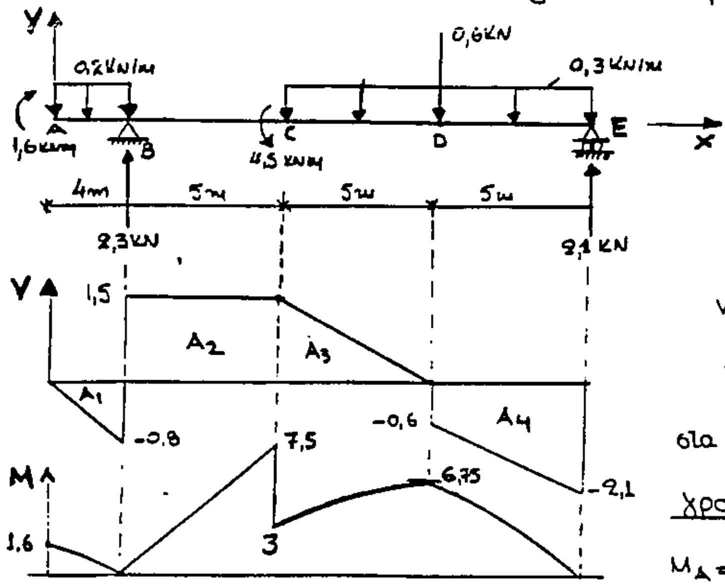
$M_C = -2600 + A_2 = -2600 + 800\cdot2 = -1000$ (οπως και πρε

Τμημα AB: $V=$ γραμμικο, $w=-200<0$ → $M(x)=$ παραβ

β' βαθμου που στρεφει τα κοιλα προς τα

Τμημα BC: $V=$ σταθ. → $M(x)=$ ευθεια.

■ Να σχεδιασθουν τα $M(x), V(x)$ για την παρακατω δοκο.



αντιδρασεις

$(+\ \Sigma M_E = 0 \rightarrow -1{,}6 + 0{,}2\cdot4\cdot17 - A_y\cdot15 + 4{,}5 + 0{,}3\cdot10\cdot5 + 0{,}$

$\rightarrow A_y = 2{,}3\,kN \quad \Sigma F_y = 0 \rightarrow E_y = 2{,}1\,kN.$

χαρακτηριστικα σημεια: A, B, C, D, E

$V_A = 0$, $V_B^{\alpha\rho} = 0 - 0{,}2\cdot4 = -0{,}8$, $V_B^{\delta\varepsilon\xi} = -0{,}8 + 2{,}3 = 1{,}5$, $V_C = 1{,}5$

$V_D^{\alpha\rho} = 1{,}5 - 0{,}3\cdot5 = 0$, $V_D^{\delta\varepsilon\xi} = 0 - 0{,}6 = -0{,}6$, $V_E = -0{,}6 - 0{,}3\cdot5 = -$

στα τμηματα AB, CD, DE οπου $w=$ σταθ και V ειναι γραμμικη, στο BC οπου $w=0$ ειναι $V=$ σταθ.

$M_A = 1{,}6$, $M_B = 1{,}6 + A_1 = 1{,}6 - \frac{1}{2}\cdot0{,}8\cdot4 = 0$, $M_C^{\alpha\rho} = 0 + A_2 = 5\cdot1{,}5 =$

$M_C^{\delta\varepsilon\xi} = 7{,}5 - 4{,}5 = 3$, $M_D = 3 + A_3 = 3 + \frac{1}{2}\cdot1{,}5\cdot5 = 6{,}75$

$M_E = 6{,}75 + A_4 = 6{,}75 - \frac{1}{2}(0{,}6 + 2{,}1)\cdot5 = 0$.

στα τμηματα AB, CD, DE: $V=$ γραμμικο, $w<0$ → M παραβ βαθμου με τα κοιλα προς τα κατω.

στο BC οπου $V=$ στ. $M=$ ευθεια

Θα βρουμε την εκφραση του $M(x)$ στο CD $(9<x<14)$

θα ειναι $M(x) = ax^2 + bx + \gamma \rightarrow \frac{dM}{dx} = V = 2ax + b$

και $\frac{dV}{dx} = 2a = w(x) = -0{,}3 \rightarrow a = -0{,}15$.

$V(9) = 1{,}5 \rightarrow b = 4{,}2$, $M(9) = 3$ (για το CD)

$\rightarrow \gamma = -22{,}65$ δηλ. $M(x) = -0{,}15x^2 + 4{,}2x - 22{,}65$

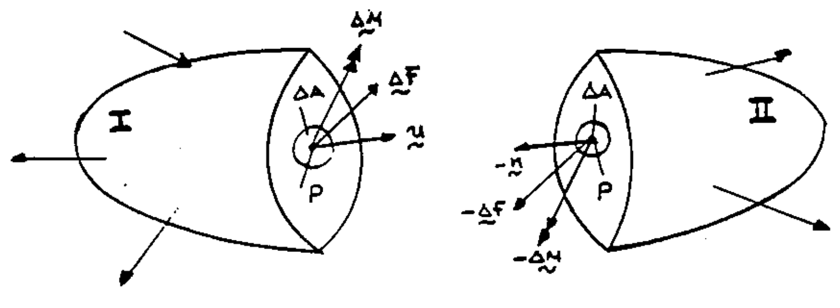
ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ: ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

1. ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Το απολυτως στερεο σωμα που θεωρησαμε στο πρωτο μερος ειναι μια εξιδανικευμενη εννοια. Καθε σωμα με την επιδραση δυναμεων παραμορφωνεται: οι αποστασεις μεταξυ των υλικων του σημειων μεταβαλλονται.
Τα υλικα σημεια αντιδρουν σ' αυτη τη μεταβολη και μεταξυ τους αναπτυσσονται εσωτερικες δυναμεις.
Η Αντοχη των Υλικων εξεταζει τις εσωτερικες δυναμεις και παραμορφωσεις των σωματων κατω απο την επιδραση εξωτερικων δυναμεων.

2. ΕΝΝΟΙΑ ΤΑΣΗΣ

Εστω ενα σωμα που βρισκεται σε ισορροπια. Ας θεωρησουμε ενα σημειο P του σωματος και μια διατομη που περνα απο το P και χωριζει το σωμα σε δυο μερη I και II αφου το σωμα ισορροπει καθε μερος του θα ισορροπει και ετσι επανω στη διατομη θα υπαρχουν εσωτερικες διανεμημενες δυναμεις που ασκουνται μεταξυ των δυο μερων του σωματος (ισες και αντιθετες στα δυο μερη - νομος δρασης - αντιδρασης).

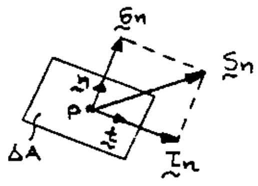


Γυρω απο το σημειο P φανταζομαστε μια απειροστη επιφανεια ΔA επανω στην διατομη με μοναδιαιο καθετο διανυσμα το $\underset{\sim}{n}$ (διανυσμα προσανατολισμου της ΔA)
εξ ορισμου το $\underset{\sim}{n}$ λαμβανεται σε καθε παρεια της διατομης με διευθυνση προς το εξωτερικο του τμηματος που ανηκει αυτη.
Εστω $\underset{\sim}{\Delta F}$ η συνισταμενη των διανεμημενων στην ΔA δυναμεων και $\underset{\sim}{\Delta M}$ η συνισταμενη ροπη τους γυρω απο το P. Θεωρουμε οτι οσο πιο μικρη ειναι η ΔA τοσο πιο ομοιομορφη γινεται η διανομη των δυναμεων στην ΔA, και επομενως $\underset{\sim}{\Delta M} \approx \underset{\sim}{0}$.

ορίζουμε σαν διάνυσμα τάσης στο σημείο P που αντιστοιχεί στο δοσμένο προσανατολ-
σμό $\underset{\sim}{n}$ της ΔA το διάνυσμα: $\underset{\sim}{S}_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \underset{\sim}{F}}{\Delta A}$ (δύναμη/επιφάνεια)

<u>Μονάδα μέτρησης της τάσης</u>: $1N/m^2 = 1Pa$ (Pascal). και τα παράγωγά του.

Το διάνυσμα τάσης μπορεί να αναλυθεί σε μια συνιστώσα $\underset{\sim}{\sigma}_n$ κάθετη στην ΔA που ονομάζεται ορθή τάση και μια $\underset{\sim}{\tau}_n$ επάνω στην ΔA που ονομάζεται διατμητική τάση.



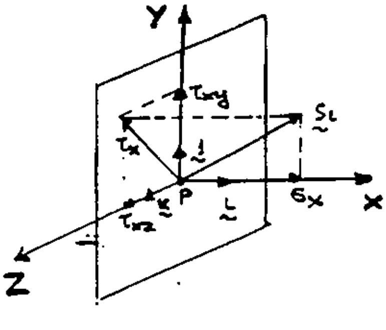
$$\underset{\sim}{S}_n = \underset{\sim}{\sigma}_n + \underset{\sim}{\tau}_n = \sigma_n \cdot \underset{\sim}{n} + \tau_n \cdot \underset{\sim}{t}$$

$$\sigma_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A}, \quad \tau_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A}$$

$$\Delta \underset{\sim}{F} = \Delta F_n \cdot \underset{\sim}{n} + \Delta F_t \cdot \underset{\sim}{t}$$

ώστε το διάνυσμα της τάσης σ' ένα σημείο εξαρτάται όχι μόνο από την θέση του σημείου μέσα στο σώμα αλλά και από τον προσανατολισμό της απειροστής επιφάνεια ΔA που θεωρούμε γύρω από το σημείο. Αποδεικνύεται όμως ότι αρκεί να γνωρίζει κανείς την τάση για τρεις διαφορετικούς προσανατολισμούς $\underset{\sim}{n}_1, \underset{\sim}{n}_2, \underset{\sim}{n}_3$ ώστε να μπορεί να βρει την τάση σε κάθε άλλο προσανατολισμό.

Έτσι αν πάρουμε σαν $\underset{\sim}{n}_1, \underset{\sim}{n}_2, \underset{\sim}{n}_3$ τα μοναδιαία $\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}, \underset{\sim}{k}$ ενός καρτεσιανού συστήματος oxyz δηλ. θεωρήσουμε στοιχειώδη επίπεδα κάθετα στους άξονες ox, oy, oz αντίστοιχα, η εντατική κατάσταση στο P θα περιγράφεται πλήρως με τις τάσεις $\underset{\sim}{S}_i, \underset{\sim}{S}_j$. Αναλύουμε αυτές στις ορθές και διατμητικές τους συνιστώσες στα αντίστοιχα επίπεδα. Τις συνιστώσες αυτές συμβολίζουμε με δύο δείκτες: ο πρώτος δείκτης δηλώνει τον άξονα τον κάθετο στο επίπεδο, ο δεύτερος δείκτης δηλώνει την διεύθυνση της συνιστώσας. π.χ η σ_{xx} θα είναι η ορθή τάση στο επίπεδο το κάθετο στο άξονα x (οι ορθές τάσεις συμβολίζονται συνήθως με ένα μόνο δείκτη π.χ σ_x), ενώ η τ_{xy} θα είναι η διατμητική τάση στο ίδιο επίπεδο η παράλληλη με τον άξονα y.



$$\underset{\sim}{S}_i = \sigma_x \cdot \underset{\sim}{i} + \tau_{xy} \cdot \underset{\sim}{j} + \tau_{xz} \underset{\sim}{k}$$

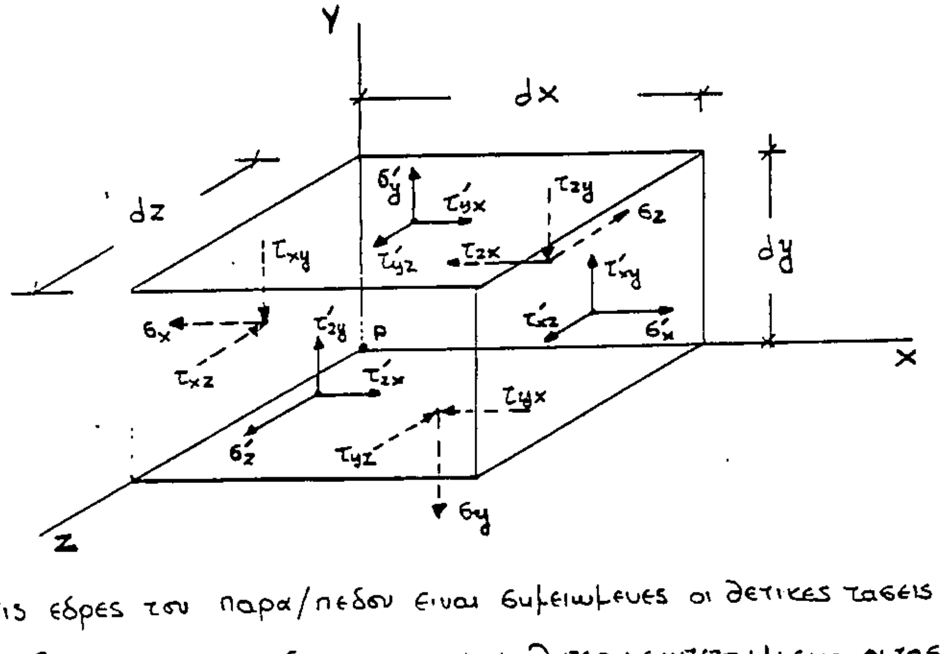
ετσι θα εχουμε:

$$\underset{\sim}{S}_i = \sigma_x \cdot \underset{\sim}{i} + \tau_{xy} \cdot \underset{\sim}{j} + \tau_{xz} \cdot \underset{\sim}{k}$$
$$\underset{\sim}{S}_j = \tau_{yx} \cdot \underset{\sim}{i} + \sigma_y \cdot \underset{\sim}{j} + \tau_{yz} \cdot \underset{\sim}{k} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} \underset{\sim}{S}_i \\ \underset{\sim}{S}_j \\ \underset{\sim}{S}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underset{\sim}{i} \\ \underset{\sim}{j} \\ \underset{\sim}{k} \end{pmatrix}$$
$$\underset{\sim}{S}_k = \tau_{zx} \cdot \underset{\sim}{i} + \tau_{zy} \cdot \underset{\sim}{j} + \sigma_z \cdot \underset{\sim}{k}$$

και η εντατικη κατασταση στο σημειο P θα περιγραφεται απο τις εννεα συνιστωσες των $\underset{\sim}{S}_i, \underset{\sim}{S}_j, \underset{\sim}{S}_k$ που διατασσονται στο παραπανω μητρωο (Μητρωο Τασης) για τις συνιστωσες αυτες γινεται η εξης <u>Παραδοχη προσημων</u>: εχουν τα ιδια προσημα σ' οποια παρεια της διατομης κι αν ενεργουν και ειναι θετικες οταν στην παρεια με διανυσμα προσανατολισμου το θετικο μοναδιαιο του αξονα εχουν την διευθυνση των αξονων ή στην αλλη παρεια εχουν την αντιθετη διευθυνση.

2.1. Συμμετρια Μητρωου Τασης.

Αποκοπτουμε απο το σωμα ενα στοιχειωδες παραλληλεπιπεδο γυρω απο το σημειο P με εδρες καθετες στους αξονες x, y, z.



στις εδρες του παρα/πεδου ειναι σημειωμενες οι θετικες τασεις συμφωνα με την παραπανω παραδοχη. Ετσι στις εδρες με την μεγαλυτερη συντεταγμενη οι τασεις εχουν τις θετικες φορες των αξονων (οι τασεις με τους τονους), ενω στις απεναντι εδρες τις αρνητικες.

οι τασεις $\sigma_x, \tau_{xy}, \ldots\ldots, \sigma_z$ αναφερονται στο σημειο P ενω στις απεναντι εδρες θα δ φερουν κατα απειροστες ποσοτητες. π.χ θα ειναι:

$$\sigma_x' = \sigma_x + d\sigma_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \cdot \cancel{dy} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \cdot \cancel{dz} = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx$$

$$\tau_{xy}' = \tau_{xy} + d\tau_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \cdot dx$$

$$\tau_{xz}' = \tau_{xz} + d\tau_{xz} = \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \cdot dx$$

αναλογοι τυποι ισχυουν για τις αλλες εδρες.

η ισορροπια του παρ/πεδου απαιτει τον μηδενισμο του αθροισματος των ροπων των δυναμεων που ενεργουν σ'αυτο ως προς οποιοδηποτε σημειο.

