Η ακατανόητη αναποτελεσματικότητα των μαθηματικών *

Αθανάσιος Τζουβάρας
Τμήμα Μαθηματικών
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

1 Εισαγωγικά

Το 1960 ο Eugene Wigner, διακεκριμένος φυσικός, που τρία χρόνια αργότερα τιμήθηκε με το βραβείο Nobel, δημοσίευσε ένα άρθρο με τίτλο ''*Η ακατανόητη αποτελεσματικότητα των μαθηματικών στις φυσικές επιστήμες*'' ([16]). Παρά το ότι το άρθρο είναι μέτριο από άποψη πρωτοτυπίας – και μάλλον θα περνούσε απαρατήρητο αν το έγραφε κάποιος μη διάσημος – η φράση του τίτλου έγινε ένα είδος σλόγκαν για τους ασχολουμένους με τη φιλοσοφία της φυσικής και των μαθηματικών. Επίσης, ενώ ο τίτλος του αναφέρεται, αρκετά παραπλανητικά, στην αποτεσματικότητα των μαθηματικών *γενικά στις φυσικές επιστήμες*, το άρθρο ασχολείται αποκλειστικά με τη *φυσική*, συγκεκριμένα με το πραγματικό και πολύ γνωστό γεγονός ότι τα μαθηματικά είναι η αποκλειστική γλώσσα της νεότερης φυσικής, κάτι που από πολύ παλιά συνόψισαν με τη φράση (που αποδίδεται στον Γαλιλαίο) ότι ''το βιβλίο της φύσης είναι γραμμένο στη μαθηματική γλώσσα''. Ο Wigner δίνει αρκετά παραδείγματα για να δείξει την ακρίβεια της μαθηματικής περιγραφής στη διατύπωση των φυσικών νόμων. Όταν όμως έρχεται στο ερώτημα για το πού οφείλεται αυτή η εντυπωσιακή αποτελεσματικότητα, αρκείται να πει απλώς πως πρόκειται για ένα ''θαύμα'' (miracle). Κλείνει δε το άρθρο του ως εξής: ''Το θαύμα της καταλληλότητας της γλώσσας των μαθηματικών στη διατύπωση των νόμων της φυσικής είναι ένα θαυμάσιο δώρο το οποίο ούτε κατανοούμε

*Μια παραλλαγή αυτού του άρθρου, με τίτλο "How effective indeed is present-day mathematics?", δημοσιεύθηκε στο περιοδικό *Logic and Logical Philosophy,* τόμος 15 (2006), 131-153.

αλλά ούτε και αξίζουμε. Θα πρέπει να είμαστε ευγνώμονες γι' αυτό και να ελπίζουμε ότι θα συνεχίσει να ισχύει στη μελλοντική έρευνα, και ότι *θα επεκταθεί και σε άλλους κλάδους της γνώσης* (Σημ.: η έμφαση δική μου) ανεξάρτητα αν αυτό μας προκαλεί ευχαρίστηση ή αμηχανία.''

Η αποτελεσματικότητα των μαθηματικών στη φυσική είναι η μια πλευρά του θέματος, η οποία όπως ήταν αναμενόμενο καλλιέργησε μεγάλες προσδοκίες. Αυτό διαφαίνεται ήδη στην ελπίδα του Wigner που σημειώνεται πιο πάνω, ότι αυτή η αποτελεσματικότητα θα επεκταθεί και σε άλλους γνωστικούς κλάδους. Η άλλη πλευρά είναι ότι αυτές οι προσδοκίες δεν επαληθεύτηκαν – τουλάχιστον μέχρι τώρα, γιατί κανείς δεν μπορεί να προβλέψει τι θα γίνει στο μέλλον – ή μάλλον, για να το πούμε καθαρά, υπάρχουν γνωστικές περιοχές όπου τα μαθηματικά δείχνουν μια εντυπωσιακή *αναποτελεσματικότητα* εξ ίσου ή και περισσότερο ακατανόητη από την αποτελεσματικότητά τους στη φυσική. Εκτός από τη φυσική, επιστήμες με την αυστηρή έννοια (science), είναι και η χημεία, και η βιολογία, και η πληροφορική (ειδικά στο σκέλος της τεχνητής νοημοσύνης), και η γλωσσολογία (ως μελέτη γλωσσικών δομών), καθώς και (με την ευρύτερη έννοια των επιστημών του ανθρώπου) η κοινωνιολογία, η ψυχολογία (κυρίως η γνωστική) κλπ. Εδώ η συνεισφορά των μαθηματικών είναι από φτωχή έως ανύπαρκτη. Και το ερώτημα είναι γιατί;

Ιστορικά υπήρξε μια πολύ ιδιαίτερη σχέση ανάμεσα στη φυσική και το σώμα γνώσης που ονομάζουμε μαθηματικά. Ένα πολύ βασικό κομμάτι του τελευταίου, ο Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, που αργότερα εκλεπτύνθηκε θεωρητικά σε Μαθηματική Ανάλυση, ανακαλύφθηκε από φυσικούς (τον Νεύτωνα κυρίως) για τις ανάγκες της φυσικής. Οι φυσικοί θεωρούν το πεδίο αυτό προνομιακά δικό τους και συχνά δυσκολεύονται να αντιληφθούν ότι μπορεί να έχει αυτοτελή ύπαρξη, ανεξάρτητη από τη χρήση του στη φυσική. Τα θεωρητικά εργαλεία αυτού του κλάδου είναι φτιαγμένα για έναν πολύ ειδικό σκοπό: Την περιγραφή απλών σημειακών κινήσεων στο χώρο και το χρόνο (τροχιές), και, τα τελευταία χρόνια, την περιγραφή πολύπλοκων κινήσεων δυναμικών συστημάτων. Αντίθετα, η χημεία, η βιολογία κλπ, ελάχιστα χρειάζονται αυτά τα εργαλεία. Το τι ακριβώς χρειάζονται είναι δύσκολο να πει κανείς. Δεν διαθέτουμε μαθηματικούς κλάδους ειδικά για τη χημεία, τη βιολογία ή τη θεωρία της πληροφορίας. Κάποια λίγα νέα μαθηματικά υπήρξαν για την πληροφορική και την γλωσσολογία, αλλά μέσα στα πλαίσια ήδη αναπτυγμένων κλάδων όπως η μαθηματική λογική και η άλγεβρα αντίστοιχα. Αλλά και πάλι η διαφορά μ' ό,τι συμβαίνει στη φυσική είναι χαώδης. Άλλο πράγμα π.χ. είναι ορισμένοι λογικοί τελεστές που προσομοιώνουν τις έννοιες του ''αναγκαίου'' και του ''δυνατού'', με πολύ μικρή εφαρμοσιμότητα σε πραγματικές καταστάσεις, κι άλλο πράγμα η παράγωγος συνάρτηση που όχι απλά προσεγγίζει αλλά περιγράφει με *απόλυτη ακρίβεια* την ταχύτητα. Γενικά ισχύει το εξής περίεργο

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΣ *Ενώ υπάρχουν ένα σωρό καλά και σημαντικά μαθηματικά* **κομμένα και ραμμένα στα μέτρα** *της φυσικής, δεν υπάρχουν* **καθόλου** *σημαντικά μαθηματικά* **κομμένα και ραμμένα στα μέτρα** *της χημείας, της βιολογίας, της επιστήμης των υπολογιστών, της γλωσσολογίας, της καθημερινής λογικής κλπ.*

Γιατί συμβαίνει αυτό; Στο ερώτημα αυτό θα μπορούσε κανείς να αντιτάξει ένα άλλο ερώτημα: Γιατί *πρέπει* τα μαθηματικά να μπορούν να συνεισφέρουν σε κάθε μια από τις παραπάνω επιστήμες; Και γιατί είναι ακατανόητο όταν αδυνατούν να το κάνουν; Ποιός είπε ότι τα μαθηματικά είναι πασπαρτού και θεραπεία για όλα τα προβλήματα; Η απάντηση είναι απλή: Μαθηματικά υπάρχουν (τουλάχιστον εν δυνάμει) εκεί όπου υπάρχουν επαναλαμβανόμενα μοτίβα (patterns) και αφηρημένες δομές, στατικές ή δυναμικές, πίσω από την ποικιλία των μορφών της ύλης. Φαίνεται απίθανο να μπορούμε να έχουμε μορφολογική και λειτουργική σταθερότητα χωρίς σταθερότητα κάποιων αθέατων δομών. Οι επιστήμες πέραν της φυσικής ασχολούνται με επίπεδα οργάνωσης της ύλης όλο και μεγαλύτερης πολυπλοκότητας σε σχέση με την ανοργάνωτη σημειακή ύλη της φυσικής. Δεν είναι δυνατό στη σύνθεση των πρωτεϊνών, στη δομή του DNA, στη ροή της πληροφορίας, στη σύνθεση και μεταβίβαση του νοήματος μιας φυσικής γλώσσας κλπ, να μην υπάρχουν αφηρημένες δομές που για την ώρα δεν παρατηρούμε. Το πώς θα τις ανακαλύψουμε, και, κυρίως, πώς θα τις *αναπαραστήσουμε* είναι το ζητούμενο. Τείνουμε πάντα να αναγάγουμε το άγνωστο στο γνωστό. Να χειριζόμαστε νέες καταστάσεις με τα υπάρχοντα παλιά εργαλεία. Και όταν τα παλιά κλειδιά δεν ανοίγουν τις νέες πόρτες, τείνουμε να λέμε ότι δεν υπάρχουν κλειδιά - δεν υπάρχουν μαθηματικά για τους χώρους αυτούς.

Σκοπός μου στο άρθρο αυτό είναι να περιγράψω ακροθιγώς την αναποτελεσματικότητα των (υπαρχόντων) μαθηματικών σε ένα πλέγμα άμεσα συνδεόμενων περιοχών μεγάλου ενδιαφέροντος όπως (α) η ‘‘καθημερινή λογική’’ (everyday reasoning) (σε αντιδιαστολή με την τυπική λογική), (β) η φυσική γλώσσα, (γ) η θεωρία του νοήματος και (δ) το πεδίο της ‘‘ασάφειας ’’ (vagueness, fuzziness). Όλα τα παραπάνω, με επίκεντρο τη φυσική γλώσσα, είναι συστατικά της ανθρώπινης σκέψης και επικοινωνίας, και για κάποιο περίεργο λόγο τα (υπάρχοντα) μαθηματικά φαίνονται ανίκανα να βοηθήσουν στην κατανόηση και πραγμάτευσή τους.

