Περιεχόμενα

Η Γεωδαισία του Ήρωνος του Βυζάντιου

***Δημήτριος Ρωσσικόπουλος*[(1)], *Βασιλική Π. Χατζηδάκη*[(2)], *Νικόλαος Π. Χατζηδάκης*[(1)]**

(1) Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας, Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών, ΑΠΘ.

(2) Τομέας Συστηματικής Θεολογίας-Κοινωνιολογία, Θεολογική Σχολή, ΑΠΘ.

Εισαγωγή

Ο κώδικας Vaticanus graecus 1605, ένα εικονογραφημένο χειρόγραφο του 10ου αι. που βρίσκεται στη βιβλιοθήκη του Βατικανού, περιέχει δύο εγχειρίδια γνωστά σήμερα με τους τίτλους *Παραγγέλματα Πολιορκητικά* και *Γεωδαισία.* Οι δύο πραγματείες αντιπροσωπεύουν την εργασία ενός ανώνυμου βυζαντινού συγγραφέα και σχολιαστή του 10ου αι., που ενημέρωσε και συμπλήρωσε για τους συγχρόνους του τις εργασίες των κλασσικών συντακτών πολιορκητικών και σχετικών μαθηματικών κειμένων, ιδιαίτερα του Απολόδωρου της Δαμασκού (1ος - 2ος αι. μ.Χ.), αλλά και του Αθηναίου του Μηχανικού (1ος αι. π.Χ.), του Βίτωνα, και του Φίλωνα του Μηχανικού (ίσως 3ος αιώνας π.Χ.), καθώς επίσης και του Ήρωνα της Αλεξάνδρειας (1ος αιώνας μ.Χ.). Παρουσιάζει επίσης το υλικό με μια πιο απλοποιημένη μορφή, σε σχέση με τους πρώτους συγγραφείς, τόσο στο κείμενο, στις εφαρμογές και στα παραδείγματα, όσο και στην εικονογράφηση, που δείχνει ότι είναι ένα εκπαιδευτικό κείμενο προσαρμοσμένο σε όχι τόσο ειδικό ακροατήριο.

Το όνομα του συγγραφέα και οι τίτλοι των πραγματειών είναι άγνωστα, καθώς στο χειρόγραφο του κώδικα του Βατικανού υπάρχει κενό στην αρχή καθώς και ένα μεγάλο κενό μεταξύ των δύο πραγματειών. Πουθενά δεν αναφέρεται το όνομα του συντάκτη και πουθενά δεν γίνεται αναφορά στον Ήρωνα τον Αλεξανδρινό. Αυθαίρετα από κάποιον μελετητή το κείμενο ονομάσθηκε *Ήρωνος προοίμιον*, ίσως επειδή ο συγγραφέας χρησιμοποίησε ως πρότυπο τα έργα του Ήρωνα του Αλεξανδρινού και επειδή ο Ήρωνας ήταν γνωστός στους ανθρώπους που ασχολούνταν με την τεχνολογία. Οι πολυάριθμες βυζαντινές αναφορές στα κείμενα, δείχνουν σαφώς ότι ο συντάκτης δεν ήταν ο Ήρων της Αλεξάνδρειας. Στη *Γεωδαισία*, τίτλος που δόθηκε και αυτός αυθαίρετα στη δεύτερη πραγματεία, δίνονται εφαρμογές των προβλημάτων που αναλύονται στον ιππόδρομο της Κωνσταντινούπολης και στο παλάτι του Βουκολέοντα, μια περιοχή που δεσπόζει στη θάλασσα του Μαρμαρά.

Η ημερομηνία της σύνθεσης των δύο κειμένων προκύπτει από την ανάλυση των αστρονομικών δεδομένων που δίνει ο ανώνυμος συντάκτης στο τελευταίο του πρόβλημα της Γεωδαισίας, που κατά τα πρότυπα του *Περί Διόπτρας* του Ήρωνα του Αλεξανδρινού, αναφέρεται στη μέτρηση της γωνιακής απόστασης μεταξύ δύο αστέρων, ως παράδειγμα χρήσης της διόπτρας για αστρονομικούς σκοπούς. Σύμφωνα με τους μελετητές του κειμένου, ο ανώνυμος βυζαντινός δεν έκανε ο ίδιος αστρονομικές παρατηρήσεις, αλλά χρησιμοποίησε των κατάλογο των αστέρων του Πτολεμαίου, και πρόσθεσε 1 μοίρα στη γωνία ύψους για κάθε αστέρα, ως ετήσια μετάπτωση. Από τη σταθερή διαφορά των 8 μοιρών από τις αντίστοιχες τιμές του Πτολεμαίου για τους αστέρες που αναφέρονται προκύπτει ότι η πραγματεία γράφτηκε 8 αιώνες μετά, δηλαδή τον $10^{ο}$ μ.Χ. αι. και από στοιχεία που αναφέρονται στη πρώτη πραγματεία "Πολιορκητικά", το χειρόγραφο χρονολογείται στην εποχή του Κωνσταντίνου Πορφυρογέννητου, προστάτη των τεχνών και των επιστημών. Ο ίδιος ο αυτοκράτορας σπούδασε ο μαθηματικά, αστρονομία, μουσική και φιλοσοφία και διόρισε φημισμένους δασκάλους, στους οποίους ανέθεσε τη συγγραφή εγκυκλοπαιδειών και ανθολογιών, όπως μαρτυρεί το πλήθος των χειρογράφων της εποχής αυτής.

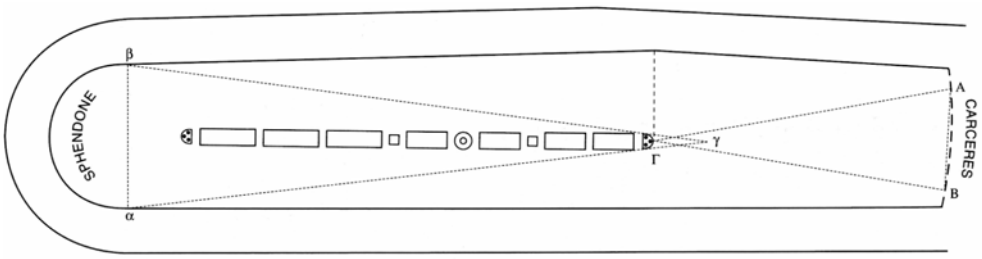
Ο Ανώνυμος Βυζαντινός συγγραφέας του κώδικα Vaticanus graecus 1605, που ονομάσθηκε κατά καιρούς συμβατικά Ήρων ο τρίτος (tertius), ή Ήρων ο νεότερος, ή Ήρων ο Βυζάντιος, είναι σίγουρο ότι έζησε και έδρασε στη Κωνσταντινούπολη, και ήταν κάποιος φημισμένος λόγιος της εποχής εκείνης στην υπηρεσία του αυτοκράτορα και ίσως διδάσκαλος στο περίφημο Πανδιδακτήριο της Κωνσταντινούπολης, που η τύχη του όμως αυτήν την περίοδο μας είναι άγνωστη. Οι τέσσερεις μαθηματικές επιστήμες (Τετρακτύς ή Quadrivium όπως ονομάσθηκαν αργότερα από τον Βοήθειο) εξακολουθούσαν να περιλαμβάνονταν στα εκπαιδευτικά προγράμματα και δεν έπαψε ποτέ να διδάσκεται η γεωδαισία, όχι μόνο στα κοσμικά πανεπιστήμια, αλλά και στις εκκλησιαστικές σχολές, καθώς επίσης και από ιδιώτες δασκάλους.

Τα κείμενα

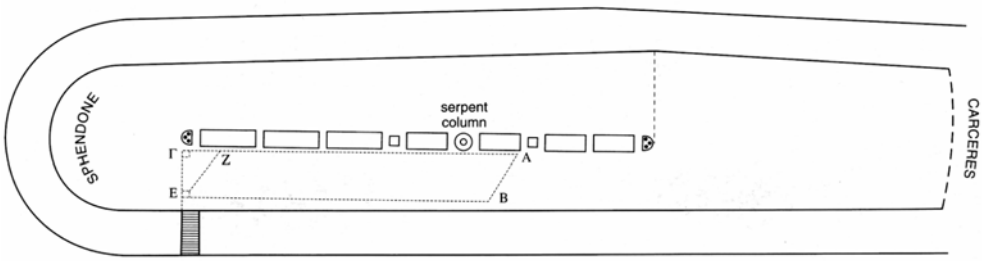
α) Εισαγωγή. Ο ανώνυμος συντάκτης αντιγράφει με μικρές αλλαγές τις δύο πρώτες παραγράφους του Περί Διόπτρας, του Ήρωνος του Αλεξανδρέως.