παιρνοντας ροπες ως προς το κεντρο βαρους C του παρα/πεδου θα πρεπει:

$$\underset{\sim}{\Sigma M_c} = \Sigma M_x \cdot \underset{\sim}{i} + \Sigma M_y \cdot \underset{\sim}{j} + \Sigma M_z \underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{0}$$

η $\Sigma M_z = 0$ δινει: $\tau_{xy} \cdot dy dz \cdot \frac{dx}{2} + \tau_{xy}' \cdot dy dz \frac{dx}{2} - \tau_{yx}' \cdot dx dz \frac{dy}{2} - \tau_{yx} \cdot dx dz \cdot \frac{dy}{2} = 0$

και χρησιμοποιωντας τις εκφρασεις για τις τ_{xy}' και τ_{yx}' $\rightarrow$

$$\tau_{xy} - \tau_{yx} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \cdot dx - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot dy = 0$$ παιρνοντας το οριο καθως $dx, dy \rightarrow 0$

$\Rightarrow$ $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ παρομοια οι δυο αλλες συνθηκες $\Sigma M_y = 0$, $\Sigma M_x = 0$ δινουν:
$\tau_{xz} = \tau_{zx}$ και $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ δηλ. το μητρωο τασης ειναι συμμετρικο.

τα παραπανω μπορει να διατυπωσει καποιος απλα ως εξης:

οι διατμητικες τασεις που ειναι καθετες στην ιδια ακμη του παρ/πεδου ειναι ισες και ή και οι δυο κατευθυνονται προς αυτην ή και οι δυο απομακρυνονται απ' αυτην.

2.2 Εξισωσεις Ισορροπιας:

Συνθηκες μηδενισμου της συνισταμενης δυναμης του παραπανω παρα/πιπεδου

$$\underset{\sim}{\Sigma F} = \Sigma F_x \underset{\sim}{i} + \Sigma F_y \underset{\sim}{j} + \Sigma F_z \underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{0} \rightarrow \Sigma F_x = 0, \ \Sigma F_y = 0, \ \Sigma F_z = 0.$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow (\sigma_x' - \sigma_x) \cdot dy \cdot dz + (\tau_{yx}' - \tau_{yx}) dx \cdot dz + (\tau_{zx}' - \tau_{zx}) \cdot dx dy = 0 \rightarrow$$

παρομοια οι αλλες δυο $\rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{\underline{Εξισωσεις ισορροπιας}}$$

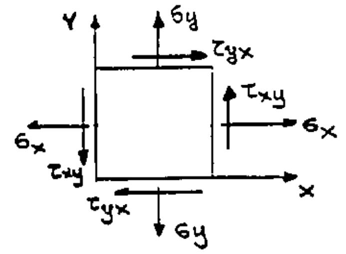
3. ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΝΤΑΣΗ

Μια κατασταση εντασης θεωρειται επιπεδη οταν υπαρχει ενα επιπεδο πανω στο οποιο οι ορθες και οι διατμητικες τασεις μηδενιζονται.

π.χ αν το επιπεδο αυτο ειναι καθετο στον αξονα z θα εχουμε:

$\sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{zx}=\tau_{yz}=\tau_{zy}=0$. Ετσι οι συνιστωσες που καθοριζουν την ενταση ειναι μονο οι σ_x, $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ και η σ_y.

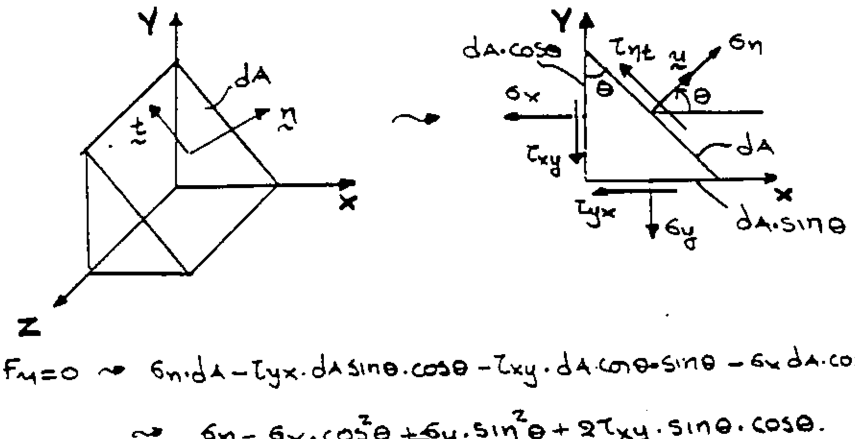
Μια τετοια κατασταση πραγματοποιειται σε λεπτες πλακες που φορτιζο' με δυναμεις που βρισκονται στο μεσο επιπεδο τους.



3.1. Μετασχηματισμος Τασεων – Κυριες Τασεις (επιπεδο προβλημα)

Το προβλημα που θα εξετασουμε ειναι το εξης: εαν γνωριζουμε τις τασεις σ_x, σ_y, τ_{xy} σ' ενα σημειο, να προσδιορισουμε τις σ_n, τ_{nt} σ' ενα επιπεδο με μοναδ καθετο διανυσμα το $\underset{\sim}{n}$.

Απομονωνουμε γυρω απο το υπ' οψη σημειο ενα απειροστο πρισμα του οποιου τεσσερεις καθετες εδρες ειναι παραλληλες με τα συντεταγμενα επιπεδα κ η πεμπτη εχει καθετο διανυσμα το $\underset{\sim}{n}$. Στις εδρες που ειναι καθετες στο αξονα Z οι τασεις ειναι μηδενικες (επιπεδη ενταση):



$\Sigma F_n=0 \rightsquigarrow \sigma_n \cdot dA-\tau_{yx}\cdot dA\sin\theta\cdot\cos\theta-\tau_{xy}\cdot dA\cos\theta\cdot\sin\theta-\sigma_x dA\cdot\cos\theta\cdot\cos\theta-\sigma_y dA\cdot\sin\theta\cdot\sin\theta=0 \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \underline{\sigma_n=\sigma_x\cdot\cos^2\theta+\sigma_y\cdot\sin^2\theta+2\tau_{xy}\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta.}$$

$\Sigma F_t=0 \rightsquigarrow \tau_{nt}\cdot dA-\tau_{xy}\cdot dA\cos\theta\cdot\cos\theta+\tau_{yx}\cdot dA\sin\theta\sin\theta+\sigma_x dA\cos\theta\sin\theta-\sigma_y\cdot dA\sin\theta\cdot\cos\theta=0 \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \underline{\tau_{nt}=-(\sigma_x-\sigma_y)\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta+\tau_{xy}\cdot(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}$$

οι παραπάνω σχέσεις γράφονται και:

$$\sigma_\eta = \frac{\sigma_x(1+\cos 2\theta)}{2} + \frac{\sigma_y(1-\cos 2\theta)}{2} + \tau_{xy}\cdot\sin 2\theta \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \sigma_\eta = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot\cos 2\theta + \tau_{xy}\cdot\sin 2\theta \quad (1)$$

και $\tau_{\eta t} = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot\sin 2\theta + \tau_{xy}\cdot\cos 2\theta. \quad (2)$

Κυριες Τασεις

Ζητάμε για ποιες γωνίες θ η ορθή τάση σ_η παίρνει ακραίες τιμές.
παραγωγίζοντας την (1) ως προς θ και εξισώνοντας την παράγωγο με μηδέν $\rightsquigarrow$

$$\frac{d\sigma_\eta}{d\theta} = -(\sigma_x-\sigma_y)\cdot\sin 2\theta + 2\tau_{xy}\cdot\cos 2\theta = 0 \rightsquigarrow \tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} \quad (3)$$

από αυτήν βρίσκουμε δυο τιμές της θ, των θ_p και $\theta_p+\frac{\pi}{2}$. Που αντιστοιχούν στην μέγιστη και ελάχιστη τιμή της σ_η. Οι δυο αυτές κάθετες διευθύνσεις λέγονται κυριες διευθύνσεις και οι αντίστοιχες ορθές τάσεις κυριες τάσεις.

από την (3) $\rightsquigarrow$ $\cos 2\theta_p = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot\frac{1}{\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}}$, $\sin 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}}$

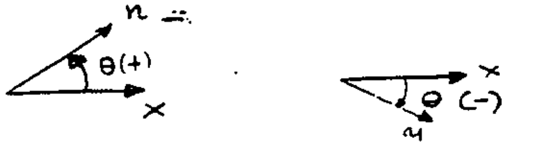
γι' αυτές τις τιμές των $\cos 2\theta_p$, $\sin 2\theta_p$ οι (1) και (2) $\rightsquigarrow$

Κυριες Τάσεις: $\sigma_{p_1,p_2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$ όπου $\sigma_{p_1}=\max\sigma_\eta$ και $\sigma_{p_2}=\min\sigma_\eta$

Ενώ η (2) $\rightsquigarrow$ $\tau_{\eta t}=0$ δηλ. η διατμητική τάση μηδενίζεται στα επίπεδα των κυριων τάσεων (κυρια επίπεδα).

Παρατηρούμε ότι $\sigma_{p_1}+\sigma_{p_2}=\sigma_x+\sigma_y=\sigma_{x'}+\sigma_{y'}$ όπου x',y' κάποιο άλλο σύστημα αναφ
δηλ. το άθροισμα των ορθών τάσεων του μητρώου τάσης είναι αναλλοίωτο μέγεθος

<u>Σημείωση</u>: η γωνία θ θεωρείται θετική όταν είναι αριστερόστροφη



Μεγιστη Διατμητικη Τaση τ_{nt}.

Παραγωγιζοντας την (2) ως προς θ και εξισωνοντας την παραγωγο με μηδεν ⇝

$$\frac{d\tau_{nt}}{d\theta} = -(\sigma_x-\sigma_y)\cdot\cos 2\theta - 2\tau_{xy}\cdot\sin 2\theta \rightsquigarrow \tan 2\theta = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (4)$$

απ' οπου παιρνουμε τις γωνιες θ_τ και $\theta_\tau+\frac{\pi}{2}$ οπου εμφανιζεται η μεγιστη και ελαχιστη (ισες κατα απολυτη τιμη) διατμητικη τασn τ_p

απο τις (3) & (4) ⇝ $0 = \tan 2\theta_\tau + \frac{1}{\tan 2\theta_p} = \frac{\cos 2(\theta_p-\theta_\tau)}{\sin 2\theta_p \cos 2\theta_\tau}$ ⇝

$$\rightsquigarrow \theta_\tau = \theta_p \pm \frac{\pi}{4}$$

γι' αυτη την γωνια βρισκουμε $\tau_p = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} = \pm\frac{(\sigma_{p_1}-\sigma_{p_2})}{2}$

και $\max \tau_{nt} = |\tau_p| = \frac{\sigma_{p_1}-\sigma_{p_2}}{2}$ (μεγιστη διατμητικη τaση στο επιπεδο).

<u>**Παρατηρηση**</u>: η γωνια μεταξυ κυριων επιπεδων και επιπεδου μεγιστης κυρια τασης ειναι $\pm\frac{\pi}{4}$.

3.2 Κυκλος του MOHR.

ο κυκλος του Mohr ειναι μια γραφικη μεθοδος προσδιορισμου των κυριων τασεων και διευθυνσεων καθως και των συνιστωσων σ_n, τ_{nt} της τασης σε τομη με καθετο μοναδιαιο διανυσμα το $\underline{n}$, οταν γνωριζουμε τις σ_x, και τ_{xy}.

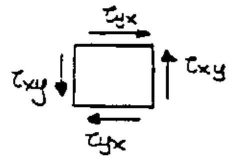
Ειδαμε οτι ισχυουν οι σχεσεις:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot\cos 2\theta + \tau_{xy}\cdot\sin 2\theta \\ \tau_{nt} &= -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot\sin 2\theta + \tau_{xy}\cdot\cos 2\theta \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow$$

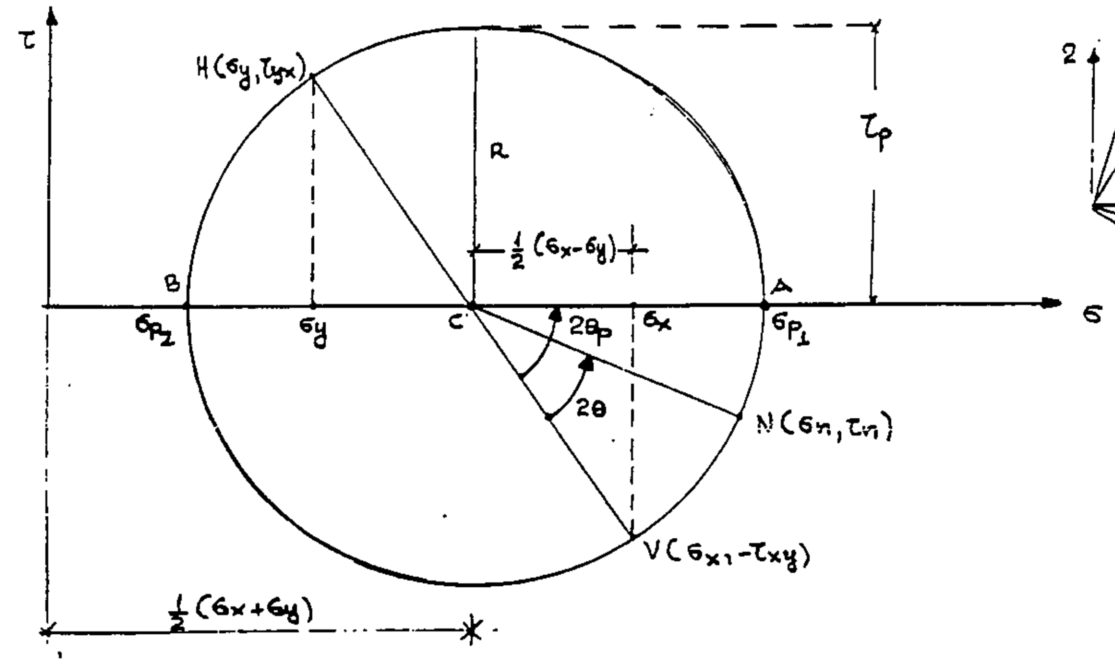
$$\rightsquigarrow \left(\sigma_n - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{nt}^2 = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2.$$

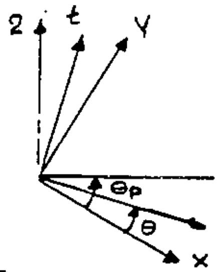
ετσι αν θεωρησουμε στο επιπεδο (σ,τ) τα σημεια με συντεταγμενες σ_n, τ_n αυτα θα βρισκονται στον κυκλο με κεντρο το σημειο $C\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}, 0\right)$ και ακτινα $R=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$. ο κυκλος αυτος ειναι ο κυκλος του MOHR.