2 Καθημερινή λογική

Τι ακριβώς είναι (η, μια) λογική; Υπάρχει μεγάλη απόσταση ανάμεσα σ' αυτό που εννοούμε με την αυστηρή έννοια, ως τυπική ή μαθηματική λογική, και στον όρο όπως χρησιμοποιείται στην καθημερινή γλώσσα. Μπορούμε να διακρίνουμε πολλές παραπλήσιες σημασίες του όρου στην κοινή χρήση, που η συνισταμένη τους συγκλίνει προς μια κατεύθυνση. Μερικές από τις σημασίες αυτές είναι: (α) Λογικό=φυσικό επακόλουθο. Π.χ. ''Λογικό ήταν με τέτοια βροχή να πλημμυρίσουν δεκάδες σπίτια.'' ''Αφού πυροβόλησε κατ' ευθείαν στο πλήθος, λογικό ήταν να σκοτώσει κάποιον.'' (β) Λογικό=δίκαιο. ''Υστερα απ' όσα τράβηξε απ' τον άνδρα της, λογικό ήταν να θέλει να τον εκδικηθεί.'' Άλλωστε το βασικό επιχείρημα για την δικαιολόγηση κάθε νέου νόμου που εισάγεται σε μια κοινωνία, είναι η ''λογικότητά'' του. Αυτή η ερμηνεία του λογικού σχετίζεται άμεσα με την επόμενη: (γ) Λογικό=θετικά σκόπιμο, αυτό που (πιστεύουμε ότι) προάγει το μακροπρόθεσμο γενικό συμφέρον, από μια άλλη άποψη αυτό που λέμε συνήθως ''ηθικό''. Π.χ. οι 10 εντολές του Μωσαϊκού Νόμου, δεν είναι παρά εντολές θετικής σκοπιμότητας, για την επιβίωση ενός λαού. ''Μη σκοτώσεις '', γιατί αν το κάνεις θα το κάνει και ο άλλος, και στο τέλος θα αλληλοεξοντωθούμε. Το ίδιο και η κατηγορική προσταγή του Kant: Πράξε σύμφωνα με ένα νόμο που θα μπορούσε να γίνει νόμος παγκόσμιας νομοθεσίας (ή, όπως το είπε ο Χριστός: Μην κάνεις στον άλλο, ό,τι δεν θα ήθελες να κάνει αυτός σ' εσένα). Όμως για τον ίδιο λόγο λογικό=ηθικό είναι και το έθιμο ορισμένων πρωτόγονων φυλών, τα παιδιά να τρώνε τους γονείς τους όταν πεθάνουν, αφού έτσι πιστεύουν ότι κληρονομούν τις αρετές και τη σοφία τους. (δ) Λογική=βέλτιστη επιλογή. ''Αφού βρήκα το ίδιο παντελόνι φθηνότερα σε άλλο μαγαζί, λογικό ήταν να το αγοράσω από εκεί.'' (ε) Λογικό=έλλογο, αυτό που έχει νόημα, αυτό που εντάσσεται σε μια τάξη πραγμάτων. ''Ξαφνικά παράτησε το αυτοκίνητο στη μέση του δρόμου, προκαλώντας κυκλοφοριακό κομφούζιο, και έφυγε. Εντελώς παράλογη συμπεριφορά.'' (ζ) Λογική=ένα σύστημα αρχών και κανόνων που ερμηνεύει τα γεγονότα και οδηγεί σε κάποια συμπεράσματα=Μια οπτική των πραγμάτων. ''Σύμφωνα με τη δική σου λογική θά έπρεπε όλοι όσοι είναι ύποπτοι για διάπραξη εγκλήματος να φυλακίζονται. Αλλά τότε όλοι θα είμασταν ήδη φυλακή.''

Τι κοινό έχουν οι παραπάνω σημασίες του όρου ''λογική'' όπως χρησιμοποιείται καθημερινά; (1) Αναφέρονται όλες στο πώς ορισμένα γεγονότα Β *συνδέονται* με κάποια άλλα Α, από τα οποία κατά κάποιο τρόπο προέρχονται. Π.χ. Α=βροχή, Β=πλημμύρα, ή Α=κακή συμπεριφορά, Β=εκδίκηση, ή Α=παραβίαση του νόμου, Β=τιμωρία, κλπ. (2) Τα γεγονότα είναι του πραγματικού κόσμου που μας περιβάλλει, και οι συνδέσεις αναφέρονται σ' αυτόν και όχι στον τυχόντα αφηρημένο κόσμο. Πιθανόν σε άλλους δυνατούς κόσμους να μη βρέχει, και οι σφαίρες να περνούν από το σώμα χωρίς να σκοτώνουν. (3) Η εξέταση της ''λογικής τους σύνδεσης '' σκοπό έχει να οδηγήσει σε γενικεύσεις που θα αποτελούν έγκυρες οδηγίες για την ανθρώπινη δράση. Με οδηγό αυτού του είδους τη ''λογική'' ο άνθρωπος μαθαίνει να ανταποκρίνεται στο περιβάλλον, να προβλέπει, να δρά, να επιβιώνει και να κυριαρχεί.

3 Τυπική λογική

Εκτός απ' τις παραπάνω χρήσεις του όρου ''λογική'', υπάρχει και μια άλλη έννοια της λέξης, εκείνη που συνοδεύεται από το επίθετο ''τυπική'' ή ''Αριστοτελική'', και που, όπως ίσως μερικοί θυμούνται απ' το σχολείο, ασχολείται με αστείους συλλογισμούς του τύπου ''Ο αστυφύλακας είναι όργανο, το μπουζούκι είναι όργανο, άρα ο αστυφύλακας είναι μπουζούκι''. Η λιγότερο αστείους, αλλά εξ ίσου τετριμμένους, του τύπου ''Όλα τα θηλαστικά έχουν πνεύμονες, μερικά θηλαστικά ζούν στη θάλασσα, άρα μερικά ζώα που ζούν στη θάλασσα έχουν πνεύμονες ''. Και στη λογική αυτή κάνουμε επίσης συνδέσεις προτάσεων, και μάλιστα τις ονομάζουμε *συλλογισμούς*, που έχουν τη γενική μορφή ''Αν A και B τότε Γ''. Μερικοί συλλογισμοί είναι ορθοί (όπως ο δεύτερος) και άλλοι όχι (όπως ο πρώτος). Ποιά η διαφορά ανάμεσα στις συνδέσεις των αριστοτελικών συλλογισμών και εκείνων της καθημερινής λογικής; Η διαφορά είναι η εξής και είναι σημαντική: Στην καθημερινή λογική η σύνδεση αφορά *συγκεκριμένους τύπους γεγονότων*, π.χ. βροχή-πλημμύρα, φωτιά-καπνός, βαρύτητα-πτώση, τα οποία, λόγω των συγκεκριμένων φυσικών συνθηκών/νόμων που επικρατούν στον πλανήτη μας, στο σύμπαν ή έστω και σε μια μικρότερη περιοχή της γής, εμφανίζουν αυτή τη σχέση αιτίας -αποτελέσματος. Οι συνδέσεις αυτές μπορεί να μην ισχύουν σε άλλα περιβάλλοντα. Π.χ. στο διάστημα, αν πετάξω μια πέτρα προς τα πάνω δεν θα πέσει κάτω. Άλλες συνδέσεις αφορούν απλώς νομικές συμβάσεις που θέσπισαν οι άνθρωποι σε ορισμένο τόπο και σε ορισμένη εποχή (έγκλημα-τιμωρία), γλωσσικές η κοινωνικές συμβάσεις που καθορίζουν το νόημα γλωσσικών όρων, χειρονομιών, κινήσεων κλπ. Π.χ. ''Όταν ο a του έκανε μια άσεμνη χειρονομία, λογικό ήταν ο b να εκνευρισθεί και να τον χτυπήσει.'' Σε κάθε περίπτωση οι συνδέσεις των γεγονότων της καθημερινής λογικής είναι αποτέλεσμα της *φυσικής ή κοινωνικής τάξης* των πραγμάτων που επικρατεί σε μια περιοχή του κόσμου, και αυτή την τάξη αντανακλούν και αποτυπώνουν.

Αντίθετα οι συνδέσεις των Αριστοτελικών συλλογισμών είναι *ανεξάρτητες* από τη συγκεκριμένη φυσική και κοινωνική τάξη των πραγμάτων, ή τις γλωσσικές συμβάσεις και (υποτίθεται τουλάχιστο ότι) εκφράζουν γενικότερες νομοτέλειες του είναι και της σκέψης. Μ' άλλα λόγια, οι συνδέσεις αυτές είναι ανεξάρτητες απο το συγκεκριμένο *νόημα* των όρων του συλλογισμού, άρα ισχύουν σε κάθε δυνατό περιβάλλον, ή, όπως λέμε με κάποια υπερβολή, σε *κάθε δυνατό κόσμο.* Για παράδειγμα ας αντικαταστήσουμε στον συλλογισμό πιο πάνω τους όρους, "θηλαστικό", "ζώο με πνεύμονες " και "ζώο που ζει στη θάλασσα" με τα γενικά σύμβολα X, Y, Z αντίστοιχα. Ο συλλογισμός τότε γίνεται "Όλα τα X είναι Y. Υπάρχουν X που είναι Z. Άρα υπάρχουν Y που είναι Z" και παραμένει έγκυρος, άρα ανεξάρτητος από το συγκεκριμένο νόημα των X, Y, Z. Πράγματι, θεωρώντας τις έννοιες X, Y, Z ως ολότητες (=σύνολα), η πρόταση "Όλα τα X είναι Y" σημαίνει απλώς ότι $X \subseteq Y$, και η πρόταση "Υπάρχουν X που είναι Z" σημαίνει ότι $X \cap Z \neq \emptyset$. Τέλος η πρόταση "Υπάρχουν Y που είναι Z" σημαίνει $Y \cap Z \neq \emptyset$. Τώρα η εγκυρότητα του συλλογισμού σημαίνει να συμπεράνω ότι από τις $X \subseteq Y$ και $X \cap Z \neq \emptyset$ παράγεται η $Y \cap Z \neq \emptyset$, το οποίο πράγματι προκύπτει από τις στοιχειώδεις ιδιότητες των πράξεων Boole των συνόλων. Μπορούμε συνεπώς να θεωρήσουμε το συλλογισμό αυτό ως μια νομοτέλεια που διέπει όλα τα πράγματα του κόσμου και η σκέψη μας τον συλλαμβάνει υπό τη μορφή μιας *λογικής αλήθειας* (σε αντιδιαστολή προς τις *φυσικές* ή *περιστασιακές* (contingent) αλήθειες).