Εκείνοι που σκέφτονται μια πολιορκία είναι ανίκανοι να μετρήσουν για να υπολογίσουν τα ύψη των τοίχων από απόσταση, ή τα διαστήματα μεταξύ των μακρινών σημείων, ή τα πλάτη των ποταμών. Αλλά εκείνοι που είναι έμπειροι στη χρήση των διαγραμμάτων και στην παρατήρηση με τη διόπτρα μπορούν, με τη διενέργεια μιας αποτύπωσης, να σχεδιάσουν τους πύργους πολιορκίας που είναι του ίδιου ύψους με τους τοίχους, και τις γέφυρες που φέρονται πάνω στις βάρκες και προσαρμόζονται στα

πλάτη των ποταμών, έτσι ώστε ένας στρατός να μπορεί να διασχίσει τη γέφυρα ή το πέρασμα αβλαβής και σε τάξη. Οι μηχανικοί έχουν εξαπατηθεί συχνά από τα ψεύτικα φαινόμενα και τις εκτιμήσεις στην κατασκευή και στην ανάπτυξη των μηχανών που είναι μεγαλύτερες ή μικρότερες από ότι πρέπει να είναι, όπως έχει παρουσιαστεί στην προηγούμενη πραγματεία [τα Πολιορκητικά]· και το αποτέλεσμα είναι οι μπροστινές τάξεις από εκείνους που σκαρφαλώνουν πάνω σ'αυτές να θανατώνονται από τον εχθρό. Επομένως έχουμε αναλύσει και τη θεωρία της διόπτρας και τις χρήσιμες εφαρμογές της γενικά, επιλέγοντας τα απλούστερα παραδείγματα από τους πολυμαθέστατους προκατόχους μας, διευκρινίζοντάς τες με απλές επεξηγηματικές μεθόδους, και περιγράφοντές τες με διαγράμματα. Κατά συνέπεια, στεκόμενοι μακριά από τις εχθρικές σειρές, μπορούμε ακριβώς και άψογα να καθορίσουμε τα ύψη, τα μήκη και τα διαστήματα. Η μελέτη όχι μόνο θα εξυπηρετήσει το σπουδαστή της τέχνης του πολέμου, αλλά θα αποδειχθεί κατεξοχήν χρήσιμη για τα υδραγωγεία, τους τοίχους και τα λιμάνια και θα συμβάλει πολύ στη γεωδαισία και στην παρατήρηση των ουρανών. Πρέπει να αποφύγουμε την περιττολογία και την επανάληψη των αρχαιότερων επιστημόνων, να διακρίνουμε τα δυσνόητα και δύσκολα εδάφια στις γραφές τους και να τα προσαρμόσουμε στην καθημερινή διάλεκτο, να προσφέρουμε τη διάχυτη μαθηματική γλώσσα που περιβάλλει τις διδασκαλίες τους κατανοητή σε μια ματιά, να μειώσουμε τις υψηλές θεωρητικές έννοιές τους σε ένα χαμηλότερο και πιο απτό επίπεδο, και να καταστήσουμε έτσι το θέμα προσιτό στα ευφυή άτομα και στους ερασιτέχνες όμοια, και ειδικά σε εκείνους που μελετούν τη γεωμετρία με οποιαδήποτε μορφή.



0 100 m Γεωδαισία, προβλήματα 3 και 4

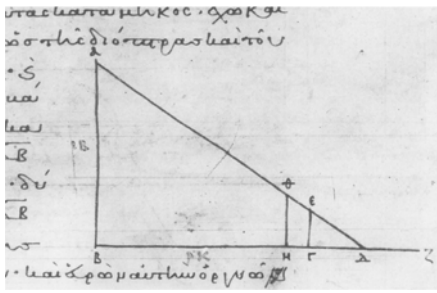


0 100 m Γεωδαισία, πρόβλημα 5

Ακολουθεί ένα μεγάλο κενό όπου λείπουν περίπου 8 σελίδες. Σ' αυτές πιθανώς να περιλαμβάνονταν, σύμφωνα με τις παρακάτω αναφορές του κειμένου: η περιγραφή της διόπτρας, περιγραφή της λυχνίας (ενός απλού οργάνου για τη μέτρηση του ύψους ενός αντικειμένου, ίσως μια απλοποιημένης μορφής διόπτρας,), ένα τμήμα βασικής αριθμητικής και ένα άλλο όπου περιγράφεται η μέτρηση της απόστασης της οποίας το ένα άκρο είναι απρόσιτο και δίνεται ως εφαρμογή πιθανώς η εύρεση του πλάτους ενός ποταμού. Η λυχνία αναφέρεται και στο έργο του Ιούλιους Αφρικάνους *"Κεστοί"*, που κι αυτό αποτελεί ένα "ψευδοηρώνειο" κείμενο του 3^{ου} μ.Χ. αι.

Στη συνέχεια ακολουθούν τα προβλήματα των οποίων οι λύσεις αναφέρονται ως εφαρμογές/ασκήσεις στο χώρο του ιπποδρόμου της Κωνσταντινούπολης.

β) *Από ένα σημείο, που μας είναι ορατό να βρεθεί η ευθεία, που διέρχεται από το σημείο αυτό κάθετα προς το οριζόντιο επίπεδο, που περνά από τη θέση μας, χωρίς να πλησιάσουμε το σημείο* (Να μετρηθεί το ύψος τοίχου, από μακριά, Περί Διόπτρας, πρόβλημα.12, εφαρμογή στον Ιππόδρομο).

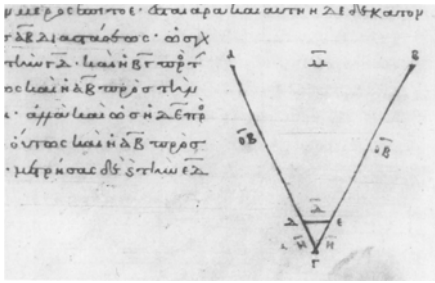


Έστω ΓΔ η βάση. το ίδιο για τη ΑΒ προς ΒΔ. Και σύμφωνα πάλι με τη θέση ότι η ΑΒ είναι παράλληλη με τις ΔΓ, ΔΗ κατά τον ίδιο τρόπο και η ΑΒ [παράλληλη] με τα ύψη ΘΗ, ΘΓ. Πρέπει ωστόσο ο κάμακας που στέκεται κάθετα σε μεγάλα ύψη και υδραγωγεία να επιδέχεται κρεμαστή διόπτρα και αυτήν που αποκαλείται λυχνία.

Μετράμε τις πλευρές ΓΔ, ΗΔ ως βάσεις των μικρότερων τριγώνων όπως εμείς τα βλέπουμε και υπολογίζουμε το μήκος τους, γνωρίζοντας και τις ΗΘ, ΓΕ αφού αποτελούν ύψη τόσο της κρεμαστής διόπτρας άρα και του κάμακα. Εάν διαπιστώσω ότι η βάση του ύψους είναι δεκαπλάσια θα αποφανθώ ότι είναι και η ΔΒ σε σχέση με την ΑΒ. Μπορώ να υπολογίσω όλη την ΔΒ εάν γνωρίζουμε για το μήκος και το πλάτος. Και βρίσκοντας ότι η ΔΒ είναι μήκους 120 οργιές υπολογίζω και την ΑΒ 12 οργιές, όπως ακριβώς συμβαίνει με το ύψος του τείχους που θέλουμε να υπολογίσουμε σε σχέση με το προπύργιο.

……σχετικά με τις μοίρες και τα τμήματα, περιήλθαμε στα όσα επιζητούσαμε παραπάνω με ικανοποιητικό τρόπο μέσω των αριθμητικών μεθόδων.

γ) *Δοθέντων δύο σημείων σε μακρινή απόσταση, που είναι ορατά από τον παρατηρητή, να βρεθεί η μεταξύ τους οριζόντια απόσταση.* (Περί Διόπτρας, πρ. 10, 2η λύση, εφαρμογή στον Ιππόδρομο).

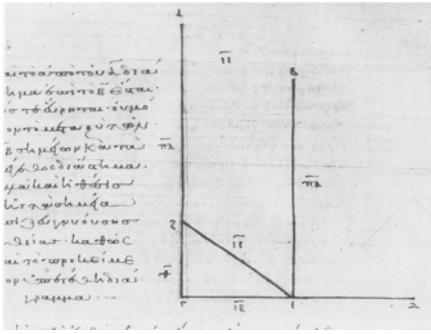


Έστω τα ορατά σημεία Α, Β κάθετα στην ευθεία με τα κάγκελα (πύλη εκκίνησης των ιπποδρομιών). Το σημείο Α σε σχέση με το τρίτο, το δε Β σε σχέση με το ένατο. Έστησα την διόπτρα κάθετα στην αφετηρία ΑΒ. Προς το σημείο Γ και τη θέση των σημείων του επιπέδου που δόθηκαν παραπάνω αφού έστησα το τύμπανο (ίσως ο οριζόντιος δίσκος της διόπτρας), όρισα δύο ευθείες διαμέσου των οπών του χάρακα φέρνοντας προς το τρίτο σημείο την ΓΑ και προς το ένατο τη ΓΒ. Μετρώ μία από αυτές με τον χάρακα ή με την προηγούμενη μέθοδο. Και βρίσκοντας ότι είναι μήκους 80 οργιές, την τέμνω προς όποια πλευρά θελήσω. Έστω ότι έγινε η διαίρεση στο δέκατο μέρος από την αφετηρία (σημείο Δ) και σε μήκος 8 οργιές. Συνεπώς υπάρχει και η ΔΕ ως το 1/10 της ΑΒ. Γιατί όπως η ΑΓ απέχει από την ΓΔ και η ΒΓ από την ΓΕ (ισοσκελή τρίγωνα), έτσι και η ΑΒ προς τη ΔΕ. Αλλά όπως η ΔΕ προς την ΕΓ, έτσι και η ΑΒ προς την ΒΓ. Αφού μετρήσω την ΕΔ ίση με 4 οργιές γνωρίζω και την ΑΒ που είναι δεκαπλάσια και ίση με 40 οργιές.