για την κατασκευη του κυκλου του MOHR γινεται η εξης παραδοχη προσημων για τις διατμητικες τασεις: ειναι θετικες οταν δινουν δεξιοστροφο ζευγος ↻ και αρνητικες οταν δινουν αριστεροστροφο ↺ :



: οταν η τ_{xy} ειναι θετικη με την συνηθη συμβαση θα ειναι αρνητικη στο κυκλο του MOHR. ενω η τ_{yx} ακολουθει την συνηθη συμβαση





Η διαδικασια κατασκευης του κυκλου του MOHR ειναι η εξης: στο επιπεδο (σ,τ) τοποθετουμε τα σημεια $V(\sigma_x,-\tau_{xy})$, $H(\sigma_y,\tau_{yx})$. με κεντρο το $C\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}, 0\right)$ και ακτινα $CH=CV$ γραφουμε τον κυκλο. αυτος τεμνει τον αξονα σ στις κυριες τασεις σ_{p_1}, σ_{p_2}. απο την γεωμετρια σχηματος βλεπουμε οτι $\tan(\widehat{CV,CA}) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$ → $(\widehat{CV,CA}) = 2\theta_p$. επισης $\max\tau=\tau_p$. η ακτινα CV αντιστοιχει στον αξονα x και γενικα η CN οπου $N(\sigma_n,\tau_{nt})$ αντιστοιχει στον αξονα n. και $(\widehat{CV,CN})=2\theta$ οπου $\theta=(\widehat{x,n})$. επομενως αν θελουμε να βρουμε τις σ_n, τ_{nt} για καποια θ φερνουμε την CN ωστε $(\widehat{CV,CN})=2\theta$, τοτε οι συντεταγμενες του N θα ειναι η σ_n και τ_{nt}

Παραδείγματα

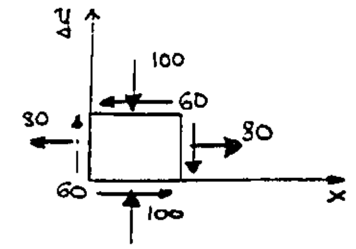
■ Για μια επίπεδη εντατική κατάσταση δίνονται: $\sigma_x = 80\ MPa$, $\sigma_y = -100\ MPa$, $\tau_{xy} = -60\ MPa$.
Ζητούνται οι κύριες τάσεις $\sigma_{p_1}, \sigma_{p_2}$ και η γωνία κυρίας διευθύνσεως θ_p

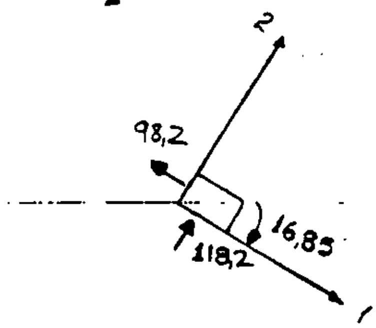
$$\sigma_{p_1,p_2} = \frac{80-100}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{80+100}{2}\right)^2 + (-60)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{p_1} = 98{,}2\ MPa$$

$$\sigma_{p_2} = -118{,}2\ MPa$$

$$\theta_p = \frac{1}{2}\,\text{τοξεφ}\,\frac{2\cdot(-60)}{80+100} = -16{,}85^\circ$$





■ Δίνονται $\sigma_x = 20\ MPa$, $\sigma_y = -80\ MPa$, $\sigma_{p_1} = 100\ MPa$.
Ζητούνται τ_{xy}, θ_p.

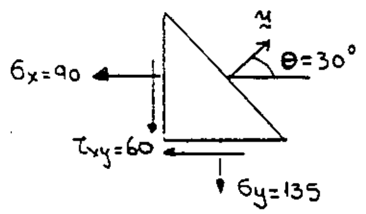
είναι $$\sigma_{p_1} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 = \frac{20-80}{2} + \sqrt{\left(\frac{20+80}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \pm 120\ MPa$$

$$\Rightarrow \theta_p = \frac{1}{2}\,\text{τοξεφ}\,\frac{2(\pm 120)}{20+80} = \pm 33{,}7^\circ$$

■ Δίνεται η επίπεδη εντατική κατάσταση του σχήματος. Να βρεθούν οι τάσεις στην τομή με κάθετο διάνυσμα το n, καθώς και οι κύριες τάσεις. Να γίνει ο κύκλος του MOHR.



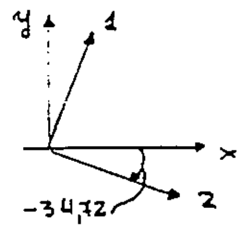
$$\sigma_u = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot\cos 2\theta + \tau_{xy}\cdot\sin 2\theta = \frac{90+135}{2} + \frac{90-135}{2}\cdot\cos 60 + 60\cdot\sin 60 = 153{,}21$$

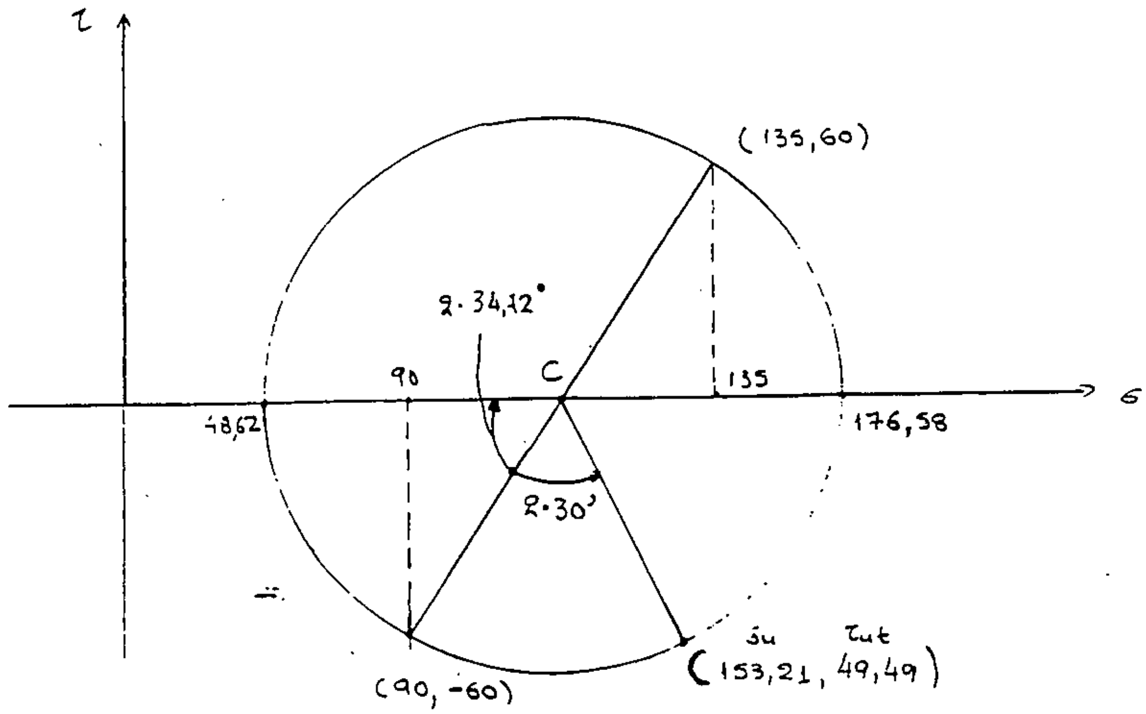
$$\tau_{ut} = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot\sin 2\theta + \tau_{xy}\cdot\cos 2\theta = -\frac{90-135}{2}\cdot\sin 60 + 60\cdot\cos 60 = 49{,}49$$

$$\sigma_{p_1,p_2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{90+135}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{90-135}{2}\right)^2 + 60^2}$$

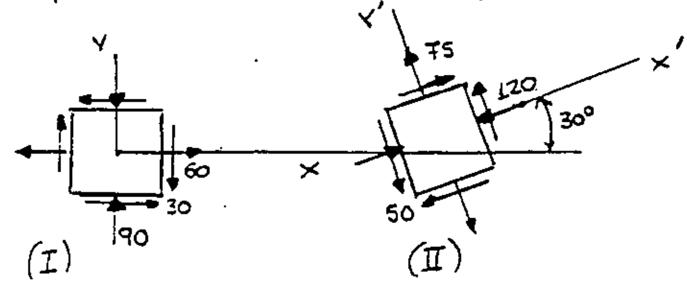
$\rightarrow \sigma_{p_1} = 176{,}58 \quad , \quad \sigma_{p_2} = 48{,}62$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} = \frac{2\cdot 60}{90-135} \rightsquigarrow \theta_p = -34{,}72^\circ$$





■ Να βρεθεί η εντατική κατάσταση που θα προκύψει από την επαλληλία των δύο εντατικών καταστάσεων I και II για τους προσανατολισμούς των αξόνων x, στη συνέχεια να βρεθούν οι κύριες τάσεις σ1 και σ2 και ο προσανατολισμός. Τα παραπάνω να γίνουν και γραφικώς.



Για να κάνουμε την επαλληλία των I) και II) μετασχηματίζουμε την (II) στο σύστημα xy που προκύπτει από το x'x' με στροφή $\theta=-30°$:

$$\sigma_x^{II} = \sigma_{x'}^{II}\cdot\cos^2\theta + \sigma_{y'}^{II}\cdot\sin^2\theta + 2\tau_{x'y'}^{II}\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta$$

$$\sigma_y^{II} = \sigma_{y'}^{II}\cdot\cos^2\theta + \sigma_{x'}^{II}\cdot\sin^2\theta - 2\tau_{x'y'}^{II}\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta$$

$$\tau_{xy}^{II} = -\frac{\sigma_{x'}^{II}-\sigma_{y'}^{II}}{2}\cdot\sin2\theta + \tau_{x'y'}^{II}\cdot\cos2\theta$$

$$\rightsquigarrow \sigma_x^{II} = -120\cos^2(-30)+75\cdot\sin^2(-30)+2\cdot50\cdot\sin(-30)\cdot(\cos(-30)) = -114,55$$

$$\sigma_y^{II} = 75\cdot\cos^2(-30)-120\cdot\sin^2(-30)-2\cdot50\cdot\sin(-30)\cdot\cos(-30) = 69,55.$$

$$\tau_{xy}^{II} = -\frac{-120-75}{2}\cdot\sin(-60)+50\cdot\cos(-60) = -59,45$$

Επαλληλία (I),(II) $\rightsquigarrow$

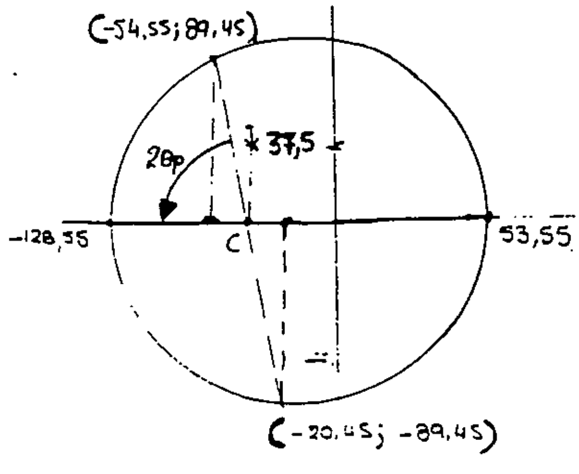
$$\sigma_x = \sigma_x^{I}+\sigma_x^{II} = 60-114,55 = -54,55$$

$$\sigma_y = \sigma_y^{I}+\sigma_y^{II} = -90+69,55 = -20,45$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^{I}+\tau_{xy}^{II} = -30-59,45 = -89,45$$

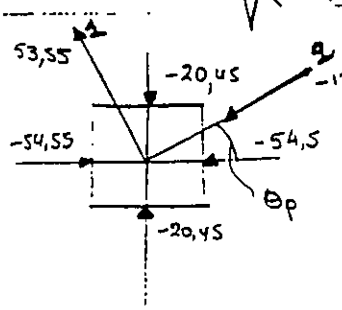
Κύριες τάσεις: $$\sigma_{P_1,P_2} = \frac{-54,55-20,45}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-54,55+20,45}{2}\right)^2+(-89,45)^2} \rightsquigarrow \sigma_{P_1} = 53,55 \quad \sigma_{P_2} = -128,55$$

γωνία κυρίων αξόνων: $$\tan2\theta_p = \frac{-2\cdot89,45}{-54,55+20,45} = 5,245$$



$$C: \frac{-54,55-20,45}{2} = -37,5$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{-54,55+20,45}{2}\right)^2+89,45^2} =$$



4. ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ

Τα υλικα σημεια ενος σωματος με την επιδραση εξωτερικων δυναμεων μετατοπιζονται αυτο εχει γενικα σαν αποτελεσμα την αλλαγη της θεσης (μετακινηση) και της μορφης (παραμορφωση) του σωματος.

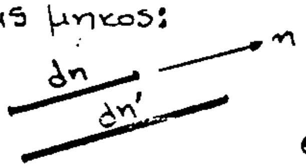
παραμορφωση σημαινει μεταβολη του μηκους των υλικων ινων (ση). ινων που αποτελουνται απο υλικα σημεια του σωματος) ειτε μεταβολη των γωνιων τους

για να εχουμε ενα μετρο της παραμορφωσης οριζουμε:

την αξονικη παραμορφωση ϵ_n

μιας απειροστης υλικης ινας που εχει την κατευθυνση $\underset{\sim}{n}$, σαν το πηλικο της μεταβολης του μηκους της προς το αρχικο της μηκος:

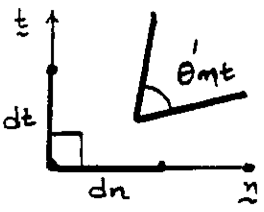
→ το ϵ_n ειναι αδιαστατο μεγεθος (μηκος/μηκος)



$$\epsilon_n = \frac{dn'-dn}{dn} \to dn' = (1+\epsilon_n).$$

και την διατμητικη παραμορφωση γ_{nt}:

σαν την μεταβολη της αρχικα ορθης γωνιας δυο απειροστων υλικων ινων που ειχαν τις κατευθυνσεις $\underset{\sim}{n}$ και $\underset{\sim}{t}$ ($\underset{\sim}{n} \perp \underset{\sim}{t}$):



$$\gamma_{nt} = \frac{\pi}{2} - \theta'_{nt}$$ (οι γωνιες σε ακτινια).

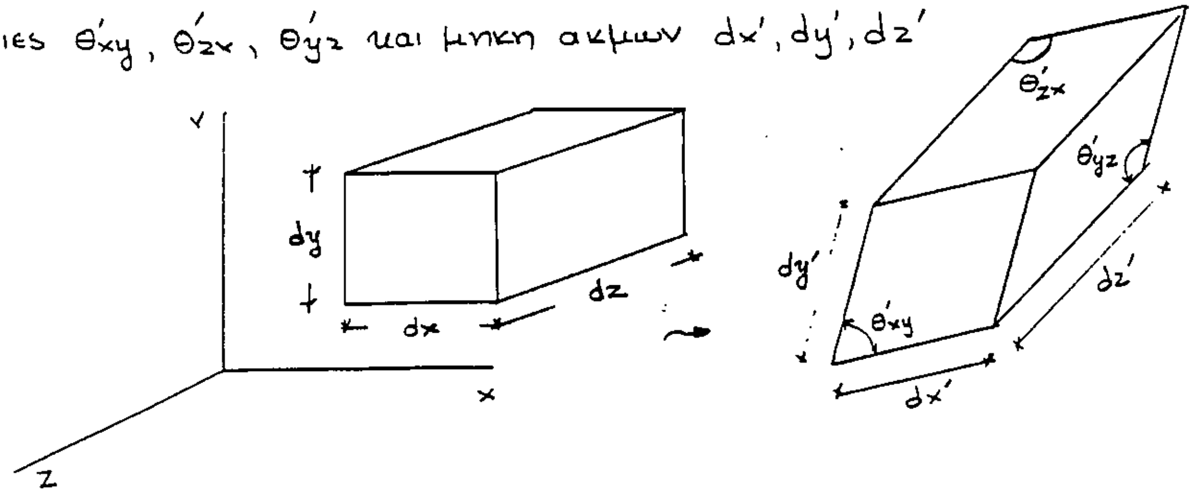
παραδοχη προσημων: ϵ_n θετικο για επιμηκυνση της ινας

γ_{nt} θετικο για ελαττωση της αρχικης γωνιας ($\theta'_{nt} < \frac{\pi}{2}$)

4.1 Εννοια Παραμορφωσης σε Σημειο.

Γυρω απο ενα σημειο P θεωρουμε πριν την παραμορφωση ενα απειροστο ορθο- γωνιο παρα/πιπεδο με ακμες παραλληλες με τους αξονες x, y, z ενος καρτεσιανο συστηματος και μηκη ακμων dx, dy, dz.

Μετα την παραμορφωση το ορθογωνιο παρα/πιπεδο γινεται ενα πλαγιογωνιο γωνιες θ'_{xy}, θ'_{zx}, θ'_{yz} και μηκη ακμων dx', dy', dz'



Για να περιγραψουμε την παραμορφωση στην γειτονια του σημειου P οριζουμε το μ- τρωο Παραμορφωσης:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix}$$

τα στοιχεια του οποιου οριζονται ως εξης: τα διαγωνια στοιχεια ειναι οι αξονικ παραμορφωσεις των ινων dx, dy, dz αντιστοιχα και τα διαγωνια το μισο των διατμ τους παραμορφωσεων, δηλ. $\epsilon_x = \frac{dx'-dx}{dx} \rightarrow dx' = (1+\epsilon_x)dx$ και αναλογα οριζον τα ϵ_y, ϵ_z, $2\epsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \theta'_{xy}$ και αναλογα για τα αλλα στοιχεια. →

το μητρωο παραμορφωσης ειναι συμμετρικο δηλ $\epsilon_{xy}=\epsilon_{yx}$, $\epsilon_{xz}=\epsilon_{zx}$, $\epsilon_{yz}=\epsilon$ αποδεικνυεται οτι το μητρωο αυτο περιγραφει πληρως την παραμορφωση στη τονια του P. δηλ αν γνωριζουμε τα στοιχεια του αναφορικα μ' ενα συστημ αξονων, μπορουμε να υπολογισουμε την αξονικη παραμορφωση καθε απειροστης ι που περνα απο το P, οπως επισης και τη μεταβολη της γωνιας δυο ινων π περνουν απο το σημειο αυτο.