Αν μας διδάσκει κάτι η ενασχόλησή μας με την στοιχειώδη τυπική λογική είναι αυτή η σημαντική διάκριση της αλήθειας, σε αλήθεια περιστασιακή (του κόσμου τούτου) και αλήθεια λογική (όλων των, ή, τουλάχιστο, μιας κλάσης, δυνατών κόσμων). Και ότι δουλειά της είναι να περιγράψει ακριβώς με κάθε λεπτομέρεια το σύστημα αυτών των λογικών αληθειών. Φυσικά οι λογικές αλήθειες με την παραπάνω διάκριση δεν μπορεί παρά να είναι (1) λίγες, συγκρινόμενες με τις μη λογικές, και (2) τόσο απλές, ώστε να καταντούν τετριμμένες και άρα αδιάφορες. Κάτι που ισχύει σ' όλες τις δυνατές συνθήκες δεν μπορεί παρά να μοιάζει αφόρητα ανιαρό, και το πληροφοριακό του βάρος να είναι κοντά στο μηδέν. Παρ' όλ' αυτά, η ανακάλυψη, ταξινόμηση και πλήρης περιγραφή αυτών των αληθειών αποτελεί ένα μείζον επίτευγμα της μαθηματικής (πλέον και όχι απλά τυπικής) λογικής. Πέραν αυτού οι λογικές αλήθειες, παρά την τετριμμένη τους υφή, είναι αυτές και μόνον αυτές που μετέχουν σε εναν *παραγωγικό συλλογισμό*, όπως είναι π.χ. όλοι οι μαθηματικοί συλλογισμοί, αλλά και κάθε συλλογισμός που θέλει να είναι αυστηρός και να στηρίζεται σε συγκεκριμένα αξιώματα (νομικά, φυσικά κλπ.)

4 Η ακαταλληλότητα της τυπικής συμπερασματολογίας

Το σύστημα της τυπικής λογικής λειτουργεί άψογα μέσα σε κάθε περιβάλλον αφηρημένων οντοτήτων και αφηρημένων σχέσεων, όπου οι γλωσσικές οντότητες που περιγράφουν τα αντικείμενα και τις σχέσεις δεν έχουν κανένα άλλο νοηματικό φορτίο πέρα από εκείνο της αλήθειας/ψεύδους. Ιδεώδες τέτοιο περιβάλλον είναι τα μαθηματικά, και από εκεί προκύπτει η τόσο στενή σύνδεση τυπικής λογικής και μαθηματικών, που οδήγησε στη μαθηματική λογική. Μέσα στον κυκεώνα των ανθρώπινων συλλογισμών, φορτωμένων με επιθυμίες, φαντασιώσεις, διαθέσεις, τρόπους, πεποιθήσεις, ιδεολογίες κλπ, οι μαθηματικοί και, λίγο γενικότερα, οι επιστημονικοί συλλογισμοί, αποτελούν ένα αποστειρωμένο δωμάτιο όπου τα παραπάνω μικρόβια δεν εισχωρούν.

Αντίθετα, το σύνολο των συγκυριακών αληθειών του κόσμου μας, ακριβώς επειδή είναι τεράστιο σε μέγεθος, και τα στοιχεία του ασύνδετα, κάθε άλλο παρά τυποποιήσιμο είναι με τα κλασσικά μέσα. Η διαφορά των δύο ‘‘λογικών’’, της τυπικής και της καθημερινής, είναι τόσο μεγάλη και χαώδης, όσο και η διαφορά ανάμεσα στην τεχνητή γλώσσα της τυπικής λογικής και την φυσική γλώσσα. Ενώ τα μαθηματικά έχουν λύσει σχεδόν όλα τα θέματα που αφορούν το σύστημα της τυπικής λογικής, δεν φαίνονται να μπορούν να κάνουν τίποτα για την καθημερινή λογική. Για να πάρουμε μια ιδέα της διαφοράς των δύο συστημάτων, αρκεί να συγκρίνουμε τις ‘‘συνεπαγωγές ’’ τους, δηλαδή τις προτάσεις της μορφής ‘‘αν-τότε’’. Η συνεπαγωγή είναι η πιο θεμελιώδης πράξη μιας λογικής, αφού μέσω αυτής πραγματοποιεί το βασικό της έργο, την συμπερασματολογία (απόδειξη).

Οι συνεπαγωγές της καθημερινής λογικής είναι όπως είπαμε φυσικές συνδέσεις (ή νομικές, γλωσσικές κλπ. συμβάσεις) του τύπου,

–Αν πέσεις από πολύ ψηλά θα σκοτωθείς,

–Αν κλέψεις θα καταδικαστείς,

–Αν οι άνθρωποι φορούν παλτό, σημαίνει ότι κάνει κρύο, κλπ.

Η γενική τους μορφή είναι ‘‘αν A τότε B’’ αλλά *δεν είναι* κάθε έκφραση της μορφής ‘‘αν A τότε B’’ αποδεκτή (ως έχουσα νόημα - ανεξάρτητα αν είναι αληθής ή ψευδής) συνεπαγωγή. Π.χ. οι εκφράσεις ‘‘Αν κλέψεις σημαίνει ότι κάνει κρύο’’, ή ‘‘Αν κάποιος φορά παλτό θα σκοτωθεί’’ μόνο ως περίεργα λογοπαίγνια μπορούν να θεωρηθούν, το νόημα των οποίων αναζητά κανείς, ίσως μάταια, μόνο μέσα σε ειδικά γλωσσικά περιβάλλοντα (context), όπως η ποίηση. Και αυτό διότι δεν υπάρχει καμμιά νοηματική σύνδεση ανάμεσα στο κλέψιμο και τη θερμοκρασία του αέρα, ή ανάμεσα στα ρούχα και το θάνατο. Στην κανονική, έλλογη (meaningful) γλωσσική επικοινωνία, οι παραπάνω συνεπαγωγές δεν είναι (απλώς) ψευδείς, είναι μη αποδεκτές ως στερούμενες νοήματος. Και αποδεκτές, αντίθετα, είναι ακριβώς εκείνες οι συνεπαγωγές "αν A τότε B", όπου η νοηματική σύνδεση ανάμεσα στα A και B είναι δεδομένη - έστω και αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, όπως π.χ στην συνεπαγωγή "Αν πέσει κάποιος από ψηλά και κάνει κρύο, δεν θα σκοτωθεί (επειδή ο αέρας είναι πυκνός και δημιουργεί άνωση)".

Αντίθετα η τυπική λογική, εξ αιτίας της ανάγκης για τυποποίηση, και επειδή δεν υπάρχει τυπικός τρόπος να διαχωριστούν οι νοηματικά συσχετισμένες από τις νοηματικά άσχετες προτάσεις, είναι υποχρεωμένη να δεχθεί *κάθε* έκφραση της μορφής "αν A τότε B" ως αποδεκτή συνεπαγωγή. Είναι η γνωστή μας "υλική συνεπαγωγή" (material implication) της τυπικής λογικής που συμβολίζουμε $A \Rightarrow B$. Για οποιεσδήποτε προτάσεις A, B η πρόταση $A \Rightarrow B$ είναι αποδεκτή. Για την πρόταση $A \Rightarrow B$ δεν τίθεται θέμα "νοήματος " αλλά μόνο τιμής αλήθειας (αλήθειας -ψεύδους). Και η $A \Rightarrow B$ είναι αληθής όταν, χονδρικά, "μεταβιβάζει" την αλήθεια (ή επιτρέπει τη ροή της αλήθειας), δηλαδή όταν οδηγεί από αληθή πρόταση σε αληθή. Αυτό σημαίνει ότι είναι ψευδής μόνον όταν οδηγεί από αληθή πρόταση σε ψευδή. Άρα η $A \Rightarrow B$ είναι ψευδής μόνον όταν η A είναι αληθής και η B ψευδής.

Όταν τα παραπάνω εφαρμοστούν στη φυσική γλώσσα, οδηγούν σε αστείες και παράδοξες καταστάσεις του τύπου: η πρόταση "Αν το χορτάρι είναι κόκκινο, η εικασία του Goldbach ισχύει" είναι αληθής. Το ίδιο και η συνεπαγωγή "Αυτό το γράμμα πρέπει να σταλεί. Άρα αυτό το γράμμα πρέπει να σταλεί ή να καεί". (Η πρόταση αυτή είναι της μορφής $A \Rightarrow A \vee B$, η οποία είναι πάντοτε αληθής.) Η αλήθεια της τελευταίας είναι πραγματικά παράδοξη. Αν ο ταχυδρόμος κάψει το γράμμα που του έδωσαν να μεταφέρει, δεν παραβιάζει την τυπική λογική.

Πέραν των παραπάνω, εμμένοντας στην τιμή αλήθειας και όχι στο νόημα, η συνεπαγωγή $A \Rightarrow B$ ισοδυναμεί λογικά με την πρόταση "όχι A ή B" ($\neg A \vee B$), δηλαδή με μια πρόταση ανεξάρτητη του $\Rightarrow$, που περιέχει την άρνηση "όχι" και τη διάζευξη "ή". Αυτό είναι αρκετά περίεργο καθώς περιμένει κανείς μια τόσο πρωταρχική πράξη, όπως η συνεπαγωγή, να μην ανάγεται σε άλλες. Αλλά εκτός αυτού, από την παραπάνω ισοδυναμία έχουμε ότι η συνεπαγωγή $A \Rightarrow A$ ισοδυναμεί με "όχι A ή A" ($\neg A \vee A$). Όμως η $A \Rightarrow A$ είναι τετριμμένα αληθής, ενώ η $\neg A \vee A$ είναι το θεμελιώδες λογικό αξίωμα της απόκλεισης του τρίτου ενδεχομένου. Υπάρχουν λογικές όπου το $\neg A \vee A$ δεν ισχύει, αλλά δεν υπάρχει λογική όπου να μην ισχύει η συνεπαγωγή $A \Rightarrow A$. Πώς γίνεται μια τετριμμένη πρόταση να ισοδυναμεί λογικά με μια μη τετριμμένη;

Συμπερασματικά: Ενώ η συνεπαγωγή "αν A τότε B" της καθημερινής λογικής-ς ''μεταβιβάζει το νόημα'' (προκαλώντας ροή νοήματος), η συνεπαγωγή $A \Rightarrow B$ της τυπικής λογικής μεταβιβάζει απλώς την τιμή αλήθειας. Η τιμή αλήθειας μπορεί να θεωρηθεί ένα μικρό (και όχι πάντα απαραίτητο) συστατικό του νοήματος. Κάθε φράση που έχει τιμή αλήθειας έχει κατ' ανάγκη νόημα, ενώ το αντίστροφο δεν συμβαίνει[1]. Επί πλέον η τιμή αλήθειας έχει το προτέρημα να παρουσιάζει μαθηματική δομή (είτε ως άλγεβρα Boole, είτε ως άλγεβρα Heyting), ενώ το νόημα, γενικά, για την ώρα τουλάχιστον, δεν φαίνεται να μπορεί να δομηθεί μαθηματικά με τα υπάρχοντα μαθηματικά εργαλεία (δες την επόμενη παράγραφο).