δ) *Μία άλλη μέθοδος υπολογισμού της απόστασης μεταξύ δύο δοθέντων σημείων, σύμφωνα με το διάγραμμα που δίνεται.* (Περί Διόπτρας, πρ. 10, 3η λύση, εφαρμογή στον Ιππόδρομο).

Σκέψου υποθετικά από τη μία πλευρά το σημείο Α στο αριστερό μέρος της σφενδόνας και το Β στο δεξιό, όπου ΑΒ το πλάτος του ιππικού (ιπποδρομίου). Βάζω λοιπόν τη διόπτρα σε ακινησία στο σημείο Γ, έτσι ώστε να μη παρεμποδίζεται η όψη των σημείων Α, Β. Αφού τοποθετήσω και το τύμπανο πάνω στη βάση της σφενδόνας, φέρνω δύο ευθείες με τον χάρακα, προς το αριστερό μέρος της ΓΑ και προς το δεξιό την ΓΒ. Κι αφού μετρήσω μία απ' αυτές, και υπολογίσω το μήκος ίσο με 126 οργιές, περνώ και στο απέναντι από τον χάρακα δοχείο. Και όντας όλα ακίνητα σε σχέση με τη διόπτρα, αφήνω το μικρό τύμπανο, και φέρνω στην ευθεία ΒΓ το σημείο Δ, στα οκτώ και δέκα μέρη αυτής από τα αριστερά της ευθείας σε μήκος 7 οργιές. Όμοια, φέρνω το σημείο Ε στα δεξιά της ευθείας ΑΓ, και φέρνω την ευθεία ΕΔ. Κι επειδή η ΕΓ αποτελεί τα οκτώ και δέκα μέρη της ΓΑ, και η ΔΓ της ΓΒ, υπάρχει και το διάστημα της ΔΕ προς αυτό της ΑΒ ίσο με οκτώ και δέκα μέρη. Γιατί όπως είναι οι μικρότερες πλευρές των δύο αντικόρυφων (αντίθετα με κοινή κορυφή) τριγώνων προς τις μεγαλύτερες, έτσι ακριβώς υπάρχει και η βάση του μικρότερου προς τη βάση του μεγαλύτερου. Αφού μετρήσω την βάση ΔΕ του μικρότερου τριγώνου, ίση με 2 ½ οργιές, γνωρίζω και την ΑΒ δεκαοχτώ φορές μεγαλύτερη σε μέγεθος και ίση με 45 οργιές (2 ½ ×18 = 45)

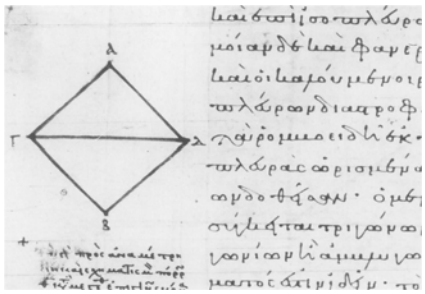
ε) *Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ δύο δοθέντων σημείων αλλά και η θέση (προσανατολισμός) της ευθείας που ενώνει τα σημεία, χωρίς να πλησιάσουμε κανένα από αυτά.* (Περί Διόπτρας, πρ. 10, 1η λύση, εφαρμογή στον Ιππόδρομο).



Έστω τα ορατά σημεία Α, Β, το μεν Α προς ένα από τα επτά τμήματα που βρίσκονται στον πορθμό (ίσως κάποιο στενό), κάθετα στη βάση του στήθους που εξετάζεται, το δε Β προς το έδαφος κάθετα στο βασιλικό κάθισμα ή μιας από τις δύο αποκαλούμενες προετοιμασίες στους δρομείς κατά τους γυμνικούς αγώνες. Αφού λοιπόν τοποθετήσω τη διόπτρα γύρω – γύρω από την αφετηρία (σημείο Γ), σε αντίθεση με το Β, βλέπω μέσω του χάρακα, μέχρι να εξετάσω προσεκτικά, το σημείο Α από την άκρη. Κι ερχόμενος προς την πλάγια πλευρά της διόπτρας, κάθετη προς στην αφετηρία, απορρίπτω το μικρό τύμπανο, και φέρνω την ευθεία ΓΔ ακριβώς απέναντι από το υψηλό σημείο των επιπέδων… Και φέρνω τη διόπτρα κάθετα στη ΓΔ, μέχρι να δω πάνω στην ευθεία το σημείο Β. Τάσσω την διόπτρα κατά το Ε· η ΒΕ βρίσκεται κάθετη προς τη ΓΔ, με την ΑΓ παράλληλη. Μπορώ βέβαια να υπολογίσω την απόσταση από το σημείο Γ στο Α, από το Ε στο Β, υποθέτοντας ότι το σχήμα είναι τριγωνικό. Κι αν βρω ότι η ΓΑ είναι ίση με την ΕΒ, θα αποφανθώ και το ΓΕ ίσο με την ΑΒ (ορθογώνιο). Εάν όμως μία απ' αυτές είναι μικρότερη των άλλων, θα αφαιρέσω τη διαφορά της μεγάλης, έτσι ώστε να προσεγγίσω τη μικρότερη·

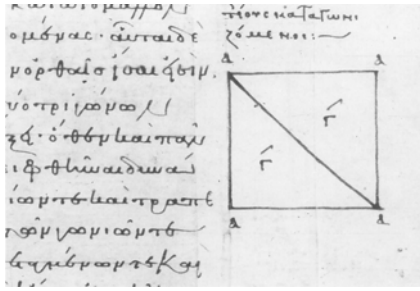
… για παράδειγμα, αν βρω τη ΓΕ να έχει πλάτος ίσο με 12 οργιές, τη ΓΑ 90 οργιές, και την ΕΒ 81 οργιές, θα αφαιρέσω τις 9 οργιές του Γ από το Ζ που το κάνουν και υπερέχει, κι έτσι θα προσεγγίσω τη μικρότερη μέσω της ΖΕ, η οποία είναι ίση και παράλληλη με την ΑΒ. Αν όμως ήταν ίση η ΑΓ με την ΒΕ, 12 οργιών θα ήταν και το διάστημα της ΑΒ ίσο με της ΓΕ. Επειδή όμως βρέθηκε να υπερέχει 9 οργιές η ΓΑ επί της ΕΒ, δημιουργείται ορθή γωνία στο σημείο Γ αφότου γίνει η διόρθωση. Επειδή η βάση ΓΕ είναι 12 οργιών, η ΖΕ είναι 15 (ως υποτείνουσα του τριγώνου ΕΓΖ) …

ς) Ακολουθεί πρόβλημα υπολογισμού των εμβαδών διαφόρων σχημάτων: *να υπολογισθεί το εμβαδόν των σχημάτων που περικλείονται από τα ευθύγραμμα τμήματα*. Οι μέθοδοι αναφέρονται στα *Γεωμετρικά*, στα *Μετρικά* και στο *Περί Διόπτρας* του Ήρωνα, γίνεται όμως αναφορά από τον ανώνυμο συγγραφέα και στον Αρχιμήδη.

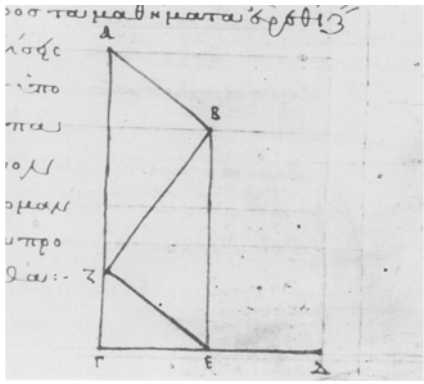


Σε τετράπλευρα ισόπλευρα και ανισόπλευρα το γινόμενο της πλευράς του μήκους και του πλάτους αποτελεί το εμβαδόν του σχήματος. Επειδή η ΑΓ είναι η ίση με 90 οργιές, η ΓΔ είναι ίση με 12, πολλαπλασιαζόμενες κάνουν 1080 οργιές.