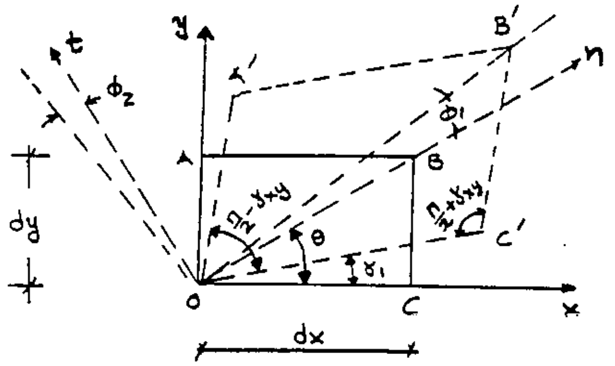
4.2 Επίπεδη Παραμόρφωση.

επίπεδη παραμόρφωση στο επίπεδο xy λέγεται εκείνη που:

$\epsilon_z=\epsilon_{xz}=\epsilon_{zx}=\epsilon_{yz}=\epsilon_{zy}=0$

ας εξετάσουμε το εξής πρόβλημα:

εάν γνωρίζουμε τα ϵ_x, ϵ_{xy}, ϵ_y να προσδιορίσουμε τα ϵ_n, ϵ_{nt} αναφορικά μ' ένα νέο σύστημα αξόνων n, t. στραμμένο κατά γωνία θ σε σχέση με το x,y



$\gamma_{xy}=2\epsilon_{xy}$

$\gamma_{nt}=2\epsilon_{nt}$

θεωρούμε το ορθογώνιο OABC με πλευρές dx, dy ώστε η διαγώνιος του OB=dn να είναι στη κατεύθυνση n. το ορθογώνιο αυτό παραμορφώνεται στο παρα/πίπεδο OA'B'C' με πλευρές $OC'=(1+\epsilon_x)\cdot dx$, $B'C'=(1+\epsilon_y)dy$ ενώ η OB γίνεται $OB'=(1+\epsilon_n)\cdot dn$

από τον νόμο των συνημιτόνων θα έχουμε:

$(OB')^2=(OC')^2+(C'B')^2-2(OC')\cdot(C'B')\cdot\cos(\frac{\pi}{2}+\gamma_{xy})$ αντικαθιστώντας με τις πο πάνω εκφράσεις και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $dx=dn\cdot\cos\theta$, $dy=dn\cdot\sin\theta$ ⇝

$$(1+\epsilon_n)^2(dn)^2=(1+\epsilon_x)^2(dn)^2\cos^2\theta+(1+\epsilon_y)^2(dn)^2(\sin^2\theta)+2(dn)^2\sin\theta\cdot\cos\theta(1+\epsilon_x)(1+\epsilon_y)\cdot\sin\gamma_{xy}$$

εάν περιορισθούμε σε μικρές παραμορφώσεις τότε $\epsilon^2 \ll \epsilon$, $\sin\gamma\approx\gamma$ ⇝

$$1+2\epsilon_n=(1+2\epsilon_x)\cos^2\theta+(1+2\epsilon_y)\cdot\sin^2\theta+2\gamma_{xy}\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta \leadsto$$

$$\epsilon_n=\epsilon_x\cdot\cos^2\theta+\epsilon_y\cdot\sin^2\theta+\gamma_{xy}\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta \text{ ή } \underline{\epsilon_n=\frac{\epsilon_x+\epsilon_y}{2}+\frac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}\cdot\cos2\theta+\epsilon_{xy}\cdot\sin2\theta}.$$

Επίσης $\dfrac{(1+\epsilon_n)dn}{\sin(\frac{\pi}{2}+\gamma_{xy})}=\dfrac{(1+\epsilon_y)dy}{\sin(\theta+\phi_1-\gamma_1)}$ (νόμος ημιτόνων).

αλλά $\dfrac{(1+\epsilon_y)\cdot dy}{(1+\epsilon_n)\cdot dn}\approx(1+\epsilon_y-\epsilon_n)\cdot\sin\theta$ (για μικρές παραμορφώσεις).

Και για τον ιδιο λογο $\frac{\sin(\theta+\phi_1-\gamma_1)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\gamma_{xy})} \simeq \sin\theta + (\phi_1-\gamma_1)\cdot\cos\theta$

$\rightsquigarrow (\epsilon_y-\epsilon_n)\cdot\sin\theta = (\phi_1-\gamma_1)\cdot\cos\theta.$

και $\quad \phi_1 = -(\epsilon_x-\epsilon_y)\cdot\sin\theta\cos\theta - \gamma_{xy}\cdot\sin^2\theta + \gamma_1$

$\phi_2 = (\epsilon_x-\epsilon_y)\cdot\sin\theta\cos\theta - \gamma_{xy}\cdot\cos^2\theta + \gamma_1$ (προκυπτει απο τον τυπο της ϕ_1 για $\theta+\frac{\pi}{2}$)

$\gamma_{nt} = \phi_1-\phi_2 \rightsquigarrow \gamma_{nt} = -2(\epsilon_x-\epsilon_y)\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta + \gamma_{xy}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$$\Rightarrow \gamma_{nt} = -(\epsilon_x-\epsilon_y)\cdot\sin 2\theta + \gamma_{xy}\cdot\cos 2\theta$$

$$\kappa \quad \epsilon_{nt} = -\frac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}\cdot\sin 2\theta + \epsilon_{xy}\cdot\cos 2\theta.$$

δηλ οι ιδιοι τυποι μετασχηματισμου που ισχυουν μεταξυ των σ_n, τ_{nt} και $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

Ετσι θα ισχυουν αναλογα οι τυποι για την γωνια των κυριων αξονων:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\epsilon_{xy}}{\epsilon_x-\epsilon_y}$$

Και τις κυριες παραμορφωσεις: $\epsilon_{p_1,p_2} = \frac{\epsilon_x+\epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}\right)^2 + \epsilon_{xy}^2}$

Επισης εντελως αναλογα ισχυουν για τον κυκλο του MOHR για τις παραμορφωσεις, ο οποιος θα εχει κεντρο το σημειο $C\left(\frac{\epsilon_x+\epsilon_y}{2}, 0\right)$ και ακτινα R

$R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}\right)^2 + \epsilon_{xy}^2}$ στο επιπεδο $(\epsilon_n, \epsilon_{nt})$

5. ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΗΣ - ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ / ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ HOOKE

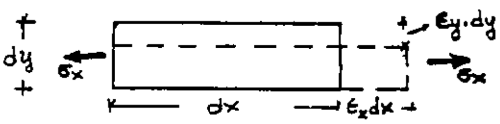
Οι σχεσεις Τασεων Παραμορφωσεων ονομαζονται **καταστατικες εξισωσεις** και εξαρτωνται απο το υλικο. Για γραμμικως **ελαστικα υλικα** ισχυει ο νομος του Hooke

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \left[(1-\nu)\cdot \varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right] \quad , \quad \tau_{xy} = G\cdot\gamma_{xy} = 2G\,\varepsilon_{xy} = \frac{E}{1+\nu}\cdot \varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \left[(1-\nu)\cdot \varepsilon_y + \nu(\varepsilon_z+\varepsilon_x)\right] \quad , \quad \tau_{yz} = G\,\gamma_{yz} = 2G\cdot\varepsilon_{yz} = \frac{E}{1+\nu}\cdot \varepsilon_{yz}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)} \cdot \left[(1-\nu)\cdot \varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\right] \quad , \quad \tau_{zx} = G\cdot\gamma_{zx} = 2G\cdot\varepsilon_{zx} = \frac{E}{1+\nu}\cdot \varepsilon_{zx}$$

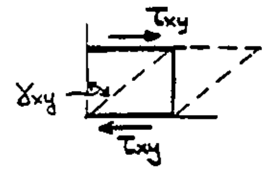
οπου E, ν, G ειναι οι ελαστικες σταθερες του υλικου η ευρεση των οποιων φαινεται στα παραδειγματα απλης εντασης:



Μετρο Ελαστικοτητας (ή Μετρο Young) $E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}$ (N/m^2)

Λογος Poisson ν : $\varepsilon_y = -\nu\cdot\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\cdot\sigma_x$

και ειναι $0 < \nu \leq \frac{1}{2}$



Μετρο ολισθησης **G :** $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$, $G(N/m^2)$.

οι αντιστροφες σχεσεις που δινουν τις παραμορφωσεις συναρτησει των τασεων ειναι:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y+\sigma_z)\right] \quad , \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G}\cdot\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x+\sigma_z)\right] \quad , \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G}\cdot\tau_{yz}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x+\sigma_y)\right] \quad , \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2G}\cdot\tau_{zx}.$$

Για επιπεδη ενταση ή παραμορφωση ισχυουν οι παραπανω τυποι με $\sigma_z=0$ ή $\varepsilon_z=0$ αντιστοιχα, δηλ.

Επιπεδη Ενταση: $\sigma_z=0$	Επιπεδη Παραμορφωση: $\varepsilon_z=0$
$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\,\sigma_y)$	$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\cdot(\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_y)$
$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\,\sigma_x)$	$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\cdot(\varepsilon_y + \nu\,\varepsilon_x)$
$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)$	$\sigma_z = \nu\,(\sigma_x+\sigma_y)$.

Παραδείγματα.

■ Για μια κατάσταση επιπέδης παραμόρφωσης δίνονται:

$\epsilon_x = 1000\mu$. Ζητούνται οι κύριες παραμορφώσεις $\epsilon_{p_1}, \epsilon_{p_2}$

$\epsilon_y = -800\mu$ και η γωνία κυρίας διευθύνσεως θ_p.

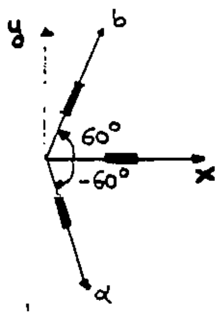
$\gamma_{xy} = -800\mu$

$$\rightsquigarrow \quad \epsilon_{xy} = -\frac{800}{2} = -400 \rightarrow \epsilon_{p_1,p_2} = \frac{1000-800}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1000+800}{2}\right)^2 + (-400)^2} = 100 \pm 98$$

$$\rightarrow \quad \epsilon_{p_1} = 100+985 = 1085\mu \quad , \quad \epsilon_{p_2} = 100-985 = -885\mu.$$

και $\theta_p = \frac{1}{2}\,\text{τοξ tan}\,\frac{-800}{1000+800} = -11{,}98°$

■ Με τρία επιμηκυνσιόμετρα μετρήσαμε τις αξονικές παραμορφώσεις σ' ένα σημείο, στις κατευθύνσεις x, a, και b όπως φαίνεται στο σχήμα. Βρέθηκαν $\epsilon_x = 2000\mu$, $\epsilon_a = 15$ $\epsilon_b = -1300\mu$. Ζητούνται οι κύριες παραμορφώσεις $\epsilon_{p_1}, \epsilon_{p_2}$ στο σημείο αυτό.



για να βρούμε τις κύριες παραμορφώσεις υπολογίζουμε πρώτα τα ϵ_y και ϵ_{xy}.

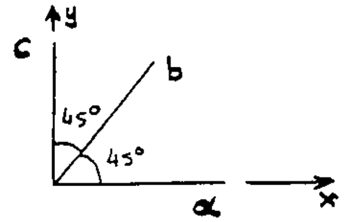
από τους τύπους μετασχηματισμού των παραμορφώσεων θα είναι:

$$\left.\begin{aligned} -1300 &= 2000\cdot\cos^2 60 + \epsilon_y\cdot\sin^2 60 + \epsilon_{xy}\cdot\sin 120 \\ 1500 &= 2000\cdot\cos^2(-60) + \epsilon_y\cdot\sin^2(-60) + \epsilon_{xy}\cdot\sin(-120) \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow$$

$$\rightarrow \quad \epsilon_y = -533\mu \quad , \quad \epsilon_{xy} = -1667\mu.$$

και $\epsilon_{p_1,p_2} = \frac{2000-533}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2000+533}{2}\right)^2 + (-1667)^2} \rightarrow \epsilon_{p_1} = 2788\mu$, $\epsilon_{p_2} = -1320\mu$.

■ Σ' ένα σημείο ενός δίσκου μετρήθηκαν οι επιμηκύνσεις στις διευθύνσεις α, b, c και βρέθηκαν $\varepsilon_a = 2\cdot10^{-4}$, $\varepsilon_b = 3,5\cdot10^{-4}$, $\varepsilon_c = 8\cdot10^{-4}$.
να κατασκευασθεί ο κύκλος του Mohr της παραμόρφωσης στο σημείο αυτό.

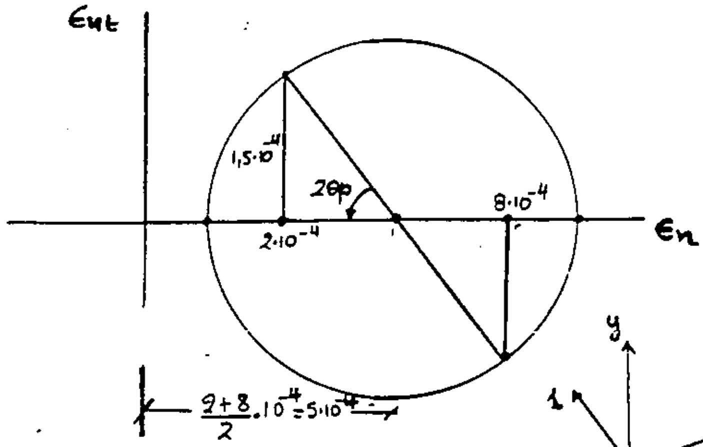


Παίρνουμε σαν άξονες x, y τον a και c αντιστc

$\rightarrow \varepsilon_b = \varepsilon_x \cdot \cos^2 45 + \varepsilon_y \sin^2 45 + \varepsilon_{xy} \cdot \sin 90°$

$\rightarrow 3,5\cdot10^{-4} = 2\cdot10^{-4}\cdot\cos^2 45 + 8\cdot10^{-4}\cdot\sin^2 45 + \varepsilon_{xy}\cdot\sin 90 \rightarrow$

$\rightarrow \varepsilon_{xy} = -1,5\cdot10^{-4}$

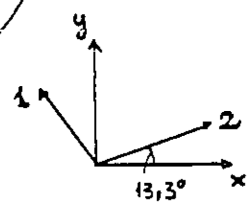


$R = \sqrt{\left(\frac{2-8}{2}\right)^2 + 1,5^2}\cdot10^{-4} = 3,35\cdot10^{-4}$

$\varepsilon_{p_2} = (5 - 3,35)\cdot10^{-4} = 1,65\cdot10^{-4}$

$\varepsilon_{p_1} = (5 + 3,35)\cdot10^{-4} = 8,35\cdot10^{-4}$

$2\theta_p = \tau o\xi \tan \frac{1,5}{5-2} \rightarrow \theta_p = 13,3°$



■ Δίνεται η επίπεδη κατάσταση παραμόρφωσης: $\varepsilon_x = 2000\mu$, $\varepsilon_y = -533\mu$, $\varepsilon_{xy} = -166$
Ζητούνται οι κύριες τάσεις. $\sigma_{p_1}, \sigma_{p_2}$, $E = 70GPa$, $v = 0.33$.
κύριες παραμορφώσεις: $\varepsilon_{p_1,p_2} = \frac{2000-533}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2000+533}{2}\right)^2 + (-1667)^2}$

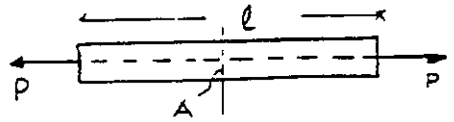
$\rightarrow \varepsilon_{p_1} = 2788\mu$, $\varepsilon_{p_2} = -1320\mu$.