Αυτό εξηγεί γιατί ο $\Rightarrow$, ενώ είναι τόσο ακατάλληλος για τη φυσική γλώσσα, παραμένει ένας τόσο βασικός λογικός σύνδεσμος: Αφ' ενός μεν εμφανίζει μαθηματική δομή ως πράξη στο σύνολο των αληθοτιμών, αλλά και άλλα μαθηματικά γνωρίσματα στη θεωρία αποδείξεων, αφ' ετέρου η λειτουργία του στο πεδίο των μαθηματικών και άλλων αφηρημένων συλλογισμών, όπου το μόνο ''μέρος του νοήματος '' που μετράει είναι η τιμή αλήθειας, είναι αψεγάδιαστη. Αυτό συμβαίνει επειδή σε μια μαθηματική γλώσσα - σε πλήρη αντίθεση προς ό,τι συμβαίνει με τη φυσική γλώσσα - όλες οι προτάσεις είναι νοηματικά συσχετισμένες (όπως κι αν εννοεί κανείς την νοηματική συσχέτιση: συντακτική ή σημασιολογική), άρα το μόνο που απομένει να μεταβιβασθεί είναι η τιμή αλήθειας. Πάρτε ας πούμε τη γλώσσα της Θεωρίας Αριθμών. Αυτή αποτελείται από τα μαθηματικά σύμβολα $+$, $\cdot$, S, 0, $\leq$, και τα λογικά σύμβολα $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\neg$, $\exists$, $\forall$, $=$, x, y, κλπ. Αν ϕ, ψ είναι δύο οποιεσδήποτε προτάσεις της γλώσσας αυτής, τότε η σημασιολογική τους συσχέτιση είναι δεδομένη, καθώς και οι δύο αναφέρονται στις ιδιότητες των θετικών ακεραίων. Η συντακτική τους συσχέτιση είναι επίσης δεδομένη αφού οι ϕ, ψ φτιάχνονται με κάποια από τα παραπάνω σύμβολα και μόνο.

5 Τι είναι ''νόημα'';

Στα παραπάνω η έννοια του νοήματος επανέρχεται ξανά και ξανά ως κάτι οικείο και εύκολα αντιληπτό από τον καθένα. Το νόημα μοιάζει με την έννοια του χρόνου που, όπως είχε πει ο Αυγουστίνος, όλοι καταλαβαίνουμε αλλά δεν μπορούμε να ορίσουμε. Ο ορισμός βέβαια είναι το λιγότερο. Το ζητούμενο θα

[1] Αυτό είναι προφανές για μη αποφατικές προτάσεις, όπως ερωτηματικές, προστακτικές κλπ. Μια ερώτηση έχει προφανώς νόημα αλλά δεν είναι αληθής ή ψευδής. Όμως ισχύει και για αποφατικές. Το πιο πρόχειρο παράδειγμα είναι το Παράδοξο του Ψεύτη: Η πρόταση ''Αυτή η πρόταση είναι ψευδής '' δεν έχει τιμή αλήθειας (τουλάχιστον κλασσική τιμή 0 ή 1), όμως προφανώς έχει νόημα, αφού ''σημαίνει'' κάτι, ότι μια συγκεκριμένη πρόταση είναι ψευδής.

ήταν μια ‘‘θεωρία του νοήματος ’’ που να καλύπτει τις βασικές πλευρές και λειτουργίες της έννοιας και να είναι ευρέως αποδεκτή. Τουλάχιστον ως προς τον χρόνο, έχουμε φτιάξει τα ρολόγια που τον μετρούν (δηλαδή με μια έννοια τον ‘‘καταλαβαίνουν’’) με τρόπο που δεν αμφισβητείται από κανέναν. Δεν υπάρχει όμως καμμιά μηχανή που να ‘‘καταλαβαίνει’’ το νόημα, παρά μόνο στο βαθμό που το νόημα μπορεί να ‘‘ανακτηθεί’’ πλήρως από τη σύνταξη, δηλαδή στο βαθμό που κάθε συντακτικός τύπος έχει ένα μοναδικό νόημα (αντικείμενο ή τιμή αλήθειας) σε ένα δοσμένο παριβάλλον. Αυτό όμως συμβαίνει μόνο σε τεχνητές γλώσσες, και σ′ αυτή την περίπτωση το νόημα ταυτίζεται με την ‘‘αναφορά’’.

Ο πρώτος που έκανε τη διάκριση ανάμεσα στην ‘‘αναφορά’’ ενός γλωσσικού όρου (Bedeutung στα Γερμανικά, reference, denotation στα Αγγλικά) και στο ‘‘νόημα’’ (Sinn στα Γερμανικά, meaning, sense στα Αγγλικά) ήταν ο Cottlob Frege (δες [5]). Το κλασικό παράδειγμα είναι οι όροι: ‘‘Αυγερινός ’’, ‘‘Αποσπερίτης ’’, ‘‘πλανήτης Αφροδίτη’’. Και οι τρείς έχουν την ίδια αναφορά, αναφέρονται στο ίδιο ουράνιο σώμα, όμως έχουν διαφορετικό νόημα. Μιλούν για το αντικείμενο αυτό ‘‘από διαφορετική σκοπιά’’. Στην περίπτωση φράσεων όπως ‘‘η γη είναι σφαιρική’’, ‘‘ο 2 είναι περιττός ’’, η αναφορά τους ειναι, κατά τον Frege, η *τιμή αλήθειας* τους (αλήθεια, ψεύδος). Όσο για το *νόημα* των φράσεων, δεν υπάρχει κάποια κοινά αποδεκτή άποψη για το πως ακριβώς ορίζεται. Προϋποθέτει την αναφορά αλλά δεν εξαντλείται σ′ αυτήν. Στις τεχνητές γλώσσες νόημα=αναφορά και έτσι το πρόβλημα του νοήματος είναι ουσιαστικά λυμένο. Π.χ. η θεωρία του νοήματος για τις μαθηματικές γλώσσες είναι ο κλάδος της μαθηματικής λογικής που λέγεται θεωρία μοντέλων (model theory). Πρόκειται για έναν παλιό και καλά αναπτυγμένο κλάδο, με ισχυρά εργαλεία και πολλά και βαθειά θεωρήματα.

Γύρω από το θέμα της σημασιολογίας των φυσικών γλωσσών υπάρχει μια τεράστια βιβλιογραφία, κυρίως απ’ τη μεριά των φιλοσόφων της γλώσσας. Ένας αρκετά καλός κατάλογος σχετικών πηγών υπάρχει στο [2]. Εδώ δεν πρόκειται να αναφερθούμε ούτε καν στις γενικές τάσεις της γλωσσολογικής έρευνας γύρω από το νόημα, οι οποίες είναι πάρα πολλές. Θα θίξουμε μόνο μερικά ερωτήματα γύρω από το νόημα που το καθιστούν σκοτεινό και δυσπρόσιτο.

(1) **Νόημα - μη νόημα**. Βασικό συστατικό της κατανόησης μιας έννοιας είναι η οριοθέτηση της ως προς κάτι που δεν είναι. Είπαμε ήδη πιο πάνω ότι η τιμή αλήθειας αποτελεί κατά κάποιο τρόπο μέρος μόνο του νοήματος, και ότι μπορούμε εύκολα να διαχωρίσουμε τις εκφράσεις που έχουν τιμή αλήθειας απ’ αυτές που δεν έχουν. Αντίθετα δεν υπάρχει για την ώρα κάποιος αποτελεσματικός τρόπος (κριτήριο) να διαχωρίσουμε τις εκφράσεις που έχουν νόημα απ’ αυτές που δεν

έχουν. Δεν υπάρχει π.χ. κάτι ανάλογο με το διαγώνιο επιχείρημα του Ψεύτη που μας βγάζει από την τιμή αλήθειας, για να μας βγάλει από το νόημα. Βέβαια υπάρχει ένας προφανής τρόπος να ''βγούμε'' από το νόημα: Να παραβιάσουμε τη γραμματική και το συντακτικό της γλώσσας με χονδροειδή τρόπο. Π.χ.

(α) ''Με μανία πράσινα κοιμάται άχρωμα ιδέες ''.

Μία συγγενική προς τις νοηματικά αποδεκτές προτάσεις έννοια είναι οι ''συντακτικά αποδεκτές ''(grammatical). Παρά την αντίθετη εντύπωση, ούτε η κλάση των συντακτικά αποδεκτών προτάσεων (μιας συγκεκριμένης φυσικής γλώσσας) είναι σαφώς οριοθετημένη, καθώς δεν υπάρχει κάποιος που να ορίζει εκ των προτέρων τι είναι συντακτικά σωστό και τι όχι. Το τι είναι συντακτικά αποδεκτό το αναγνωρίζει αυτόματα κάθε πραγματικός γνώστης της γλώσσας, μέ βάση το γλωσσικό του αισθητήριο (άρα δεν είναι τυπικά ορίσιμη έννοια). Μερικοί ισχυρίζονται ότι μπορούμε να ταυτίσουμε τις νοηματικά αποδεκτές φράσεις με τις συντακτικά αποδεκτές. Ο Chomsky [3] το απορρίπτει αυτό: Από τη μια μεριά υπάρχουν νοηματικά αποδεκτές φράσεις που δεν είναι συντακτικά αποδεκτές. Π.χ. στα Αγγλικά οι φράσεις

(β) "Read you a book on modern music?"

(γ) "The child seems sleeping",[2]

δεν είναι συντακτικά αποδεκτές, όμως έχουν προφανές νόημα. Και από την άλλη υπάρχουν φράσεις συντακτικά αλλά όχι νοηματικά αποδεκτές. Π.χ. η φράση:

(δ) ''Άχρωμες πράσινες ιδέες κοιμούνται με μανία ''

είναι γραμματικά σωστή, αλλά, κατά τον Chomsky, τουλάχιστον ''παραδοξολογική''. Παρατηρήστε ότι η φράση (δ) (στα Αγγλικά: "Colorless green ideas sleep furiously") είναι μια αναδιάταξη των λέξεων της νοηματικά μη αποδεκτής φράσης (α).

Πάντως το κατά πόσο η (δ) έχει νόημα ή όχι είναι ανοικτό. Αν την απορρίψουμε, πρέπει να απορρίψουμε σχεδόν όλη τη σουρρεαλιστική ποίηση ως α-νόητη, πράγμα με το οποίο ελάχιστοι θα συμφωνούσαν.

(2) **Πλάτος - βάθος (extension - intension)**. Στο τελευταίο παράδειγμα (δ), πιθανόν κάποιος θα υποστήριζε ότι η φράση δεν περιγράφει καμμιά υπαρκτή, ή, έστω, δυνατή, κατάσταση, γι' αυτό και δεν έχει νόημα. Και ότι το νόημα προϋποθέτει ύπαρξη, ή, τουλάχιστο, δυνατότητα ύπαρξης. Η σχέση νοήματος και πλάτους της έννοιας (extension) είναι παλιά. Το νόημα της λέξης ''λεμόνι''

[2] Οι φράσεις (β), (γ) μιμούνται τις

(β′) Have you a book on modern music?