Με παρόμοιο τρόπο θα μετρηθούν και οι ρόμβοι ως αποτέλεσμα της συστροφής των ισόπλευρων τριγώνων (ανεστραμμένα ισόπλευρα τρίγωνα με κοινή βάση), καθώς και τα ρομβοειδή που απορρέουν από ανισόπλευρα σχήματα. Και μάλιστα έχουν τις πλευρές τους καθορισμένες (ίσες), και δοσμένη μία από τις διαγώνιες. Από τη μία πλευρά, ο ρόμβος βρίσκεται μεταξύ δύο ισοσκελών τριγώνων, από την άλλη το ρομβοειδές σχήμα αποτελείται από δύο οξυγώνια ή αμβλυγώνια τρίγωνα... διαιρείται με τη διαγώνιο ΖΒ σε δύο οξυγώνια τρίγωνα, ενώ από την ΑΕ σε δύο αμβλυγώνια.



Πρέπει, ωστόσο, να αριθμηθούν τα μισά σημεία της επιφάνειας των τριγώνων, όσων από αυτά έχουν περιγραφεί. Επειδή κάθε τετράγωνο τέμνεται από τη διαγώνιο σε δύο τρίγωνα, το πεντάγωνο σε τρία τρίγωνα, το εξάγωνο σε τέσσερα και μ' αυτόν τον τρόπο από εδώ και στο εξής γίνονται οι διαιρέσεις. Κι αν το εμβαδόν του τετραγώνου υπολογίζεται 1000, του τριγώνου τότε είναι 500. Επειδή δε και κάθε τρίγωνο με τη σκέψη και το νου έχει 3 γωνίες ίσες με 2 ορθές (180^0), αυτό είναι ολοφάνερο.



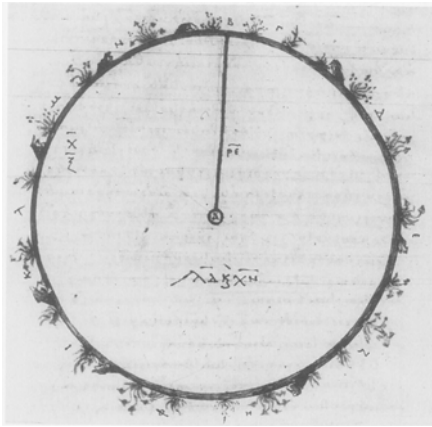
Εάν κάθε τετράγωνο έχει τις γωνιές του ίσες με 4 ορθές, από τη διαγώνιο χωρίζεται σε 2 τρίγωνα κι 6 γωνίες ίσες με 4 ορθές (360^0).

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, καθετί μπορεί να αποκτηθεί με τις αισθήσεις και τη φαντασία. Σχετικά με τις μετρήσεις τραπεζικών και των αποκαλούμενων τραπεζοειδών, όπως βγαίνει από την ισότητα των τεταγμένων γωνιών και των υπολοίπων τεταγμένων και άτακτων σχημάτων, ο Αρχιμήδης και ο Ήρωνας έδωσαν αποδείξεις με πληρότητα σε όλη τους την πραγματεία· εμείς, ωστόσο, θέλοντας να εξάψουμε την προσοχή σε όσους εισάγονται στην παρακολούθηση των μαθημάτων, συγκεντρώσαμε σημειώσεις σχετικά με τις μετρήσεις, με αφορμή την προθυμία μας να τις παρέχουμε· και θέτουμε ως προϋπόθεση αυτό που λέγεται σύμφωνα με την παροιμία «... στο πιθάρι μαθαίνουν αυτοί την κεραμική».

ζ) *Να βρεθεί η διάμετρος κύκλου, η περιφέρεια και το εμβαδόν του με τη βοήθεια της διόπτρας, κεντρωμένης στο κέντρο του κύκλου, χωρίς να προσεγγίσουμε την περιφέρεια.*

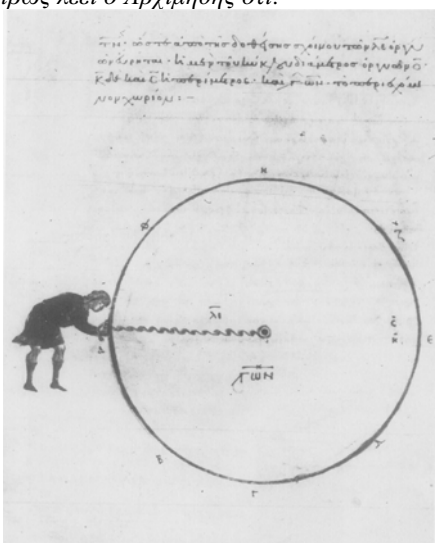
Για τον υπολογισμό της περιφέρειας πολλαπλασιάζει τη διάμετρο με $3^1/_7$ και αναφέρεται στον Αρχιμήδη για τον υπολογισμό του εμβαδού, ότι προκύπτει αν

πολλαπλασιασθεί η διάμετρος με το τέταρτο της περιφέρειας. Το πρόβλημα υπάρχει στα *Μετρικά* του Ήρωνα του Αλεξανδρέως.



Έστω Α το κέντρο του κύκλου στο οποίο στήνω τη διόπτρα· αφού έστησα το τύμπανο προς τη θέση του επιπέδου απ' το οποίο πρόκειται να καταγραφεί ο κύκλος απ' την διόπτρα, παίρνουμε ένα σημείο Β μέσω των τρυπών του χάρακα πάνω στην ευθεία. Απ' αυτό το σημείο κυκλικά περιφέρω το τύμπανο μαζί με τον χάρακα δια μέσου της επικείμενης οπής στο γύρω της στεφάνης, έως ότου επανέλθει το τύμπανο στο αρχικό σημείο.

*Στην κυκλική αυτή περιφορά θα εξεταστούν κάποια σημεία που περιορίζουν τον κύκλο, προς πέτρες ή θάμνους ή κάποιους άλλους σκοπούς, τα οποία είναι τα Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο, Π. Αφού σημειώσω αυτά πάνω στα όρια του κύκλου, μετρώ την απόσταση από το Α έως το Β, δηλαδή το σημείο από το κέντρο έως την περιφέρεια· βρίσκοντας ότι αυτό είναι ίσο με 105 οργιές, βρίσκω και όλη τη διάμετρο του κύκλου 210 (2*105). Επειδή από κάθε διάμετρο η περίμετρος είναι τριπλάσια του επτά (210/7=30), είναι φανερό ότι η περίμετρος είναι ίση με 660 και το έβδομο αυτού (3×210+30=660). Αλλά επειδή το γινόμενο του μήκους της διαμέτρου (2 R) και του τέταρτου της περιμέτρου (πR/4) είναι ίσο με το εμβαδόν του κύκλου ($\pi * R^2/2$), γι' αυτό ακριβώς λέει ο Αρχιμήδης ότι:*



«Κάθε κύκλος είναι ίσος με ορθογώνιο τρίγωνο, του οποίου η πλευρά που περνάει από το κέντρο του κύκλου ισούται με μια από τις δύο πλευρές που σχηματίζουν ορθή γωνία και η περίμετρος ισούται με τη βάση»

το άθροισμα της διαμέτρου και όλης της περιμέτρου είναι τετραπλάσιο του κύκλου·

οι 210 οργιές της διαμέτρου πολλαπλασιαζόμενες με τις 165 οργιές του ¼ της περιμέτρου, μας δίνουν 34650 χιλιάδες όπου είναι το εμβαδόν του κύκλου…

Με μεγαλύτερη ευκολία και χωρίς τη βοήθεια της διόπτρας θα μάθουμε και τη διάμετρο του κύκλου και την περίμετρο, αφού δοθεί κάποιο σχοινί με γνωστό μήκος. Έστω λοιπόν ότι το μήκος του σχοινιού είναι ίσο με 35 οργιές· το σχοινί από τη μία μεριά έχει κρεμασμένο σιδερένιο καρφί, το οποίο είναι μπηγμένο στη γη, για να φέρει εις πέρας το κυκλικό περίγραμμα του άλλου άκρου.

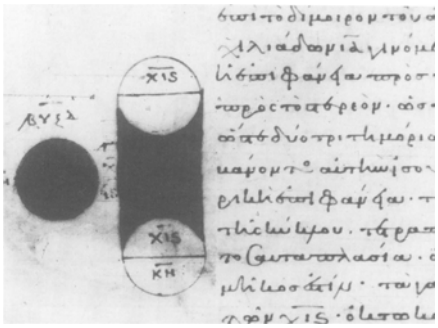
Το περίγραμμα του κύκλου περιγράφεται με τρεις τρόπους: εν αρχή, από αρχή και επί αρχής. Η άκρη του σχοινιού κάθετα στο καρφί και μέσω του κρίκου περιφέρεται από την άλλη άκρη κυκλικά σε ίση απόσταση γύρω από τα σημεία Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ. Έτσι λοιπόν καθορίζεται ο κύκλος, και θα βρεθεί η μεν διάμετρος ότι είναι ίση 70 οργιών, δηλαδή διπλάσια της ακτίνας από το κέντρο. Η περίμετρος τυχαίνει να είναι τριπλάσια του επτά οργιών 220, και το εμβαδόν του κύκλου ίσο με 3850.