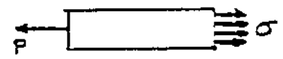
από τον νόμο του Hooke $\rightarrow \sigma_{p_1} = \frac{70\cdot10^9}{1-0,33^2}\left[2788 + 0.33(-1320)\right]\cdot10^{-6} = 184,8\cdot10^6\frac{N}{m^2} = 184$

$\sigma_{p_2} = \frac{70\cdot10^9}{1-0.33^2}\left[-1320 + 0.33(2788)\right]\cdot10^{-6} = -31,4\cdot10^6\frac{N}{m^2} = -31,4$

6. ΑΞΟΝΙΚΗ ΕΝΤΑΣΗ

Εμφανίζεται στην περίπτωση λεπτών ράβδων που φορτίζονται με δυνάμεις κατά την διεύθυνση του άξονα τους. (π.χ ράβδοι δικτυωμάτων).





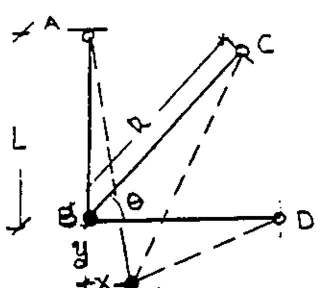
στην περίπτωση αυτή δεχόμαστε ομοιόμορφη κατανομή των τάσεων σε μια διατομή της ράβδου → $\sigma = \frac{P}{A}$ όπου A το εμβαδό της διατομής.

Επομένως $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{A\cdot E}$, αλλά $\varepsilon = \frac{\delta\ell}{\ell} \rightarrow \delta\ell = \frac{P\cdot\ell}{EA}$

6.1 Υπερστατικά Συστήματα σε Αξονική Ένταση.

ένα σύστημα λέγεται ισοστατικό όταν για τον προσδιορισμό των αγνώστων αρκούν οι εξισώσεις ισορροπίας. Όταν όμως οι άγνωστοι είναι περισσότεροι το σύστημα λέγεται υπερστατικό και τότε για τον υπολογισμό των αγνώστων χρειάζεται παίρνουμε υπ' όψη μας και τις παραμορφώσεις του συστήματος.
οι πρόσθετες συνθήκες προκύπτουν από την απαίτηση οι παραμορφώσεις να είναι τέτοιες ώστε να μην καταλύεται η συνέχεια του συστήματος, και ονομάζονται συνθήκες συμβιβαστού.

Παράδειγμα: Σύστημα τριών ράβδων.



οι τρεις ράβδοι AB, CB, DB συντρέχουν στον κόμβο B.
ο κόμβος παρέχει δύο εξισώσεις ισορροπίας ενώ οι άγνωστοι είναι οι τρεις δυνάμεις των ράβδων.
Η συνθήκη συμβιβαστού θα προκύψει από την απαίτηση οι παραμορφώσεις να είναι τέτοιες ώστε οι ράβδοι να εξακολουθούν να συντρέχουν σε ένα σημείο B'.

τότε η παραμόρφωση της ράβδου AB θα είναι $\delta\ell_{AB} = \sqrt{(L+y)^2 + x^2} - L \rightarrow$

→ $\delta^2_{\ell_{AB}} + 2L\delta\ell_{AB} + L^2 = L^2 + 2Ly + y^2 + x^2$

αν περιορίσουμε σε μικρές μετατοπίσεις → $x^2, y^2, \delta\ell^2 \approx 0$.

→ $\delta\ell_{AB} = y$. Παρόμοια $\delta\ell_{BD} = x$ (*).

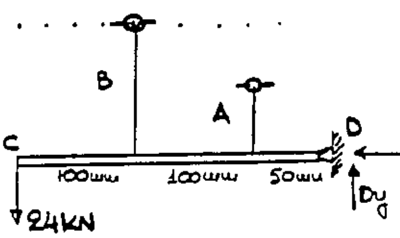
$$\delta\ell_{BC} = \sqrt{(R\cdot\cos\theta - x)^2 + (R\cdot\sin\theta + y)^2} - R$$

→ $\delta\ell_{BC}^2 + 2R\,\delta\ell_{BC} + R^2 = R^2\cos^2\theta - 2Rx\cos\theta + x^2 + R^2\sin^2\theta + 2Ry\sin\theta + y^2$

απαλείφοντας τους δευτεροβάθμιους απειροστούς όρους →

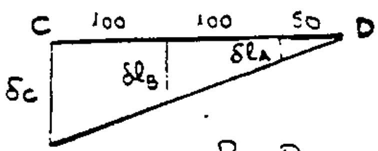
$\delta\ell_{BC} \simeq y\cdot\sin\theta - x\cdot\cos\theta \overset{(*)}{\rightarrow} \underline{\delta\ell_{BC} = \delta\ell_{AB}\cdot\sin\theta - \delta\ell_{BD}\cdot\cos\theta}$ αυτή είναι η ζητούμενη συνθήκη συμβιβαστού. Εφοδιασμένος τώρα κάποιος τις παραμορφώσεις των ράβδων με τις δυνάμεις τους θα έχει γι' αυτές τρεις συνθήκες: συμβιβαστού + ισορροπίας κόμβου.

■ **Παράδειγμα.**



Η ακάμπτη δοκός CD στηρίζεται με άρθρωση στο D και δύο ράβδους A και B. Ζητούνται οι τάσεις σ_A, σ_B των ράβδων και η μετατόπιση δ_C του σημείου C. Δίνονται: $E_A = 200\,GPa$, $A_A = 150\,mm^2$, $E_B = 100\,GPa$, $A_B =$

__Λύση.__ Για τη δοκό έχουμε τρεις εξισώσεις ισορροπίας π.χ. $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_D = 0$ ενώ άγνωστοι είναι τέσσερις οι P_A, P_B, D_x, D_y. Η επιπλέον συνθήκη προκύπτει από το γεγονός ότι η δοκός CD παραμένει ακάμπτη, δηλ. ευθύγραμμη.



: $\dfrac{\delta\ell_B}{150} = \dfrac{\delta\ell_A}{50}$ → $\delta\ell_B = 3\delta\ell_A$. →

→ $\dfrac{P_B\cdot\ell_B}{A_B\cdot E_B} = 3\cdot\dfrac{P_A\cdot\ell_A}{A_A\cdot E_A}$ → $\dfrac{P_B\cdot 400\cdot 10^{-3}}{200\cdot 10^{-6}\cdot 100\cdot 10^9} = \dfrac{3P_A\cdot 200\cdot 10^{-3}}{150\cdot 10^{-6}\cdot 200\cdot 10^9}$

→ $P_A = P_B$

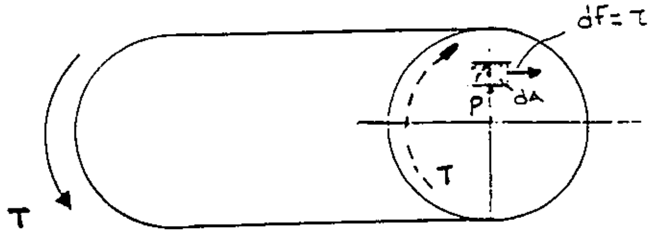
$\left.\Sigma M_D = 0 \rightarrow P_A\cdot 50 + P_B\cdot 150 - 24\cdot 250 = 0\right\}$ → $P_A = P_B = 30\,KN$. → $\sigma_A = \dfrac{P_A}{A_A} = \dfrac{30\cdot 10^3}{150\cdot 10^{-6}} = 200\cdot 10^6\,Pa$
$= 200\,MPa$

$\sigma_B = \dfrac{P_B}{A_B} = \dfrac{30\cdot 10^3}{200\cdot 10^{-6}} = 150\cdot 10^6\,Pa = 150\,MPa$

$\dfrac{\delta_C}{250} = \dfrac{\delta\ell_B}{150}$ → $\delta_C = \dfrac{5}{3}\cdot\delta\ell_B = \dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{P_B\cdot\ell_B}{A_B\,E_B} = \dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{30\cdot 10^3\cdot 400\cdot 10^{-3}}{200\cdot 10^{-6}\cdot 100\cdot 10^9} = 10^{-3}\,m = 1\,mm$.

7. ΣΤΡΕΨΗ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΩΝ ΡΑΒΔΩΝ

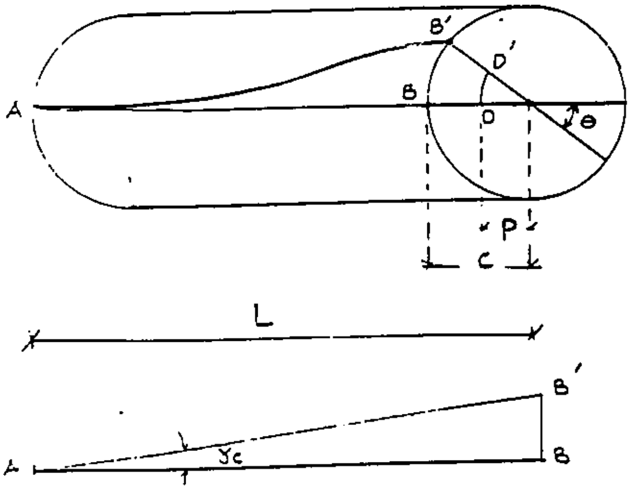
Εστω μια κυλινδρικη ραβδος που φορτιζεται με διατμητικα φορτια διανεμημε-
να ως δυο ακραιες διατομες της. Αν τα φορτια αυτα εχουν ισοδυναμο-
μενη ενα ζευγος T επανω σε καθε διατομη - ισα και αντιθετα στις δυο δια-
τομες - λεμε οτι η ραβδος καταπονειται σε στρεψη.



$$T = \int_A \rho \cdot \tau \cdot dA$$

Στρεπτικη Διατμητικη Παραμορφωση.

Γινεται η βασικη παραδοχη οτι επιπεδες διατομες καθετες στον αξονα της ραβ-
περιστρεφονται γυρω απο το κεντρο τους σαν στερεοι δισκοι.
Ετσι η παραμορφωση θα οφειλεται στην σχετικη στροφη θ των διατομων.



για τη γωνια διατμησης γ θα ειναι

$$\tan\gamma_c = \frac{BB'}{L} = \frac{c\cdot\theta}{L}$$

$$\tan\gamma = \frac{DD'}{L} = \frac{\rho\cdot\theta}{L}$$

και για μικρες παραμορφωσεις:

$$\gamma_c = \frac{c\theta}{L} \quad \text{και} \quad \gamma = \frac{\rho\cdot\theta}{L}$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{\gamma_c \cdot L}{c} = \frac{\gamma\cdot L}{\rho} \quad \rightsquigarrow \quad \gamma = \frac{\gamma_c}{c}\cdot\rho$$

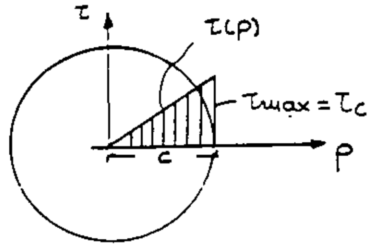
Διατμητικές Τάσεις.

Για ελαστική στρέψη είναι $\gamma = \frac{\tau}{G} \to \frac{\tau}{G} = \frac{\tau_c}{G\cdot c}\cdot\rho \to \tau = \frac{\tau_c}{c}\cdot\rho$

$\to T = \int_A \rho\cdot\tau\, dA = \frac{\tau_c}{c}\cdot\int_A \rho^2 dA = \frac{\tau}{\rho}\cdot\int_A \rho^2 dA = \frac{\tau}{\rho}\cdot J$ όπου J η πολική ροπή αδράνειας της διατομής.

Για κυκλική διατομή $J = \int_A \rho^2 dA = \int_0^c \rho^2 d(\pi\rho^2) = \int_0^c 2\pi\rho^3 d\rho = 2\pi\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^c = \frac{\pi\cdot c^4}{2}$

$\to \tau = \frac{T\cdot\rho}{J}$ και $\tau_{max} = \frac{T\cdot c}{J}$ στην περιφέρεια.

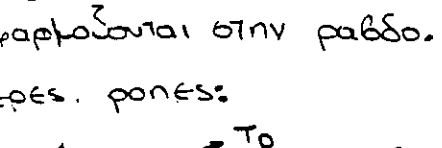


για την σχετική στροφή θ θα είναι:

$$\tau = \gamma\cdot G = \frac{\rho\cdot\theta}{L}\cdot G = \frac{T\cdot\rho}{J} \to \theta = \frac{T\cdot L}{J\cdot G} = \frac{\tau\cdot L}{\rho\cdot G} = \frac{\tau_c\cdot L}{c\cdot G}$$

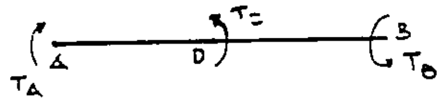
Ισοστατικά Προβλήματα Στρέψης

Στα προηγούμενα εξετάσαμε την περίπτωση όπου μόνο δύο ίσες και αντίθετες ροπές εφαρμόζονται στην ράβδο. Μπορεί όμως να υπάρχουν σε μια ράβδο περισσότερες ροπές:

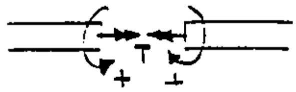


η δοκός AB είναι πακτωμένη στο A (η πάκτωση αφορά την στρέψη της δοκού κ εμποδίζει την στροφή της διατομής A).

Από την ισορροπία της δοκού θα είναι: $T_A = T_B - T_D$



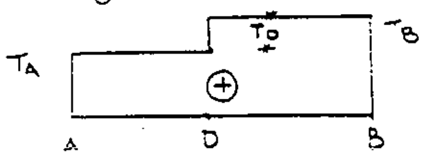
Στην περίπτωση αυτή βρίσκουμε τις στρεπτικές ροπές (εσωτερικές ροπές) που ζητούν κάθε τμήμα. Η ροπή στρέψης σε κάποια διατομή θα ισορροπεί τις ροπές αριστερά ή δεξιά της τομής, και θεωρείται θετική όταν το (νύσματός αποκαλύπτεται από την διατομή.



Έτσι όταν υπολογίζουμε από αριστερά τις στρεπτικές ρο οι εξωτερικές ροπές με φορά ↶ δίνουν θετική ροπ ζης. αρνητική όταν υπολογίζουμε από δεξιά.

Έτσι λοιπόν σε κάθε τμήμα ανάμεσα σε δύο εξωτερικές ροπές η στρε ροπή θα είναι σταθερή και στο σημείο εφαρμογής των εξωτερικών ρ θα εμφανίζει άλμα ίσο με τη ροπή.

Π.χ. για την παραπάνω δοκό:



Έτσι για το τμήμα AD είναι $T = T_A$ και για το DB $T = T_B$.

και μπορούμε να εφαρμόσουμε όσα είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

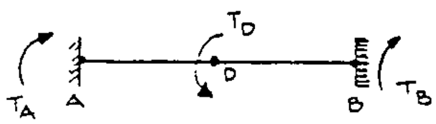
Πρέπει να σημειώσουμε ότι $\theta_A = 0$ λόγω πάκτωσης. Έτσι η $\theta_{DA} = \frac{T_A \cdot L_{AD}}{J_{AD} \cdot G_{AD}}$ θα είναι η απόλυτη γωνία στροφής της διατομής D, θ_D

και η απόλυτη γωνία στροφής της B: $\theta_B = \theta_{DB} + \theta_D = \frac{T_B \cdot L_{DB}}{J_{DB}\, G_{DB}} + \frac{T_A\, L}{J_{AD} \cdot (}$

Υπερστατικά Προβλήματα Στρέψης.

Έστω μια δοκός πακτωμένη στα δύο της άκρα (αμφιπάκτη).

Η εξίσωση ισορροπίας: $T_D - T_A - T_B = 0$ δεν α

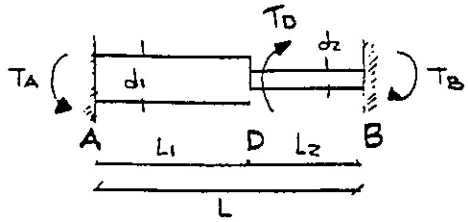


ουν για τον προσδιορισμό των δύο αντιδράσεων T_A Πρέπει να θεωρήσουμε και τις παραμορφώ

Αν υποθέσουμε γνωστές τις T_A, T_B και υπολογίσουμε την απόλυτη γωνία στ φης θ_B σύμφωνα με τα προηγούμενα τότε από την συνθήκη $\theta_B = 0$ (πακ ση) και την εξίσωση ισορροπίας βρίσκουμε τις T_A, T_B.