(γ′) The book seems interesting,

αντιστοίχως, οι οποίες είναι συντακτικά αποδεκτές είναι από μια άποψη το πλάτος της, δηλαδή το σύνολο(;) των λεμονιών. Από μια άλλη άποψη το νόημα της λέξης 'λεμόνι' είναι το βάθος (intension) της έννοιας, δηλαδή η περιγραφή της ως εσπεριδοειδές, με κίτρινο χρώμα, ξινή γεύση, ευχάριστο άρωμα κλπ. Ότι το νόημα μιας λέξης δεν μπορεί να ταυτιστεί με το πλάτος της προκύπτει απ' το ότι υπάρχουν λέξεις με νόημα αλλά με κενό πλάτος. Π.χ. "ο Άη-Βασίλης ", ή "ο σημερινός βασιλιάς της Γαλλίας ". Επίσης υπάρχουν λέξεις με διαφορετικό νόημα αλλά το ίδιο πλάτος. Π.χ. Ο Hilary Putnam στο [9] φέρνει το παράδειγμα "ον με καρδιά" και "ον με νεφρά", ως εκφράσεις που έχουν το ίδιο πλάτος, αλλά προφανώς άλλο νόημα (γενικά στη φυσική γλώσσα διαφορετικές λέξεις ή εκφράσεις δεν έχουν ποτέ το ίδιο *ακριβώς* νόημα. Αλλιώς δεν θα υπήρχε λόγος να υπάρχουν).

Αλλά ούτε και με το βάθος της έννοιας μπορεί να ταυτιστεί το νόημα. Αυτό ακριβώς αποδεικνύει με περίτεχνα επιχειρήματα ο H. Putnam στο κλασσικό του άρθρο [9]. Για τις λεπτές δυσκολίες και τις παγίδες που κρύβει το νόημα, δες και το [10], ειδικά τα άρθρα "On what there is" και "Meaning in linguistics".

(3) **Σημασιολογικό περιβάλλον (context)**. Είναι γνωστό ότι στη φυσική γλώσσα οι λέξεις και φράσεις αποκτούν το ειδικό τους νόημα στο σημασιολογικό περιβάλλον όπου εκφέρονται. Π.χ. "Αυτό το σπίτι δεν έχει καμμιά ασφάλεια. Ο κάθε κλέφτης μπορεί να μπει με την άνεσή του". "Αυτό το σπίτι δεν έχει καμμιά ασφάλεια. Αν πάρει φωτιά δεν πρόκειται να μας αποζημιώσει κανείς ". Η φράση "Αυτό το σπίτι δεν έχει καμμιά ασφάλεια" γίνεται διφορούμενη εξ αιτίας των διαφορετικών σημασιών της λέξης "ασφάλεια". Αν έχουμε ολόκληρο το σημασιολογικό πεδίο, τα μέρη αποσαφηνίζονται. Το αντίστροφο δεν συμβαίνει. Ο G. Frege το ανήγαγε αυτό σε θεμελιώδη θέση:

"Είναι αρκετό η πρόταση, ως σύνολο, να έχει νόημα. Αυτό είναι που δίνει στα μέρη της πρότασης το περιεχόμενό τους." (Δές [4], §60.)

Με βάση την παραπάνω θέση του Frege, μπορεί να δείξει κανείς ότι αν διαθέτουμε μια έννοια νοήματος για τις *προτάσεις*, τότε μπορούμε εύκολα να την επεκτείνουμε και σε λέξεις ή, γενικότερα, τμήματα προτάσεων (δες [6]). Όμως έτσι το πρόβλημα του νοήματος απλώς μετατοπίζεται από τις λέξεις και τους όρους στις προτάσεις.

Τι μπορούν να πούν τα μαθηματικά για όλα αυτά; Υπήρξαν αρκετές προσπάθειες να αναπαρασταθεί το *γλωσσικό* νόημα, δηλαδή το νόημα όρων και φράσεων της φυσικής γλώσσας, με τη βοήθεια μαθηματικών αφαιρέσεων. Μια αρκετά εντυπωσιακή θεωρία, τουλάχιστο ως προς τις επιδιώξεις, ήταν εκείνη του Richard Montague που πραγματεύεται τη φυσική γλώσσα (ειδικά τα Αγγλικά) με τη βοήθεια του λ-λογισμού (λ-calculus), όπως μια τυπική γλώσσα (το [13] είναι μια καλή ανθολογία των σημαντικότερων εργασιών του). Στη θεωρία αυτή το νόημα είναι, χονδρικά, μια συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε γλωσσικό όρο και σε κάθε δυνατό κόσμο (possible world) την αναφορά του όρου, δηλαδή το αντικείμενο που συμβολίζει, στον συγκεκριμένο κόσμο. Ωστόσο το γλωσσικό νόημα αποτελεί σημαντικό μεν αλλά κομμάτι μόνο του νοήματος γενικά. Νόημα δεν έχουν μόνο οι λέξεις και οι φράσεις, αλλά τα πάσης φύσεως ''σημεία'' - μια εικόνα, ένα σκίτσο, μια χειρονομία, ακόμα και μια φυσική διαδικασία. Π.χ. Λέμε ότι ''καπνός σημαίνει φωτιά'', δηλαδή η θέα του καπνού μας κάνει να *συμπεράνουμε* ότι κάπου εκεί υπάρχει φωτιά, με τον ίδιο τρόπο που μας κάνει να συμπεράνουμε το ίδιο πράγμα το *άκουσμα της λέξης* ''φωτιά''. Παρόμοια η θέα από το παράθυρο του σπιτιού μας ανθρώπων που φορούν παλτό *σημαίνει* ότι κάνει κρύο.

Στις αρχές της δεκαετίας του '80, ο Jon Barwise με συνεργάτες του ξεκίνησε μια προσπάθεια δημιουργίας μιας γενικής (λογικο-μαθηματικής) θεωρίας του νοήματος και της πληροφορίας, αρχής γενομένης με το βιβλίο [1], που οδήγησε στη λεγόμενη ''θεωρία και λογική των καταστάσεων'' (situation theory, situation logic). Η βασική ιδέα στη θεωρία αυτή είναι ότι το νόημα προκύπτει από συσχετίσεις (constraints) ανάμεσα σε διάφορους ''τύπους (είδη) καταστάσεων''. Π.χ. Το είδος των καταστάσεων οπου εμφανίζεται καπνός συσχετίζεται με το είδος των καταστάσεων όπου εμφανίζεται φωτιά, με αποτέλεσμα το πρώτο είδος κατάστασης να *σημαίνει* το δεύτερο. Ο κόσμος μας είναι γεμάτος από τέτοιες συσχετίσεις που ο εγκέφαλός μας αποθηκεύει από πολύ νωρίς. Υπάρχουν φυσικές συσχετίσεις (που οφείλονται σε φυσικούς νόμους), νομικές, κοινωνικές, γλωσσικές κλπ. Ο J. Barwise ήταν ήδη ένας γνωστός μαθηματικός λογικός, συγκεκριμένα μοντελο- θεωρίστας (Barwise compactness theorem), όταν, στις αρχές της δεκαετίας του '80, θέλησε να κάνει το μεγάλο βήμα από τη σημασιολογία των μαθηματικών γλωσσών (θεωρία μοντέλων) στη σημασιολογία των φυσικών γλωσσών, και άρα στη θεωρία του νοήματος. Το Center for the Study of Language and Information (CSLI) που ιδρύθηκε το 1983 στο Stanford για το σκοπό αυτό παρήγαγε και εξακολουθεί να παράγει μεγάλο αριθμό δημοσιεύσεων γύρω από αυτό το θέμα. Το 1989 κυκλοφόρησε από τις εκδόσεις CSLI το βιβλίο [2] που περιέχει μια συλλογή άρθρων του συγγραφέα και αποτελεί ένα είδος σύνοψης και αποτίμησης της δεκαετούς ερευνητικής δουλειάς του στο χώρο της θεωρίας των καταστάσεων. Προς το τέλος του βιβλίου (σελ. 295-297) γράφει (μετάφραση δική μου):

> ''Το όνειρο μιας μαθηματικής θεωρίας του νοήματος έχει εμπνεύσει μαθηματικούς από τον Αριστοτέλη, μέχρι τον Descartes, τον Peirce, τον Frege, τον Russell και πιο σύγχρονους λογικούς. Πήγε τη λογική εκεί που είναι σήμερα. Αυτό που λέω είναι ότι δεν πρέπει να είμαστε ευχαριστημένοι με την τωρινή κατάσταση των πραγμάτων αλλά πρέπει να συνεχίσουμε να κυνηγάμε το όνειρο που μας πήγε τόσο μακριά.
>
> Μια μαθηματική θεωρία του νοήματος, όταν πραγματικά ενηλικιωθεί, θα έχει βαθειές επιπτώσεις σε μια δέσμη προβλημάτων που μας ταλανίζουν σήμερα, προβλήματα στη μελέτη της γλώσσας, της νοημοσύνης και του νου. Η θεωρία καταστάσεων είναι μια απόπειρα να αναπτυχθεί ένα τέτοιο πεδίο. Είναι αρκετά φυσικό να πιστεύω ότι σκοπεύει στην σωστή κατεύθυνση. Αλλά το αν έχω δίκιο ή όχι είναι μικρότερης σημασίας από το όραμα ότι ένας *λογισμός του νοήματος είναι δυνατός*, μια πρόκληση που αξίζει την προσπάθεια'' (έμφαση δική μου).

Λίγο πιο κάτω όμως, όταν ο συγγραφέας αποτιμά τα *(νέα) μαθηματικά εργαλεία* που χρησιμοποίησε κατά την ανάπτυξη της θεωρίας, το αισιόδοξο μήνυμα γίνεται μάλλον μελαγχολία:

> ''Αλλά μαζί με το αίσθημα της σημαντικότητας του εγχειρήματος και της προόδου που σημειώσαμε κατά τη διεξαγωγή του, υπάρχει και ένα αντίθετο συναίσθημα. Διότι πρέπει να παραδεχτώ ότι *έχουμε αποτύχει, μέχρι τώρα, να κάνουμε τη θεωρία ένα κομμάτι σοβαρών μαθηματικών.* Ακόμη χειρότερα, έχοντας μπροστά μου όλες αυτές τις εργασίες μαζεμένες, με κάνει να συνειδητοποιώ *πόσο μικρό ποσοστό της έρευνάς μου όλη αυτη τη δεκαετία δαπανήθηκε για τα μαθηματικά,* τα οποία είναι το πραγματικό μου όνειρο'' (έμφαση δική μου).

Σύντομα όμως ξαναβρίσκει την αισιοδοξία του:

> ''Συνεχίζω να πιστεύω ότι η θεωρία των καταστάσεων είναι στη σωστή πορεία προς το στόχο να οικοδομήσουμε τα μαθηματικά του νοήματος. Φυσικά, μπορεί να κάνω λάθος. Ίσως κάποια άλλη προσέγγιση, τελείως διαφορετική, μπορεί να κάνει την εμφάνισή της. Αλλά για ένα πράγμα είμαι βέβαιος. *Κάποιος* τελικά θα βάλει τα θεμέλια των μαθηματικών του νοήματος '' (έμφαση του συγγραφέα).