η) Υπολογισμός του όγκου τρισδιάστατων σχημάτων: κύβου, κυλίνδρου, κώνου, σφαίρας, πυραμίδας. Αναφέρονται οι Πυθαγόρειοι, ο Αρχιμήδης και τα Στοιχεία του Ευκλείδη.

Τα στερεά μέρη των σχημάτων εξετάζονται όχι μόνο σε δύο αποστάσεις, αλλά στην ανάγκη και σε τρεις· επειδή κάθε σώμα που είναι χωρισμένες σε τρία μέρη έχει διαστάσεις, και μήκος και πλάτος και πάχος το ίδιο μπορεί να ειπωθεί για το βάθος ή το ύψος· γιατί το γινόμενο που προκύπτει από το μήκος και το πλάτος επί την τρίτη απόσταση του ύψους, πρέπει να λογαριάζουν τα άκαμπτα μέρη των σχημάτων.

Και πριν, το μέτρημα του κύβου γίνονταν μέσω του ίσου των αποστάσεων· ο κύβος είναι σταθερό σχήμα αποτελούμενος από έξι τετράγωνα ίσων περιεχομένων, με πλευρές 12, ορθές γωνίες 8, επίπεδα 6, σε τρεις διαστάσεις· από τα παραπάνω οι πυθαγόρειοι αποδεικνύουν στο σχήμα, αυτό που το επονομάζουν 'αρμονία στο κύβο'.

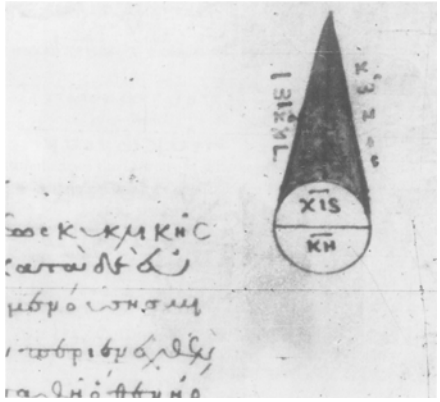
Το στέρεο του σχήματος θα βρεθεί έτσι· γιατί αν η βάση του κύβου κατά μήκος ήταν 28 μονάδων, οι ίδιες μονάδες θα ίσχυαν και για το πλάτος και για το ύψος· πολλαπλασιάζοντας τα μήκη 28 με αυτά του πλάτους, θα έχουμε τις μονάδες του επιπέδου της βάσης που θα είναι 784· και αυτό πάλι πολλαπλασιάζοντας το με το ύψος θα οδηγηθούμε στις 21952 χιλιάδες· από αυτά οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι ο κύβος είναι στέρεο σχήμα.



Εάν πάλι σ' αυτόν τον κύβο επινοήσουμε στο ίδιο ύψος έναν κύλινδρο που να περιλαμβάνει στο μέσον του μία σφαίρα, ώστε στο μεγαλύτερο μέρος του κύκλου που βρίσκεται μέσα στον κύκλο να εφάπτεται με την επιφάνεια, θα φανεί η βάση του κύβου προς αυτήν του κυλίνδρου να υπερέχει, σύμφωνα με το οποίο στους ελάχιστους και πρώτους αριθμούς να ισχύει ο 14 προς τον 11 (αναλογία κύβου - κυλίνδρου) με τον ίδιο τρόπο και τα επίπεδα 4 του κύβου προς την επιφάνεια του κυλίνδρου μαζί με τις δύο βάσεις θα φανούν, και τα

τέσσερα χωρίς τις βάσεις, καθώς και το στέρεο προς το στέρεο·

ωστόσο, η επιφάνεια του κυλίνδρου χωρίς τις βάσεις είναι ίση με την επιφάνεια της σφαίρας που περιλαμβάνεται σ' αυτόν, και μαζί με τις βάσεις της ο περισσότερος του μισού κυλίνδρου κατά την επιφάνεια και το σταθερό σχήμα.



Η βάση του κυλίνδρου θα γίνει γνωστή από τη διάμετρο και το ¼ της περιμέτρου, όπως ειπώθηκε παραπάνω. Επειδή δόθηκε και η διάμετρος 28, η περίμετρος είναι 88 · πολλαπλασιάζοντας τα 28 επί τα 22 έχουμε το εμβαδόν της βάσης κυλίνδρου 616· και η βάση του κύβου είναι 784· υπάρχει λοιπόν η βάση του κύβου προς τη βάση του κυλίνδρου σε αναλογία 14 προς 11.

...με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και οι 4 επιφάνειες, που φέρονται ως βάση του κύβου, θα λάβουν χώρα προς την επιφάνεια του κυλίνδρου, αλλά και τα επίπεδα πάλι του κύβου προς την επιφάνεια του κυλίνδρου και στα επίπεδα των βάσεων, και το άκαμπτο σχήμα προς το άκαμπτο (στέρεο) · οι βάσεις του κύβου γίνονται οι τέσσερις πλευρές επί τις 28 του ύψους 3136· και οι 88 της περιμέτρου της βάσεως του κυλίνδρου επί του 28 ύψους, γίνονται 2464· και υπάρχουν μ' αυτό το λόγο.

Με τον ίδιο τρόπο και τα επίπεδα του κύβου, που έγιναν 4704, προς την επιφάνεια του κυλίνδρου μαζί με τις βάσεις που είναι κοντά στην έδρα αθροίστηκαν 3696.

Με τον ίδιο τρόπο και το άκαμπτο τμήμα του κύβου, από το σημείο του επιπέδου της βάσεως που είναι ίσο με 784 επί του ύψους 28, βρίσκεται 21952, προς το γινόμενο του κυλίνδρου 17248· ώστε γι' αυτό το λόγο να εξετάζουμε τον κύβο σε σχέση με τον ισοϋψή εγγραφόμενο σ' αυτόν κύλινδρο.

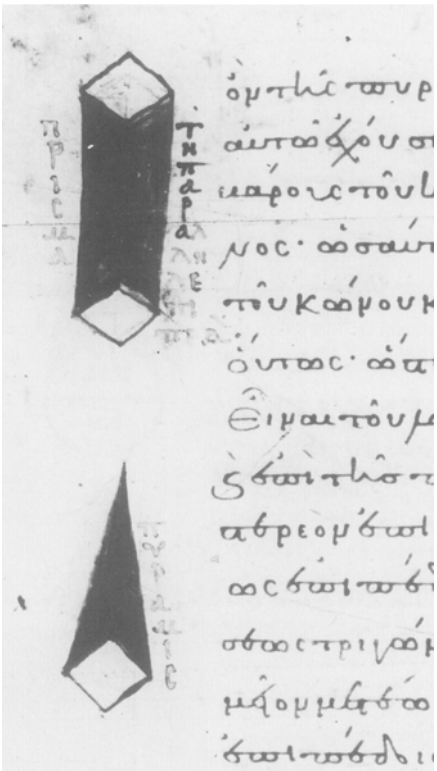
Η επιφάνεια του κυλίνδρου που υπάρχει μαζί με τα επίπεδα των βάσεων ισούται με 3696 και το στέρεο /άκαμπτο σχήμα είναι ίσο με 17248·

θα αποδειχθεί και η επιφάνεια της σφαίρας, η οποία είναι 2464 από τα 88 της περιμέτρου του μεγαλύτερου κύκλου που διαγράφεται σ' αυτήν και του ύψους του άξονα των 28· το στέρεο αυτής από τη βάση του μεγαλύτερου κύκλου των 616 επί το διαιρεμένο του άξονα στα δύο (182/3) να γίνεται 11498.

Και υπάρχει η επιφάνεια προς την επιφάνεια, και το στέρεο προς το στέρεο, όπως προαναφέρθηκε, εν λόγω του διαιρεμένου άξονα· ώστε βρίσκεται η σφαίρα, που βρίσκεται στον ισοϋψή κύλινδρο να είναι διαιρεμένη δύο φορές σε τρία σημεία. Κάθε λοιπόν επιφάνεια της σφαίρας είναι τετραπλάσια του εμβαδού του μεγαλύτερου κύκλου που διαγράφεται σ' αυτήν, όσο για την περίμετρο το ίδιο πολλαπλάσια, όσο για τον άξονα που βρίσκεται σ' αυτήν είναι κατά μήκος της· τα 2464 είναι τετραπλάσια των 616 και 28 φορές των 88.