Παραδείγματα

■ Μια κυλινδρική δοκός ADB μήκους L αποτελείται από δύο τμήματα AD, DB με στοιχεία που φαίνονται στο σχήμα. Να βρεθούν οι μέγιστες διατμητικές τάσεις στα δύο τμήματα



$T_D = T_A + T_B$ αλλά

$$T_A = \frac{J_1 \cdot G_1 \cdot \theta_{DA}}{L_1} \quad (1)$$

$$T_B = \frac{J_2 \cdot G_2\, \theta_{DB}}{L_2} \quad (2) \qquad \text{όπου } J_1 = \frac{\pi d_1^4}{32}, \quad J_2 = \frac{\pi d_2^4}{32}$$

$$\rightsquigarrow \quad T_D = \frac{\pi \cdot d_1^4 \cdot G_1 \cdot \theta_{DA}}{32 L_1} + \frac{\pi d_2^4 G_2 \cdot \theta_{DB}}{32 L_2}$$

Η συνθήκη συμβιβαστού στο D επιβάλλει $\theta_{DA} = \theta_{DB} = \theta_D$

$$\rightsquigarrow \quad T_D = \left(\frac{\pi d_1^4 \cdot G_1}{L_1} + \frac{\pi d_2^4 \cdot G_2}{L_2}\right) \cdot \frac{\theta_D}{32} \rightsquigarrow \theta_D = \frac{32 L_1 L_2 T_D}{\pi \cdot (d_1^4 G_1 L_2 + d_2^4 G_2 L_1)} \quad (3)$$

Οι ①, ② και ③ δίνουν:

$$T_A = \frac{d_1^4 G_1 \cdot L_2 \cdot T_D}{d_1^4 \cdot G_1 L_2 + d_2^4 G_2 L_1}, \quad T_B = \frac{d_2^4 \cdot G_2 \cdot L_1 \cdot T_D}{d_1^4 G_1 \cdot L_2 + d_2^4 G_2 \cdot L_1}$$

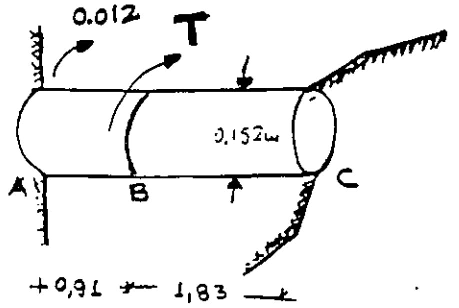
Τμήμα AB: $\tau_{max} = \dfrac{T_A \cdot c}{J} = \dfrac{T_A \cdot d_1}{2J} = \dfrac{16 G_1 L_2 d_1 T_D}{\pi (d_1^4 G_1 \cdot L_2 + d_2^4 G_2 \cdot L_1)}$

Τμήμα ΒΓ: $\tau_{max} = \dfrac{16 G_2 L_1 \cdot d_2 T_D}{\pi (d_1^4 G_1 L_2 + d_2^4 \cdot G_2 L_1)}$

<u>Παρατήρηση</u>: Εδώ χρησιμοποιήσαμε για την επίλυση την συνθήκη συμβιβαστού στο D αντί για τον μηδενισμό της θ_B.

■ Να βρεθει η μεγιστη ροπη T πυ μπορει να φερει η αμφιπακτη δοκος αν $\tau_{επ} = 83$ MPa

διδονται αρχικη στροφη στην πακτωση A $\theta_A^{αρχ} = 0{,}012$ και $G = 27{,}6 \times 10^3$ Mpa



$$J = \frac{\pi}{2}\left(\frac{15.2}{2}\right)^4 = 5.3\ 10^3 cm^4 = 53 \cdot 10^{-6} m^4$$

η συνθηκη συμβιβαστου για τη διατομη στο B απαιτει:

$$\theta_{BC} = \theta_{BA} + 0.012 = \theta_B$$

χρησιμοποιωντας την σχεση: $\theta = \frac{\tau \cdot L}{G \cdot c}$

$$\rightarrow \frac{\tau_{AB} \times 0{,}91}{27.6 \times 10^3 (0.0762)} + 0.012 = \frac{\tau_{BC} \times (1{,}828)}{(27{,}6 \times 10^3) \cdot (0{,}0762)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \tau_{AB} + 27{,}6 = 2\tau_{BC} \quad (\text{σε MPa})$$

αν $\tau_{AB} = 83$ MPa $\rightarrow$ $\tau_{BC} = 55{,}3$ Mpa $< \tau_{επ} = 83$ Mpa

άρα καθοριστικη ειναι η τ_{AB}

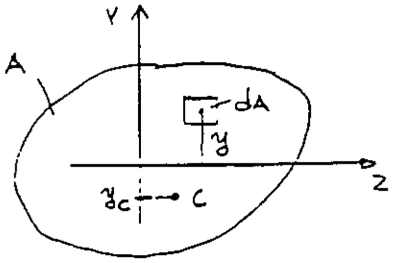
$$\rightarrow T_{AB} = \frac{\tau_{AB} \cdot J}{c} = \frac{83 \cdot 53 \cdot 10^{-6}}{76.2\ 10^{-3}} = 57{,}73 \text{ KNm}$$

$$T_{BC} = \frac{\tau_{BC} J}{c} = \frac{55.3 \cdot 53 \cdot 10^{-6}}{76{,}2 \cdot 10^{-3}} = 38{,}46 \text{ KNm}$$

$$\rightarrow T = T_{AB} + T_{BC} = 96{,}19 \text{ KN-m}$$

8. ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

8.1. Στατικη Ροπη Αδρανειας Q



Οριζουμε την στατικη ροπη αδρανειας της επιφανειας ως προς τον αξονα z ως:

$Q_z = \int_A y\,dA \Rightarrow Q_z = y_c \cdot A$ οπου C το γεωμετρικο κεντρο της επιφανειας.

ετσι αν ο αξονας z περνα από το C θα ειναι $Q_z = 0$

για συνθετες διατομες θα ισχυει ο τυπος: $Q_z = \sum_i \int_{A_i} y\,dA = \sum y_{c_i} A_i$

μοναδα του Q: m^3

8.2 Δευτεροβαθμιες Ροπες Αδρανειας I

Η ροπη αδρανειας I_z της επιφανειας A ως προς τον αξονα z οριζεται ως εξ:

$I_z = \int_A y^2\,dA$ (m^4)

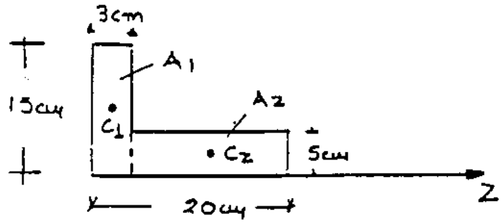
για συνθετες διατομες ισχυει $I_z = \sum_i \int_{A_i} y^2\,dA = \sum I_{z_i}$

Θεωρημα παραλληλων αξονων.

αν I_z ειναι η ροπη αδρανειας της A ως προς ενα αξονα z που περνα απ. το γ.κ. της A τοτε η $I_{z'}$ ως προς ενα αξονα $z' // z$ και σε αποσταση d απ αυτον ειναι: $I_{z'} = I_z + d^2 A$ οπου A το εμβαδο της επιφανειας.

Παραδείγματα

■ Να βρεθεί η στατική ροπή αδρανείας της διατομής του σχήματος ως προς τον άξονα z.



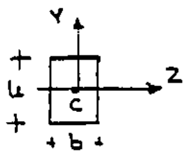
Θεωρούμε την επιφάνεια συντίθεται από τις A_1, A_2 και εφαρμόζουμε τους τύπους της σύνθετης διατομής.

$A_1 = 3\cdot 15 = 45cm^2$, $y_{c_1} = 7{,}5cm$ $\quad A_2 = 5\cdot(20-3) = 85cm^2$, $y_{c_2} = 2{,}5cm$

$\rightsquigarrow \quad Q_z = Q_1 + Q_2 = 45\cdot 7{,}5 + 85\cdot 2{,}5 = 550\,cm^3.$

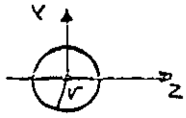
■ Να υπολογισθούν οι ροπές αδρανείας I_z των παρακάτω επιφανειών.

ορθογώνιο



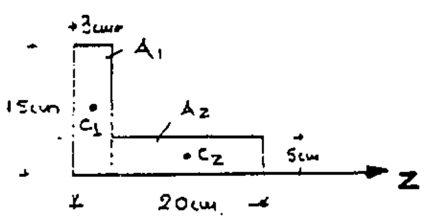
$$I_z = \int_A y^2 dA = \iint y^2 dz\,dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{b/2} dz \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = z\Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b\cdot h^3}{12}$$

κύκλος



$$I_z = \iint y^2 dz\,dy = \iint \rho^2 \eta\mu^2\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^r \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \eta\mu^2\theta\,d\theta = \frac{\pi r^4}{4}$$

Σύνθετη διατομή

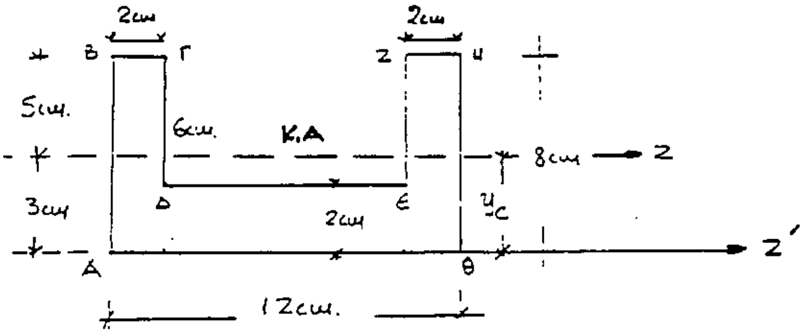


Εφαρμόζουμε τον τύπο της σύνθετης διατομής σε συνδυασμό με το θεώρημα των παράλληλων αξόνων: $\quad I_z = I_{A_1} + I_{A_2}$

$$I_{A_1} = \frac{3\cdot 15^3}{12} + 7{,}5^2\cdot 3\cdot 15 = 3375\,cm^4, \quad I_{A_2} = \frac{5^3\cdot 17}{12} + 2{,}5^2\cdot 5\cdot 17 = 708\,cm^4.$$

$\rightsquigarrow \quad I = 3375 + 708 = 4083\,cm^4.$

■ Να υπολογισθεί η ροπή αδρανείας I_z ως προς τον κεντρικό άξονα της διατομής του σχήματος.



Υπολογίζουμε πρώτα την θέση του κ.β. της διατομής. την οποία θεωρούμε ότι προκύπτει από την αφαίρεση του ορθογωνίου A_2=ΓΔΕΖ από το ορθογώνιο A_1=ΑΒΓΖΗΘ

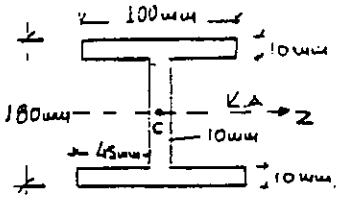
$$\rightarrow \quad y_c = \frac{A_1\cdot y_{1c} - A_2\cdot y_{2c}}{A_1 - A_2} = \frac{8\cdot12\cdot4 - 8\cdot6\cdot5}{8\cdot12 - 8\cdot6} = 3cm.$$

η ροπή αδρανείας της διατομής θα είναι $I_z = I_z^{A_1} - I_z^{A_2}$

$I_{A_1} = \frac{1}{12}\cdot12\cdot8^3 + 12\cdot8\cdot(4-3)^2 = 608cm^4$ (θεώρημα παραλλήλων αξόνων).

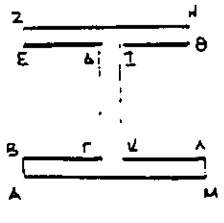
$I_{A_2} = \frac{1}{12}\cdot8\cdot6^3 + 8\cdot6\,(5-3)^2 = 336cm^4$ $\rightarrow$ $I_z = 608-336 = 272cm^4$.

■ Να υπολογισθεί η ροπή αδρανείας I_z ως προς τον κεντρικό άξονα της διατομής του σχήματος.



Προφανώς ο άξονας z είναι άξονας συμμετρίας της διατομής εφαρμόζοντας τον τύπο της σύνθετης διατομής:

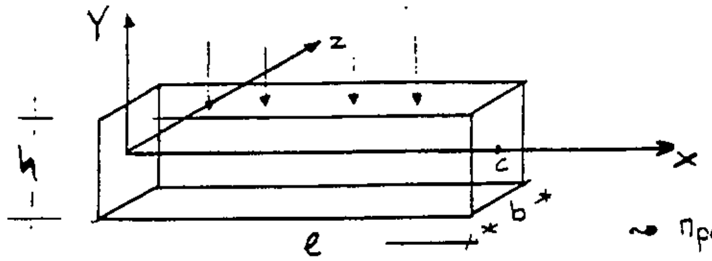
$$I_z = \frac{180^3\cdot100}{12} - \frac{2\cdot45\cdot160^3}{12} = 17,88\cdot10^6 mm^4$$



θεωρούμε την διατομή σαν την διαφορά: A= AZHM−(ΒΓΔΕ+ΚΛΘΙ)

9. ΚΑΜΨΗ ΔΟΚΩΝ

Θα υπολογισουμε τις ορθες και διατμητικες τασεις σε δοκους με αξονικη διαστ-
αση πολυ μεγαλυτερη απο τις διαστασεις της διατομης, που φορτιζονται με δυναμεις
καθετες στον αξονα τους (απλη καμψη)



$b, h << l$

Ετσι για b αρκετα μικροτερο του h

→ Προσεγγιστικα επιπεδη ενταση.

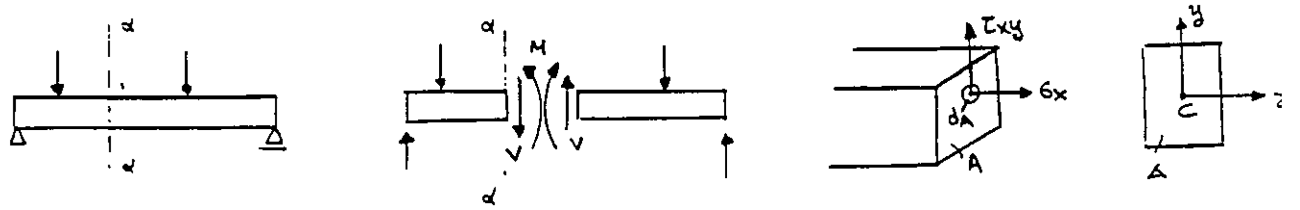
επισης κανουμε την προσεγγιση $\sigma_y \simeq 0$ Ετσι οι μονες τασεις στη δοκο ειν-
αι σ_x και $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

9.1. Υπολογισμος Ορθων Τασεων

Γινονται οι εξης παραδοχες:

α) Υπαρχει ενας αξονας της δοκου που δεν αλλαζει το μηκος του με την καμψη και λε-
γεται ουδετερος αξονας.

β) επιπεδες διατομες καθετες πανω στον ουδετερο αξονα παραμενουν επιπεδες και
καθετες πανω στον (παραμορφωμενο) ουδετερο αξονα και μετα την παραμορφωση



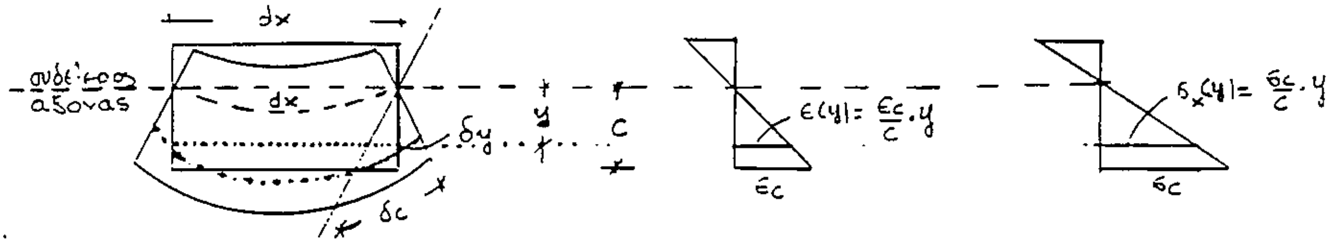
οπως ειδαμε στην Στατικη οι εσωτερικες δυναμεις σε μια διατομη ενωνονται σε μ-
τεμνουσα δυναμη V και μια καμπτικη ροπη M δηλαδη θα ειναι:

$$V = -\int_A \tau_{xy}\, dA \qquad M = -\int_A y \cdot \sigma_x\, dA$$

72

σαν άξονα άξονα x παίρνουμε τον ουδέτερο άξονα που η θέση του προς το παρόν είναι άγνωστη.