Ο J. Barwise κλείνει το βιβλίο παραθέτοντας έναν διάλογο ανάμεσα στον λογικό Stanislaw Ulam και τον μαθηματικό Gian-Carlo Rota. Η στιχομυθία αναφέρεται από τον ίδιο τον Rota στο [11]. Ο Ulam τονίζει τη σπουδαιότητα του γλωσσικού περιβάλλοντος (context) στην κατανόηση του νοήματος.

''—Rota: Αλλά αν έχεις δίκιο, τότε τι γίνεται με την αντικειμενικότητα, μια ιδέα που τόσο πλήρως τυποποιείται στη μαθηματική λογική και τη θεωρία συνόλων, όπου εσύ ο ίδιος δούλεψες για πολλά χρόνια στα νιάτα σου;

—Ulam: Αλήθεια; Τι σε κάνει να νομίζεις ότι η μαθηματική λογική αντιστοιχεί στον τρόπο που σκεφτόμαστε; Πάσχεις απ' αυτό που οι Γάλλοι αποκαλούν ''επαγγελματική διαστροφή'' (deformation professionelle).

—Rota (κάνοντας τον έκπληκτο): Και τι προτείνεις, να εγκαταλείψουμε τη μαθηματική λογική;

—Ulam: Ακριβώς το αντίθετο. Η λογική τυποποιεί μόνο μερικές απ' τις διαδικασίες με τις οποίες σκεφτόμαστε. Έχει έρθει η ώρα να εμπλουτίσουμε την τυπική λογική προσθέτοντας μερικές άλλες θεμελιώδεις έννοιες... Μη χάνεις την πίστη σου. Ένα ισχυρό κάστρο είναι τα μαθηματικά. Θα απαντήσουν στην πρόκληση. Πάντα το έκαναν.''

6 Μαθηματικά και ασάφεια

Πίσω από την αδυναμία των υπαρχόντων μαθηματικών να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις της φυσικής γλώσσας και του νοήματος κρύβεται κατά τη γνώμη μου η αδυναμία τους να πραγματευτούν κάτι πιο θεμελιώδες, κάτι που διαποτίζει τη φυσική γλώσσα και το νόημα, την *ασάφεια* (vagueness, fuzziness). Στη συντριπτική τους πλειοψηφία (με ελάχιστες μόνο εξαιρέσεις) οι ιδιότητες (επίθετα), αλλά συχνά και οι έννοιες (ουσιαστικά) που χρησιμοποιεί η φυσική γλώσσα, είναι ασαφείς. Με τον όρο ''ασαφής ιδιότητα'' εννοούμε εδώ την ιδιότητα το πλάτος (extension) της οποίας δεν έχει σαφή σύνορα, αλλά, αντίθετα, τα σύνορά της είναι μια γκρίζα περιοχή. Π.χ. οι ιδιότητες ''ψηλός'', ''έξυπνος'', ''φαλακρός'', ''μεγάλος'', ''ξανθός'',''κατανοητός'', αλλά και οι έννοιες ''δέντρο'', ''λεμόνι'', ''ψάρι'' κλπ, είναι αυτού του είδους. (Σαφείς (crisp) ιδιότητες αποτελούν τα ''νεκρός'', ''έγκυος'' και βέβαια όλες οι ιδιότητες που αφορούν μαθηματικά αντικείμενα, όπως ''άρτιος αριθμός'', ''πρώτος αριθμός'', ''συνεχής συνάρτηση'' κλπ.) Αν παραστήσουμε τις έννοιες αυτές με σύνολα X, η ασάφειά τους έγκειται στο ότι υπάρχουν αντικείμενα που *σαφώς ανήκουν* στο X, άλλα που *σαφώς δεν ανήκουν* στο X, και άλλα που είναι δύσκολο να πεις αν ανήκουν ή όχι (ή ''ανήκουν κατά έναν ορισμένο βαθμό''). Το πιο ακατανόητο είναι το πώς η ανθρώπινη επικοινωνία διεξάγεται ομαλά σε μια γλώσσα που έχει ως κανόνα την ασάφεια! Κάθε προσπάθεια να προσπελάσουμε το νόημα προσκρούει πάνω (και) στην ασάφεια. Το ίδιο το νόημα είναι μια ασαφής έννοια. Πώς να το αναπαραστήσουμε όταν δεν κατανοούμε τα όριά του; (Δες πιο πάνω την αδυναμία να χαράξουμε τη γραμμή ανάμεσα στο νόημα και το μη νόημα.)

Τι μπορούν να κάνουν τα μαθηματικά απέναντι στην ασάφεια; Ορισμένοι ίσως πουν ότι κάθε εγχείρημα είναι καταδικασμένο, επειδή τα μαθηματικά, όντας το πρότυπο της σαφήνειας και της ακρίβειας, δεν είναι δυνατό να μπορούν (και να θέλουν) να αναπαραστήσουν το ακριβώς αντίθετό τους. Όμως αυτή είναι μια εντελώς επιφανειακή σκέψη που δεν νομίζω ότι αξίζει σοβαρή συζήτηση. Το ζητούμενο είναι αν η ασάφεια έχει κάποια δομή και όχι αν η ''φύση'' της είναι αντίθετη από τη ''φύση'' των μαθηματικών.

Τα μαθηματικά από τη δεκαετία του '60 βρήκαν, σε πρακτικό επίπεδο, έναν τρόπο να αναπαριστούν και να χειρίζονται μερικές πλευρές της ασάφειας. Είναι η θεωρία των ασαφών συνόλων (fuzzy set theory) του L. Zadeh (δες π.χ. το [17]). Έστω V μια κλάση αντικειμένων. Ένα *σαφές* υποσύνολο X του V μπορεί να θεωρηθεί και ως συνάρτηση $X : V \to \{0,1\}$: Για κάθε $x \in V$, $X(x) = 1$ αν $x \in X$ και $X(x) = 0$ αν $x \notin X$. Αν τώρα το X είναι *ασαφές* και υπάρχουν γκρίζες περιοχές στα σύνορά του, δεν έχουμε παρά να αντικαταστήσουμε το σύνολο $\{0,1\}$ με το διάστημα των πραγματικών αριθμών $[0,1]$. Και να ονομάσουμε ασαφές υποσύνολο του V κάθε συνάρτηση $X : V \to [0,1]$. Όταν π.χ. $X(x) = 0.85$, αυτό το ερμηνεύουμε λέγοντας ότι το ''x ανήκει στην κλάση X με βαθμό 0.85''. Με λίγη προσοχή, μπορούμε να μεταφέρουμε πολλές από τις σχέσεις και πράξεις των κανονικών συνόλων και να φτιάξουμε έναν λογισμό των ασαφών συνόλων. (Π.χ. για το συμπλήρωμα $V - X$ του X ορίζουμε $(V - X)(x) = 1 - X(x)$, $X \subseteq Y$ αν $X(x) \leq Y(x)$ για κάθε $x \in V$, κλπ.)

Όμως αυτή η ''ποσοτικοποίηση'' της ασάφειας, αν και έχει κάποιες εφαρμογές στην τεχνολογία (τα σύγχρονα πλυντήρια χειρίζονται τις ασαφείς ιδιότητες ''ζεστό-κρύο'' με βάση ένα πρόγραμμα ποσοτικής ασαφούς λογικής) απέχει πολύ απ' το να μας βοηθάει να καταλάβουμε τη *δομή* της. Έχει δομή η ασάφεια; Υπό κάποια έννοια ναι. Οι ασαφείς ιδιότητες, όπως και οι σαφείς, διαμερίζουν την πραγματικότητα (ή ένα μέρος της) σε ξένες κλάσεις. Η διαφορά βρίσκεται στα σύνορα. Π.χ. η ιδιότητα ''άρτιος '' χωρίζει τους φυσικούς αριθμούς σε δύο κλάσεις - άρτιους και περιττούς - που το σύνορό τους έχει μηδενικό πλάτος και το πέρασμα γίνεται με ένα άλμα. Αντίθετα η ιδιότητα ''ζεστός '' χωρίζει και πάλι π.χ. τις διάφορες καταστάσεις του νερού σε δύο κλάσεις - ζεστό και μη ζεστό - αλλά τώρα το πέρασμα από τη μια στην άλλη είναι σε μεγάλο βαθμό ακατανόητο. Πώς περνάμε από την κατάσταση του κρύου στην κατάσταση του ζεστού (προσθέτοντας μια μονάδα καυτού νερού ανά μονάδα χρόνου); Πρόκειται για το λεγόμενο ''παράδοξο του φαλακρού'' (Bald Man Paradox): Αν ένας άντρας χάνει καθε μέρα μια τρίχα από τα μαλλιά του, σίγουρα κάποια μέρα θα γίνει φαλακρός. Όμως δεν υπάρχει κάποια *συγκεκριμένη* τέτοια μέρα. Διότι συμφωνούμε όλοι πως αν από έναν μη φαλακρό αφαιρέσουμε μια μοναδική τρίχα, αυτός παραμένει μη φαλακρός (και ισοδύναμα, αν σε έναν φαλακρό προσθέσουμε μια τρίχα, αυτός παραμένει φαλακρός). Με τη μορφή αυτή, προφανώς, η ασάφεια οδηγεί στην αποτυχία της μαθηματικής πλήρους επαγωγής.

Το πέρασμα αυτό δεν μπορεί να αναπαρασταθεί με τα συμβατικά μέσα. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι ποσοτικοποιούμε τις ιδιότητες με τους αριθμούς του $[0, 1]$ (ή με την κλίμακα του θερμομέτρου). Τότε θα πάρουμε μια ευθεία που αρχίζει με το πολύ κρύο (0) και καταλήγει στο πολύ ζεστό (1). Χονδρικά ''κρύα'' είναι η περιοχή της κλίμακας με βαθμό < 0.5 και ''ζεστή'' η περιοχή με βαθμό > 0.5. Αυτό σημαίνει ότι (λόγω της συνέχειας της κλίμακας) για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορείτε να βρείτε ένα κρύο σημείο K και ένα ζεστό σημείο Z που απέχουν απόσταση $|KZ| < \varepsilon$. Από την άλλη μεριά, η κοινή λογική μας λέει ότι δύο οποιαδήποτε ζεστά σημεία, ή δύο οποιαδήποτε κρύα σημεία, είναι *συγγενέστερα* μεταξύ τους, άρα πρέπει να απέχουν λιγότερο, απ' όσο ένα οποιοδήποτε κρύο και ένα οποιοδήποτε ζεστό. Μ' άλλα λόγια, αν K_1, K_2 είναι κρύα σημεία και Z_1, Z_2 είναι ζεστά σημεία, πρέπει $|K_1K_2| < |K_iZ_j|$ και επίσης $|Z_1Z_2| < |K_iZ_j|$. Αυτό προφανώς είναι ασυμβίβαστο με την προηγούμενη αναπαράσταση της ασάφειας μέσω πραγματικών αριθμών. Υπάρχει μαθηματική αναπαράσταση που να συμμορφώνεται με την προηγούμενη απαίτηση, αλλά απαιτεί τη χρήση μη συμβατικών (nonstandard) φυσικών αριθμών, οι οποίοι δεν έχουν καμμιά εφαρμογή σε πραγματικές καταστάσεις (δες [14]). Μεγαλύτερο πρόβλημα ανακύπτει στη γενικότερη διαίρεση της πραγματικότητας μέσω ασαφών φυσικών ειδών (natural kinds), ή χρωματικών τόνων: Δύο ροζ αντικείμενα, ή δύο κόκκινα, πρέπει να απέχουν μεταξύ τους λιγότερο απ' όσο απέχουν ένα ροζ και ένα κόκκινο. Επί πλέον, πρέπει ανάμεσα στο ροζ και το κόκκινο να υπάρχει χώρος για μια ενδιάμεση απόχρωση, κ.ο.κ. (δηλ. η διάταξη να είναι πυκνή). Και πάλι τα nonstandard μοντέλα των φυσικών αριθμών μοντελοποιούν τις δομικές απαιτήσεις της ασάφειας, αλλά παραμένουν απομακρυσμένα από την πραγματικότητα.