Είναι βέβαια και κάθε σφαίρα τετραπλάσια του κώνου, ο οποίος έχει ως βάση κύκλο μεγαλύτερο της σφαίρας και ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας. Κι επειδή η πε-

ρίμετρος του κώνου που είναι ίση με 88, είναι η μισή του άξονα σε σχέση με το ύψος της (14 οργιές από το κέντρο), δημιουργεί την 1232. Και οι 616 οργιές του εμβαδού της βάσης επί των 14 της περιμέτρου που είναι μισή του άξονα, δημιουργούν τις 8624· Ώστε το ημισφαίριο, κατά την επιφάνεια και το στερεό σχήμα, βρίσκεται να είναι ίσο με τους μισούς κώνους, ενώ η σφαίρα με το ¼.



Ο κώνος είναι ένα σταθερό σχήμα, ο οποίος δημιουργείται από μια κυκλική βάση προς ένα μετέωρο σημείο.

Κατά τον Ευκλείδη βέβαια, «όταν, σε μία από τις σταθερές πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου γύρω από την ορθή γωνία, αφού περιέχει το τρίγωνο σ' αυτό, πάλι αποκαθίστατο εκεί απ' όπου άρχισε να υπάρχει, το σχήμα το οποίο περιελάμβανε ονομάζεται κώνος· κι αν η σταθερή ευθεία είναι ίση με (την υπόλοιπη) αυτήν που περιφέρεται γύρω από την ορθή γωνία, ο κώνος είναι ορθογώνιος· εάν είναι μικρότερη, ο κώνος είναι αμβλυγώνιος· εάν μεγαλύτερη, ο κώνος είναι οξυγώνιος». «Άξονας του κώνου είναι η σταθερή ευθεία, η οποία στρέφεται γύρω από το τρίγωνο». «Βάση του κώνου είναι ο κύκλος που σχηματίζεται γύρω από το τρίγωνο».

Κάθε κύλινδρος μπορεί να υπολογιστεί ότι είναι τριπλάσιος από τον κώνο, ο οποίος έχει την ίδια βάση μ' αυτόν και το ίδιο ύψος. Επειδή η επιφάνεια του κυλίνδρου είναι ίση με 2464, το δε στερεό μέρος ίσο με (η δε επιφάνεια του κώνου, από την περίμετρο των 88 και των 9 (1/3 του άξονα), είναι ίση με 821(1/4) και από τα 616 το εμβαδού της βάσεως πολλαπλασιαζόμενα με το 1/3 του άξονα, υπολογίζεται και το τρίτον του στερεού σχήματος να είναι ίσο με 5749 (1/3), και σε σχέση με τα άλλα για τα οποία γίνεται λόγος είναι τριπλάσιο· άρα, έχει αποδειχθεί ότι ο κώνος είναι το 1/3 του ισοϋψούς κυλίνδρου.

Τριπλάσιο είναι και το παραλληλεπίπεδο πρίσμα, το οποίο υπολογίζεται να έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με την πυραμίδα.

Κι εκεί που διχοτομείται ο άξονας, βρίσκεται το κέντρο βάρος του κυλίνδρου· με τον ίδιο ακριβώς τρόπο βρίσκεται και του πρίσματος. Και το κέντρο βάρους του κώνου βρίσκεται στο ίδιο σημείο του άξονα που τον διαιρεί έτσι, ώστε το τμήμα του άξονα που βρίσκεται στην κορυφή να είναι τριπλάσιο με το υπόλοιπο· άρα, αυτός ο τρόπος διαίρεσης του άξονα μπορεί να γίνει και στην πυραμίδα.

«Η πυραμίδα είναι ένα στέρεο σχήμα που περιλαμβάνει επίπεδα, το οποίο σχήμα δημιουργείται ενώνοντας το επίπεδο της βάσεως προς ένα σημείο, ή ενώνοντας το ε-

πίπεδο της βάσεως του τριγώνου ή του τετραγώνου ή του πολυγώνου προς ένα μετέωρο σημείο». «Πρίσμα είναι το στέρεο σχήμα που περιέχει επίπεδα, από τα οποία τα δύο απέναντι είναι και ίσα και όμοια και παράλληλα, και τα υπόλοιπα είναι παραλληλόγραμμα».

θ) Υπολογισμός του όγκου μιας δεξαμενής νερού. Αναφέρεται στην αρχή η δεξαμενή του Αέτιου στην Κωνσταντινούπολη αλλά οι υπολογισμοί γίνονται για τη δεξαμενή του Άσπαρου, που έχει κανονικό σχήμα.

Έστω λοιπόν παραλληλόγραμμο και με διαφορετικές διαστάσεις οικοδόμημα, ή δεξαμενή με ίδιο σχήμα, όπως η δεξαμενή του Αέτιου, που πρέπει να μετρήσουμε τον όγκο της. Πιο εύκολο είναι να γίνει ο υπολογισμός της δεξαμενής του Άσπαρου, καθώς οι διαστάσεις γύρω από τις βάσεις είναι ίσες μεταξύ τους και το σχήμα για το οποίο μιλάμε είναι φτιαγμένο από τούβλα (πλίνθους). Το τούβλο είναι ένα στερεό σχήμα, το οποίο περιέχει έξι επίπεδα, έχει το μήκος και το πλάτος της βάσεως ίσα μεταξύ τους, μικρότερο όμως το ύψος· Εάν ήταν και το ύψος ίσο, θα ήταν κύβος, αν ήταν μεγαλύτερο θα σχηματιζόταν δοκάρι/ ράβδος· δοκάρι είναι αυτό το στερεό σχήμα που έχει το ύψος του μεγαλύτερο από το πλάτος και το μήκος της βάσεως.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι η βάση κατά μήκος της δεξαμενής του Άσπαρου είναι 70 οργιών (άρα και το πλάτος είναι ίσο 70 με οργιές) και ύψος 12 οργιές. Ζητώ λοιπόν να βρω πόσες οργιές είναι το στέρεο μέρος της δεξαμενής και με πόσα πήλινα πιθάρια ύδατος μεταφράζεται η χωρητικότητας της. Πολλαπλασιάζοντας το μήκος 70 οργιών επί το πλάτος 70 οργιών, βρίσκω το επίπεδο της βάσης ίσο με 4900 οργιές. Αυτές πάλι τις πολλαπλασιάζω με το ύψος 12 οργιών και μου δίνουν 58800 οργιές.

Κι επειδή τα μήκη είναι 4πλάσια και 16πλάσια δύναμη, το δε στέρεο μέρος 64πλάσια δύναμη, υπολογίζεται κατά το μήκος των δακτύλων 96 οργιές, ο πήχης 24 οργιές, άρα είναι τετραπλάσια κατά το μήκος του πήχη, και το μήκος του πήχη της βάσεως είναι ίσο με 280 οργιές. Από αυτά υπολογίζεται το επίπεδο ίσο με 78400 οργιές πολλαπλασιάζοντας τις 16 οργιές με τις 4900 έχουμε 78400 οργιές από αυτά πάλι το στέρεο μέρος υπολογίζεται 3763200 με τον ίδιο τρόπο, αν πολλαπλασιάσω τις 58800 χιλιάδες οργιές με το 64 ....

Κι επειδή τα μήκη φαίνονται να είναι 6πλάσια και 36πλάσια δύναμη, στο στερεό 216πλάσια θα γίνουν· γιατί υπάρχει και το κάτω μέρος του ποδιού ίσο με έξι οργιές· απ' όπου πάλι το μήκος των ποδιών στη βάση γίνεται 420· το δε επίπεδο μέρος ίσο με 176400· και όλο το στέρεο μέρος 12700800 πόδια· Και 36 επί 4900 δίνουν 176400· και 216 επί 58800 ίσο με 12700800.

Κι επειδή το σταθερό πόδι, κατά τη διατύπωση των μηχανικών, υψωμένο στον κύβο, από τα υπόλοιπα 16 του μήκους δάκτυλα, υπολογίζεται 4096, και τα άλλα 16· το καθένα παίρνει 4 ουγκιές νερού, 51 δάχτυλους και 1/5 ουγκιές (51 1/5) και περιέχουν

12 ιταλικά λίτρα· οι 256 δάχτυλοι του επιπέδου περιέχουν 5 λίτρα, και οι 4096 δάχτυλοι του στέρεου επιπέδου 80 λίτρα. Άρα, υπολογίζεται ότι το σταθερό πόδι έχει χωρητικότητα 80 λίτρων, με μέτρο χωρητικότητας τα ιταλικά λίτρα των πήλινων. Επομένως, όσα στερεά πόδια αριθμηθεί ότι είναι η δεξαμενή, τόσο (δηλαδή 80) νερό χωράει. Με τον ίδιο τρόπο εξετάζοντας ένα τυχαίο μέρος/ σημείο του βάθους, θα υπολογίσουμε τον όγκο του νερού.

Έχοντας τον κύλινδρο, το εμβαδόν του κύκλου, όπως προείπαμε, να υπολογίσουμε, και τα πόδια που βρίσκονται στη βάση τα πολλαπλασιάζουμε με το ύψος· το γινόμενο που προκύπτει, σε δεξαμενή, φαίνεται ότι αποτελεί τον όγκο του νερού.