Ας θεωρήσουμε ένα τμήμα dx της δοκού μεταξύ των διατομών x και x+dx



Στο σχήμα φαίνεται το τμήμα dx πριν και μετά την κάμψη της δοκού.

Σύμφωνα με τις παραδοχές που κάναμε οι διατομές παραμένουν επίπεδες (απλώς υφίστανται μια στροφή) ενώ το τμήμα dx του ουδ. άξονα διατηρεί το μήκος του.

Με δy συμβολίζουμε την επιμήκυνση μιας ίνας της δοκού σε απόσταση y από τον ουδέτερο άξονα και με δc την επιμήκυνση της ακραίας ίνας.

Από το σχήμα είναι: $\frac{\delta y}{\delta c} = \frac{y}{c} \rightarrow \delta y = \frac{\delta c}{c} \cdot y \rightarrow \frac{\delta y}{dx} = \frac{\delta c}{c\, dx} \cdot y \rightarrow$

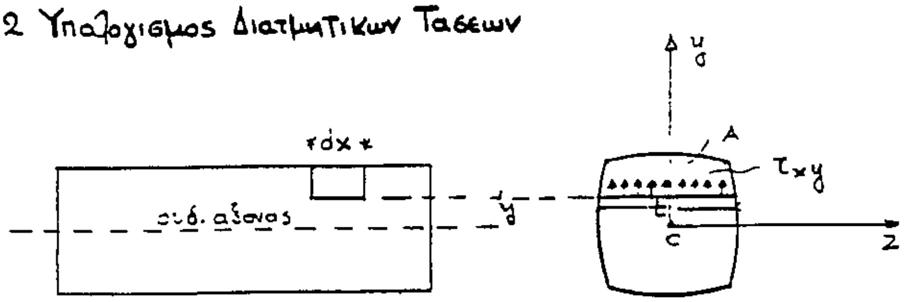
$$\rightarrow \epsilon = \frac{\epsilon_c}{c} \cdot y \rightarrow \sigma_x = E \cdot \epsilon_x \quad (\sigma_z = \sigma_y = 0) \rightarrow \sigma_x = E \cdot \frac{\epsilon_c}{c} \cdot y = \frac{\sigma_c}{c} \cdot y$$

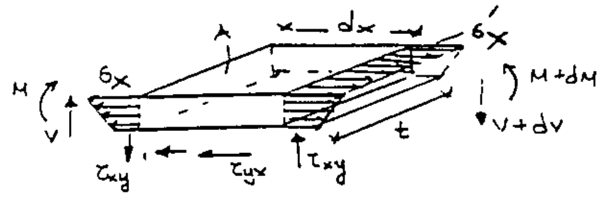
Είναι όμως $M = -\int_A y \sigma_x dA = -\frac{\sigma_c}{c} \int_A y^2 dA = -\frac{\sigma_x}{y} \cdot I_z \rightarrow \boxed{\sigma_x = -\frac{M}{I_z} \cdot y}$

Από την άλλη μεριά αφού δεν υπάρχουν αξονικές δυνάμεις δηλ. $\Sigma F_x = 0$ θα πρέπει $\int_A \sigma_x dA = 0 \rightarrow \int_A y dA = 0 \rightarrow y_c = 0$ επομένως ο ουδέτερος άξονας περνά από το γεωμετρικό κέντρο της διατομής.

<u>Σημείωση</u>. Υποθέτουμε ότι το ϵ_x (επομένως και το σ_x) είναι ανεξάρτητο του z

9.2 Υπολογισμός Διατμητικών Τάσεων





παραδοχή: τ_{xy} ανεξάρτητη του z

Ζητάμε να υπολογίσουμε την διατμητική τάση τ_{xy} σε απόσταση y από τον ουδέτερο άξ[ονα]

Απομονώνουμε ένα τμήμα μήκους dx από την δοκό όπως φαίνεται στο σχήμα.

Ισορροπία στοιχείου : $\Sigma F_x = 0 \rightarrow -\tau_{yx} \cdot t \cdot dx + \int \sigma_x' dA - \int \sigma_x dA = 0$

όπου t το πλάτος της διατομής σε απόσταση y

$$\rightarrow \tau_{yx} \cdot t\, dx = \int_A -\frac{M+dM}{I_z} \cdot y\, dA + \int_A \frac{M}{I_z} \cdot y \cdot dA = -\frac{dM}{I_z} \cdot \int_A y \cdot dA$$

$$\rightarrow \tau_{yx} = -\frac{dM \cdot Q}{dx \cdot I_z t} = -\frac{V \cdot Q_z}{I_z t} \qquad \boxed{\tau_{yx} = \tau_{xy} = -\frac{VQ_z}{I_z t}}$$

όπου Q_z η στατική ροπή του τμήματος A ως προς τον άξονα z

Στην κορυφή και την βάση της διατομής είναι $Q_z = 0 \rightarrow \tau_{xy} = 0$

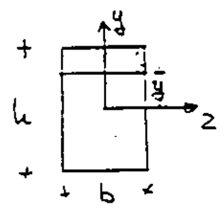
η μέγιστη διατμητική τάση εμφανίζεται στην διατομή όπου η V είναι μέγιστη.

και στην θέση y όπου η ποσότητα $\frac{Q_z(y)}{t}$ γίνεται μέγιστη.

Αν η διατομή έχει σταθερό πλάτος t τότε η $\frac{Q(y)}{t}$ μεγιστοποιείται για $y = y_c =$

Παράδειγμα.

ορθογωνική διατομή.

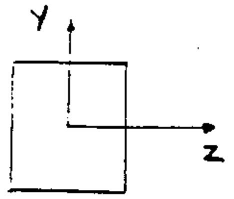


$$Q(y) = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right) + y\right) =$$

$$= \frac{b}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2}\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right)$$

$$\rightarrow Q = 0 \text{ για } y = \pm\frac{h}{2}, \text{ και } Q_{max} = \frac{1}{8} b h^2 \text{ για } y = 0.$$

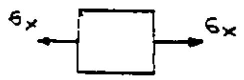
9.3 Κυριες Και Μεγιστες Διατμητικες Τασεις Δοκου.



ορθες τασεις $\sigma_x = -\frac{M}{I_z} \cdot y$ $\quad\quad \sigma_y = 0$

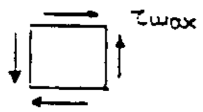
διατμητικες τασεις $\tau_{xy} = -\frac{V\,Q_z}{I_z \cdot t}$

<u>ακραιες ινες</u> $\quad y = y_{max},\ y_{min}$: $\tau_{xy} = 0$, $\sigma_x = \sigma_{max,min}$.



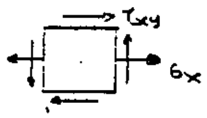
σ_x : κυριες τασεις , $\tau_{max} = \frac{\sigma_x}{2}$ στα επιπεδα με κλιση 45°

<u>ουδετερος αξονας</u> $\quad y = 0$: $\sigma_x = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{max}$



$\sigma_{p_1} = \tau_{max}$

<u>Ενδιαμεσα</u> $\quad 0 < y < y_{max}$, $y_{min} < y < 0$: προβλημα επιπεδης εντασης



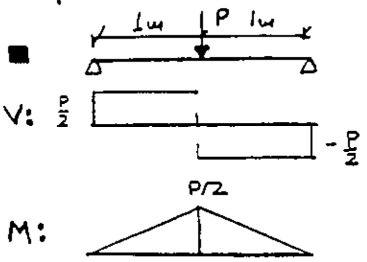
$$\sigma_{p_1} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad , \quad \sigma_{p_2} = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

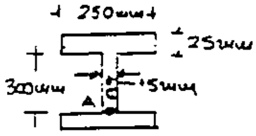
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{p_1} - \sigma_{p_2}}{2} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

Σε ορθογωνιες διατομες η μεγιστη κυρια ταση σ_{p_1} εμφανιζεται συνηθως στις ακραιες ινες.

σε διατομες I ή T πρεπει να γινεται ελεγχος στις ενωσεις των θερίδων

Παραδείγματα





για τη δοκό του σχήματος με διατομή διπλού Ταυ δίνονται οι μέγιστες επιτρεπόμενες τάσεις $\tau_{max}=75\,MPa$ και $\sigma_{max}=120\,MPa$ και ζητείται το μέγιστο φορτίο P_{max}.

υπολογισμός γεωμετρικών στοιχείων.

$$I=\frac{1}{12}\left[250\,350^3-235\,300^3\right]=364{,}5\cdot10^6\,mm^4$$

$$Q_C=250\cdot25\cdot(150+12{,}5)+15\cdot150\cdot75=1185\cdot10^3\,mm^3$$

$$Q_A=250\cdot25\,(150+12{,}5)=1016\cdot10^3\,mm^3.$$

Ελέγχουμε στη θέση της maxM. (ή V παντού σταθερή)

ακραίες ίνες: $\sigma_{ακ}=\frac{M\cdot y_{ακ}}{I}=\frac{P/2\cdot175\cdot10^{-3}}{364{,}5\cdot10^6\cdot10^{-12}}=\underline{239\,P}$

$$\tau_{ακ}=\frac{\sigma_{ακ}}{2}=\underline{119{,}5\,P}$$

στο άξονα.

$$\sigma_0=0.\quad \tau_0=\frac{VQ}{It}=\frac{P/2\cdot1185\cdot10^3\cdot10^{-9}}{364{,}5\cdot10^6\cdot10^{-12}\cdot15\cdot10^{-3}}=\underline{108\,P}=\sigma_P$$

σημείο A

$$\sigma_A=\frac{P/2\cdot150\cdot10^{-3}}{364{,}5\cdot10^6\cdot10^{-12}}=205{,}8\,P$$

$$\tau_A=\frac{P/2\;1016\cdot10^3\cdot10^{-9}}{364{,}5\cdot10^6\cdot10^{-12}\cdot15\cdot10^{-3}}=92{,}9\,P$$

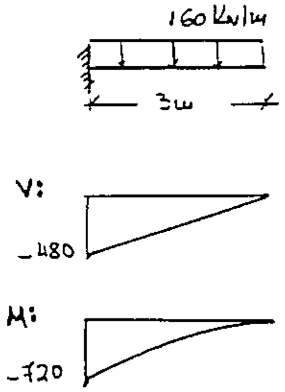
$$\rightarrow\ \sigma_P=\frac{\sigma_A}{2}+\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{4}+\tau_A^2}=\underline{241{,}5\,P}$$

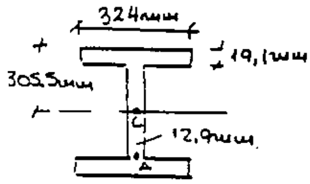
$$\tau_P=\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{4}+\tau_A^2}=\underline{138{,}6\,P}$$

} Καθοριστικές οι τάσεις στο A.

πρέπει $241{,}5P\le120\cdot10^6\ \rightarrow\ P\le497\,kN$
$138{,}6P\le75\cdot10^6\ \rightarrow\ P\le541\,kN$
} $\rightarrow P_{max}=497\,kN$.

■ Για την δοκό του σχήματος ζητούνται οι σ_{max}, τ_{max}.





$I = 1290 \cdot 10^6\, mm^4$

$Q_C = 324 \cdot 19{,}1\left(305{,}5 - \frac{19{,}1}{2}\right) + (305{,}5 - 19{,}1)^2 \cdot 12{,}9 \cdot \frac{1}{2} = 2360 \cdot 10^3\, mm^3$

$Q_A = 324 \cdot 19{,}1\left(305{,}5 - \frac{19{,}1}{2}\right) = 1832 \cdot 10^3\, mm^3$

I) ακραίες ίνες $\quad \sigma_x = \frac{720 \cdot 10^3}{1290 \cdot 10^6} \cdot 305{,}5 = 0{,}17\, kN/mm^2 = 170\, MPa = \sigma_1$

$\tau_{max} = \frac{\sigma_x}{2} = 85\, MPa$

II) στον άξονα. $\quad \tau_{xy} = \frac{480 \cdot 2360 \cdot 10^3}{1290 \cdot 10^6 \cdot 12{,}9} = 0{,}068\, kN/mm^2 = 68{,}2\, MPa = \sigma_1$

III) σημείο A.

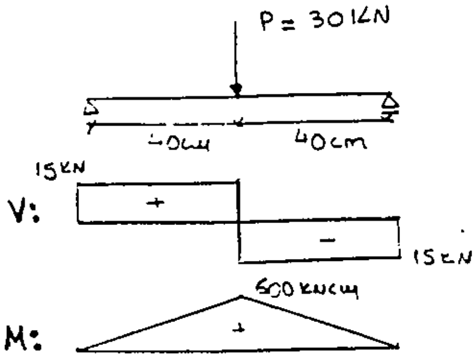
$$\sigma_A = \frac{720 \cdot 10^3 (305{,}5 - 19{,}1)}{1290 \cdot 10^6} = 159\, MPa$$

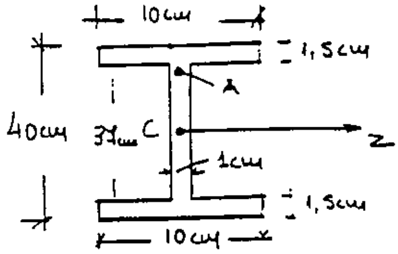
$$\tau_{xy} = \frac{480 \cdot 1832 \cdot 10^3}{1290 \cdot 10^6 \cdot 12{,}9} = 53\, MPa$$

$\Rightarrow \sigma_0 = \frac{159}{2} + \left(\frac{159^2}{4} + 53^2\right)^{1/2} = 175\, MPa \quad , \quad \tau_0 = \left(\frac{159^2}{4} + 53^2\right)^{1/2} = 96\, MPa.$

$\Rightarrow \sigma_{max} = 175\, MPa \quad , \quad \tau_{max} = 96\, MPa.$

■ Να βρεθούν οι μέγιστες ορθές και διατμητικές τάσεις της δοκού.





$$I = \frac{40^3 \cdot 10}{12} - \frac{2 \cdot 37^3}{12} \cdot 4,5 = 15343\,cm^4$$

$$S_A = 1,5 \cdot 10 \cdot \left(18,5 + \frac{1,5}{2}\right) = 289\,cm^3$$

$$Q_C = 289 + 1 \cdot 18,5 \cdot \frac{18,5}{2} = 460\,cm^3.$$

Μέσον δοκού.

$M = 600$ kNcm

$V = 15$ kN.