Το περίεργο, όπως είπαμε πιο πάνω, είναι η ευελιξία με την οποία ο ανθρώπινος εγκέφαλος μέσω της φυσικής γλώσσας χειρίζεται την ασάφεια, χωρίς να έχει ανάγκη ούτε τους πραγματικούς αριθμούς ούτε άλλη τυπική αναπαράσταση, αλλά και χωρίς να εγκαταλείπει την κλασσική δίτιμη λογική (καταφεύγοντας π.χ. στην πλειονότιμη ασαφή λογική). Το πετυχαίνει αυτό με *δομικούς* μάλλον παρά ποσοτικούς τρόπους (πραγματικούς αριθμούς) χρησιμοποιώντας απλώς μερικούς προσδιορισμούς ''έντασης '' (φαινομενικά ποσοτικούς αλλά στην ουσία δομικούς) - ''πολύ'', ''πάρα πολύ'', ''αρκετά'', ''λίγο'', ''εξαιρετικά'', κλπ - μπροστά από τα ασαφή επίθετα, καθώς και συγκριτικές εκφράσεις (παραθετικά) - ''ψηλότερος από'', ''πάρα πολύ καλύτερος από'' κλπ. Και μάλιστα τα ασαφή και *μόνον* κατηγορήματα δέχονται τέτοιους προσδιορισμούς (το μυαλό μας απορρίπτει αυτόματα ως γελοία την έκφραση ''ολίγον νεκρός '' ή ''πάρα πολύ έγκυος ''). Οι προσδιορισμοί αυτοί από μαθηματική άποψη είναι *τελεστές* και μπορούν όλοι να αναχθούν σε έναν τελεστή "very", συμβολικά v. Αν X παριστά ας πούμε το σύνολο των ψηλών ανθρώπων, το $v(X)$ παριστά το σύνολο των πολύ ψηλών, το $v^2(X)$ το σύνολο των πολύ-πολύ ψηλών, κλπ, και δεχόμαστε ότι για κάθε X, $v(X) \subseteq X$, άρα $X \supseteq v(X) \supseteq v^2(X) \supseteq \cdots$. Με την κατάλληλη τυποποίηση μέσα σε μια κλάση συνόλων ο v μπορεί να αναπαραστήσει αρκετές πλευρές της ασάφειας, αλλά και να οδηγήσει στην επανάκτηση της ποσοτικής προσέγγισης του Zadeh. Η δομική αυτή προσέγγιση της ασάφειας περιέχεται στην [15].

Παρά τις μεμονωμένες προσεγγίσεις διαφόρων *πλευρών* της ασάφειας, ωστόσο, το φαινόμενο αυτό καθ' εαυτό διαφεύγει της σύλληψης. Τα υπάρχοντα μέσα δεν φαίνεται να επαρκούν για το σκοπό αυτό. Ένας ''λογισμός '' (calculus) των ασαφών κατηγορημάτων - λογισμός αυθεντικός και όχι μια καρικατούρα εξομοίωσης, π.χ. με πραγματικούς αριθμούς - δεν είναι για την ώρα ορατός, όπως δεν είναι ορατός και ένας λογισμός του νοήματος που, όπως είδαμε πιο πάνω, οραματίσθηκε ο Barwise. Θα διακινδύνευα την εικασία ότι αν κάποτε νέα μαθηματικά μέσα κάνουν δυνατό έναν λογισμό της ασάφειας, τότε αυτά τα ίδια μέσα θα κάνουν δυνατό και έναν λογισμό του νοήματος και αντίστροφα.

7 Η ''συνολιστική'' οντολογία και το ''μάγμα'' του Καστοριάδη

Τα παραπάνω μας ωθούν να θέσουμε για μια ακόμα φορά το ερώτημα ''τι είναι τα μαθηματικά;'' Εδώ μας ενδιαφέρει όχι τόσο η ''φύση '' των μαθηματικών αντικειμένων όσο η κλειστότητα ή μη του μαθηματικού σύμπαντος. Είναι τα μαθηματικά ένα ''κλειστό'' σύστημα, μη επεκτάσιμο, που λίγο-πολύ ορίζεται ως το σύμπαν της θεωρίας ZFC, ή των μικροπαραλλαγών της, και που έχει ως *τελική έννοια* την έννοια ''σύνολο'' (ή ''κλάση'' γενικότερα); Για να το θέσουμε κάπως αλλιώς: Είναι μαθηματικό αντικείμενο *μόνον* εκείνο που έχει μια συνολοθεωρητική αναπαράσταση; Είναι αλήθεια ότι αυτή η αντίληψη επικρατεί. Δεν φαίνεται να μπορούμε να πάμε κάπου πέρα από τα σύνολα. Το σύνολο έχει αποβεί η έσχατη, μη αναγώγιμη μαθηματική οντότητα. Η απλή εικόνα του έχει χαράξει βαθειά τη διαίσθηση, τη γλώσσα και τη σκέψη κάθε μαθηματικού. Κάθε απόπειρα τυποποίησης και αναπαραστάσης οποιασδήποτε πλευράς της πραγματικότητας ξεκινά με κάποιο σύνολο. Και απ' τη στιγμή που θα ξεκινήσει έτσι θα ακολουθήσει μοιραία μια σχεδόν προδιαγεγραμμένη πορεία: Πάνω στο σύνολο θα οριστούν κάποιες σχέσεις που θα είναι είτε ισοδυναμίες, είτε διατάξεις, είτε συναρτήσεις, είτε παραλλαγές αυτών, ίσως κάποια τοπολογία, και εν συνεχεία θα επικαλεστούμε τα βασικά θεωρήματα που ήδη ξέρουμε γι' αυτά τα αντικείμενα κλπ, κλπ.

Μήπως αυτή η έννοια έχει πια αποβεί ένα βαρίδι και ένα φράγμα που πρέπει να σπάσει για να κινηθεί η μαθηματική σκέψη σε νέες, ασύλληπτες για την ώρα, περιοχές; Το νόημα, για παράδειγμα, δεν είναι ούτε φαίνεται να μπορεί να παρασταθεί με ένα σύνολο. Ούτε ένα ''ασαφές σύνολο'' είναι σύνολο. Ούτε η γλώσσα - η γλώσσα που μιλάει ένας συγκεκριμένος χρήστης (η ''εσωτερική'' γλώσσα του Chomsky, σε αντίθεση με την ''εξωτερική'' γλώσσα του Montague, δες [12]) - είναι σύνολο (φράσεων). Ούτε το ''μάγμα'' του Καστοριάδη είναι σύνολο, ή έστω κλάση.

Σχετικά με το τελευταίο, αξίζει να αναφέρουμε ότι ο Κορνήλιος Καστοριάδης, εκτός από τη λαμπρή φιλοσοφική, πολιτική και ιστορική του σκέψη, διέθετε και ένα πολύ καλό υπόβαθρο στα θεμέλια των μαθηματικών και τη θεωρητική φυσική. Στο κλασσικό του βιβλίο [7] κάνει μια μακρά κριτική ανάλυση αυτού που ονομάζει ''ταυτιστική-συνολιστική'' (identitaire-ensembliste) λογική.

> ''Εδώ και εικοσιπέντε αιώνες, η ελληνο-δυτική σκέψη συγκροτείται, αναπτύσσεται, διευρύνεται, εκλεπτύνεται, πάνω σ' αυτή τη θέση: είναι, σημαίνει είναι κάτι το καθορισμένο (*εἶναί τι*), λέγειν, σημαίνει λέγειν κάτι το καθορισμένο (*τί λέγειν*). Και βέβαια, αληθώς λέγειν σημαίνει τον καθορισμό του λέγειν και αυτού που λέγεται, με βάση τους καθορισμούς του είναι ή τον καθορισμό του είναι με βάση τους καθορισμούς του λέγειν, και την τελική διαπίστωση της ταυτότητας των μεν και των δε. Αυτή η εξέλιξη, που στηρίζεται στις απαιτήσεις μιας διάστασης του λέγειν και που ισοδυναμεί με τη δεσποτεία και την αυτονόμηση αυτής της διάστασης, δεν ήταν τυχαία ούτε αναπόφευκτη. Ήταν η θέσμιση από τη Δύση της σκέψεως ως Λόγου (ratio). Καλώ τη λογική για την οποία πρόκειται *ταυτιστική* λογική και, επίσης, έχοντας επίγνωση του αναχρονισμού και της ορολογικής βίας, *συνολιστική* λογική για λόγους που θα φανούν αμέσως. (...) Η πιο προχωρημένη και πιο πλούσια απόληξη της

ταυτιστικής λογικής, είναι η επεξεργασία των μαθηματικών. (...) Οι στοιχειώδεις λογικές αρχές της θεωρίας συνόλων μας ενδιαφέρουν εδώ, γιατί, ό,τι και να συμβεί στο μέλλον από την άποψη της ίδιας της μαθηματικής [επιστήμης], συμπυκνώνουν, αποσαφηνίζουν και εμφανίζουν καθαρά ως παράδειγμα αυτό που, ανέκαθεν, υπ-έκειτο στην ταυτιστική λογική.'' ([7], σελ. 319-321.)

Ο Καστοριάδης προτείνει το ρήμα ''συνολίζω'' (ensembliser) για να δηλώσει την πράξη της ''δημιουργίας συνόλων'' από κάποια προϋπάρχουσα αδιαφοροποίητη πραγματικότητα. Αυτή η αδιαφοροποίητη πραγματικότητα, απ' την οποία η ταυτιστική/συνολιστική λογική ''αποκόπτει'' σύνολα, κλάσεις, αντικείμενα και ιδιότητες, είναι, χονδρικά, αυτό που αποκαλεί *μάγμα*.