Σε ίδιου σχήματος οίκημα, χωριστά από τον αέτωμα του πάνω μέρους, να αριθμηθούν το σιτάρι, το κριθάρι, τα όσπρια και όλα όσα από τα είδη που δίνονταν σε ορισμένη ποσότητα μεδίμνων, μοδίων και χοινικών και θεωρούνται ευτελέστερα ακόμα και από τα μέρη, ως προς το βάρος και το μέγεθος, εξετάζοντας τα με προσοχή με βάση το κατασκευασμένο σταθερό πόδι.

ι) Υπολογισμός της παροχής νερού μιας πηγής. Αντιγράφεται το αντίστοιχο πρόβλημα και η λύση του από τη Διόπτρα του Ήρωνα.

Θα μάθουμε και την εκροή της πηγής σύμφωνα με τον Ήρωνα. Αλλά πρέπει να μάθουμε πρώτα ότι αυτή δεν αναβλύζει για πάντα· γιατί με τη βροχή αυξάνεται και όταν υπάρχει ξηρασία, σταματάει. Οι μεγάλες πηγές δεν έχουν πολύ μεγάλη δύναμη κατά την ανάβλυση. Πρέπει λοιπόν, αφού θεωρήσουμε υπόψη μας ότι όλο το νερό της πηγής, δεν αναβλύζει από κάπου, να φτιάξουμε ένα τετράγωνο μολύβδινο σωλήνα της εκροής κατά την αποδοχή πολλών, και να τον τοποθετήσουμε σε έναν τόπο, ώστε να βγαίνει απ' αυτόν το νερό της πηγής. Πρέπει ο σωλήνας να τοποθετηθεί σε χαμηλότερο μέρος από την πηγή, για να είναι πιο εύκολη η εκροή· τον χαμηλότερο τόπο θα τον μάθουμε μέσω της διόπτρας. Το νερό θα φανεί στο περιστόμιο του σωλήνα ως προς το ύψος. Έστω λοιπόν ότι το ύψος είναι τριών δακτύλων· το στόμιο έχει πλάτος έξι δακτύλων 3x6=18. Άρα, βρίσκουμε ότι η ανάβλυση της πηγής είναι 18 δακτύλων.

Αλλά πρέπει να ξέρουμε ότι δεν είναι αρκετό πόσο νερό χορηγεί η πηγή, να βρίσκουμε τον όγκο της ρύσεως αλλά και την ταχύτητα· επειδή όταν είναι γρηγορότερη της εκροής, δίνεται περισσότερο νερό, όταν είναι αργότερη δίνεται λιγότερο νερό. Απ' αυτό πρέπει, αφού ανοίξουμε λάκκο/ χαντάκι κάτω από την εκροή της πηγής, να τηρήσουμε το ηλιακό ωροσκόπιο και να υπολογίσουμε πόσο νερό εκρέει κατά τη διάρκεια όλης της ημέρας και να υπολογίσουμε τον όγκο του. Ώστε, δεν είναι αναγκαίο να προσπαθούμε να αποκαλύψουμε τον όγκο της εκροής (αλλά και την ταχύτητα). Μέσω της μιας ώρας θα μπορούμε να υπολογίσουμε και την ημερήσια χορηγία του νερού.

Εάν, κάθε χρόνος αποτελείται από 360 μέρες, και 24 ώρες κάθε μέρα, οι 24 ώρες της ημέρας θα αντιστοιχούν 15 φορές ως προς τις 360 μέρες του χρόνου πότε περισσότερες πότε λιγότερες, ανάλογα με τις καιρικές συνθήκες. Κι επειδή, κατά το χειμώνα, η εκροή είναι πολύ περισσότερη, το καλοκαίρι λιγότερη, και εάν πάλι κάποια τυχαία στιγμή που το νερό κυλάει στο χαντάκι είναι ίσο με 20 θα έχουμε στο μυαλό μας τυχόν αγγεία/ πιθάρια, άρα η νυχθημερόν χορηγία (νερού) της πηγής θα είναι 480.

ια) Ακολουθώντας τη δομή της πραγματείας *Περί Διόπτρας* του Ήρωνα, ο ανώνυμος βυζαντινός συγγραφέας αναφέρεται στη μέτρηση της γωνιακής απόστασης μεταξύ δύο αστέρων, ως παράδειγμα χρήσης της διόπτρας για αστρονομικούς σκοπούς:

Επειδή λοιπόν περιήλθαμε στις χρησιμότητες της διόπτρας στη γη, λόγω της ευχαρίστησης που παίρνουμε από τη χρησιμότητα της είμαστε ικανοί να αναχθούμε σε θεωρία των ουράνιων σωμάτων αναφορικά με τη γη, υπολογίζοντας το μέγεθος του ήλιου και της σελήνης μέσω αυτής, τις αστρικές αποστάσεις, σταθερούς (απλανείς) πλανήτες να επισκεφθούμε από σταθερούς, και ασταθείς από σταθερούς.

Από την καταγραφή στο τύμπανο των 360 μοιρών και των διαγραφόμενων λεπτών θα μπορέσουμε να μάθουμε τα ζητούμενα μεγέθη. Όταν λοιπόν θελήσουμε να υπολογίσουμε την απόσταση μεταξύ δύο αστεριών, πόσων μοιρών δηλαδή είναι, στρέφουμε το τύμπανο που κοιτάει προς το μέρος μας, στρέφοντας το άλλο μέρος προς τα πάνω, μέχρις ότου να υπολογίσουμε τις θέσεις των αστεριών μέσω αυτού του επιπέδου που δημιουργείται· και μένοντας όλα τα ακίνητα πάνω στη διόπτρα, θα περιστρέψουμε τον χάρακα γύρω από το τύμπανο, μέχρις ότου να δούμε τα αστέρια μέσα από τις δύο οπές του χάρακα. Και αφού υπολογίσουμε τη μοίρα ή το λεπτό, προς το σημείο που το μοιρογνωμόνιο υπάρχει, θα περιστρέψουμε αμέσως το χάρακα, μέχρις ότου μέσω των δύο οπών εξετάσουμε και τον άλλον, και υπολογίσουμε τις μοίρες με τον ίδιο τρόπο σύμφωνα με το μοιρογνωμόνιο· κι αφού μετρήσουμε πάνω στο τύμπανο τις μοίρες μεταξύ των σημείων, θα υπολογίσουμε και τα διαστήματα των αστεριών.

Και αφού παρατηρήσουμε το ζωδιακό τόπο των αστεριών, <u>αν μεν</u> κατά το μήκος με τα προηγούμενα, από ανατολικά προς τα δυτικά, περιστρέφοντας το χάρακα στο τύμπανο, τον παρατηρούμε στα δεξιά· <u>αν δε</u> προς τα επόμενα, από τα δυτικά ως τη μέση του ουρανού, ή το ωροσκόπιο, τον παρατηρούμε γύρω από τα ευοίωνα. Αυτά που εξουσιάζουν είναι τα ζώδια από τον Κριό μέχρι του Ιχθείς, Υδροχόο, Αιγόκερω, Τοξότη και τα υπόλοιπα· ακολουθούν τα ζώδια από τον Κριό μέχρι Ταύρο, Διδύμους, Καρκίνο και τα υπόλοιπα.

Κι αν υπολογίσουμε την απόσταση κατά μήκος του ζωδιακού κύκλου, δεν θα παρατηρήσουμε τυχαία, αλλά τοποθετώντας τη διόπτρα παράλληλα με τη γραμμή του ισημερινού· εάν θέλουμε να μάθουμε την κατά πλάτος απόσταση, από το βορρά ως το νότο και το αντίθετο, θα την τοποθετήσουμε παράλληλα με τη γραμμή του μεσημβρι-

νού. Αυτές οι γραμμές στο συγγενικό βασιλικό παλάτι του Βουκολέοντα προς το νότο έτυχε να χαρακτούν από εμάς στους "πράσινους κοσμητάριους"· την εύρεση αυτών καταγράψαμε στο ηλιακό ωροσκόπια.

Αν όμως θέλουμε, στο ημισφαίριο πάνω στη γη, προς ανατολικά ή δυτικά, να σημειώσουμε τα σημεία και τα τροπικά και τα ισημερινά και τα μεταξύ αυτών μηνιαία, τοποθετώντας της διόπτρα παράλληλα με τη γραμμή μέσω των δύο οπών προς ανατολή και δύση, αποδεικνύουμε αυτά κάθετα στον δικό μας ορίζοντα· εκεί ο ήλιος, όταν δημιουργείται η διαίρεση στην πρώτη του Κριού ή του Ζυγού, δημιουργείται εαρινή και μεσοπωρινή ισημερία. Κι επειδή τοποθετείται το τύμπανο παράλληλα με τον ορίζοντα, αφού μετρήσουμε από τη θέση του μοιρογνωμονίου προς τα βόρεια 32 μοίρες, και τρέψω τον χάρακα προς αυτές, θα μάθω τα θερινά ηλιοστάσια· Επειδή εκεί βρίσκεται ο ήλιος, αφού γίνει στην πρώτη του Καρκίνου η διαίρεση, δημιουργείται το θερινό ηλιοστάσιο. Τα μεταξύ μηνιαία σημεία από τον ισημερινό δια δεκαέξι και 28 μοίρες θα βρούμε, και αντίθετα από τον ισημερινό προς τα νότια τις ίδιες μοίρες θα μετρήσουμε, και φέρνοντας τον χάρακα προς αυτές, και τα χειμερινά ηλιοστάσια και τα μεταξύ τους μηνιαία θα μπορέσουμε να δούμε. Κι εκεί ανατέλλουν και δύουν μέσω των 180 μοιρών τα ζώδια που είναι διαγώνια με τον ορίζοντα. Ανατέλλοντας ο Καρκίνος δύει ο Αιγόκερως, δύοντας ο Υδροχόος ανατέλλει ο Λέων.