Ακραία ίνα: $\sigma_x = \frac{600}{15343} \cdot 20 = 0,78\ kN/cm^2 = \sigma_p.$

$$\tau_p = \frac{\sigma_x}{2} = 0,39\ kN/cm^2.$$

Ουδ. άξονας. $\sigma_x = 0$, $\tau_{xy} = \frac{15 \cdot 460}{15343 \cdot 1} = 0,45\ kN/cm^2 = \tau_p = \sigma_p.$

Σημείο Α. $\sigma_x = \frac{600 \cdot 18,5}{15343} = 0,72\ kN/cm^2$

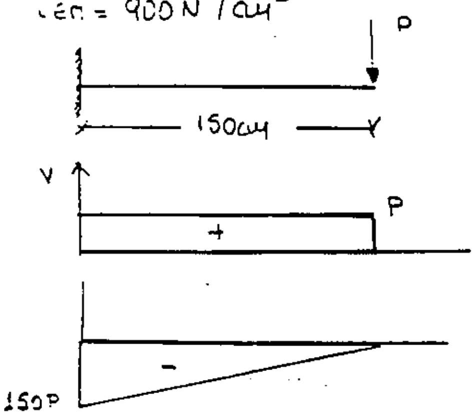
$$\tau_{xy} = \frac{15 \cdot 289}{15343 \cdot 1} = 0,28\ kN/cm^2$$

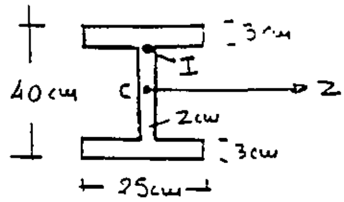
$$\Rightarrow \sigma_{p_1} = \frac{0,72}{2} + \sqrt{\frac{0,72^2}{4} + 0,28^2} = 0,82\ kN/cm^2$$

$$\tau_p = \sqrt{\frac{0,72^2}{4} + 0,28^2} = 0,46\ kN/cm^2$$

$\Rightarrow$ οι μέγιστες τάσεις εμφανίζονται στο σημείο Α

■ Για τον πρόβολο του σχήματος να υπολογισθεί το MaxP όταν: $\sigma_{\epsilon\pi} = 1400\,N/cm^2$, $\tau_{\epsilon\pi} = 900\,N/cm^2$





$maxV = P$

$maxM = 150P$

$$I_z = \frac{40^3 \cdot 25}{12} - \frac{2 \cdot 34^3 \cdot 11,5}{12} = 58000\,cm^4$$

$$Q^C = 3 \cdot 25 \cdot 18,5 + 2 \cdot 17 \cdot 8,5 = 1676\,cm^3$$

$$Q^I = 3 \cdot 25 \cdot 18,5 = 1387\,cm^3$$

Ακραία ίνα. $\sigma_x = \frac{150P}{58000} \cdot 20 = 0,0517P \rightarrow \tau_p = \frac{\sigma_x}{2} = 0,0258P.$

Σημείο I $\quad \sigma_x = \frac{150P}{58000} \cdot 17 = 0,04396P \quad \tau_{xy} = \frac{P \cdot 1387}{58000 \cdot 2} = 0,01196P$

$$\rightarrow \sigma_{p_1} = \frac{0,04396P}{2} + \sqrt{\frac{0,04396^2 P^2}{4} + 0,01196^2 P^2} = 0,047P$$

$$\tau_p = \sqrt{\frac{0,04396^2 P^2}{4} + 0,01196^2 P^2} = 0,025P$$

Ουδέτερος άξονας. $\quad \sigma_x = 0 \quad , \quad \tau_{xy} = \frac{P\,1676}{58000 \cdot 2} = 0,0144P$

$\rightarrow \tau_p = \sigma_{p_1} = 0,0144P$

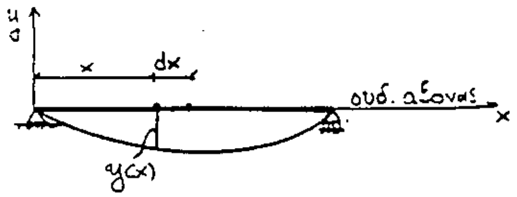
→ καθοριστικές οι τάσεις στην ακραία ίνα:

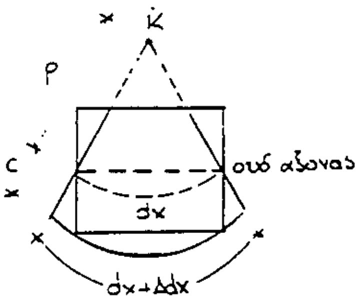
$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{max} = 0,0517P < 1400 \rightarrow P < 27079\,N \\ \tau_{max} = 0,0258P < 900 \rightarrow P < 34883\,N \end{array}\right\} \rightarrow$$

$P_{max} = 27,079\,kN$ → καθοριστική η ορθή τάση

10. ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

Σαν ελαστική γραμμή δοκού ορίζεται ο παραμορφωμένος ουδέτερος άξονας της δοκού ή αλλιώς η γραμμή των βυθίσεων της δοκού.





Θεωρούμε ένα απειροστό τμήμα της δοκού dx, μεταξύ των διατομών x και x+dx. Μετά την παραμόρφωση οι διατομές συναντώνται στο κέντρο καμπυλότητας K του άξονα της δοκού. Αν ρ είναι η ακτίνα καμπυλότητας του άξονα τότε

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} \simeq y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

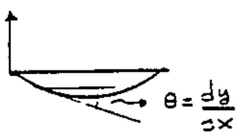
Επίσης $\left.\begin{aligned} dx &= \rho \cdot d\theta \\ dx+\Delta dx &= (\rho+c)\cdot d\theta \end{aligned}\right\}$ $\dfrac{\Delta dx + dx}{dx} = \dfrac{\rho + c}{\rho} \rightsquigarrow \dfrac{\Delta dx}{dx} = \epsilon_c = \dfrac{c}{\rho} \rightsquigarrow \dfrac{\sigma_c}{E} = \dfrac{1}{\rho}\cdot c \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \dfrac{M\cdot c}{E\cdot I_z} = \dfrac{d^2y}{dx^2}\cdot c \rightsquigarrow$ $\boxed{\dfrac{M}{EI_z} = \dfrac{d^2y}{dx^2}}$ εξίσωση ελαστικής γραμμής.

αν $M>0 \rightsquigarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} > 0 \rightsquigarrow$ η ελαστική γραμμή στρέφει τα κοίλα προς τα άνω :

αν $M<0 \rightsquigarrow$

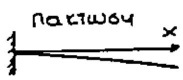
Κλίση ελαστικής γραμμής:



Υπολογισμός ελαστικής γραμμής.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI_z} \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = \theta = \int \frac{M}{EI_z}dx + C_1 \rightsquigarrow y = \int\left[\int \frac{M}{EI_z}dx\right]dx + C_1 x + C_2$$

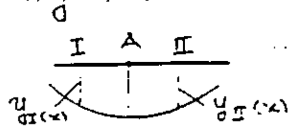
Οι C_1, C_2 θα προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες:



$y(0) = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$

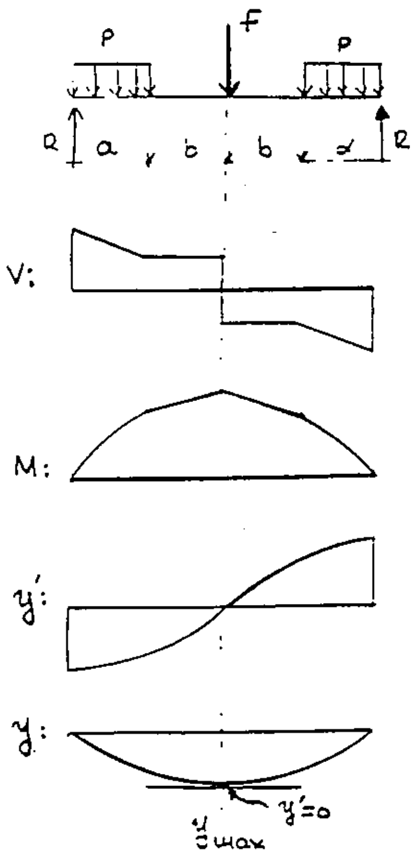
$y(0) = 0$

αν σε δύο τμήματα της δοκού η M(x) αλλάζει έκφραση άρα και η y(x) τότε οι επιπλέον σταθερές θα προσδιορίσουν από τις συνθήκες συνέχειας στο κοινό σημείο.



θα πρέπει: $y_I(A) = y_{II}(A)$ και $\dfrac{dy_I(A)}{dx} = \dfrac{dy_{II}(A)}{dx}$

Περιπτωση συμμετριας.



στην περιπτωση συμμετρικου φορτιου και αντιδρασεων ισχυουν τα εξης:

διαγραμμα V αντισυμμετρικο.

διαγραμμα M συμμετρικο.

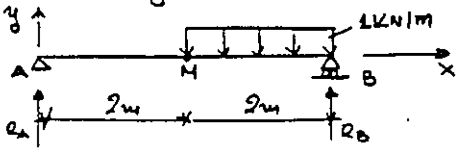
διαγραμμα y' αντισυμμετρικο το y' μηδενιζεται στον αξονα συμμετριας

διαγραμμα y συμμετρικο . y_{max} στον αξονα συμμετριας.

Ετσι στην περιπτωση αυτη, για τον υπολογισμο της ελαστικης γραμμης, μπορει καποιος να περιοριστει στο μισο κομματι χρησιμοποιωντας και την συνθηκη $y'(\ell/2)=0$

Παραδείγματα

■ Να υπολογισθεί η βύθιση στο μέσον Μ της δοκού. Δίνονται E, I.



$\circlearrowleft \Sigma M_B = 0 \rightsquigarrow -R_A \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 1 = 0 \rightsquigarrow R_A = \frac{1}{2}\ \text{kN}$

Ροπές:

Τμήμα ΑΜ ($0 \le x \le 2$): $M(x) = \frac{1}{2}x$

τμήμα ΜΒ ($2 \le x \le 4$): $M(x) = \frac{1}{2}x - 1 \cdot \frac{(x-2)^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x - 2.$

Ελαστική γραμμή

τμήμα ΑΜ: $EI \cdot \frac{d^2 y_I}{dx^2} = \frac{1}{2}x \rightsquigarrow EI \cdot y_I' = \frac{x^2}{4} + C_1 \ (1) \rightsquigarrow EI y_I = \frac{x^3}{12} + C_1 x + C_2 \ (2).$

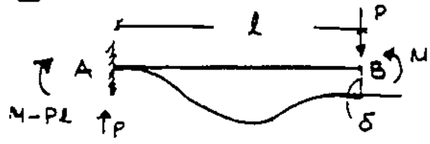
τμήμα ΜΒ: $EI \frac{d^2 y_{II}}{dx^2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x - 2 \rightsquigarrow EI y_{II}' = -\frac{x^3}{6} + \frac{5}{4}x^2 - 2x + C_3 \ (3)$

$$\rightsquigarrow EI\, y_{II} = -\frac{x^4}{24} + \frac{5x^3}{12} - x^2 + C_3 x + C_4 \ (4)$$

οριακές συνθήκες & συνθήκες συνέχειας στο Μ:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{άρθρωση A } (x=0): && y_I(0)=0 \xrightarrow{(2)} C_2 = 0 \\
&\text{κύλιση B } (x=4): && y_{II}(4)=0 \xrightarrow{(4)} 4C_3 = -C_4. \\
&\text{σημείο M } (x=2): && y_I(2) = y_{II}(2) \xrightarrow{(2),(4)} 2C_1 = 2C_3 + C_4 - 3 \\
& && y_I'(2) = y_{II}'(2) \xrightarrow{(1),(3)} C_1 = C_3 - 1{,}3
\end{aligned}\right\}
\quad
\begin{aligned}
C_1 &= -1{,}4 \\
C_3 &= -0{,}1 \\
C_4 &= 0{,}4
\end{aligned}$$

και η βύθιση στο Μ θα είναι: $EI \cdot y_I(2) = \frac{2^3}{12} - 1{,}4 \cdot 2 = -2{,}13 \rightsquigarrow y_M = -\frac{2{,}13}{EI}$



για τον πρoβολο του σχηματος δινονται τα E, I, ℓ, δ και ζητουνται τα P και M ωστε η βυθιση στο B να ειναι ιση με δ και η κλιση της ελαστικης γραμμης στο ιδιο σημειο ιση με μηδεν.

$M(x) = Px + M - P\ell \rightsquigarrow$

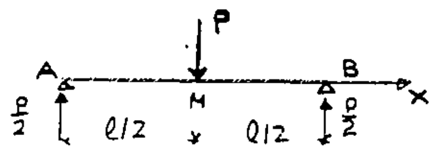
$$EIy'' = Px + M - P\ell \rightsquigarrow EIy' = P\frac{x^2}{2} + Mx - P\ell x + C_1 \rightsquigarrow EIy = P\frac{x^3}{6} + M\frac{x^2}{2} - P\ell\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$$

$x=0$: $y=0 \rightsquigarrow C_2=0$, $y'=0 \rightsquigarrow C_1=0$

$x=\ell$: $y'=0 \rightsquigarrow P\cdot\frac{\ell^2}{2} + M\cdot\ell - P\ell^2 = 0 \rightsquigarrow M = \frac{P\ell}{2}$.

$y=-\delta \rightarrow -EI\delta = P\cdot\frac{\ell^3}{6} + \frac{P\cdot\ell^3}{4} - \frac{P\cdot\ell^3}{2}$

$$\rightsquigarrow P = \frac{12EI\delta}{\ell^3}, \quad M = \frac{6EI\delta}{\ell^2}$$



να βρεθει η εξισωση της ελαστικης γραμμης.

Εδω επειδη η φορτιση ειναι συμμετρικη ως προς το μεσον της δοκου θα ειναι $y'(M)=0$ και αρκει να εξετασουμε το ενα τμημα. ($y(x)$ συμμετρικο).

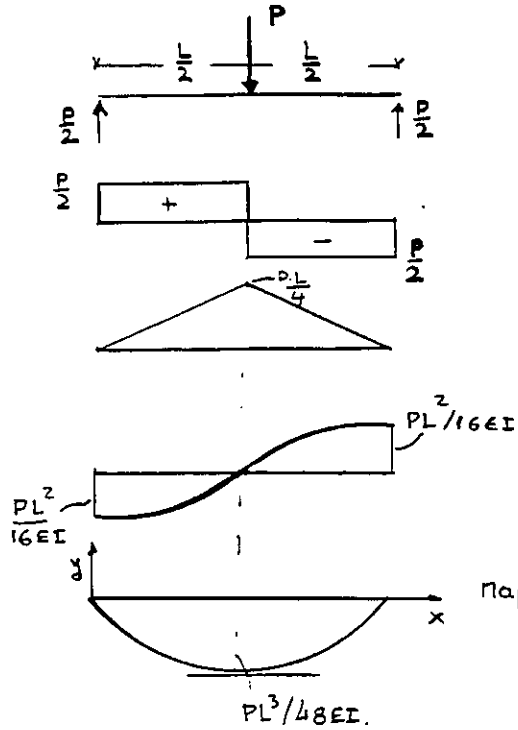
Τμημα AM:

$$M(x) = \frac{P}{2}x \rightsquigarrow EIy'' = \frac{P}{2}x \rightsquigarrow EI\cdot y' = \frac{P}{4}x^2 + C_1, \quad EIy = \frac{P}{12}x^3 + C_1x + C_2$$

$x=0 \rightsquigarrow y=0 \rightsquigarrow C_2=0$

$x=\frac{\ell}{2} \rightsquigarrow y'=0 \rightsquigarrow C_1 = -\frac{P\ell^2}{16}$

αρα $y' = \frac{1}{EI}\left(\frac{P}{4}x^2 - \frac{P\ell^2}{16}\right)$ και $y = \frac{1}{EI}\left(\frac{P}{12}x^3 - \frac{P\ell^2}{16}x\right)$



τέμνουσα $V = \frac{dM}{dx} = EI \cdot \frac{d^3y}{dx^3}$

ροπή $M = EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$

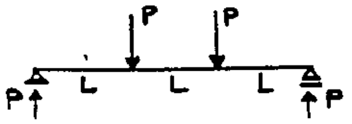
κλίση $= \theta = \frac{dy}{dx}$

παραμόρφωση $= y$

$$M = \frac{P}{2}x \rightarrow \frac{P}{2}x = EI \cdot y'' \rightarrow EI\,y' = \frac{P}{4}x^2 + C_1 \rightarrow EI\,y = \frac{P}{12}\cdot x^3 + C_1 x + C_2$$

για $x=0$ $y=0$ $\rightarrow C_2 = 0$, για $x = \frac{L}{2}$ $y' = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{PL^2}{16}$.

$$\rightarrow y = \frac{1}{EI}\left(\frac{P}{12}x^3 - \frac{PL^2}{16}x\right), \quad y' = \frac{1}{EI}\left(\frac{P}{4}x^2 - \frac{PL^2}{16}\right)$$



Λόγω συμμετρίας περιοριζόμαστε στο μισό κομμάτι

Τμήμα $0 \le x \le L$

$EI\,y'' = P\cdot x$

$EI\,y' = \frac{1}{2}Px^2 + C_1$

$EI\,y = \frac{1}{6}P x^3 + C_1 x + C_2$

Τμήμα $L \le x \le 2L$

$EI\,y'' = P\cdot x - P(x-L)$

$EI\,y' = \frac{Px^2}{2} - \frac{1}{2}P(x-L)^2 + C_3$

$EI\,y = \frac{Px^3}{6} - \frac{1}{6}P(x-L)^3 + C_3 x + C_4$

Οριακές συνθήκες.

$x=0$: $y=0 \rightarrow C_2 = 0$

$x = \frac{3L}{2}$: $y' = 0 \rightarrow \frac{9}{8}PL^2 - \frac{1}{8}PL^2 + C_3 = 0 \rightarrow C_3 = -PL^2$

Συνθήκες συμβιβαστού.

$x = L \rightarrow y_1' = y_2' \Rightarrow C_1 = C_3 = -PL^2$

$x = L \rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow C_2 = C_4 = 0$.