''Σκοπεύουμε τον τρόπο του είναι αυτού που δίδεται, πριν του επιβληθεί η ταυτιστική ή συνολιστική λογική. Αυτό που προσφέρεται έτσι μέσα σ' αυτόν τον τρόπο του είναι, το καλούμε *μάγμα*. Δεν τίθεται προφανώς θέμα να δώσουμε έναν ορισμό, καθ' όλους τους τύπους, στη γλώσσα που έχουμε παραλάβει ή σε οποιαδήποτε άλλη. Η ακόλουθη πρόταση μπορεί εντούτοις να μην είναι ανώφελη:

Μάγμα είναι αυτό από το οποίο μπορούμε να εξαγάγουμε (ή: μέσα στο οποίο μπορούμε να κατασκευάσουμε) συνολιστικές οργανώσεις απροσδιόριστου αριθμού, αλλά που δεν μπορεί ποτέ να ανασυγκροτηθεί (ιδεατά) με συνολιστική (πεπερασμένη ή άπειρη) συνθεση αυτών των οργανώσεων.'' ([7], σελ. 479.)

Τα συνηθισμένα αντικείμενα και οι ιδιότητες του κόσμου φαίνεται να είναι το αποτέλεσμα της ικανότητας του μυαλού μας για διαχωρισμό, διάμεριση και εξατομίκευση. Τα σύνολα είναι προϊόντα αυτού του μηχανισμού. Ο Καστοριάδης αναφέρει συχνά τον ορισμό του Cantor για τα σύνολα. Όταν λέμε ''Έστω το σύνολο X όλων των x τέτοιων ώστε...'', εστιάζουμε σε ένα συγκεκριμένο κομμάτι της πραγματικότητας, και το αποκόπτουμε με μια πράξη του λέγειν (μια πρόταση).

Αντίθετα στο μάγμα, τα ''στοιχεία'' του δεν είναι ούτε πλήρως προσδιορισμένα, ούτε πλήρως διαφοροποιημένα μεταξύ τους. Ετσι δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε νέα μάγματα, ως υπομάγματα ενός αρχικού, με τη χρήση της γλώσσας. Τυπικό παράδειγμα μάγματος για τον Καστοριάδη είναι ''η ολότητα των σημασιών μιας (φυσικής) γλώσσας ''.

> ''Ως μάγμα, οι σημασίες της γλώσσας δεν είναι στοιχεία ενός συνόλου που υπόκειται στην καθοριστικότητα ως τρόπο και κριτήριο του είναι. Μια σημασία είναι απεριόριστα καθορίσιμη (και αυτό το ''απεριόριστα'' είναι προφανώς ουσιώδες), χωρίς αυτό να σημαίνει ότι είναι καθορισμένη. Μπορεί πάντοτε να επισημαίνεται, να αποδίδεται προσωρινά ως ταυτιστικό στοιχείο (όπως στην κατονομασία), ως τέτοια να είναι 'κάτι τι' ως αφετηρία μιας ανοιχτής σειράς διαδοχικών καθορισμών. Αλλά αυτοί οι καθορισμοί δεν την εξαντλούν, κατ' απόλυτον αρχήν, ποτέ. Ακόμη περισσότερο, μπορούν να υποχρεώσουν, και στην πραγματικότητα υποχρεώνουν πάντοτε, να επανέλθουμε στο 'κάτι τι' της αφετηρίας και να οδηγήσουν στο να το θέσουμε ως 'άλλο κάτι τι'. Είναι σίγουρο ότι τέτοιες πράξεις θα ήταν αδύνατες για έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή και είναι πιθανόν ότι ένας γλωσσολόγος, ως γλωσσολόγος, θα τα έχανε κι αυτός. Το γεγονός είναι ότι ένας αγράμματος ψαράς δεν τα χάνει ποτέ. Ακριβώς ως μάγμα, οι σημασίες είναι τελείως άλλο πράγμα από το χάος.'' ([7], σελ. 483.)

Στο [8] ο Καστοριάδης προχωρεί περισσότερο και αφιερώνει στο θέμα ένα ολόκληρο κεφάλαιο με τίτλο ''Η λογική των μαγμάτων και το ζήτημα της αυτονομίας ''. Προσπαθεί μάλιστα να αξιωματικοποιήσει τις ιδιότητες των μαγμάτων με τέσσερα αξιώματα. Δεν χρησιμοποιεί τυπική γλώσσα αλλά τα διατυπώνει στη φυσική γλώσσα, με βασική σχέση τη σχέση του ''επισημαίνειν''. Ο ίδιος πάντως ανακαλύπτει ότι το αξιωματικό του σύστημα είναι αντιφατικό! Ο χώρος δεν μας επιτρέπει να δώσουμε εδώ περισσότερες λεπτομέρειες. (Δες [8], σελ. 299 και εξής.)

8 Επίλογος

Θα κλείσουμε επανερχόμενοι στο άρθρο του E. Wigner το οποίο αναφέραμε στην αρχή. Εκεί ο συγγραφέας θέτει επίσης το ερώτημα ''τι είναι μαθηματικά;'' Και απαντά ως εξής: ''*Κάποιος είπε κάποτε ότι φιλοσοφία είναι η κακή χρήση των λέξεων που εφευρέθηκε γι' αυτόν το σκοπό και μόνο. Με το ίδιο πνεύμα θα έλεγα ότι τα μαθηματικά είναι η επιστήμη των επιδέξιων πράξεων με έννοιες και κανόνες που επινοούνται γι' αυτόν το σκοπό και μόνο...*''. (I would say that mathematics is the science of skillful operations with concepts and rules invented just for this purpose). Και συμπληρώνει λίγο πιο κάτω ''*... επί των οποίων ο μαθηματικός μπορεί να επιδείξει την ευφυία του και την αίσθηση του* *αφηρημένου κάλλους (formal beauty)*''. Είναι ένας αρκετά καλός ορισμός, διότι αποφεύγει να αναφερθεί στη μαθηματική οντολογία, και άρα μπορεί να περικλείσει και αυτό που είναι σήμερα τα μαθηματικά, αλλά κι αυτό που μπορούν να υπάρξουν στο μέλλον. Αναφέρεται μόνο σε ''επιδέξιες πράξεις με έννοιες και κανόνες '' χωρίς να βάζει περιορισμούς στο *είδος* των εννοιών και πράξεων.

Η μόνη ένσταση στον πιο πάνω ορισμό αφορά τη φράση ''που επινοούνται γι' αυτόν το σκοπό και μόνο''. Δεν νομίζω ότι κάνει κανείς μαθηματικά για να ''παίξει'' με έννοιες και πράξεις επ' αυτών, που τις εισάγει επί τούτου, δηλαδή για το παιγνίδι. Αν συνέβαινε κάτι τέτοιο, το σκάκι θα ήταν κορυφαίος μαθηματικός κλάδος, αλλά δεν είναι. Μάλλον η πραγματικότητα είναι αυτή που μας εμπνέει και μας προκαλεί να εισάγουμε κάθε φορά αυτές τις επιδέξιες έννοιες και πράξεις, με τις μυστηριώδεις μορφές που ξετυλίγει μπροστά μας. Και εμείς άλλοτε καταφέρνουμε να ανταποκριθούμε στην πρόκληση, άλλοτε όχι.

Αναφορές

[1] J. Barwise and J. Perry, *Situations and attitudes,* Cambridge, MA, MIT Press, 1983.

[2] J. Barwise, *The situation in logic,* CSLI Lecture Notes, No 17, CSLI Publications, Stanford 1989.

[3] N. Chomsky, *Συντακτικές δομές,* Εκδ. Νεφέλη, Αθήνα 1991 (Ελληνική μετάφραση του *Syntactic structures*, Mouton, Hague 1957).

[4] G. Frege, *Foundations of arithmetic,* New York, Philosophical Library, 1950.

[5] P. Geach and M. Black, *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege,* Third Edition, Blackwell 1980.

[6] W. Hodges, Formal features of compositionality, *J. of Logic, Language and Information* **10** (2001), 7-28.

[7] Κ. Καστοριάδης, *Η φαντασιακή θέσμιση της κοινωνίας,* Εκδ. Ράππα, Δεύτερη Έκδοση, 1985 (Ελληνική μετάφραση του *L' institution imaginaire de la société,* Editions du Seuil, Paris 1975).

[8] K. Καστοριάδης, *Χώροι του ανθρώπου,* Εκδ. Ύψιλον/βιβλία, 1995 (Ελληνική μετάφραση του *Domaines de l' homme,* Editions du Seuil, Paris 1986).

[9] H. Putnam, The meaning of meaning, in: *Mind, language and reality, Philosophical papers of Hilary Putnam,* vol. 2, Cambridge University Press, 1992.

[10] W.V. Quine, *From a logical point of view,* Harvard University Press, Foutrh Printing, 1980.

[11] Gian-Carlo Rota, The barrier of meaning, *Letters in Math. Physics* **10** (1985), 97-99.

[12] Neil Smith, *Noam Chomsky, Ιδέες και ιδανικά,* Εκδ. Παρατηρητής, Θεσσαλονίκη 2001 (Ελληνική μετάφραση του *Noam Chomsky - Ideas and ideals,* Cambridge Univ. Press, 1999).

[13] R.H. Thomason, *Formal Philosophy, Selected Papers of Richard Montague,* Yale University Press, 1974.

[14] A. Tzouvaras, Modeling vagueness by nonstandardness, *Intern. J. of Fuzzy Sets and Systems* **94** (1998), 385-396.

[15] A. Tzouvaras, An axiomatization of "very" within systems of set theory, *Studia Logica* **73** (2003), 413-430.

[16] E. Wigner, The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences, *Communications in Pure and Applied Mathematics* **13** (1960). Διαθέσιμο επίσης στην ιστοσελίδα http://nedwww.ipac.caltech.edu/level5/March02/Wigner/Wigner.html.

[17] H.-J. Zimmermann, *Fuzzy set theory and its applications,* 2nd Edition, Kluwer Academic Publishers, 1991.

English Summary:

The Unreasonable Ineffectiveness of Mathematics.
Athanassios Tzouvaras

It is argued that the ineffectiveness of mathematics in sciences other than physics (biology, chemistry, informatics, linguistics etc) is at least as much unreasonable as is its effectiveness in physics (as the latter has been claimed and exemplified by E. Wigner in his well-known article *"The unreasonable effectiveness of mathematics"*, Communications in Pure and Applied Mathematics, **13** (1960)). We focus especially on the areas of (a) everyday reasoning (in contradistinction to formal reasoning), (b) theory of meaning and (c) vagueness/fuzziness, to conclude that the up to date mathematical tools do not allow for a thorough representation and treatment of the notions and problems raised in these areas. It is guessed that this is mainly due to the fact that the notion of set has been promoted to the status of the ultimate irreducible entity in the mathematics ontology. Perhaps some more primitive and more flexible notions are needed for the formalization of entities involved in the aforementioned areas.

Department of Mathematics,
Aristotle University of Thessaloniki,
541 24 Thessaloniki, Greece
E-mail: `tzouvara@math.auth.gr`