Ήθελα να υπολογίσω πόσες μοίρες απέχουν από τα ζώδια ο Λαμπρός των Υάδων, ο Λαμπαύρας, που βρίσκεται επί της Καρδίας του Λέοντος, που ονομάζεται Βασιλίσκου. Και αφού παρατήρησα στις 2:00 το βράδυ προς την ανατολή και, όπως φάνηκε, παίρνοντας τον επί της Καρδίας του Λέοντος, σημειώσαμε την τροπή στο τύμπανο, όπου έδειχνε το ίδιο το μοιρογνωμόνιο· και αφού έστρεψα στα πρώτα τον χάρακα, υπολόγισα τον Λαμπαύρα σε σχέση με τον Ταύρο, σημειώνοντας και την τροπή που έγινε προς αυτόν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο· κι αφού μέτρησα με το τύμπανο τις μοίρες /τροπές μεταξύ των σημείων, βρήκα τις 80° πλησιέστερες· όσες δηλ. απέχουν και τα αστέρια μεταξύ τους. Ο Βασιλίσκος, από την εποχή του Πτολεμαίου, βρέθηκε να απέχει 10° και ½ από τον Λέοντα· και ο Λαμπρός των Υάδων 20° και 2/3 από τον Ταύρο. Αφού μέτρησα και τις 10° και ½ σε σχέση με τις πρώτους αστέρες, ο Καρκίνος βρέθηκε να απέχει από τους Διδύμους 30°, και σε σχέση με τον Ταύρο 9° και 1/3, τους βρήκα να απέχουν 80°. Με τον ίδιο τρόπο και με τα επόμενα, όπως με τον Ταύρο σε σχέση με τον Λέων. Και αφού παρατήρησα το βράδυ από το σημείο της Καρδίας του Λέοντα, και τα επόμενα, τον Αρκτούρον τον αποκαλούμενο και Βοώτη, και τον Ζυγό, βρισκόμενες αυτός βορειότερα από τον ισημερινό 31 μοίρες, παρατηρήσαμε και βρήκαμε τα πλησιέστερα αστέρια στις 54°· όσες απέχει και ο Αρκτούρος από τον Βασιλίσκο. Γιατί ο Αρκτούρος απέχει 5° από τον Ζυγό· και του Λέοντα η απόσταση από τα επόμενα είναι ίση με 19° και ½ , με την Παρθένο 30°, και 5° με τον Ζυγό· και αριθμήθηκαν όσες βρίσκονταν κοντά στο τύμπανο.

Ο ίδιος, άραγε, τρόπος και στα υπόλοιπα σταθερά όντα του πρώτου και δεύτερου μεγέθους θα ισχύει, και τους 5 πλανήτες. Την απόσταση της σελήνης, όχι μόνο σε σχέ-

ση με τους πλανήτες και τους φανερά σταθερούς, πρέπει να εξετάσουμε σε σχέση με αυτούς τους πλανήτες που έχουν αποκτήσει την ίδια ή και την αντίθετη θερμοκρασία ατμόσφαιρας, αλλά και σε σχέση με τα λεγόμενα συστήματα τα νεφελοειδή (σκοτάδι), γύρω από την Φάτνη, ή τον Πλόκαμο, ή τα συστήματα στον διαιρεμένο Ταύρο, τα αποκαλούμενα Πλειάδες, ή τα συστήματα των Κεράτων με το σχήμα του Υστοιχείου και βροχών και καταιγίδων. Πρέπει να επιτηρούμε περισσότερο την σελήνη, και για ποιες ο ήλιος περνάει σε 7 φάσεις, ή ότι αυτούς πλησιάζει, ή ότι σχηματίζονται τα αστέρια προς αυτήν τη σελήνη σε απόσταση μοιρών, ή ότι δημιουργούνται διαδοχικές φάσεις σε σχέση με τον ήλιο. Αυτά λοιπόν σχετικά με όσους ασχολούνται με τη διόπτρα και τα φαινόμενα, λαμβάνοντας υπόψη τις εποχές στα πρόχειρα. Με βάση τα παραπάνω όχι μόνο υπολογίζουν τις αποστάσεις των αστεριών, αλλά και τη διάθεση και τις ανωμαλίες του αέρα, δηλαδή την καλή ή την κακή θερμοκρασία, έχοντας υπόψη και τα ετήσια εμβλήματα των αστέρων.

Επίλογος

Τα κείμενα του Ήρωνα του Βυζαντινού δείχνουν ότι οι γνώσεις της ελληνιστικής Αλεξάνδρειας δεν χάθηκαν αλλά μεταβιβάσθηκαν στην Βυζαντινή Κωνσταντινούπολη και από κει, μέσω των Αράβων ή απευθείας από τους Βυζαντινούς μέσω της Ιταλίας, πέρασαν στην Ευρώπη. Η πορεία αυτή δίνει το δικαίωμα στους Έλληνες να καυχώνται ως οι δημιουργοί πολλών επιτευγμάτων τα οποία είναι άξια θαυμασμού από τον σύγχρονο επιστημονικό κόσμο και τα οποία αποτέλεσαν τη βάση του σύγχρονου πολιτισμού.

Παράρτημα.

Τα μέτρα μήκους και όγκου από τα κείμενα του Ήρωνα του Βυζάντιου

Τα μέτρα μήκους που αναφέρονται στα κείμενα του Ήρωνα του Βυζάντιου είναι ο δάκτυλος, ο πους, ο πήχυς και η οργυιά, το στάδιον, ο παλαιστής και η σπιθαμή.

δάκτυλος	=			= 0,019675 μ.
παλαιστή	=	4	δάκτυλοι	= 0.0787 μ.
(σ)πιθαμή	=	12	»	= 0,2361 μ.
πους (ή ιχνάρι)	=	16	»	= 0,3148 μ.
πήχυς	=	24	»	= 0,4722 μ.
οργιά	=	6	πόδες	= 1,8888 μ.
στάδιον	=	600	»	= 188,88 μ.

Στη Γεωδαισία, στον υπολογισμό του όγκου της δεξαμενής του Άσπαρου (πρόβλημα θ) σχολιάζει τις μονάδες όγκου κυβικός πους, κυβική οργιά, λίτρα, ουγγιά (1/12 λίτρου) μέδιμνος, μόδης (40 λίτρα), χοινίκιον (1 3/12 του μοδίου=10 λίτρα).

Βιβλιογραφία

Dain, A. (1933): *La Tradition du Texte D' Heron de Byzance*. Société d' Edition «Les Belles Lettres».

Κουκουλές, Φ. (1952): *Βυζαντινών βίος και πολιτισμός*. Εκδόσεις Παπαζήση.

Krumbacher, K. (1900): *Ιστορία της Βυζαντινής Λογοτεχνίας*. Εκδόσεις Β. Ν. Γρηγοριάδης.

Lewis, M. J. T. (2001): *Surveying Instruments of Greece and Rome*. Cambridge University Press.

Μπαντέκας, Ιωάννης (1985): Μετρικά συστήματα. *Εφαρμογές διαγραμμάτων και τίτλοι ακινήτων*, πρακτικά συνεδρίου ΣΑΤΜΒΕ

Ρωσσικόπουλος, Δ. (2005): *Μέτρον Γεωμετρικόν. Η ιστορία των επιστημών της αποτύπωσης*. Εκδόσεις Ζήτη (υπό έκδοση).

Schilbach, E. (1982): *Byzantinische Metrologische Quellen*. Κέντρο βυζαντινών μελετών Θεσσαλονίκης.

Sullivan, D. (2000): *Siegecraft. Two tenth- century Instructional Manuals by «Heron of Byzantium»*. Dumbarton Oaks Research Library and Collection, Washington, D.C.

Vincent, A. (1858): *Extraits des Manuscripts Relatifs A la Géométrie Pratique des Grecs*. Notices et extraits de la Bibliothéque impériale, xix, pt. 2, Paris.

Vogel, K. (1967): Byzantine Science. In *Cambridge Medieval History*, Vol. IV, Part II. Cambridge University Press.